Capítulo 1

Números complejos

1.1. Introducción

La operación radicación no siempre es posible en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. El caso más sencillo de tal imposibilidad es la raíz cuadrada de un número negativo.

Por ejemplo, no existe ningú número real x tal que $x = \sqrt{-1}$, pues, $x^2 \geq 0$, y no puede ser $x^2 = -1$.

Otros problemas sencillos tampoco poseen solución, como los siguientes:

$$\ln(-3); \qquad \operatorname{arc\,sen} 2; \qquad (-2)^\pi.$$

Por otra parte, los números reales es un conjunto numérico que está en correspondencia biunívoca con los puntos de la recta: a cada punto le corresponde un número; y, recíprocamente, a cada número le corresponde un sólo punto. Enseguida surge la pregunta: ¿Es posible encontrar un conjunto numérico tal que se tenga la misma correspondencia anterior entre él y los puntos del plano? Todas estas cuestiones nos llevan a introducir el nuevo conjunto de los números complejos.

1.2. Definición e igualdad de complejos

Definición 1 *Se llama número complejo a un* **par ordenado** (a, b) *de números reales:* $a \in \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$.

Al ser un par *ordenado* no es lo mismo el número complejo $(1, 2)$ que el $(2, 1)$. Los números a y b son las componentes del complejo: a es la *primera componente*, y b *la segunda*.

Definición 2 *Dos números complejos* (a, b) *y* (a', b') *son* **iguales** *si y solamente si* $a = a'$ *y* $b = b'$*:*

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a' \text{ y } b = b'.$$

El conjunto de todos los números complejos se denotará por $\mathbb{C}$.

Otras dos definiciones importantes son las siguientes:

Definición 3 *Los complejos* (a, b) *y* $(a, -b)$ *se llaman* **conjugados***.*

Definición 4 *Los complejos* (a, b) *y* $(-a, -b)$ *se llaman* **opuestos***.*

1.3. Representación geométrica de los números complejos

Al número complejo (a, b) se le representa geométricamente de dos formas: la primera es asignarle el punto $P(a, b)$ en un sistema de coordenadas cartesiano (ver figura 1.1).

Este punto P, cuya abcisa es a y cuya ordenada es b, recibe el nombre de *afijo* del complejo.

La segunda representación es el vector $\overrightarrow{OP}$ cuyo origen es O, origen de coordenadas, y cuyo extremo es P.

Es evidente que de esta forma hemos conseguido un conjunto numérico que está en correspondencia biunívoca con el conjunto de todos los puntos del plano, y hemos resuelto el problema planteado en la introducción.

1.4. Suma de números complejos

La suma de números complejos se define así:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Obsérvese la ambigüedad del signo + en la fórmula anterior: el primero designa la suma de complejos, y el segundo y tercero son la suma de reales.

Como es de esperar, la nueva operación es definida por otra ya conocida.

O sea:

Definición 5 *La suma de dos números complejos es el complejo cuya primera componente es la suma de las primeras componentes, y cuya segunda es la suma de las segundas.*

Las propiedades de esta operación son las siguientes:

1. PROPIEDAD ASOCIATIVA: $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$.

2. EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: $(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b)$.

3. EXISTENCIA DE ELEMENTO OPUESTO : Para todo $(a,b)\in\mathbb{C}$ existe $(-a,-b)$ tal que:

$$(a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)=(0,0).$$

4. CONMUTATIVA : $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$.

Las tres primeras dotan al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, con la operación suma, de la estructura de *grupo*; además, la cuarta hace que dicho grupo sea *conmutativo o abeliano*.

1.5. Producto de complejos

El producto de dos complejos se define así:

$$(a,b)\times(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c).$$

Ejemplos:

1)$(0,1)\times(0,1)=(-1,0)$.

2)$(1,2)\times(3,4)=(1\cdot 3-2\cdot 4,1\cdot 4+2\cdot 3)=(-5,10)$.

Las propiedades del producto de complejos son las siguientes:

1. PROPIEDAD ASOCIATIVA: $[(a,b)\times(c,d)]\times(e,f)=(a,b)\times[(c,d)\times(e,f)]$.

2. EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: $(a,b)\times(1,0)=(1,0)\times(a,b)=(a,b)$.

3. EXISTENCIA DE ELEMENTO INVERSO : Para todo $(a,b)\neq(0,0)$ existe (a',b') tal que:

$$(a,b)\times(a',b')=(1,0)$$

4. CONMUTATIVA : $(a,b)\times(c,d)=(c,d)\times(a,b)$.

5. DISTRIBUTIVA: $(a,b)\times[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\times(c,d)+(a,b)\times(e,f)$.

Estas propiedades convierten a $(\mathbb{C}, +, \times)$ en un cuerpo con las mismas propiedades que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. La demostracin de las mismas es obvia; pero, por su importancia, probaremos la tercera.

Si dado $(a, b) \neq (0, 0)$, existe (x, y) tal que:

$$(a, b) \times (x, y) = (1, 0),$$

se tiene que cumplir:

$$(ax - by, ay + bx) = (1, 0).$$

Esto nos conduce al siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & 1 \\ bx & + & ay & = & 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas, al que se puede aplicar la regla de Cramer. Esta regla nos dice que el sistema tiene solución única y determinada si el determinante del sistema es no nulo. Pero este es:

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2.$$

Como $(a, b) \neq (0, 0)$ al menos uno de los números a o b es no nulo, de manera que el determinante $a^2 + b^2$ es distinto de cero. En consecuencia, el sistema dado posee solución única. Aplicando la citada regla resulta:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

1.6. Forma binómica de un número complejo

El número complejo (a, b) se puede escribir así:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Ahora bien, los números complejos de la forma $(a, 0)$ se pueden *identificar* con los reales. En efecto:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0).$$

$$(a,0)\times(b,0)=(ab,0).$$

Haciendo la identificación $(r,0)=r$, resulta:

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=a\cdot 1+b\cdot(0,1)=a+b(0,1).$$

Por razones históricas, al número complejo $(0,1)$ se le llama i:

$$(0,1)=i.$$

En consecuencia: $(a,b)=a+bi$.

Se ha visto ya que $i\times i=(-1,0)=-1$. Por tanto $i^2=-1$, y se puede escribir $i=\sqrt{-1}$.

Por esta razón, en los libros del XIX y de principios del siglo XX los complejos se escribían como $a+b\sqrt{-1}$.

1.7. Suma y resta de complejos en forma binómica

La forma binómica escribe un complejo como si fuera un binomio algebraico de la forma $a+bx$,y se suman y se restan igual que estos.

Así:

$$a+bi+a'+b'i-a''-b''i=(a+a'+a'')+i(b+b'-b'').$$

En forma cartesiana, tendríamos:

$$(a,b)+(a',b')-(a'',b'')=(a+a'-a'',b+b'-b'').$$

1.8. Producto en forma binómica

Para multiplicar complejos en forma binómica, se procede igual que si estuviéramos operando con binomios algebraicos del tipo $a+bx$, y luego se pone $i^2=-1$:

$$(a+bi)\times(a'+b'i)=aa'+ab'i+a'bi+bb'i^2=aa'-bb'+(ab'+a'b)i.$$

En forma cartesiana, sería:

$$(a,b)\times(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b).$$

1.9. División en forma binómica

Como los números complejos tienen las mismas propiedades operativas que los números reales, las identidades de los números reales son aplicables a los complejos. Entre ellas, está la siguiente:

$$(A+B)\times(A-B)=A^2-B^2.$$

Apliquemos esta identidad a la pareja de complejos $a+bi$ y $a-bi$, los cuales se dicen que son *conjugados*:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2\geq 0.$$

Obsérvese que $a^2+b^2\in\mathbb{R}$: *es un número real.*

Apliquemos al cálculo del cociente $\frac{a'+b'i}{a+bi}$:

$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{(a+b'i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a'a+bb'+(ab'-a'b)i}{a^2+b^2}=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\,i.$$

De esta manera obtenemos en forma binómica el cociente, que es la forma en que fueron dados dividendo y divisor.

1.10. Potenciación de complejos

I) *Potencias del número i.*

Se tienen los siguientes resultados:

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1.$$

Al ser $i^4=1$, se repiten estos valores, en periodos de cuatro, al calcular cualquier otra potencia de i; de modo que:

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i.$$

Esto nos permite calcular cualquier potencia de i rápidamente. Ejemplo:

Calcular la potencia i^{9876}. Como $9876 = 4 \times 2469$, es:

$$i^{9876} = i^0 = 1.$$

II)Potencia de un número cualquiera en forma binómica.

Puesto que los complejos poseen las mismas propiedades operativas que los reales, el cálculo de la potencia $(a+bi)^n$ se hace igual que el binomio $(a+b)^n$, por la fórmula ya estudiada:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Ejemplo: Calcular la potencia $(1+i)^4$. Como el desarrollo del binomio, para $n = 4$ es:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

resulta:

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

1.11. Raíz cuadrada en forma binómica

Vamos a calcular la raíz cuadrada de un número complejo $a+bi$ en forma binómica. Sea $x+iy$ la tal raíz: por definición, si $\sqrt{a+bi} = x+iy$, será: $(x+iy)^2 = a+bi$. Desarrollando el cuadrado:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

Luego tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema, podemos despejar la y en la segunda ecuación, y obtener una ecuación de cuarto grado bicuadrada. Pero una forma mejor de hacerlo es la siguiente: Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando, resulta:

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 = r^2.$$

Enseguida veremos el significado geométrico de este r^2, al tratar la forma trigonométrica de los complejos: es el cuadrado del módulo del complejo $a + bi$. Así resulta:

$$x^2 + y^2 = r.$$

Uniendo esta ecuación con la $x^2 - y^2 = a$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 + y^2 & = r \\ x^2 - y^2 & = a \end{array}\right\}$$

Este sistema es de mucha más fácil solución que la ecuación anterior: sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$x = \pm\sqrt{\frac{r+a}{2}} \quad y = \pm\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

Puede pensarse que existen cuatro soluciones al combinar los dos valores de x con los dos de y, pero no es así sólo podemos tomar los valores de ambos acordes con la ecuación $2xy = b$. Si b es positivo, x e y deben tener el mismo signo: los dos positivos, o los dos negativos; si b es negativo, x e y deben tener signos contrarios.

Los valores impropios obtenidos al combinar arbitrariamente x e y se deben a la elevación al cuadrado usada para obtener el segundo sistema.

Ejemplo: Hallar, en forma binómica, la raíz cuadrada de $16 + 30i$.

Aplicando las igualdades anteriores sobre x e y, tenemos:

$$x = \sqrt{\frac{34+16}{2}} = \pm 5 \quad y = \sqrt{\frac{34-16}{2}} = \pm 3.$$

Por ser $b = 30$, deben tomarse x e y ambos con el mismo signo: los dos positivos o los dos negativos. Luego las raíces son:

$$r_1 = 5 + 3i \quad r_2 = -5 - 3i.$$

1.12. Forma trigonométrica de un número complejo

Sea $P(a,\, b)$,ver figura 1.1, el punto que representa el complejo $a+bi$, y $\vec{OP}$ el vector correspondiente.

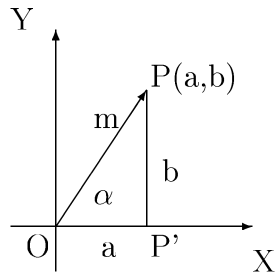

Figura 1.1: Representación geométrica de un complejo

Veamos dos definiciones:

Definición 6 *Se llama módulo del complejo $a+bi$ al del vector $\vec{OP}$.*

Definición 7 *Se llama argumento del complejo $a+bi$ al ángulo que forma el vector $\vec{OP}$ con la parte positiva del eje OX.*

Consideremos el triángulo rectángulo OPP siendo P la proyección ortogonal del punto P sobre el eje OX.

El teorema de Pitágoras aplicado al mismo, nos da:

$$m = +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Recuerde el lector, que el módulo de un complejo, al serlo de un vector, es siempre positivo: como mínimo, nulo: **no puede ser nulo.**

Aplicando la definición de seno y coseno al ángulo α, argumento del complejo $a+bi$, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{a}{m}, \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{m}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

De aquí deducimos:

$$a = m\cos\alpha, b = m\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Sustituyendo estos valores es: $a + bi = m(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$. La expresión $m(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ es la llamada **forma trigonométrica del número complejo.**

Para calcular el módulo y el argumento de un complejo tenemos, pues, dos fórmulas:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \mathrm{tg}\,\alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

La aplicación de la fórmula del módulo no tiene dificultad alguna; pero la del argumento es ambigua: hay dos ángulos en la circunferencia que poseen la misma tangente.

¿Cómo se resuelve esta ambigüedad? Con la siguiente regla práctica:

Regla práctica.—Para calcular el valor del argumento con la fórmula de la tangente basta ver cuál es el cuadrante donde se encuentra el afijo del complejo.

Veamos unos ejemplos:

Ejemplo $1.^0$. *Forma trigonométrica del complejo* $1 + i$.

Tenemos:$m = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \tan\alpha = \frac{1}{1} = 1.$

Hay dos ángulos con tangente 1: uno es 45^0; el otro es: $45^0 + 180^0 = 225^0$.

Al estar el afijo $(1,1)$ en el primer cuadrante, el argumento pedido es 45^0, y la forma trigonométrica es:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\,\mathrm{sen}\,45^0).$$

Ejemplo $2.^0$. *Forma trigonométrica del complejo* $-1 + i$.

Tenemos:$m = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \tan\alpha = \frac{1}{-1} = -1.$

Hay dos ángulos con tangente -1: uno es $180^0 - 45^0 = 135^0$; el otro es: -45^0.

Como el afijo es $(-1,1)$, que está situado en el segundo cuadrante, la solución es: 135^0.

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos 135^0 + i\,\mathrm{sen}\,135^0).$$

Ejemplo $3.^0$. *Forma trigonométrica del complejo* $-1 - i$.

Tenemos:$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \tan\alpha = \frac{-1}{-1} = 1$.

Hay dos ángulos con tangente 1: uno es 45^0; el otro es: $45^0 + 180^0 = 225^0$.

Al ser el afijo $(-1, -1)$, y estar situado en el tercer cuadrante, el argumento es 225^0.

$$-1 - i = \sqrt{2}(\cos 225^0 + i \operatorname{sen} 225^0).$$

Ejemplo $4.^0$. *Forma trigonométrica del complejo* $1 - i$.

Tenemos:$m = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \tan\alpha = \frac{-1}{1} = -1$.

Hay dos ángulos con tangente -1: uno es $180^0 - 45^0 = 135^0$; el otro es: $360^0 - 45^0 = 315^0$.

El afijo es $(1, -1)$, y está en el cuarto cuadrante. El argumento es : 315^0.

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^0 + i \operatorname{sen} 315^0).$$

Ejemplo $5.^0$. *Forma trigonométrica del complejo* $-\sqrt{3} + i$.

Tenemos:

$$m = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2; \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hay dos ángulos con tangente $-\frac{1}{\sqrt{3}}$: uno es $180^0 - 30^0 = 150^0$; el otro es: $360^0 - 30^0 = 330^0$..

Como el afijo $(-\sqrt{3}, 1)$ está en el segundo cuadrante, el ángulo es 150^0.

$$-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150^0 + isen150^0).$$

1.13. Producto en forma trigonométrica

La forma trigonométrica posee notables propiedades: la primera de ellas está expresada por el siguiente teorema:

Teorema 1 *El módulo del producto de dos complejos es el producto de los módulos; y el argumento del producto es la suma de los argumentos.*

Demostración: Calculemos el producto $m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \times m'(\cos\alpha' + i \operatorname{sen}\alpha')$ en forma binómica; para ello basta quitar los paréntesis:

$$\begin{aligned} m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) &\times m'(\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha') = \\ = [m\cos\alpha + im\operatorname{sen}\alpha] &\times [m'\cos\alpha' + im'\operatorname{sen}\alpha'] = \\ = [mm'\cos\alpha\cos\alpha' - mm'\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'] &+ i[mm'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha' + mm'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha'] = \\ = mm'[\cos(\alpha+\alpha') &+ i\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')]. \end{aligned}$$

En la demostración anterior se han usado las fórmulas trigonométricas del coseno y el seno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\alpha') &= \cos\alpha\cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha', \\ \operatorname{sen}(\alpha+\alpha') &= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha'. \end{aligned}$$

.

Ejemplo: Calcular el producto $(1+i)\times(\sqrt{3}+i)$.
Al ser $1+i = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\operatorname{sen}45^0)$ y $\sqrt{3}+i = 2(\cos 30^0 + i\operatorname{sen}30^0)$, tenemos:

$$\begin{aligned} (1+i)\times(\sqrt{3}+i) &= \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\operatorname{sen}45^0)\times 2(\cos 30^0 + i\operatorname{sen}30^0) = \\ &= 2\sqrt{2}(\cos 75^0 + i\operatorname{sen}75^0) = 2\sqrt{2}[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \\ &= \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1). \end{aligned}$$

En el cálculo anterior aparecen los valores: $\operatorname{sen}75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $\cos 75^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, valores que debe obtener el alumno con las fórmulas antes expuestas de $\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)$ y $\cos(\alpha_1+\alpha_2)$;también debe hacer el cálculo en forma binómica y comprobar que se obtiene lo mismo.

1.14. Cociente en forma trigonométrica

El cociente de dos complejos en forma trigonométrica está expresado en el siguiente

Teorema 2 *El módulo del cociente de dos complejos es el módulo del dividendo dividido por el del divisor;el argumento del cociente es la diferencia de los dos argumentos.*

La fórmula del teorema es la siguiente:

$$\frac{m'(\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha')}{m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{m'}{m}(\cos(\alpha' - \alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha).$$

Demostración: Si el enunciado es verdadero, al multiplicar el divisor por el cociente,obtendremos el dividendo.

En efecto:

$$\frac{m'}{m}(\cos(\alpha' - \alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha' - \alpha) \times m(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha) = m'(\cos(\alpha') + i\operatorname{sen}(\alpha'),$$

pues el módulo del producto es: $\frac{m'}{m} \times m = m'$; y el argumento del producto es:$(\alpha' - \alpha) + \alpha = \alpha'$.

Ejemplo: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen} -\frac{\pi}{4})} = \cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$.
Este resultado debe comprobarlo el alumno en forma binómica.

1.15. Potencias en forma trigonométrica: fórmula de Moivre.

Las potencias de un complejo en forma trigonométrica se calculan por esta importante fórmula, llamada fórmula de Moivre:

$$[m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^n = m^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha). \tag{1.1}$$

Demostración: La haremos por inducción completa. Para $n = 1$, en el primer miembro, tenemos:

$$[m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^1 = m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha),$$

pues un número elevado a uno es el mismo número; el segundo miembro es entonces:

$$m^1(\cos 1\alpha + i\operatorname{sen} 1\alpha) = m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha),$$

luego se verifica la igualdad.

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para $n = h$:

$$[m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^h = m^h(\cos h\alpha + i \operatorname{sen} h\alpha);$$

hemos de probar que es cierta para $n = h + 1$. Tenemos entonces:

$$[m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^{h+1} = [m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^h \times m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= m^h(\cos h\alpha + i \operatorname{sen} h\alpha) \times m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= m^{h+1}(\cos(h+1)\alpha + i \operatorname{sen}(h+1)\alpha).$$

En el último producto hay dos complejos en forma trigonométrica: sus módulos son m^h y m, cuyo producto es: $m^h \times m = m^{h+1}$; la suma de los argumentos es: $h\alpha + \alpha = (h+1)\alpha$. Luego la fórmula es cierta.

Ejemplo 1.—Calcular i^{4m+3}, siendo m un natural cualquiera.

Al ser $i = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$, resulta:

$$i^{4m+3} = \cos(\frac{3\pi}{2} + 2m\pi) + i \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + 2m\pi) = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -i,$$

resultado que ya conocíamos en forma binómica.

Ejemplo 2.—Calcular de dos maneras la siguiente potencia:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^2$$

y utilizarlas para obtener fórmulas trigonométricas para $\cos 2\varphi$ *y* $\operatorname{sen} 2\varphi$.

La fórmula de Moivre nos da: $(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi$.

La fórmula $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ nos da:$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi + i2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$.

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \\ \operatorname{sen} 2\varphi &= 2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

.

Ejemplo 3.—Obtener las fórmulas $\cos 3\varphi$ *y* $\operatorname{sen} 3\varphi$ *utilizando el método del ejemplo anterior.*

Soluciones: $\cos 3\varphi = \cos^3 - 3\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi$ y $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi$.

1.16. Radicación en forma trigonométrica

Sea $m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ un complejo en forma trigonométrica, y vamos a calcular sus raíces n-ésimas. Si $x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$ es una de éstas, es:

$$\sqrt[n]{m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = x(\cos y + i\operatorname{sen} y).$$

Por la definición de raíz enésima, debe ser:

$$[x(\cos y + i\operatorname{sen} y)]^n = m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha).$$

Aplicando al primer miembro la fórmula de Moivre, resulta:

$$x^n(\cos ny + i\operatorname{sen} ny) = m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha).$$

Para que estos complejos sean iguales, es necesario que tengan el mismo módulo:$x^n = m$. De donde:

$$x = \sqrt[n]{m}.$$

Esta fórmula no presenta ningún problema, porque al ser el módulo de un vector es siempre positivo.

Para que sean iguales, deben tener los mismos cosenos y senos:

$$\cos ny = \cos\alpha,\ \operatorname{sen} ny = \operatorname{sen}\alpha.$$

Si los ángulos ny y α tienen los mismos senos y cosenos, también tienen iguales las demás razones:tangentes, cotangentes, secantes ... Un teorema de la Trigonometría dice que si dos ángulos tienen las mismas razones, se deben diferenciar en un número exacto de circunferencias:

$$ny = \alpha + 360^0 k, k \in \mathbb{Z}.$$

Luego: $y = \frac{\alpha + 360^0 k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia:

$$\sqrt[n]{m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{m}\left[\cos\frac{\alpha + 360^0 k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha + 360^0 k}{n}\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Como el parámetro k que aparece en la fórmula anterior toma infinitos valores, podemos llegar a la falsa conclusión de que hay infinitas raíces enésimas de un número complejo; vamos a probar que *hay exactamente n raíces enésimas.*

Sea k un entero cualquiera positivo,nulo o negativo. Al hacer la división entera por n obtenemos un cociente c y un resto r siendo:

$$k = nc + r,\ 0 \leq r \leq n - 1.$$

Entonces: $\frac{\alpha + 360^0 k}{n} = \frac{\alpha + 360^0 nc + 360^0 r}{n} = \frac{\alpha + 360^0 r}{n} + 360^0 c$. Y resulta:

$$\cos\frac{\alpha + 360^0 k}{n} = \cos\frac{\alpha + 360^0 r}{n},\ \operatorname{sen}\frac{\alpha + 360^0 k}{n} = \operatorname{sen}\frac{\alpha + 360^0 r}{n}.$$

Como r sólo toma los n valores del 0 al $n - 1$, la raíz enésima *sólo toma n valores:*

$$\sqrt[n]{m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{m}\left[\cos\frac{\alpha + 360^0 k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha + 360^0 k}{n}\right],\ 0 \leq k \leq n - 1.$$

Conclusión: un complejo posee dos raíces cuadradas, tres cúbicas, cuatro cuartas $\ldots n$ raíces enésimas.

Si representamos las n raíces, como todas tienen el mismo módulo, $\sqrt[n]{m}$, y forman entre sí un ángulo $\frac{360}{n}$, los afijos forman *un polígono regular de n lados.*

Ejemplo 1.—Hallar las raíces cuadradas de i.

Aplicando la fórmula a $i = \cos 90^0 + i\operatorname{sen} 90^0$, tenemos:

$$\sqrt{\cos 90^0 + i\operatorname{sen} 90^0} = \cos\frac{90^0 + 360^0 k}{2} + i\operatorname{sen}\frac{90^0 + 360^0 k}{2}, k = 0, 1.$$

Las raíces son: $r_1 = \cos 45^0 + i\operatorname{sen} 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

$r_2 = \cos 225^0 + i\operatorname{sen} 225^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Ejemplo 2.—Hallar las raíces cúbicas de -1.

En este caso:$-1 = \cos 180^0 + i\operatorname{sen} 180^0$; aplicando la fórmula:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos 180^0 + i \operatorname{sen} 180^0} = \cos \frac{180^0 + 360^0 k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Para $k = 0$, obtenemos: $r_1 = \cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si $k = 1, r_2 = \cos 180^0 + i \operatorname{sen} 180^0 = -1$.

Si $k = 2, r_3 = \cos 300^0 + i \operatorname{sen} 300^0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.17. Coordenadas polares

Sea O un punto cualquiera del plano al que llamaremos *polo*; y una semirrecta OX de las que pasan por O, a la que llamaremos *eje polar*. Un punto P cualquiera del plano queda determinado cuando conocemos el módulo m del vector $\vec{OP}$ y el ángulo α que forma dicho vector con el eje polar.

m y α son las coordenadas polares del punto P, y escribimos m_α. Supongamos ahora que el polo coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesiano, en el cual el eje OX es el eje polar (ver figura **??**). Las coordenadas cartesianas del punto P cuyas coordenadas polares son m_α son: $a = m \cos \alpha, b = m \operatorname{sen} \alpha$.

También la expresión anterior es *la forma polar del complejo* $a+bi$: m_α. En esta forma el producto de complejos se escribe:

$$m_\alpha \times m'_{\alpha'} = mm'_{\alpha+\alpha'}.$$

Y la fórmula de Moivre:

$$(m_\alpha)^n = {m^n}_{n\alpha}.$$

Para concluir, veamos las distintas formas de un número complejo:

$$\text{Cartesiana} : (a, b); \text{Binómica} : a + bi; \text{Trigonométrica} : m(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha); \text{Polar} : m_\alpha.$$

1.18. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos como cuerpo algebraicamente cerrado

Uno de los resultados capitales de las Matemáticas del siglo XIX es el llamado

Teorema 3 (Teorema Fundamental del Álgebra) *Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos posee una raíz real o compleja.*

Como consecuencia de este teorema, se verifica esta propiedad importantísima:

Corolario 1 *Todo polinomio $P_n(x)$ de grado n y coeficientes complejos puede ser factorizado así:*

$$P_n(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

siendo a_n el coeficiente de mayor grado, y $r_1, r_2, \ldots, r_n$ las n raíces.

En conclusión: para resolver una ecuación algebraica de orden n con coeficientes complejas no es preciso buscar las raíces fuera de los complejos, porque todas son reales o complejas. Este hecho se expresa diciendo que *el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado.*

El alumno conoce ya una aplicación de este teorema: la integración de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Para ello se factoriza el polinomio denominador en sus raíces; si la raíz es real, al descomponer la fracción $P(x)/Q(x)$ en fracciones simples, se incluye un fracción de la forma $\frac{A}{x-r}$; si es compleja: $a + bi$, se incluye una fracción de la forma:

$$\frac{Mx + N}{(x - a)^2 + b^2},$$

pues si el polinomio posee la raíz $a + bi$, también posee la conjugada: $a - bi$ (ver el siguiente ejercicio).

Ejercicio: Si z es un complejo, su conjugado lo designaremos por $\bar{z}$. Probar las siguientes propiedades:

a) $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2}$.

b) $z_1 \bar{\times} z_2 = \bar{z_1} \times \bar{z_2}$.

c) Como consecuencia de a) y b), probar que si *un polinomio con coeficientes reales* posee una raíz compleja también posee a la conjugada $\bar{z}$.