Capítulo 2

Sucesiones de números reales

2.1. Primeras definiciones

Definición 8 *Un conjunto infinito A se llama numerable si es biyectivo con un subconjunto M(finito o infinito) del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Es decir, existe un aplicación $f : M \to A$ que es biyectiva (o sea inyectiva y sobreyectiva).*

Cuando M es finito, también lo es A. Los conjuntos numerables infinitos son biyectivos con un M infinito, subconjunto de $\mathbb{N}$,que es biyectivo con el propio $\mathbb{N}$.

Existen, sin embargo, conjuntos infinitos que no son numerables; por ejemplo, el matemático alemán Cantor probó, a finales del siglo XIX, que los números reales del intervalo $[0, 1]$ son un conjunto no numerable.

Definición 9 *Se llama sucesión a un conjunto infinito y numerable de números reales.*

Análogamente se definen las sucesiones de complejos y de cualquier otra clase de números.

Si S es una sucesión, existe una biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$, de tal forma que:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & S \\ 1 & \longrightarrow & a_1 \\ 2 & \longrightarrow & a_2 \\ 3 & \longrightarrow & a_3 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} n & \longrightarrow & a_n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

y al número 1 le corresponde el elemento a_1, al 2 el elemento a_2, al 3 el a_3, …al n el a_n etc. Por ser f biyección existe la aplicación inversa f^{-1}:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: S & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ 1 & \longrightarrow & a_1 \\ 2 & \longrightarrow & a_2 \\ 3 & \longrightarrow & a_3 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & \longrightarrow & n \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

Por tanto la relación entre n y su imagen es *unívoca*, siendo n el lugar que ocupa el elemento a_n en la sucesión. La manera, pues, más elemental de dar una sucesión es dar el término general de la sucesión: esto es, la expresión de a_n en función de n:

$$a_n = f(n).$$

Ejemplo 1.—La sucesión más elemental es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots n, \ldots\}.$$

Su término general es $a_n = n$.

Ejemplo 2.—El conjunto de los números impares I:

$$I = \{1, 3, 5, \ldots 2n-1, \ldots\}.$$

El término general es $a_n = 2n - 1$.

Ejemplo 3.—El conjunto de los números pares P:

$$P = \{2, 4, 6, \ldots 2n, \ldots\}.$$

El término general es $a_n = 2n$.

EJEMPLO 3.—Sea la sucesión definida así:

$$a_n = \frac{5n+3}{3n+2}.$$

Los primeros términos son:

$$a_1 = \frac{5 \cdot 1 + 3}{3 \cdot 1 + 2} = \frac{8}{5}; a_2 = \frac{5 \cdot 2 + 3}{3 \cdot 2 + 2} = \frac{13}{8}; a_3 = \frac{5 \cdot 3 + 3}{3 \cdot 3 + 2} = \frac{18}{11};$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 4 + 3}{3 \cdot 4 + 2} = \frac{23}{14}; a_5 = \frac{5 \cdot 5 + 3}{3 \cdot 5 + 2} = \frac{28}{17}.$$

El término que ocupa el lugar 1000 es:

$$a_{1000} = \frac{5 \cdot 1000 + 3}{3 \cdot 1000 + 2} = \frac{5003}{3002}.$$

Otra forma de definir sucesiones es por *recurrencia*. Para ello se dan algunos de los primeros términos de la sucesión, y la ley que relaciona a un término con los anteriores, ley que se denomina *escala de recurrencia*.

EJEMPLO 4.—Se llama sucesión de FIBONACCI (matemático italiano del siglo XVI) a la definida de la siguiente forma:

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: Cada término es la suma de los dos anteriores a él. La sucesión es, pues, la siguiente:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Esta sucesión tiene notables propiedades aritméticas; por ejemplo, dos términos consecutivos son siempre primos entre si.

EJEMPLO 5.—Sea la sucesión definida así:

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$. La sucesión es la siguiente:

$$1, 2, 10, 38, 154, \ldots$$

Otra forma de definir sucesiones es por medio de otras ya dadas. Sean, por ejemplo, las sucesiones:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots\}$$

$$\{b_1, b_2, b_3, \dots b_n \dots\}$$

A partir de ellas definimos otra operando con las anteriores:

$$\{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots a_n + b_n \dots\}$$

A esta sucesión obtenida de las anteriores se la denomina sucesión suma. Operando de forma análoga, podríamos obtener otras sucesiones; y ello podría hacerse con más de dos sucesiones.

2.2. Intervalos y entornos en la recta real

Para la comprensión del concepto de límite y en otros muchos asuntos, es necesario conocer las siguientes definiciones:

Definición 10 *Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, al siguiente conjunto:*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

Definición 11 *Se llama intervalo abierto de extremos a y b, al siguiente conjunto:*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Definición 12 *Se llama intervalo semicerrado o semiabierto de extremos a y b, a cualquiera de los siguientes conjuntos:*

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}.$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}.$$

Obsérvese que el intervalo abierto no incluye a los extremos, por la relación de desigualdad estricta, hecho que no ocurre en los cerrados que incluye a ambos; en los semiabiertos o semicerrados, uno de los extremos se incluye y el otro no.

Definición 13 *Se llama entorno de centro C y radio r al siguiente conjunto:*

$$E(C; r) = (C - r, C + r).$$

2.3. Límite de una sucesión de números reales

A) Idea intuitiva de límite

Si consideramos la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$, una de las más sencillas, es evidente –por ser constante el numerador e ir aumentando el denominador constantemente– que para valores muy grandes del denominador, a_n se aproxima mucho a 0. Eso se expresa así:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

Así, para $n = 1{,}234{,}567$ la fracción $\dfrac{1}{1{,}234{,}567}$, que es el término $a_{1{,}234{,}567}$, está muy próximo a cero. Intuitivamente, esto es sencillo, y ya era conocido por los griegos; el problema es expresar matemáticamente ese hecho, y no se resolvió hasta principios del siglo XIX. La definición rigurosa de límite es la siguiente:

B)Definición de límite

Definición 14 *Dada la sucesión $\{a_n\}$ se dice que tiene límite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq \alpha$ es:*

$$|a_n - L| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Vamos a explicar la expresión 2.1: si el valor absoluto de $|a_n - L|$ es menor que ε es porque el número $a_n - L$ está comprendido entre $-\varepsilon$ y ε:

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon.$$

Sumando a los tres miembros de la desigualdad anterior el número L resulta:

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Consideremos el entorno de centro L y radio ε:

$$E(L;\varepsilon) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Entonces la desigualdad anterior significa:

$$a_n \in E(L;\varepsilon).$$

Y esto ocurre para todo $n \geq \alpha$: o sea, para el término que ocupa el lugar α y todos los que lo siguen a él, *no cumpliendo la condición* los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{\alpha-1}$.

¿Significa ésto que los términos de la sucesión se aproximan a L tanto como queramos? En efecto: si ε es grande (por ejemplo $\varepsilon = 100$), estar a_n, para $n \geq \alpha$ en el entorno de centro L y radio 100 no es estar muy cerca de L; pero cuando ε es muy pequeño (por ejemplo, $\varepsilon = 0,0000001$) estar *todos los términos, excepto un número finito de ellos* muy cercanos a L es el hecho que intuitivamente veíamos antes.

Obsérvese que de $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ restando L pasamos a $-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$; y usando el valor absoluto llegamos a: $|a_n - L| < \varepsilon$. Se tiene, pues, la equivalencia lógica:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Longleftrightarrow L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \Longleftrightarrow a_n \in E(L;\varepsilon).$$

Escolios.—1)Obsérvese que, por tomar valor absoluto en la definición de límite, se puede escribir lo mismo $|a_n - L|$ que $|L - a_n|$.

2)Y que si $L = 0$, $a_n - L = a_n$ y en la definición queda:

$$|a_n| < \varepsilon.$$

3) El valor de α depende de ε: cuánto menor es este, mayor es α.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1.—Sea $a_n = \dfrac{7n+5}{3n+2}$. Probar que su límite es $7/3$.

Hagamos la diferencia $a_n - L$:

$$a_n - L = \frac{7n+5}{3n+2} - 7/3 = \frac{21n+15-21n-14}{9n+6} = \frac{1}{9n+6}.$$

Al ser el numerador de la última fracción constantemente igual a 1, e ir aumentando el denominador por aumentar n, a partir de un valor de n será:

$$|a_n - 7/3| = \frac{1}{9n+6} < \varepsilon.$$

Si tomamos $\varepsilon = 0,001$ para que sea $\frac{1}{9n+6} < 0,001 = 1/1000$ es necesario que $9n + 6 > 1000$. O sea:

$$n > \frac{1000-6}{9} = 994/9 = 110,44\dots$$

Por tanto, si $n \geq 111$ ya es: $|a_n - 7/3| < 0,001$.

Ejemplo 2.—Probar que el límite de $a_n = \dfrac{bn+c}{dn+e}$ es $L = b/d$ siendo $d \neq 0$.

Podemos suponer que $d > 0$, pues en caso contrario multiplicamos por -1 el numerador y el denominador de a_n; en tal caso, tomando n suficientemente grande, será $dn + e > 0$.Calculando la diferencia $a_n - \frac{b}{d}$, se tiene:

$$|\frac{bn+c}{dn+e} - \frac{b}{d}| = \frac{|dc-be|}{d(dn+e)}.$$

Por el mismo razonamiento del caso anterior, resulta que $\frac{|dc-be|}{d(dn+e)} < \varepsilon$, a partir de cierto valor de n.

Ejemplo 3.—Probar que si $a_n \to 0$, se tiene que:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\varepsilon/2 > 0$, lo usaremos en la definición de límite, aplicada a $a_n \to 0$: existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq \alpha$ se tiene: $|a_n| < \varepsilon/2$.

Debemos probar que:

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right| < \varepsilon$$

a partir de cierto valor de n. Para ello descomponemos la suma del numerador en dos grupos: los términos que no cumplen la condición anterior, y los que si la cumplen:

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{\alpha-1}}{n} + \frac{a_\alpha + a_{\alpha+1} + \cdots + a_n}{n} \right|.$$

Aplicando a la suma del segundo miembro la desigualdad $|x + y| \leq |x| + |y|$, resulta:

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{\alpha-1}}{n} \right| + \left| \frac{a_\alpha + a_{\alpha+1} + \cdots + a_n}{n} \right|.$$

Acotemos el segundo sumando del segundo miembro:

$$\left|\frac{a_\alpha + a_{\alpha+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{(n-\alpha+1)\varepsilon}{2n}.$$

Este resultado sale de aplicar la citada desigualdad del valor absoluto a la suma de $n-\alpha+1$ términos, cada uno de los cuales, en valor absoluto es menor que $\varepsilon/2$. Como $\frac{n-\alpha+1}{n} < 1$, resulta:

$$\left|\frac{a_\alpha + a_{\alpha+1} + \cdots + a_n}{n}\right| < \varepsilon/2.$$

En consecuencia:

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| < \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{\alpha-1}}{n}\right| + \varepsilon/2.$$

Dado que la sucesión $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{\alpha-1}}{n}$ tiende evidentemente a cero:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{\alpha-1}}{n} \to 0,$$

existe un número $\beta \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq \beta$ es:

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{\alpha-1}}{n}\right| < \varepsilon/2.$$

Tomando $n \geq \gamma = \text{máx}(\alpha, \beta)$, se cumplen las dos condiciones anteriores, y resulta:

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2.4. Propiedades de los límites

La mayoría de las propiedades de los límites son consecuencias del siguiente teorema, llamado por ello *teorema fundamental de los límites finitos* :

Teorema 4 (Teorema Fundamental) *Si un número es mayor que el límite de una sucesión, a partir de cierto término, supera a los términos de la misma.*

Análogamente, si es menor que el límite, a partir de cierto término, es superado por ellos.

Demostración: Vamos a probar la primera parte, y dejamos la de la segunda al alumno como ejercicio.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y L su límite: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, y sea $c > L$. Al ser $c - L > 0$ podemos aplicar con este número la definición de límite: existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq \alpha$ sea:

$$|a_n - L| < c - L.$$

Consideremos el número $a_n - L$: éste puede tener cualquier signo, pero siempre será:

$$a_n - L \leq |a_n - L|.$$

Por tanto: $a_n - L < c - L$; en consecuencia: $a_n < c$, que es lo que se quería demostrar.

Para probar la segunda parte, considérese el número $L - c'$ siendo c' menor que L: $c' < L$, y hágase un razonamiento análogo.

Corolario 2 *Si una sucesión posee límite distinto de cero, a partir de cierto término todos tienen el mismo signo que el límite.*

Demostración: Sea $L > 0$. Por ser L mayor que cero, por el teorema fundamental, tendrá que ser $a_n > 0$ a partir de cierto valor de n. Lo mismo ocurre si $L < 0$.

Corolario 3 *Si el límite de una sucesión es mayor que el límite de otra, a partir de cierto término los términos de la primera son mayores que los de la segunda.*

Demostración: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que, $L = \lim_{n\to\infty} a_n$,$M = \lim_{n\to\infty} b_n$, siendo $L > M$. Tomemos un número r entre ambos límites:

$$L > r > M.$$

Por el teorema fundamental, al ser $L > r$, a partir de cierto valor α, se verifica: $a_n > r$ para $n \geq \alpha$. Por la misma razón, siendo $r > M$ se verifica: $r > b_n$ para $n \geq \beta$. Tomando $n \geq \max(\alpha, \beta)$ se verifican las dos desigualdades, y entonces es:

$$a_n > r > b_n.$$

O sea $a_n > b_n$ que es lo que se quería probar.

Corolario 4 *Una sucesión sólo puede tener un límite.*

Demostración: Sea $\{a_n\}$ una sucesión que tiene dos límites: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $M = \lim_{n\to\infty} b_n$, siendo $L > M$. Aplicando el corolario anterior, a partir de cierto valor de n será:

$$a_n > a_n$$

lo cual es imposible.

Corolario 5 *Si una sucesión tiene los términos mayores que los de otra, y ambas poseen límite, el límite de la primera es mayor o igual que el de la segunda.*

Demostración: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n > b_n$, siendo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $M = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pueden ocurrir tres posibilidades: $L > M$, $L = M$ y $L < M$. Pero la última no puede darse, porque de $L < M$ tendría que ser: $a_n < b_n$,a partir de cierto n, y ésto contradice el ser $a_n > b_n$.

Obsérvese que de $a_n > b_n$ se deduce: $L \geq M$ y *que puede darse la igualdad.* Pongamos un ejemplo: sean

$$a_n = \frac{n+1}{n} > 1 > \frac{n}{n+1} = b_n.$$

Es fácil comprobar que $1 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Corolario 6 *Si una sucesión está comprendida entre otras dos que tienen igual límite, tiene el mismo límite que aqu+llas.*

Demostración: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tres sucesiones tales que: $a_n \leq b_n \leq c_n$ y sea:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para $n \geq \alpha$ es:

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Análogamente,para $n \geq \beta$ es:

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Tomando $n \geq \gamma = \max(\alpha, \beta)$ se verifican las dos desigualdades anteriores, y entonces:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Pero entonces:

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon.$$

Y esto equivale a: $|L - b_n| < \varepsilon$ para $n \geq \gamma$. Por tanto:

$$L = \lim_{n \to \infty} b_n,$$

como queríamos probar.

Corolario 7 *Si una sucesión tiene infinitos términos positivos y negativos, y posee límite, entonces este es cero.*

Demostración: Sea $\{a_n\}$ una sucesión con infinitos términos positivos y negativos, y cuyo límite sea $L = \lim_{n \to \infty} a_n$. Pueden ocurrir tres posibilidades: $L > 0$, $L = 0$ y $L < 0$. Si fuese $L > 0$, por el primer corolario, habría sólo un número finito de términos negativos, y todos serían positivos a partir de cierto término.

Si fuese $L < 0$,habría sólo un número finito de términos positivos, y todos serían negativos a partir de cierto término.

Por tanto debe ser $L = 0$. Este corolario es claramente el contrarecíproco del uno.

2.5. Límites infinitos

Damos a continuación la definición de límite infinito, la cual posee dos matizaciones: $+\infty$ y $-\infty$.

Recalcamos al estudiante que ∞, $+\infty$ y $-\infty$ *no son números, sino formas simbólicas de referirse al contenido de las definiciones.*

Definición 15 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Se dice que su límite es ∞ y se escribe $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ si para todo $A > 0$ existe un α, número natural, tal que, para $n \geq \alpha$ es:*

$$|a_n| > A.$$

Obsérvese que, a partir de a_α *todos son mayores que A: no basta con que muchos lo sean.*

Veamos las antedichas matizaciones:

Definición 16 (Límite $+\infty$) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Se dice que su límite es $+\infty$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ si para todo $A > 0$ existe un α, número natural, tal que, para $n \geq \alpha$ es:*

$$a_n > A.$$

En este caso, a partir de cierto término, todos son mayores que un número positivo cualquiera, luego son positivos y muy grandes: se hacen tan grandes como queramos.

Definición 17 (Límite $-\infty$) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Se dice que su límite es $-\infty$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo $A > 0$ existe un α, número natural, tal que, para $n \geq \alpha$ es:*

$$a_n < -A.$$

En este caso, a partir de cierto término, todos son menores que un número negativo cualquiera, luego son negativos y muy grandes: se hacen tan grandes, en valor absoluto, como queramos.

Pongamos ejemplos: Ejemplo 1.—Sea $a_n = (-2)^n$; la sucesión es:

$$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$$

Por ser $|a_n| = 2^n$ tomando $n \geq \log_2 A$ se tiene:

$$|a_n| > A.$$

Luego $\lim_n a_n = \infty$.

Nótese que los términos de lugar impar son negativos y los de par, positivos: por eso su límite no puede ser ni $+\infty$ ni $-\infty$.

Tomemos $A = 1000$. Por ser $2^{10} = 1024$, para $n \geq 10$ es:

$$a_n > 1000 = A.$$

Ejemplo 2.—Por el ejemplo anterior, es evidente que: $b_n = 2^n \to +\infty$.

Obsérvese que sus términos son todos positivos.

Ejemplo 3.—Por la misma razón del anterior ejemplo, es evidente que: $c_n = -2^n \to -\infty$.

Obsérvese que sus términos son todos negativos.

2.6. Clasificación de las sucesiones

Definición 18 *Si una sucesión posee límite finito, se dice que es convergente.*

Si tiene limite infinito, se dice que es divergente.

Si carece de límite, finito o infinito, se dice que es oscilante o indeterminada.

Ejemplo del primer tipo es $a_n = \frac{1}{n}$. Ejemplos del segundo son los citados en el epígrafe anterior. Ejemplo del tercero es $c_n = (-1)^n$. La sucesión tiene los términos impares -1 y los pares 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Como la sucesión $c, c, c, c, \ldots$ tiene por límite c, los términos impares tienden a -1; por la misma razón, los pares tienden a 1. Carece, pues, de límite finito. Por estar acotada, carece de límite infinito.

2.7. Supremo e ínfimo de un conjunto de números reales

Veamos algunas definiciones:

Definición 19 *Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ de números reales está* **acotado superiormente***, si existe un número k tal que $x \leq k$ para todo $x \in C$.*

Análogamente:

Definición 20 *Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ de números reales está* **acotado inferiormente***, si existe un número k' tal que $x \geq k'$ para todo $x \in C$.*

Cuando se cumplen las dos condiciones anteriores simultáneamente, se tiene la siguiente

Definición 21 *Se dice que un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ de números reales está* **acotado** *si lo está superior e inferiormente.*

Examinemos un ejemplo: sea $C = [0, 1]$. Es evidente que $x < 2$, por lo que 2 es una cota superior del conjunto; también los son 3, 4 y 5. Evidentemente existen infinitas cotas superiores.

También $-3, -2, -1$ son cotas inferiores de $[0, 1]$. Existen, pues, infinitas cotas inferiores.

La existencia de infinitas cotas superiores e inferiores motiva las siguientes definiciones:

Definición 22 *Se llama* **supremo o extremo superior** *de un conjunto de números reales a la menor de sus cotas superiores.*

Análogamente:

Definición 23 *Se llama* **ínfimo o extremo inferior** *de un conjunto de números reales a la mayor de sus cotas inferiores.*

Se deja como ejercicio para el alumno probar que tanto el supremo como el ínfimo, si existen, son únicos.

En la teoría de los números reales, se demuestra el siguiente teorema que usaremos en seguida, y que damos *sin demostración*:

Teorema 5 *Todo conjunto de números reales que está acotado superiormente posee supremo.*

Todo conjunto de números reales que está acotado inferiormente posee ínfimo.

2.8. Sucesiones monótonas convergentes

El problema de hallar el carácter de una sucesión no es sencillo; es conveniente, pues, encontrar un teorema sencillo que nos permita asegurar la existencia de límite, en muchos casos.

Demos una definición:

Definición 24 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice que es* **monótona creciente** *si para todo* n *es:*

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Si es: $a_n < a_{n+1}$ *se dice que es monotóna creciente en sentido estricto.*

Análogamente:

Definición 25 *Una sucesión* $\{a_n\}$ *se dice que es* **monótona decreciente** *si para todo* n *es:*

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Si es: $a_n < a_{n+1}$ *se dice que es monotóna decreciente en sentido estricto.*

En estas condiciones, se cumple el siguiente teorema:

Teorema 6 *Si una sucesión monótona creciente está acotada superiormente, tiene límite.*

Igualmente, una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente es convergente.

Demostración: Demostremos el caso monótona creciente; el alumno demostrará el otro caso con las indicaciones que le serán dadas.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión monótona creciente que está acotada superiormente. Por el teorema enunciado en el epígrafe anterior, al estar acotada superiormente, posee supremo:

$$S = \sup_n a_n.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el número $S - \varepsilon$: por la definición de supremo (la menor de las cotas superiores) este número no puede ser supremo; existe, pues, un término a_α tal que:

$$S - \varepsilon < a_\alpha \leq S.$$

Al ser monótona creciente la sucesión, es: $a_\alpha \leq a_n$ para $n \geq \alpha$.Tenemos, pues:

$$S - \varepsilon < a_\alpha \leq a_n \leq S.$$

Además:

$$S - a_n < S - (S - \varepsilon) = \varepsilon.$$

O sea: para $n \geq \alpha$ es: $|S - a_n| = S - a_n < \varepsilon$. Esto prueba que:

$$S = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Para la demostración del caso decreciente, tome el alumno $I = \inf_n a_n$ y el número $I + \varepsilon$.

2.9. El número e

Un ejemplo importantísimo de sucesión monótona creciente y acotada superiormente es la siguiente, que define uno de los números más importante en todas las ciencias, el número e:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 7 *La sucesión e_n tiene las siguientes propiedades:*

a) Es monótona creciente; b) es: $2 \leq e_n < 3$.

La demostración, por el momento, no la damos; pero el alumno puede encontrarla en cualquier texto del antiguo segundo de BUP, y en otros muchos libros.

Aplicando el teorema estudiado en el epígrafe anterior, resulta que existe el límite de la misma:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

El valor de e se obtiene fácilmente en cualquier calculadora de bolsillo, y es:

$$e = 2,718281828...$$

La letra e es por el matemático suizo del siglo XVIII Leonardo Euler.

2.10. Subsucesiones

Una sucesión $\{a_n\}$, al ser un conjunto infinito, contiene subconjuntos infinitos, los cuales son sucesiones, a los que llamaremos *subsucesiones* .

Surge así el siguiente problema: *dada una sucesión:*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \tag{2.2}$$

¿qué carácter (convergente, divergente u oscilante) tiene una subsucesión:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots a_{n_m} \ldots \tag{2.3}$$

contenida en ella?

La respuesta está en el siguiente teorema:

Teorema 8 *Si una sucesión es convergente, toda subsucesión contenida en ella es también convergente, y tiene el mismo límite.*

Si una sucesión es divergente, toda subsucesión contenida en ella es también divergente, y tiene el mismo límite.

La propiedad no vale para sucesiones oscilantes.

Demostración: Empecemos por explicar la notación de los elementos de la subsucesión 2.3. El elemento a_{n_1} puede ser cualquiera de la sucesión 2.2; por ejemplo a_{11} y sería: $n_1 = 11$. Lo mismo pasa con los demás términos de 2.3.

Veamos el caso de la convergencia de 2.2. Sea $L = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$ y sea $\varepsilon > 0$ un número positivo cualquiera. Por la definición de límite, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq \alpha$ es:

$$|L - a_n| < \varepsilon.$$

Cuando $m \to \infty$, también es $n_m \to \infty$ ya que hay infinitos términos en la subsucesión; por tanto, existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq \beta$ es:

$$n_m \geq \alpha.$$

Cuando se cumpla esto, tendremos:

$$|L - a_{n_m}| < \varepsilon, \text{para}\, m \geq \beta.$$

Esto prueba que: $L = \text{lím}_{m\to\infty} a_{n_m}$.

Sea ahora 2.2 divergente, *sin signo determinado*: la demostración de los casos $+\infty$ y $-\infty$ es muy parecida y se la dejamos al alumno como ejercicio.

Por la definición de tal límite, dado $A > 0$, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq \alpha$ es:

$$|a_n| > A.$$

Igual que antes, existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq \beta$ es:

$$n_m \geq \alpha.$$

Al cumplirse esto, tendremos:

$$|a_{n_m}| > A \,\text{para}\, m \geq \beta.$$

Esto prueba que:

$$\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \infty.$$

Que el teorema no se cumple para las sucesiones oscilantes, es claro, con el ejemplo $a_n = (-1)^n$: los términos impares tienen de límite -1:

$$a_{2n-1} = -1 \to -1;$$

y los pares tienen de límite 1:

$$a_{2n} = 1 \to 1.$$

Escolio.—Nótese que de la convergencia o divergencia de algunas subsucesiones contenidas en otra, no se deduce que la sucesión que las contiene tenga el mismo carácter, pues puede ser oscilante, como se ve en el ejemplo último puesto.

2.11. Infinitésimos

En primer lugar, definamos el concepto:

Definición 26 *Se llama* **infinitésimo** *a una sucesión cuyo límite es* 0.

Las propiedades más elementales de los infinitésimos son las siguientes:

1.) *La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{a_n\}$ tenga por límite L es que la diferencia $d_n = a_n - L$ sea un infinitésimo.*

Demostración: a) Condición necesaria.

Si $a_n \to L$, para $n \geq \alpha$ es:

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Si $d_n = a_n - L$, entonces:

$$|d_n| = |d_n - 0| < \varepsilon,$$

para $n \geq \alpha$.

b) Condición suficiente.

Es claro que el razonamiento anterior es reversible, y el alumno debe detallarlo.

2.) *La suma algebraica de varios infinitésimos es un infinitésimo.*

Demostración: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres infinitésimos, y consideremos la suma algebraica (combinación finita de sumas y restas) $a_n + b_n - c_n$. Por ser $\{a_n\}$ infinitésimo, existe α_1 tal que cuando $n \geq \alpha_1$ es:

$$|a_n| < \varepsilon/3.$$

Por la misma razón, existen α_2 y α_3 tales que, cuando, respectivamente, es $n \geq \alpha_2$ y $n \geq \alpha_3$ es:

$$\begin{aligned} |b_n| &< \varepsilon/3 \\ |c_n| &< \varepsilon/3 \end{aligned}$$

Tomando $n \geq \alpha = \text{máx}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ se cumplen las tres desigualdades; con esta condición cumplida, es:

$$|a_n + b_n - c_n| \leq |a_n| + |b_n| + |c_n| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Esto prueba que $a_n + b_n - c_n$ es un infinitésimo.

3.) *El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.*

Demostración: Sea $\{b_n\}$ una sucesión acotada: existe $K > 0$ tal que $|b_n| < K$. Si a_n es un infinitésimo, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que cuando $n \geq \alpha$ es:

$$|a_n| < \varepsilon/K.$$

Cuando esto ocurre, tenemos:

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \varepsilon/K \cdot K = \varepsilon.$$

Esto prueba que $a_n b_n$ es un infinitésimo.

4.) *El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo.*

Es un corolario de la propiedad anterior, ya que un infinitésimo, por ser convergente a 0, es una sucesión acotada.

2.12. Operaciones con límites

Enunciamos ahora las principales propiedades operativas de los límites. Por *suma algebraica* entendemos una combinación finita cualquiera de sumas y restas.

Teorema 9 *El límite de la suma algebraica de un número finito de sucesiones convergentes es la suma algebraica de los límites.*

Demostración: Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones convergentes, cuyos límites respectivos son L_1, L_2 y L_3:

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} a_n,\ L_2 = \lim_{n\to\infty} b_n,\ L_3 = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Por lo visto en el epígrafe anterior, es:

$$\begin{aligned} a_n &= L_1 + \alpha_n \\ b_n &= L_2 + \beta_n \\ c_n &= L_3 + \gamma_n \end{aligned}$$

siendo α_n, β_n y γ_n infinitésimos. Sumando miembro a miembro, resulta:

$$a_n + b_n - c_n = (L_1 + L_2 - L_3) + (\alpha_n + \beta_n - \gamma_n).$$

Al ser $\alpha_n + \beta_n - \gamma_n$ un infinitésimo, es:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n - c_n) = L_1 + L_2 - L_3.$$

Al ser la suma y la resta, casos particulares del teorema anterior, resulta:

Corolario 8 *El límite de la suma de un número finito de sucesiones convergentes, es la suma de los límites.*

Corolario 9 *El límite de la diferencia de dos sucesiones convergentes es la diferencia de los límites.*

Teorema 10 *El límite del producto de dos sucesiones convergentes es el producto de los límites.*

Demostración: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes cuyos límites respectivos son L_1 y L_2. Se tiene entonces:

$$a_n b_n - L_1 L_2 = a_n b_n - b_n L_1 + b_n L_1 - L_1 L_2 = b_n(a_n - L_1) + L_1(b_n - L_2).$$

Puesto que b_n es convergente, es acotada, y al multiplicarla por el infinitésimo $a_n - L_1$, resulta que $b_n(a_n - L_1)$ es un infinitésimo; lo mismo se puede decir de $L_1(b_n - L_2)$; por tanto, $b_n(a_n - L_1) + L_1(b_n - L_2)$ es un infinitésimo, y esto prueba que $L_1 L_2$ es el límite de $a_n b_n$.

Previo a la demostración del teorema sobre el cociente, necesitamos un lema:

Lema 1 *Si $a_n \to L$, con $L \neq 0$, entonces: $1/a_n \to 1/L$.*

Demostración: Supongamos $L > 0$; si no es el caso, hay que hacer una pequeña modificación que dejamos al alumno. Tomemos δ tal que: $L > \delta > 0$. Por el teorema fundamental, a partir de cierto valor de n será: $a_n > \delta$.

Por ser: $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{L} = \dfrac{L - a_n}{L a_n}$, resulta:

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}| = \frac{|L - a_n|}{L a_n} < \frac{|L - a_n|}{L\delta}.$$

Tomando n de tal forma que $|L - a_n| < \varepsilon L \delta$ tenemos:

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{L}| < \varepsilon,$$

que es lo que se quería probar.

Una vez probado el lema, es muy sencillo probar el siguiente teorema:

Teorema 11 *El límite del cociente de dos sucesiones convergentes es el cociente de los límites, siempre que el límite del divisor sea no nulo.*

Demostración: Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones cuyos límites respectivos son L_1 y L_2, siendo éste último distinto de cero: $L_2 \neq 0$. Dado que el cociente $\dfrac{a_n}{b_n}$ se puede expresar como producto:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}.$$

El lema anterior aplicado a $\frac{1}{b_n}$ nos da como límite $1/L_2$; por tanto, por la igualdad anterior:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L_1 \cdot 1/L_2 = \frac{L_1}{L_2}.$$

Escolio.—En el teorema anterior es necesario que $L_2 \neq 0$ para que L_1/L_2.

Como el manejo de las potencias requiere el uso de logaritmos, es imprescindible el siguiente resultado sobre éstos:

Teorema 12 *El límite del logaritmo de una sucesión convergente de límite positivo, es el logaritmo del límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b L.$$

Escolio: Obsérvese que para que el segundo término tenga sentido es necesario que L sea positivo.

Por otra parte, si $L > 0$, por el teorema fundamental, a partir de cierto término será: $a_n > 0$, y el primer término tiene sentido.

Demostración: Haremos la demostración suponiendo que $b > 1$ como es lo usual; si $b < 1$ la demostración es muy parecida, y se deja como ejercicio al alumno.

Sea $\varepsilon > 0$; por ser $b > 1$ es $b^\varepsilon > 1 > b^{-\varepsilon}$.

Consideremos la sucesión $\{a_n/L\}$ cuyo límite es:

$$a_n/L \to L/L = 1.$$

Por el teorema fundamental a partir de cierto término será:

$$b^{-\varepsilon} < a_n/L < b^\varepsilon.$$

Tomando logaritmos en el sistema de base b resulta:

$$-\varepsilon < \log_b a_n - \log_b L < \varepsilon.$$

Esto significa que:

$$\lim_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b L.$$

Una vez estudiado el logaritmo, pasemos a las potencias, en dos etapas sucesivas:

Teorema 13 *Si* $b > 0$ *y* $a_n \to L$ *entonces* $b^{a_n} \to b^L$.

Demostración: Si $a_n \to L$, la diferencia $a_n - L \to 0$. Por tanto:

$$b^{a_n} - b^L = b^L(b^{a_n - L} - 1).$$

Al ser $b^{a_n - L} \to b^0 = 1$, la diferencia del paréntesis es un infinitésimo, y al multiplicarla por la constante b^L resulta otro; esto prueba el enunciado.

Teorema 14 *Si* $a_n \to L_1 > 0$ *y* $b_n \to L_2$ *entonces* $a_n^{b_n} \to L_1^{L_2}$.

Escolio.—Para que exista el segundo miembro es necesario que $L_1 > 0$.

Por otra parte, si $L_1 > 0$, a partir de cierto término, es $a_n > 0$ y el primer término tiene sentido.

Demostración: Pongamos $p_n = a_n^{b_n}$ y tomemos logaritmos neperianos:

$$\ln p_n = b_n \ln a_n.$$

Por ser $a_n \to L_1$ es: $\ln a_n \to \ln L_1$. Por la propiedad del producto:

$$b_n \ln a_n \to L_2 \ln L_1.$$

Ya que $\ln p_n \to L_2 \ln L_1$, será:

$$p_n = e^{\ln p_n} \to e^{L_2 \ln L_1} = [e^{\ln L_1}]^{L_2} = {L_1}^{L_2}.$$

Escolio.—En el primer teorema sobre potencias la base es constante y sólo varía el exponente; en el segundo, tanto la base como el exponente son variables.

2.13. Límite del cociente de dos polinomios

Uno de los límites más elementales y que aparece con más frecuencia en los cálculos es el siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(n)}{Q(n)},$$

siendo $P(n)$ y $Q(n)$ polinomios en n con coeficientes reales. Si gr$P$ designa *el grado del polinomio* P, pueden ocurrir tres posibilidades:

1.)

$$\mathrm{gr}P > \mathrm{gr}Q.$$

2.)

$$\mathrm{gr}P = \mathrm{gr}Q.$$

3.)

$$\mathrm{gr}P < \mathrm{gr}Q.$$

El siguiente teorema nos da automáticamente el resultado del límite:

Teorema 15 *Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite del cociente es infinito.*

Si ambos polinomios son del mismo grado, el límite del cociente es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado: $\frac{a_n}{b_n}$, siendo a_n el de P y b_n el de Q.

Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite es cero.

Aunque fácilmente se puede hacer una demostración, no la haremos, aunque sí tres ejemplos concretos, uno de cada uno de los tipos de límite del enunciado.

Primer ejemplo: Sea $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+6n+6}{n^2+2n+2}$. Dividiendo por n^2 numerador y denominador, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+6n+6}{n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3+\frac{6}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$

Dado que el numerador del segundo miembro tiende a infinito y el denominador tiende a 1, el cociente tiende a infinito.

Segundo ejemplo: Sea $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n+6}{4n^2+2n+2}$. Dividiendo por n^2 numerador y denominador, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n+6}{4n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3+\frac{6}{n}+6}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{4},$$

puesto que el numerador del segundo miembro tiende a 3 y el denominador a 4.

Tercer ejemplo: Sea $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+6}{n^2+2n+2}$. Dividiendo por n^2 numerador y denominador, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+6}{n^2+2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}+\frac{6}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = 0,$$

ya que el numerador tiende a 0 y el denominador a 1, y el límite del cociente es el cociente de los límites.

2.14. Infinitésimos equivalentes

Uno de los métodos más potentes y usuales de cálculo de límites es el empleo de infinitésimos equivalentes. Definamos en primer lugar la tal equivalencia:

Definición 27 *Dos infinitésimos a_n y b_n se dicen que son equivalentes, y se escribe $a_n \sim b_n$ si el límite de su cociente es la unidad:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

La propiedad esencial de esta equivalencia viene expresada por el siguiente teorema:

Teorema 16 *En un producto y en un cociente se puede sustituir un infinitésimo por otro equivalente.*

Demostración: Sea el producto $a_n c_n$ cuyo límite estamos calculando, siendo $a_n \sim b_n$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot (b_n c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} b_n c_n,$$

puesto que el primer límite es la unidad al ser a_n y b_n equivalentes.

Haga el alumno la demostración para el cociente $\frac{a_n}{c_n}$ que es, esencialmente, la misma anterior, pues que un cociente es sólo una forma especial de producto.

Para poder aplicar el teorema anterior es necesario disponer de algunas equivalencias; a continuación exponemos las más importantes: existen muchas más, pero todas son casos particulares de éstas:

EQUIVALENCIAS DE INFINITÉSIMOS	
Si $x \to 0$	$\operatorname{sen} x \sim x$
Si $x \to 0$	$\operatorname{tg} x \sim x$
Si $x \to 0$	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
Si $x \to 1$	$\ln x \sim x - 1$

Las equivalencias anteriores pueden probarse fácilmente por la regla de L'Hôpital, y el alumno las ha debido estudiar en cursos pasados. Vamos a ver cómo se aplican a casos concretos:

Ejemplo primero: Calcular:

$$\frac{\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4n+3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6n+5}}$$

.

Cuando $n \to \infty$ el ángulo $\frac{\pi}{4n+3}$ tiende a cero, y lo mismo le ocurre a $\frac{\pi}{6n+5}$; se tienen, pues, las equivalencias:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4n+3} \sim \frac{\pi}{4n+3},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6n+5} \sim \frac{\pi}{6n+5}.$$

Aplicándolas, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4n+3}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4n+3}}{\frac{\pi}{6n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+5}{4n+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo segundo: Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} n \cos \frac{n\pi}{2n+1}.$$

Es fácil ver que se trata de un límite del tipo $\infty \times 0$, pues el ángulo $\frac{n\pi}{2n+1}$ tiende a $\frac{\pi}{2}$ cuyo coseno es cero.

En la lista de equivalencias no hay ninguna con el coseno solo; pero podemos hallar una en este caso, aplicando la propiedad trigonométrica: $\operatorname{sen}\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.Aplicándola, tenemos:

$$\cos \frac{n\pi}{2n+1} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4n+2}.$$

Obsérvese que si $n \to \infty$ es: $\frac{\pi}{4n+2} \to 0$ y, por tanto:

$$\cos \frac{n\pi}{2n+1} \sim \frac{\pi}{4n+2}.$$

Aplicando esta equivalencia, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} n \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{4n+2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo tercero: Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} [\sqrt[3]{n^3+5n} - \sqrt[3]{n^3+3n}].$$

Sacando factor común el radical sustraendo resulta:

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt[3]{n^3+5n}-\sqrt[3]{n^3+3n}] = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}[\sqrt[3]{\frac{n^3+5n}{n^3+3n}}-1].$$

Dado que $\frac{n^3+5n}{n^3+3n} \to 1$ podemos aplicar la equivalencia $\ln x \sim x-1$:

$$\sqrt[3]{\frac{n^3+5n}{n^3+3n}}-1 \sim \ln\left(\sqrt[3]{\frac{n^3+5n}{n^3+3n}}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{n^3+5n}{n^3+3n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt[3]{n^3+5n}-\sqrt[3]{n^3+3n}] = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}[\sqrt[3]{\frac{n^3+5n}{n^3+3n}}-1] = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}\frac{1}{3}\ln\left(\frac{n^3+5n}{n^3+3n}\right).$$

Aplicándole al logaritmo neperiano del segundo miembro la citada equivalencia tenemos:

$$\ln\frac{n^3+5n}{n^3+3n} \sim \frac{n^3+5n}{n^3+3n}-1 = \frac{2n}{n^3+3n}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}[\sqrt[3]{n^3+5n}-\sqrt[3]{n^3+3n}] &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}\left[\sqrt[3]{\frac{n^3+5n}{n^3+3n}}-1\right] = \\
= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}\,\ln\left(\frac{n^3+5n}{n^3+3n}\right) &= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3n}\,\frac{2n}{n^3+3n} = \\
= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}}\,\frac{2n^2}{n^3+3n} &= 0
\end{aligned}$$

2.15. Regla de L'Hôpital

Sea $y = F(x)$ una función real de variable real, definida en el intervalo $[1,+\infty)$ que tiene límite cuando $x \to +\infty$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por: $a_n = F(n)$. Dado $\varepsilon > 0$ la definición de límite infinito de una función nos dice que existe $A > 0$ tal que:

$$|L - F(x)| < \varepsilon \text{ para } x \geq A.$$

Sea n_0 el menor número natural tal que $n_0 \geq A$; entonces, para $n \geq n_0$ es:

$$|L - a_n| = |L - F(n)| < \varepsilon.$$

Esto prueba que: $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Sean ahora $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones a las cuales se les puede aplicar la regla de L'Hôpital cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Aplicando lo visto para $a_n = F(n)$ tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Igualando el primer y el último miembro de la anterior igualdad, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Esta última igualdad es la regla de l'Hôpital para sucesiones, y las condiciones para su aplicación son las mismas ya conocidas para las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2+6n+6)}{\ln(4n^2+8n+8)}$.

Puesto que las derivadas respectivas del numerador y denominador son, respectivamente: $\frac{6n+6}{3n^2+6n+6}$ y $\frac{8n+8}{4n^2+8n+8}$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2+6n+6)}{\ln(4n^2+8n+8)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6n+6}{3n^2+6n+6}}{\frac{8n+8}{4n^2+8n+8}} = \lim_{n\to\infty} \frac{24n^3+\cdots}{24n^3+\cdots} = \frac{24}{24} = 1.$$

No se han calculado todos los términos del último numerador y del último denominador, porque sólo se necesitan los términos de mayor grado, al ser un cociente de polinomios.

2.16. Criterio de Stolz

Muchos límites se calculan por medio del siguiente

Teorema 17 (Criterio de Stolz) *Si B_n es monótona creciente y divergente, y existe:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}},$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}.$$

La demostración no la damos; pero el alumno puede verla en los ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS de MARTÍNEZ SALAS.

Veamos un ejemplo de su aplicación: Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}.$$

Puesto que $n^2 \to \infty$ y es monótona creciente, podemos aplicarle el criterio; entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Téngase presente que en este ejemplo:

$$A_n - A_{n-1} = n^2.$$

$$B_n - B_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1.$$

Veamos ahora unos corolarios del criterio que son importantes:

Corolario 10 *Si $a_n \to L$, entonces:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to L.$$

O sea: la sucesión de las medias aritméticas de una sucesión convergente, es también convergente y tiene el mismo límite.

Demostración: Basta aplicar el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Corolario 11 *La sucesión de las medias geométricas de una sucesión convergente de números positivos, es también convergente y tiene el mismo límite.*

Demostración: Sea $b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Tomando logaritmos neperianos, resulta:

$$\ln b_n = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}.$$

Ahora bien, por lo visto de los logaritmos es: $\ln a_n \to \ln L$, y como $\ln b_n$ es la media aritmética de los logaritmos de las a_n –corolario anterior– es:

$$\ln b_n \to \ln L.$$

Además:

$$b_n = e^{\ln b_n} \to e^{\ln L} = L.$$

Obsérvese que para poder tomar logaritmos, y para la existencia de las medias geométricas,*es necesario que las* a_n *sean positivas.*

Corolario 12 *Sea* a_n *una sucesión de números positivos tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ *exista; entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Demostración: $\sqrt[n]{a_n}$ puede escribirse así:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}}.$$

Si $a_n/a_{n-1} \to L$, aplicando el corolario anterior será: $\sqrt[n]{a_n} \to L$ puesto que es la media geométrica de la sucesión $\{a_n/a_{n-1}\}$.

Es importante notar que el límite de a_n/a_{n-1} no existe en muchos casos en los cuales sí existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Este último corolario será aplicado en la teoría de series, y allí se verán ejemplos.

2.17. Límites indeterminados

Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, de las que sólo sabemos que $a_n \to 4$ y $b_n \to 5$, podemos decir ya que $a_n - b_n \to -1$, sin conocer ambas sucesiones.

En cambio,si $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ *no es posible predecir nada sobre* $a_n - b_n$, *sin conocer previamente ambas sucesiones*, como puede verse en los ejemplos siguientes:

$$a) a_n = n^2 + 3 \quad b_n = n^2, \quad a_n - b_n \to 3;$$

$$b)a_n = n^2 + \alpha \quad b_n = n^2, \quad a_n - b_n \to \alpha;$$

$$c)a_n = n^2 + n \quad b_n = n^2, \quad a_n - b_n = n \to +\infty;$$

$$d)a_n = n^2 + (-1)^n \quad b_n = n^2, \quad a_n - b_n = (-1)^n \text{ carece de límite};$$

$$e)a_n = n^2 - n \quad b_n = n^2, \quad a_n - b_n = -n \to -\infty.$$

Así llegamos a la siguiente definición:

Definición 28 *Se llaman* **límites indeterminados** *a aquellos en que conociendo los límites de las sucesiones que intervienen, es imposible calcular el límite* **sin conocer cada una de las sucesiones.**

Los límites indeterminados son de los siguientes tipos:

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^\infty \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0.$$

Las anteriores expresiones sólo tienen valor simbólico, para recordar los límites de cada sucesión, y carecen de significado numérico.

Es fácil probar que todos los tipos anteriores pueden convertirse en el $\frac{0}{0}$ que es el principal; empecemos con el $\infty - \infty$: si $a_n \to \infty$ y $b_n \to \infty$ podemos poner:

$$a_n - b_n = \frac{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_n b_n}},$$

y es evidente que el numerador y el denominador tienden a cero. A pesar de su valor teórico, cuando se tiene que resolver un límite del tipo $\infty - \infty$ no se usa la igualdad anterior, y se opera de otras formas: sacar factor común el sustraendo, aplicar identidades sencillas ($A - B = \frac{A^2 - B^2}{A+B}$), ...

Si $a_n \to 0$ y $b_n \to \infty$, el producto $a_n b_n$ se puede escribir así:

$$a_n b_n = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}},$$

y es claro que tanto a_n como $\frac{1}{b_n}$ tienden a cero; luego ya están en el caso $\frac{0}{0}$.

El caso $\frac{\infty}{\infty}$, aunque la mayoría de las veces no es necesario hacerlo, también se puede llevar al $\frac{0}{0}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{1}{a_n}},$$

y en este caso tanto $\frac{1}{a_n}$ como $\frac{1}{b_n}$ tienden a cero.

Veamos ahora los límites potenciales: dejando aparte el caso 1^∞ porque será objeto de un estudio especial, en los tres casos se deben tomar logaritmos neperianos. Sea el caso $(+\infty)^0$, y llamemos p_n a la potencia ${a_n}^{b_n}$:

$$p_n = {a_n}^{b_n}.$$

Tomando logaritmos neperianos, resulta:

$$\ln p_n = b_n \ln a_n.$$

Ya que $a_n \to +\infty$, $\ln a_n \to +\infty$ por lo cual $\ln p_n$ es el producto de dos factores, de los cuales uno tiende a cero –b_n– y el otro a $+\infty$. Y ya hemos visto que este caso se reduce al $\frac{0}{0}$.

El alumno comprobará fácilmente los otros dos casos.

Si sabemos que $\ln p_n \to \lambda$, entonces $p_n = e^{\ln p_n}$ tiende a e^λ y este es el límite pedido.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo primero: Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1}$.

Como $\sqrt[n]{n^2+n+1} = (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}$ es un límite del tipo $(+\infty)^0$. Pongamos $p_n = \sqrt[n]{n^2+n+1}$ y tomemos logaritmos neperianos:

$$\ln p_n = \frac{\ln(n^2+n+1)}{n}.$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \ln p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{n}.$$

El límite del segundo miembro es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ al cual podemos aplicarle la regla de l'Hôpital. Haciéndolo, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \ln p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+n+1} = 0 = \ln(\lim_{n\to\infty} p_n).$$

Por tanto: $\lim_{n\to\infty} p_n = e^0 = 1$.

Ejemplo segundo: Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$.

Sea $p_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{\ln n}}$. Tomando logaritmos, tenemos:

$$\ln p_n = -\frac{\ln n}{\ln n} = -1.$$

Pasando al límite:

$$\lim_{n\to\infty} \ln p_n = -1 = \ln(\lim_{n\to\infty} p_n).$$

Por tanto: $\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2.18. Sucesiones definidas por recurrencia

La escala de recurrencia de una sucesión determina su carácter y sus restantes propiedades; como puede ser de tipos muy variados es imposible dar unas reglas generales. Lo único que puede hacerse es dar unos ejemplos que guíen en el estudio de estas sucesiones.

Es importante calcular el límite de la sucesión, una vez probada su existencia, a partir de una ecuación que se deduce de la escala, o aproximadamente, por medio de un proceso de iteración.

Ejemplo primero: Estudiar la sucesión definida así:

$$a_1 = 1.\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$

Los primeros términos de la sucesión son:

$$a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}},\ a_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \ldots$$

Se observa que $a_2 > a_1$ y $a_3 > a_2$. Una vez establecida la conjetura de que es creciente, es fácil probar que es *creciente* por inducción. Supongamos que $a_h > a_{h-1}$, y vamos a probar que $a_{h+1} > a_h$.

La escala de recurrencia puede escribirse así: $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$. Escribiendo esta igualdad para $n = h - 1$ y $n = h$, resulta:

$$\begin{aligned} a_{h+1}^2 &= 1 + a_h, \\ a_h^2 &= 1 + a_{h-1}. \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades miembro a miembro, resulta:

$$a_{h+1}^2 - a_h^2 = a_h - a_{h-1}.$$

De aquí se deduce:

$$a_{h+1} - a_h = \frac{a_h - a_{h-1}}{a_{h+1} + a_h}.$$

Como la hipótesis de inducción es que $a_h > a_{h-1}$ y el denominador de la fracción es positivo, por serlo todos los términos de la sucesión, es $a_{h+1} - a_h > 0$; o sea: $a_{h+1} > a_h$.

Si probamos que la sucesión está acotada superiormente, la sucesión es convergente; si no lo está, divergente; pero ya tenemos excluida la posibilidad de que sea oscilante. La demostración es la siguiente: de $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$n se deduce:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n+1}} < \frac{1 + a_n}{a_n} < 1 + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Por tanto, podemos escribir:

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Tomando límites en la escala de recurrencia $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$, resulta:

$$L^2 = 1 + L.$$

Esta ecuación nos proporciona el límite:

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La otra solución no es aceptable por ser negativa.

Ejemplo segundo: Estudiar la sucesión definida así:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}).$$

Los primeros términos son:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 9, a_5 = 36, a_6 = 225, \ldots$$

La conjetura que se establece al observar estos términos (sucesión creciente) se demuestra enseguida, para $n \geq 3$:

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \geq 2(a_{n-1} + a_{n-2}) > 2a_{n-1} > a_{n-1}.$$

Esto supone ya que no puede ser oscilante. El rápido aumento de los términos sugiere que no está acotada, lo cual se prueba fácilmente para $n \geq 4$:

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \geq (n-1)(1+1) = 2(n-1)$$

dado que $a_{n-1} > 1$ y $a_{n-2} > 1$. Si $A > 0$, a partir de cierto valor de n es:

$$a_n \geq 2(n-1) > A.$$

Esto prueba que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty.$$

2.19. Límites del tipo 1^{∞}

Un límite del tipo 1^{∞} es una potencia $a_n^{b_n}$ en la cual la base, a_n, tiende a 1 y el exponente, b_n, tiende a infinito.

Vamos a deducir la fórmula que expresa el límite de este tipo de potencias:

$$\lim_{n \to \infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n \to \infty} b_n (a_n - 1)}.$$

La relación de este tipo de límites con el número e es evidente: el mismo e es un límite de este tipo:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Sea $p_n = a_n^{b_n}$, y tomemos logaritmos neperianos:

$$\ln p_n = b_n \ln a_n.$$

Tomando límites resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \ln p_n = \lim_{n \to \infty} b_n \ln a_n = \lim_{n \to \infty} b_n (a_n - 1).$$

El paso del segundo al tercer miembro se ha hecho así: como $a_n \to 1$, el infinitésimo $\ln a_n$ es equivalente a $a_n - 1$ y se ha hecho la sustitución en el producto $b_n \ln a_n$.

Por tanto:

$$p_n = e^{\ln p_n} \to e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Una demostración de la fórmula, que se explica en los institutos de enseñanza media, es la siguiente:

$$a_n^{b_n} = (1 + a_n - 1)^{b_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n(a_n-1)} \to e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}.$$

Obsérvese que la potencia escrita entre corchetes tiene límite e, dado que la potencia $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ tiende a e cuando $x \to \infty$; esto se prueba fácilmente y se verá más adelante; además $\frac{1}{a_n-1} \to \infty$ por el hecho de que $a_n \to 1$.

Si *el límite que aparece en el exponente de e no existe la potencia carece de límite*, como se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo primero: Carácter de las sucesiones:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,\ c_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

Por lo ya visto $a_n \to e$, luego es convergente; aplicando la fórmula es $b_n \to \frac{1}{e}$, luego también converge.

Al aplicar la fórmula a la sucesión c_n en el exponente de e aparece la sucesión $(-1)^n$ que es oscilante; por tanto c_n también lo es y carece de límite. Es fácil explicar el resultado anterior: los términos impares de c_n son términos de una subsucesión de b_n y tienden a $\frac{1}{e}$; los pares pertenecen a a_n y tienden a e.

Ejemplo segundo: Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n+1}\right)^n.$$

Al aplicar la fórmula aparece en el exponente de e el límite:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n+1}.$$

Cuando $n \to \infty$, el ángulo $\frac{\pi}{n+1}$ tiende a cero; aplicando la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim x$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{n+1} = \pi.$$

Luego el límite pedido es: e^{π}.

2.20. Sucesiones de Cauchy

Un problema que está planteado desde que se definió el concepto de límite de una sucesión es el siguiente:

Hallar las condiciones necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente.

La respuesta a este problema está en los siguientes definición y teorema:

Definición 29 *Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, para todo par de índices p y q, tales que: $p, q \geq \alpha$ es:*

$$|a_p - a_q| < \varepsilon.$$

La idea que hay tras la definición es que para que los términos de la sucesión se aproximen al límite deben aproximarse entre sí.

El teorema es el siguiente:

Teorema 18 *La condición necesaria y suficiente para que una sucesión sea convergente es que sea de Cauchy.*

Demostración: Tenemos que probar dos implicaciones:

Condición necesaria: Si la sucesión es convergente, entonces es de Cauchy.

Condición suficiente: Si la sucesión es de Cauchy, entonces es convergente.

Dejando sin demostrar la segunda, porque necesita recursos que no son de este curso, vamos a probar la primera:

Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Si $\varepsilon > 0$, aplicamos la definición de límite con $\varepsilon/2$ y tenemos:

$$|a_n - L| < \varepsilon/2 \text{ siempre que } n \geq \alpha.$$

Sean p y q dos índices tales que: $p, q \geq \alpha$; entonces:

$$|a_p - a_q| = |(a_p - L) + (L - a_q)| \leq |a_p - L| + |L - a_q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Una sucesión que evidentemente no converge y no es de Cauchy es la de los números naturales, ya que, por ser $a_n = n$ es:

$$|a_{n+1} - a_n| = 1,$$

y tomando $\varepsilon < 1$ se ve que no es de Cauchy.

2.21. Límites superior e inferior de una sucesión

En muchas cuestiones científicas aparecen sucesiones que carecen de límite, y, que, sin embargo, deben ser caracterizadas por los números a que se aproximan sus términos.

La carencia de límite se debe a ser muy exigente este concepto: en efecto, decir que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ equivale a decir que **todos sus términos** a partir de uno de ellos está en el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Una forma de atenuar la exigencia de este concepto es la siguiente:

Definición 30 *Se dice que L es un* **límite de oscilación** *de la sucesión $\{a_n\}$ si, para todo $\varepsilon > 0$ existen infinitos términos de la sucesión en el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.*

Veamos un ejemplo: Sea la sucesión definida así:

$$a_n = \begin{cases} \text{Si } n = 3m-2, & 1; \\ \text{si } n = 3m-1, & 2; \\ \text{si } n = 3m, & 3. \end{cases}$$

La sucesión está formada por los números $1, 2$ y 3 que se repiten infinitas veces:

$$1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Es claro que dichos números $1, 2$ y 3 son límites de oscilación; porque, razonando con el 1, en el intervalo $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ hay infinitos 1(infinitos términos de la sucesión); y lo mismo ocurre con el 2 y el 3.

Puede haber, por tanto, varios números que sean límites de oscilación de una sucesión. Por esta posibilidad, se hace la siguiente definición:

Definición 31 *Al mayor de los límites de oscilación de una sucesión se le llama* **límite superior** *de la sucesión, y se denota:* $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

Al menor de los límites de oscilación se le llama **límite inferior**, *y se denota por* $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

La teoría de los números reales nos proporciona el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración:

Teorema 19 *Toda sucesión acotada de números reales posee un límite superior y un límite inferior únicos.*

La sucesión del ejemplo anterior está acotada y sus límites superior e inferior son:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 3, \ \liminf_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Si una sucesión no está acotada superiormente se conviene en que su límite superior es $+\infty$; si no lo está inferiormente, su límite inferior es $-\infty$. De esta manera, toda sucesión posee límite superior y límite inferior.

Propiedades muy elementales de los límites superior e inferior son las siguientes:

1) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

2) Si existe el límite de la sucesión es:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Ambas propiedades son consecuencia inmediata de las definiciones de los conceptos que aparecen en ellas.

2.22. Fórmula de Stirling

Se llaman *infinitos* a las sucesiones que tienen este límite. Es evidente que el recíproco de un infinitésimo es un infinito, y recíprocamente. Por ello tienen propiedades muy parecidas;así tenemos la siguiente definición:

Dos infinitos son equivalentes si el cociente de los mismos tienen por límite 1.

Y también se verifica el teorema análogo al de los infinitésimos:

Teorema 20 *En un producto o en un cociente se puede sustituir un infinito por otro equivalente.*

La demostración es igual a la ya estudiada y muy sencilla, y se deja al alumno como ejercicio.

La equivalencia de infinitos más importante es la siguiente:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n \text{ (Fórmula de Stirling).}$$

Esta fórmula permite calcular valores aproximados de la factorial, para valores grandes de n, y el cálculo de límites en los que figura la factorial.

El significado de la equivalencia es el siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n} = 1.$$

Cuando n toma valores muy grandes, numerador y denominador de la anterior fracción son casi iguales, y por tanto la factorial y la expresión de Stirling son aproximadamente iguales. Pero incluso con pequeños se puede ver la bondad de la aproximación: para $n = 10$, tenemos:

$$10! = 3628800, \ \sqrt{20\pi}10^{10}e^{-10} = 3598600, \ldots$$

Para $n = 1000$ la fórmula de Stirling da $40235 \cdot 10^{2349}$ que se demuestra tiene cuatro cifras exactas.

Veamos un ejemplo de cálculo de límites:

Ejemplo: Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ *siendo* $a > 1$.

En este cociente tanto el numerador como el denominador son infinitos:

$$\text{Si}\, a > 1, a^n \to +\infty, \text{cuando}\, n \to \infty.$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (\frac{ae}{n})^n = 0. \end{aligned}$$

Vamos a justificar ahora el resultado final: es evidente que $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$; tomando logaritmos es muy fácil ver que la potencia $(\frac{ae}{n})^n$ también tiende a cero,pues la base tiende a cero, y el exponente a infinito. En conclusión, el producto de las dos sucesiones anteriores es cero.

Más en general: toda potencia $b_n^{e_n}$ en que *la base tiende a cero, conservándose positiva (ésto se expresa así* $b_n \to 0^+$*),y el exponente a* $+\infty$ *tiene por límite cero.* En efecto, sea $p_n = b_n^{e_n}$;tomando logaritmos es:

$$\ln p_n = e_n \ln b_n \to -\infty,$$

pues si $b_n \to 0^+, \ln b_n \to -\infty$ y $e_n \to +\infty$, y el producto del segundo miembro de $\ln p_n$ tiende a $-\infty$; por tanto:

$$p_n = b_n^{e_n} \to 0.$$

Este resultado podemos resumirlo así: $(0^+)^{+\infty} = 0$. Por esta causa no figuran los límites de esta forma en la lista de los indeterminados.

Hay otra forma elemental de calcular el límite anterior: si nos fijamos en que tanto numerador como denominador son producto de n factores, podemos escribir:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{n}.$$

Como la sucesión $\frac{a}{n}$ es un infinitésimo, para $n > n_0$ es:

$$\frac{a}{n} < \frac{1}{2}.$$

Hemos tomado $1/2$ por ser el número más sencillo menor que uno, pero cualquier otro inferior a la unidad serviría.

Tomando $n > n_0$, sería:

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Ya que $(\frac{1}{2})^{n-n_0} \to 0$ cuando $n \to \infty$, deducimos que $\dfrac{a^n}{n!}$ está comprendida entre dos infinitésimos, y, por tanto también es un infinitésimo.