Cálculo I

Funciones

Jesús Medina

Índice general

Capítulo 1

Definición y operaciones

Idea intuitiva

Antes de entrar en definiciones rigurosas, es útil comenzar con una idea que seguramente ya has escuchado:

> Una **función** es como una **máquina abstracta**: introduces un número (o cualquier objeto permitido), la máquina lo procesa siguiendo una regla, y te devuelve otro número (u objeto) como resultado.

Esta imagen es poderosa: nos da una forma concreta de imaginar lo que hace una función. Si metes un 3 en la máquina que representa la función $f(x) = x^2 + 1$, obtendrás 10 como salida. Es decir, la función ha tomado un número, lo ha transformado según una regla fija, y ha devuelto otro número.

Sin embargo, esta metáfora tiene sus límites. A medida que avancemos en el estudio de las matemáticas, necesitaremos una definición más precisa que nos permita:

- Trabajar con funciones cuyos ”ingredientes”no son necesariamente números.
- Razonar con claridad sobre cuándo una función está bien definida.
- Formalizar ideas para poder demostrar propiedades rigurosamente.

De la intuición a la formalización

Incluso en nuestra idea inicial de ”máquina”, ya tenemos presente una idea importante: una función **asocia** elementos x de un conjunto (entrada) A con elementos $f(x)$ de otro conjunto (salida) B.

Esta asociación puede representarse como un conjunto de **pares ordenados** $(x, f(x)) \in A \times B$.

En otros cursos, tal vez hayas visto que cualquier subconjunto del **producto cartesiano** $A \times B$ se llama una **relación** entre A y B. Desde esta perspectiva, una función no es más que un tipo especial de relación: aquella en la que cada elemento del conjunto de partida se relaciona con **uno y solo uno** del conjunto de llegada.

Definición formal de función

Con ello ya podemos dar una definición formal de función.

Definición 1.3.1: Función

Sean A y B dos conjuntos. Una **función** f de A en B (denotada como $f : A \to B$) es una relación que cumple lo siguiente:

- Para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f \subseteq A \times B$.

Observación 1.3.1

Si tenemos una función $f : A \to B$, entonces diremos que:

- A es el **dominio de** f.
- B es el **codominio de** f.

Otra manera de expresar que una función asocia a cada elemento de A un único elemento de B es la siguiente:

Si $a \in A$ y (a, b_1), $(a, b_2) \in f$, entonces necesariamente $b_1 = b_2$.

Esta condición nos dice que no puede haber dos pares diferentes en f que compartan la misma primera componente y tengan distintas segundas componentes. Dicho de otro modo, no puede ocurrir que un mismo a esté relacionado con dos valores distintos en B.

Ejemplo 1.3.1 Asignación de sillas a mesas

Supongamos que en una cafetería hay tres mesas numeradas: $M = \{1, 2, 3\}$, y cada mesa tiene exactamente una silla asignada para evitar desorden. El conjunto de sillas es $S = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$, y la asignación es:

$$f = \{(1, \mathrm{A}),\ (2, \mathrm{B}),\ (3, \mathrm{C})\}$$

Entonces, $f : M \to S$ es una función, ya que cada mesa tiene asignada exactamente una silla.

Ejemplo 1.3.2 Asignación de alumnos a tutores

Sea el conjunto A de estudiantes $\{a_1, a_2, a_3\}$ y el conjunto T de tutores $\{t_1, t_2\}$. Supongamos que cada alumno tiene asignado un único tutor:

$$f = \{(a_1, t_1),\ (a_2, t_2),\ (a_3, t_2)\}$$

Entonces, $f : A \to T$ es una función. Aunque dos estudiantes comparten el mismo tutor, cada estudiante tiene un solo tutor, lo que respeta la unicidad.

Ejemplo 1.3.3 Una relación que no es función

Sea el conjunto de palabras $W = \{\text{sol}, \text{nube}, \text{lluvia}\}$, y consideremos la relación $f : W \to \mathbb{N}$ definida por:

$$f = \{(\text{sol}, 3),\ (\text{sol}, 4),\ (\text{lluvia}, 6)\}$$

Esta relación asocia palabras con números, representando supuestamente la cantidad de letras en cada palabra. Sin embargo, observamos que el elemento $\text{sol} \in W$ está asociado tanto con 3 como con 4.

Entonces, la relación f **no** es una función. Recordemos que, para ser función, cada elemento del conjunto de partida debe estar asociado con **un único** elemento del conjunto de llegada.

Regla de correspondencia

Hasta ahora, no hemos exigido que una función $f : A \to B$ tenga necesariamente una expresión o fórmula explícita, como las típicas $f(a) = a^2 + 1$. Y, de hecho, esto no es obligatorio: una función puede definirse simplemente como un conjunto de pares ordenados que cumplen las condiciones mencionadas anteriormente, sin necesidad de tener una "regla algebraica" clara.

Sin embargo, en este curso trabajaremos principalmente con funciones reales del tipo
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en las que sí será útil —y muchas veces necesario— contar con una expresión que nos indique cómo se asocia cada valor de entrada con su correspondiente valor de salida.

A esa expresión se le conoce como una **regla de correspondencia**, y suele escribirse como una fórmula que indica el valor de $f(x)$ en función de x. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

Esta fórmula nos indica que a cada número real x le corresponde el número $x^2 + 2x + 1$. Así, la función queda completamente determinada por dicha regla, siempre que se especifique también el dominio sobre el cual se aplica.

Ejemplo 1.4.1 Función definida por una regla de correspondencia

Sea la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia está dada por:

$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

Esta función asocia a cada número real distinto de cero el valor obtenido al dividir 2 entre el cuadrado de dicho número. Por ejemplo:

$$f(1) = \frac{2}{1^2} = 2, \quad f(2) = \frac{2}{4} = 0{,}5, \quad f(-1) = \frac{2}{1} = 2$$

Nótese que $x = 0$ no pertenece al dominio, ya que la división entre cero no está definida. El dominio explícito de esta función es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, mientras que su codominio es $\mathbb{R}$ (aunque, en realidad, la imagen de f está contenida en los reales positivos).

Conjunto imagen y codominio

Una vez entendido que una función es una regla que asocia elementos de un conjunto A (dominio) con elementos de un conjunto B, es importante distinguir dos conceptos que a menudo se confunden: el **codominio** y la **imagen**.

El **codominio** de una función $f : A \to B$ es el conjunto B que se declara como conjunto de llegada. Es decir, es el conjunto de todos los posibles valores de salida que la función podría tomar según su definición, aunque no todos se alcancen realmente.

Por otro lado, la **imagen** de la función (también conocida como conjunto imagen o rango) está compuesta por los valores de salida que efectivamente se obtienen al aplicar la función a los elementos del dominio. Se define así:

$$\mathrm{Im}(f) = \{\, f(a) \in B \mid a \in A \,\}$$

Ejemplo 1.5.1 Imagen estrictamente contenida en el codominio

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2$$

Aquí, el **codominio** declarado es $\mathbb{R}$ (todos los números reales), pero al observar el comportamiento de la función, notamos que x^2 nunca toma valores negativos. Por lo tanto, la **imagen** de la función es:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

Es decir, la función no recorre todo su codominio, sino solo los números reales no negativos.

Observación 1.5.1

En muchos contextos, el codominio se elige por conveniencia o contexto, mientras que la imagen depende únicamente del comportamiento de la función. Si la imagen coincide con el codominio, decimos que la función es **sobreyectiva**.

Ejemplo 1.5.2 Función lineal

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2x + 1$$

En este caso, el **codominio** declarado es $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todos los números reales.

Al analizar la expresión $2x + 1$, notamos que al variar x en todos los reales, la función puede tomar cualquier valor real. No hay ninguna restricción que limite los valores de salida. Por lo tanto, la **imagen** de f también es $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

En este ejemplo, la imagen coincide con el codominio, lo que significa que f es una función **sobreyectiva**.

Gráfica de una función

Observación 1.6.1

A partir de ahora, trabajaremos únicamente con funciones reales de variable real, es decir, funciones de la forma:

$$f : A \to B \quad \text{donde } A, B \subseteq \mathbb{R}$$

Esto nos permitirá representar sus gráficas en el plano cartesiano y estudiar propiedades como continuidad, crecimiento, simetría, máximos, mínimos, entre otras.

Cuando el dominio y el codominio de una función son subconjuntos de los números reales, es muy común representarla gráficamente en el plano cartesiano.

La **gráfica de una función** $f : A \to B$ es el conjunto de pares ordenados de la forma $(x, f(x))$, donde x recorre todos los elementos del dominio:

$$\text{Gr}(f) = \{\, (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \,\}$$

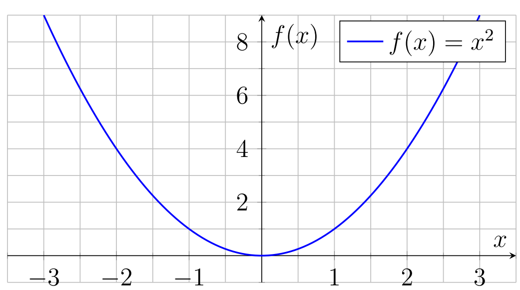
Esta representación visual permite analizar de manera más intuitiva el comportamiento de la función: su crecimiento o decrecimiento, simetrías, máximos y mínimos, continuidad, entre otros aspectos.

Ejemplo 1.6.1 Gráfica de una función cuadrática

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Su gráfica es una parábola que se abre hacia arriba con vértice en el origen:

$$\text{Gr}(f) = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Cada punto sobre esta parábola representa una pareja (x, x^2), es decir, una entrada y su salida correspondiente.



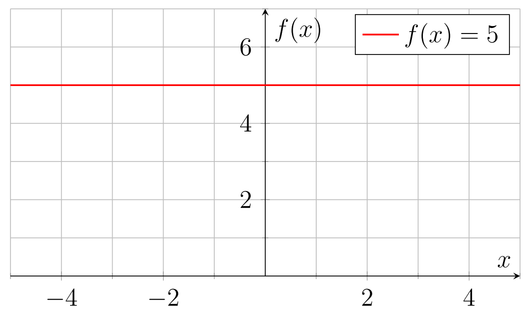
Ejemplo 1.6.2 Función constante

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 5$$

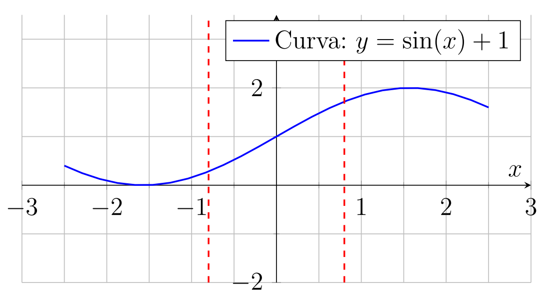
Esta función asigna a cualquier número real el mismo valor: 5. Sin importar el valor que tome x, el resultado siempre será 5.
La **gráfica** de esta función es una línea horizontal ubicada a la altura $y = 5$. Cada punto de la forma $(x, 5)$, con $x \in \mathbb{R}$, pertenece a la gráfica:

$$\mathrm{Gr}(f) = \{\, (x, 5) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$$



Observación 1.6.2 La prueba de la recta vertical

Una curva en el plano representa la gráfica de una función si y solo si pasa la llamada **prueba de la recta vertical**: ninguna recta vertical debe cortar la curva en más de un punto. Esta condición garantiza que a cada valor de entrada x le corresponde un único valor de salida $f(x)$.



En este caso, la curva pasa la prueba, ya que cada recta vertical intersecta la gráfica en un solo punto. Si alguna intersectara en dos o más puntos, entonces no se trataría de una función.

Operaciones con funciones

En este capítulo definiremos las operaciones básicas que podemos realizar con funciones reales y luego la composición de funciones. También incluiremos ejemplos para cada caso.

Definición 1.7.1: Operaciones entre funciones

Sean A y B conjuntos. Sean $f, g : A \to B$ funciones, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Podemos definir nuevas funciones a partir de f y g de la siguiente manera:

- **Suma:**
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo } x \in A,$$
- **Producto por escalar:** Para un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad \text{para todo } x \in A,$$
- **Producto:**
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{para todo } x \in A,$$
- **Cociente:**
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{para todo } x \in A \text{ tal que } g(x) \neq 0,$$

Ejemplo 1.7.1 Suma de funciones

Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x$. Entonces:

$$(f+g)(x) = (x+1) + 2x = 3x + 1,$$

con dominio $D_{f+g} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7.2 Producto por escalar

Para $f(x) = x^2$ y $\alpha = -2$:
$$(\alpha f)(x) = -2x^2,$$
con dominio $D_{\alpha f} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7.3 Producto de funciones

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x - 1$. Entonces:

$$(fg)(x) = x(x-1) = x^2 - x,$$

con dominio $D_{fg} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.7.4 Cociente de funciones

Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1},$$

con dominio

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Composición de funciones

La composición de funciones es otra operación fundamental.

Definición 1.8.1: Composición de funciones

Dadas dos funciones

$$g : A \to B \quad \text{y} \quad f : B \to C,$$

Con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. La composición $f \circ g$ se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

para todo $x \in D_{f \circ g} = \{x \in A \mid g(x) \in B\}$.

Esto quiere decir que para que $(f \circ g)(x)$ esté definido, primero $g(x)$ debe estar definido (es decir, $x \in A$), y luego $f(g(x))$ también debe estar definido (es decir, $g(x) \in B$).

Ejemplo 1.8.1 Composición $f \circ g$

Sean $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 3x$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x + 2,$$

con dominio $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8.2 Composición $g \circ f$

Con las mismas funciones:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2) = 3x + 6,$$

con dominio $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.8.3 Composición con dominio restringido

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 1$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x - 1},$$

con dominio

$$D_{f \circ g} = [1, \infty),$$

porque la raíz cuadrada está definida solo para números no negativos.

Ejemplo 1.8.4 Composición inversa

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces:

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad D_{f \circ g} = [0, \infty),$$

y

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R}.$$

Capítulo 2

Tipos de funciones

En este capítulo presentaremos una clasificación de las funciones basada en la forma en que se relacionan los valores de entrada (dominio) con los valores de salida (codominio). Esta clasificación nos permitirá identificar cuándo una función es **inyectiva**, **sobreyectiva** o **biyectiva**.

Por otro lado, también podemos clasificar funciones según el tipo de expresión o regla de correspondencia que las define. Por ejemplo, una función definida por un polinomio presenta propiedades distintas a las de una función trigonométrica o una función exponencial. Esta distinción será útil más adelante para analizar el comportamiento de diferentes tipos de funciones.

Funciones inyectivas

Comenzaremos con las **funciones inyectivas**, que se caracterizan por *no asociar* nunca *dos elementos distintos del dominio* con *un mismo elemento del codominio*. En otras palabras, una función inyectiva preserva la unicidad: si dos entradas son diferentes, sus salidas también deben serlo.

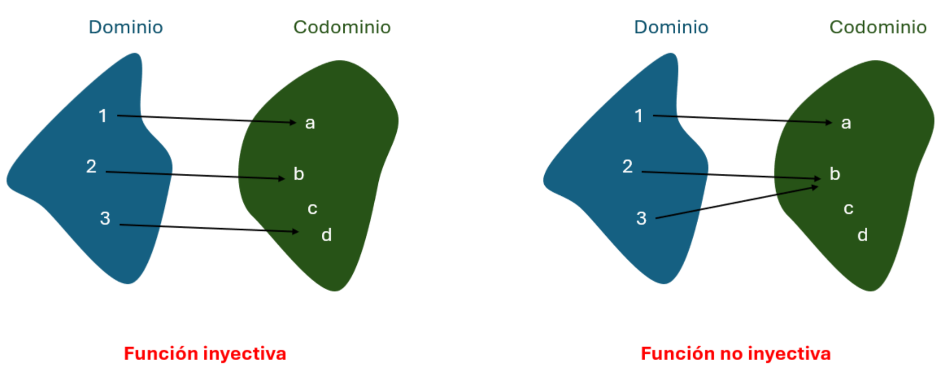


Figura 2.1: La función de la derecha no es inyectiva, ya que asigna el mismo valor b a los elementos 2 y 3 del dominio.

Nos podríamos preguntar: *¿Qué condición matemática garantiza que dos elementos distintos del dominio no se asocien con el mismo valor del codominio?*

Una forma de expresar esta condición es la siguiente: si x_1 y x_2 son elementos distintos del dominio ($x_1 \neq x_2$), entonces deben tener imágenes distintas, es decir, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto nos lleva a una primera definición formal de función inyectiva.

Definición 2.1.1: Funciones inyectivas (versión 1)

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **inyectiva** si y solo si para todo $x_1, x_2 \in A$ se cumple que:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Sin embargo, esta condición también puede expresarse de una forma lógica equivalente, pero a menudo más útil para demostrar propiedades: mediante el contrarrecíproco.

Definición 2.1.2: Funciones inyectivas (versión 2)

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **inyectiva** si y solo si para todo $x_1, x_2 \in A$ se cumple que:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Esta segunda versión es especialmente práctica en demostraciones, ya que a menudo resulta más sencillo trabajar con igualdades que con desigualdades.

Ejemplo 2.1.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Veamos que f no es inyectiva.
Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces:

$$x_1^2 = x_2^2$$

Esto implica que:

$$x_1 = x_2 \quad \text{o} \quad x_1 = -x_2$$

En el primer caso, $x_1 = x_2$, lo cual no contradice la inyectividad. Pero en el segundo caso, $x_1 \neq x_2$, aunque $f(x_1) = f(x_2)$.
Por ejemplo:

$$f(2) = 4 = f(-2), \quad \text{pero} \quad 2 \neq -2$$

Por lo tanto, f no es inyectiva.

Ejemplo 2.1.2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 4$. Veamos que f es inyectiva.
Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces:

$$2x_1 + 4 = 2x_2 + 4$$

Restando 4 en ambos lados:

$$2x_1 = 2x_2$$

Dividiendo entre 2:

$$x_1 = x_2$$

Como de $f(x_1) = f(x_2)$ se deduce que $x_1 = x_2$, se satisface la condición de inyectividad.
Por lo tanto, f es una función inyectiva.

Ejemplo 2.1.3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Veamos que f no es inyectiva.
Utilizando la primera definición de inyectividad, recordemos que una función es inyectiva si $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para mostrar que f no cumple esta condición, basta con un contraejemplo.
Tomemos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Claramente, $x_1 \neq x_2$, pero:

$$f(x_1) = |1| = 1, \quad f(x_2) = |-1| = 1$$

Por lo tanto, $f(x_1) = f(x_2)$ a pesar de que $x_1 \neq x_2$, lo cual contradice la definición de función inyectiva.
Concluimos que $f(x) = |x|$ no es inyectiva.

Funciones sobreyectivas

Hasta ahora, hemos hablado de funciones que no repiten valores en el codominio (inyectivas). Ahora nos preguntamos lo contrario: *¿toda la salida (codominio) está siendo utilizada?* Es decir, ¿para cada valor en el codominio existe al menos una entrada que lo produzca?

Cuando esto ocurre, decimos que la función es **sobreyectiva**. Estas funciones "cubren completamente" el codominio.

Definición 2.2.1: Funciones sobreyectivas

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **sobreyectiva** si y solo si:

$$\text{Para todo } y \in B, \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

En otras palabras, la imagen de la función es todo el codominio: $\mathrm{Im}(f) = B$.

Ejemplo 2.2.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 4$. Veamos que f es sobreyectiva.
Tomemos un $y \in \mathbb{R}$ arbitrario. Si queremos encontrar un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, resolvemos:

$$y = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-4}{2}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, siempre existe una preimagen. Por lo tanto, la función es sobreyectiva.

Ejemplo 2.2.2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta función **no** es sobreyectiva.
Aunque $f(x)$ puede tomar valores como 0, 1, 4, etc., **nunca** toma valores negativos.
Por ejemplo, no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$.
Por lo tanto, la imagen de f es $[0, \infty)$, lo cual es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$, y la función no es sobreyectiva.

Funciones biyectivas

Ahora que hemos definido funciones inyectivas (sin repeticiones en la salida) y sobreyectivas (que usan todo el codominio), surge una pregunta natural:

¿Qué pasa si una función es ambas cosas a la vez?

A ese tipo de funciones se les llama **biyectivas**, y son muy importantes porque establecen una correspondencia perfecta entre el dominio y el codominio: a cada entrada le corresponde una única salida, y cada salida proviene de una única entrada.

Definición 2.3.1: Funciones biyectivas

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Esto implica que:

$$\forall y \in B, \exists!\, x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

donde el símbolo $\exists!$ indica que *existe un único*.

Ejemplo 2.3.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x+4$. Ya hemos visto que esta función es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, también es **biyectiva**.
Esto significa que cada valor real tiene exactamente una preimagen real.

Ejemplo 2.3.2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta función no es biyectiva porque no es inyectiva (ya que $f(2) = f(-2)$) ni sobreyectiva (porque no cubre los números negativos).
Incluso si restringimos el dominio a $[0, \infty)$, obtendríamos una función inyectiva pero no biyectiva sobre $\mathbb{R}$, a menos que también se restrinja el codominio a $[0, \infty)$.

De estas definiciones se siguen algunas propiedades para las funciones compuestas, las cuales nos garantizan que una función compuesta siempre hereda la inyectividad, sobreyectivida y biyectividad de las funciones que la componen.

Proposición 2.3.1:

ean $g : A \to B$ y $f : B \to C$ con $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que:

1. f y g son inyectivas $\Longrightarrow$ $f \circ g$ es inyectiva.
2. f y g son sobreyectiva $\Longrightarrow$ $f \circ g$ es sobreyectiva.
3. f y g son biyectivas $\Longrightarrow$ $f \circ g$ es biyectiva.

Demostración.

1. Supongamos que f y g son inyectivas. Queremos demostrar que $f \circ g$ también lo es.

   Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que
   $$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2),$$
   es decir,
   $$f(g(x_1)) = f(g(x_2)).$$
   Como f es inyectiva, se sigue que $g(x_1) = g(x_2)$. Y como g también es inyectiva, entonces $x_1 = x_2$.

   Por lo tanto, $f \circ g$ es inyectiva.

2. Supongamos que f y g son sobreyectivas. Queremos probar que $f \circ g$ es sobreyectiva, es decir, que para todo $z \in C$, existe $x \in A$ tal que $(f \circ g)(x) = z$.

   Como f es sobreyectiva, dado $z \in C$, existe $y \in B$ tal que $f(y) = z$.

   Como g es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $g(x) = y$.

   Entonces:
   $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = z.$$
   Por lo tanto, $f \circ g$ es sobreyectiva.

3. Como ya demostramos que la composición de funciones inyectivas es inyectiva y que la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva, si f y g son biyectivas (es decir, inyectivas y sobreyectivas al mismo tiempo), entonces $f \circ g$ será también inyectiva y sobreyectiva.

   Por lo tanto, $f \circ g$ es biyectiva.

□

Función inversa

Antes de hablar formalmente de funciones inversas, pensemos en la idea intuitiva: si una función transforma una entrada x en una salida y, entonces su inversa debería hacer el trabajo contrario, es decir, recuperar el valor de x a partir de y. En símbolos:

$$f(x) = y \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(y) = x.$$

Sin embargo, esta inversión no siempre es posible. Si una función asigna el mismo valor de salida a más de una entrada, entonces no hay forma de saber, al recibir un y, de qué x provino. Por eso, **una condición necesaria para que una función tenga inversa es que sea inyectiva**. Si además queremos que la inversa también esté definida en todo el codominio de f, necesitamos que f sea además sobreyectiva, es decir, que sea biyectiva.

Definición 2.4.1: Función inversa

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **invertible** si existe una función $f^{-1} : B \to A$ tal que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A, \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{para todo } y \in B.$$

En este caso, a f^{-1} se le llama la **función inversa** de f, y se denota con f^{-1}.

Observación 2.4.1

Una función tiene inversa si y solo si es biyectiva.

Ejemplo 2.4.1

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$. Veamos si tiene inversa.
Esta función es inyectiva, ya que si $f(x_1) = f(x_2)$, se sigue que $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, lo que implica $x_1 = x_2$. También es sobreyectiva, pues para cualquier $y \in \mathbb{R}$, podemos encontrar un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, resolviendo $x = \frac{y-3}{2}$. Por tanto, es biyectiva y tiene inversa.
Entonces, la inversa está dada por:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}.$$

Ejemplo 2.4.2

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Esta función **no tiene inversa** sobre todo $\mathbb{R}$ ya que no es inyectiva: por ejemplo, $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$. No hay forma de saber si el 4 vino del 2 o del -2.
Sin embargo, si restringimos el dominio a $[0, \infty)$, entonces la función sí es inyectiva, y su inversa es:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, \infty).$$

Funciones pares e impares

Las funciones pares e impares se definen a partir de su simetría con respecto a los ejes del plano cartesiano.

Funciones pares

Comenzando con las funciones **pares**, podemos decir que son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto al eje Y. Esto quiere decir que si tomamos un valor cualquiera x, calculamos su imagen $f(x)$, y luego tomamos el punto opuesto $-x$ (que está exactamente a la misma distancia del eje Y pero del lado opuesto), su imagen $f(-x)$ debe ser exactamente igual a $f(x)$.

En otras palabras:

$$f(-x) = f(x)$$

Esto implica que los puntos $(x, f(x))$ y $(-x, f(x))$ están a la misma altura y forman una especie de reflejo uno del otro con respecto al eje Y. Si esta propiedad se cumple para todos los valores del dominio, entonces la función es par.

Definición 2.5.1: Función par

Decimos que $f : A \to B$ (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$), es **par** si y solo si para toda $x \in A$ se cumple que

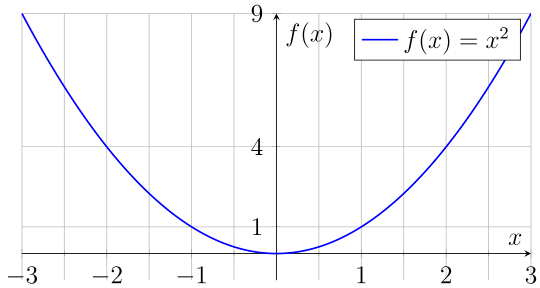
$$f(x) = f(-x)$$

Ejemplo 2.5.1

Un ejemplo clásico de función par es $f(x) = x^2$, ya que al sustituir $-x$ obtenemos:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Cuya gráfica es:



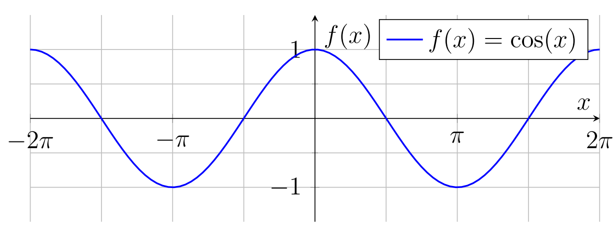
Como se puede ver, la gráfica a la izquierda del eje Y es una copia simétrica de la que está a la derecha.

Ejemplo 2.5.2 Otra función par: $f(x) = \cos(x)$

La función coseno también es un ejemplo clásico de función par. Para comprobarlo, basta con evaluar:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

Esto nos confirma que su gráfica es simétrica respecto al eje Y, como debe ocurrir en una función par.



Observa que la gráfica "doblada"sobre el eje Y coincide consigo misma, lo cual indica que es par.

Funciones impares

En cuanto a las funciones **impares**, podríamos decir que son aquellas cuya gráfica presenta una simetría diferente: esta vez con respecto al **origen** (el punto $(0,0)$), y no solamente a un eje.

Esto significa que si tomamos un número cualquiera x del dominio, y calculamos tanto $f(x)$ como $f(-x)$, entonces estos dos valores deben estar ubicados a la misma distancia del origen, pero en lados opuestos. Es decir, si $(x, f(x))$ está en la gráfica, entonces también debe estar el punto $(-x, -f(x))$.

Esta simetría respecto al origen puede expresarse con la siguiente condición:

$$f(-x) = -f(x)$$

A diferencia de las funciones pares, aquí no se busca que las alturas sean iguales, sino que estén reflejadas diagonalmente respecto al origen.

Definición 2.5.2: Función impar

Decimos que $f : A \to B$ (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$) es **impar** si y solo si para toda $x \in A$ se cumple que

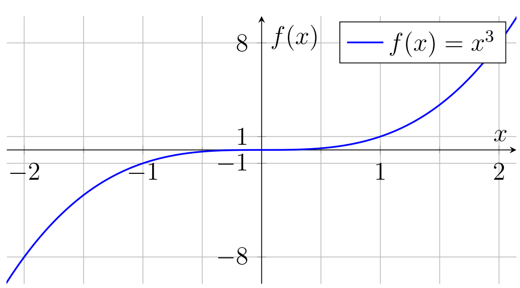
$$f(-x) = -f(x)$$

Ejemplo 2.5.3

la función cúbica $f(x) = x^3$ es impar, ya que al sustituir $-x$ obtenemos:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

A continuación, se muestra su gráfica:



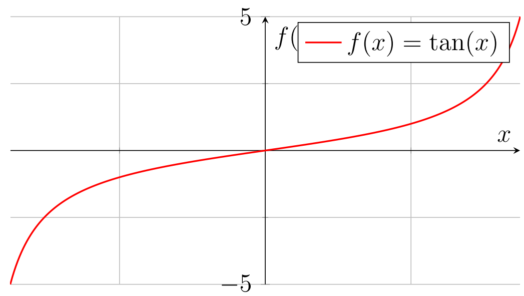
Como se puede observar, la gráfica de esta función se comporta como si fuera un reflejo con giro de 180° alrededor del origen: cada punto del lado derecho tiene un punto simétrico en el lado izquierdo y abajo.

Ejemplo 2.5.4 Otra función impar: $f(x) = \tan(x)$

La función tangente es un ejemplo interesante de función impar. Aunque no está definida en todos los reales (tiene discontinuidades en $\frac{\pi}{2} + k\pi$), sí cumple con la condición de imparidad:

$$f(-x) = \tan(-x) = -\tan(x) = -f(x)$$

Esto nos indica que su gráfica es simétrica respecto al **origen**.



La gráfica de la tangente se refleja sobre el origen. Aunque tiene asíntotas verticales, entre cada intervalo su comportamiento es perfectamente impar.

Funciones crecientes y decrecientes

En esta sección vamos a definir los términos **creciente** y **decreciente** con respecto a las funciones.

Funciones crecientes

Una primera noción intuitiva de lo que significa que una función sea *creciente* es que sus valores "suben" conforme avanzamos hacia la derecha sobre el eje X. Es decir, la gráfica parece estar "escalando" hacia arriba conforme recorremos el dominio.

Sin embargo, nuestros ojos pueden engañarnos, así que conviene tener una definición precisa. Decimos que una función f es **creciente** en un intervalo I si, para cualesquiera dos números $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se cumple que:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Esto quiere decir que si aumentamos el valor de la x, también debe aumentar el valor de $f(x)$. Esta condición garantiza que los puntos en la gráfica van "subiendo".

Definición 2.6.1: Función creciente

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **creciente** en un subconjunto $I \subseteq A$ si, para cualesquiera dos números $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple que:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

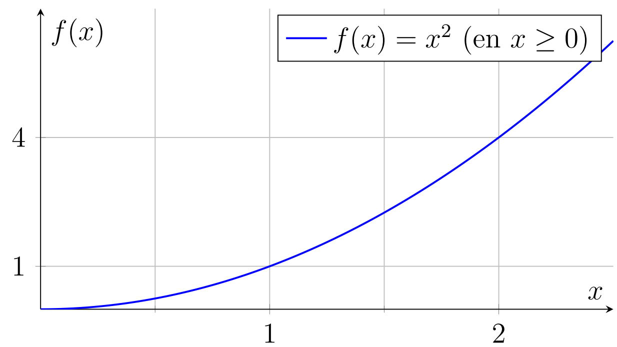
Observación 2.6.1

En otras palabras, al aumentar la entrada, también aumenta la salida. Esta propiedad garantiza que la gráfica de f "sube"de izquierda a derecha dentro del intervalo I.

Ejemplo 2.6.1

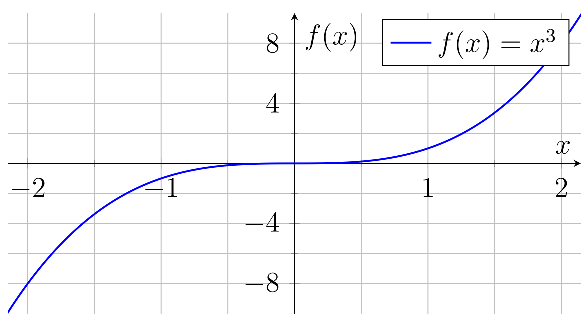
Aunque $f(x) = x^2$ no es creciente en todo su dominio (porque decrece cuando $x < 0$), sí lo es en el intervalo $[0, \infty)$.
Si tomamos dos valores positivos $x_1 < x_2$, entonces:

$$x_1^2 < x_2^2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$



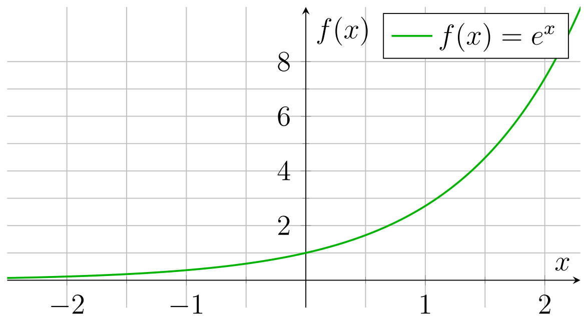
Ejemplo 2.6.2

La función cúbica $f(x) = x^3$ es creciente en todo su dominio, ya que al aumentar x, también aumenta $f(x)$. Para cualesquiera $x_1 < x_2$, se cumple que $x_1^3 < x_2^3$.



Ejemplo 2.6.3

La función exponencial $f(x) = e^x$ también es creciente en todo $\mathbb{R}$, pues $e^{x_1} < e^{x_2}$ siempre que $x_1 < x_2$.



Funciones decrecientes

El razonamiento detrás de las funciones **decrecientes** es análogo al de las crecientes, pero ahora la gráfica "bajaçonforme avanzamos en el eje X.

Supongamos que tomamos un intervalo I en el que la función está definida. Si elegimos dos puntos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces diremos que f es decreciente si al aumentar x también disminuye su imagen. Es decir, si se cumple:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Esta condición garantiza que los puntos de la gráfica "caen" a medida que recorremos el eje X hacia la derecha.

Definición 2.6.2: Función decreciente

Sea $f : A \to B$ una función, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que f es **decreciente** en un subconjunto $I \subseteq A$ si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple:

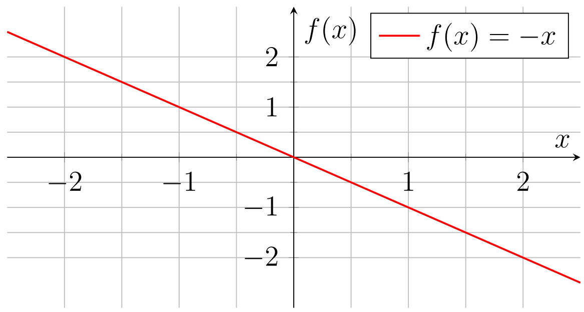
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Observación 2.6.2

Es decir, al aumentar la entrada, la salida disminuye.

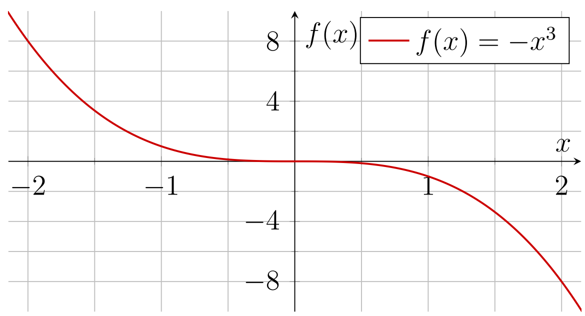
Ejemplo 2.6.4

La función $f(x) = -x$ es un ejemplo clásico de función lineal decreciente. Para cualquier par de valores $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$



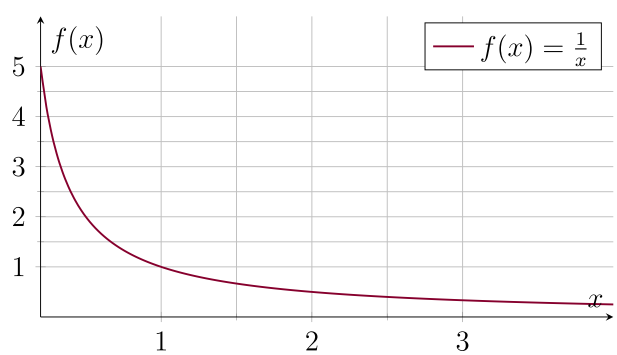
Ejemplo 2.6.5

La función $f(x) = -x^3$ es decreciente en todo su dominio. Si $x_1 < x_2$, entonces $-x_1^3 > -x_2^3$.



Ejemplo 2.6.6

La función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$ es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Si $0 < x_1 < x_2$, entonces $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.



Proposición 2.6.1: Producto de funciones crecientes

ean $f, g : A \to B$ funciones, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si f, g son crecientes en $I \subseteq A$ tales que $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces fg también es creciente en I.

Demostración. $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Dado que f y g son crecientes en I, tenemos

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{y} \quad g(x_1) < g(x_2).$$

Además, por hipótesis, $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in I$. Considerando la diferencia

$$(fg)(x_2) - (fg)(x_1) = f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1).$$

Sumamos y restamos el término $f(x_2)g(x_1)$ para reescribirlo como

$$\begin{aligned} f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1) &= f(x_2)g(x_2) - f(x_2)g(x_1) + f(x_2)g(x_1) - f(x_1)g(x_1) \\ &= f(x_2)[g(x_2) - g(x_1)] + g(x_1)[f(x_2) - f(x_1)] \end{aligned}$$

Como $g(x_2) - g(x_1) > 0$ y $f(x_2) > 0$ entonces

$$f(x_2)[g(x_2) - g(x_1)] > 0$$

Análogamente, como $f(x_2) - f(x_1) > 0$ y $g(x_1) > 0$ entonces

$$g(x_1)[f(x_2) - f(x_1)] > 0$$

Sumando ambas desigualdades, obtenemos:

$$f(x_2)[g(x_2) - g(x_1)] + g(x_1)[f(x_2) - f(x_1)] > 0.$$

Y como:

$$f(x_2)[g(x_2) - g(x_1)] + g(x_1)[f(x_2) - f(x_1)] = f(x_2)g(x_2) - g(x_1)f(x_2)$$

Entonces

$$f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1) > 0,$$

lo cual implica que $(fg)(x_2) > (fg)(x_1)$. Por lo tanto, fg es creciente en I.

$\square$

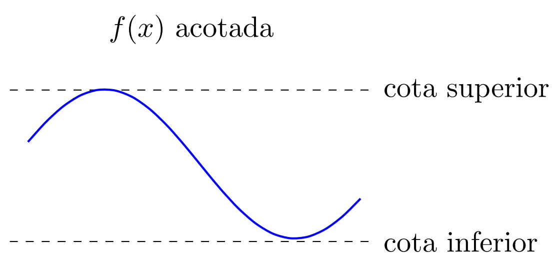
Funciones acotadas

En la unidad 1 aprendimos a usar cotas para entender y controlar conjuntos numéricos. Por ejemplo, saber que un conjunto está acotado superiormente nos dice que sus elementos no se van al infinito por arriba. Esa misma idea la vamos a aplicar ahora a las funciones:

> Vamos a usar cotas para ”ponerle barreras” a lo que la función puede hacer.

¿Por qué queremos delimitar una función?

Porque una función que se va demasiado hacia arriba o hacia abajo puede volverse difícil de controlar. Si logramos decir: “de aquí no pasa”, entonces podemos estudiar mejor sus propiedades, compararla con otras funciones o incluso integrarla o derivarla sin problemas. Las cotas son una forma de decir: “la función vive dentro de esta región, no se escapa”.



> **Observación 2.7.1**
>
> Veamos que cuando hablamos de poner una barrera, en la gráfica de la función eso se verá reflejado en el eje vertical Y, pues en el eje X ya existen otras barreras como los intervalos.

Antes que nada, veamos qué significa que una función esté **acotada superiormente**. Esto quiere decir que la función nunca se dispara hacia arriba: hay un techo, una barrera que no sobrepasa, para ello usaremos la idea de *cota superior* de la unidad anterior.

Definición 2.7.1: Acotada superiormente

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ está **acotada superiormente** si existe un número real M tal que:

$$f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in A.$$

Ahora pensemos en el otro extremo: funciones que no bajan demasiado. Si puedes garantizar que la función no cae más allá de cierto valor, entonces decimos que está acotada por abajo. Para ello, usaremos el concepto de *cota inferior*

Definición 2.7.2: Acotada inferiormente

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ está **acotada inferiormente** si existe un número real m tal que:

$$f(x) \geq m \quad \text{para todo } x \in A.$$

¿Y si logramos ponerle límites tanto por arriba como por abajo? Entonces tenemos lo mejor de ambos mundos: la función está completamente controlada en cuanto a su rango de valores. A esto le llamamos simplemente acotada.

Definición 2.7.3: Simplemente acotada

Una función está **simplemente acotada** si está acotada superior e inferiormente, es decir, si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in A.$$

Ejemplo 2.7.1

La función $f(x) = \sin(x)$ está simplemente acotada, ya que:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En este caso, $m = -1$ y $M = 1$ son cotas inferiores y superiores, respectivamente.

Ejemplo 2.7.2

La función $f(x) = \cos(x)$ está simplemente acotada, ya que:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esto se debe a que el coseno, como función trigonométrica periódica, nunca sale del intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, está acotada por arriba con $M = 1$ y por abajo con $m = -1$.

Ejemplo 2.7.3

La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ está simplemente acotada en $\mathbb{R}$, ya que:

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La cota superior es $M = 1$, alcanzada cuando $x = 0$, y la inferior es cualquier número positivo menor que 1, como por ejemplo $m = 0$. Esto significa que la función nunca se dispara ni hacia arriba ni hacia abajo.

Ejemplo 2.7.4

La función constante $f(x) = 5$ está simplemente acotada porque:

$$5 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En este caso, tanto la cota inferior como la superior son el mismo número, $m = M = 5$. La función nunca cambia de valor, así que está perfectamente controlada.