UCA Universidad de Cádiz

ESI Escuela Superior de Ingeniería

TEMA I: MATRICES

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática.
Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Definición (Matriz de orden $m \times n$)

*Se llama **matriz de orden** $m \times n$ a cualquier tabla rectangular A formada por $m \cdot n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas. Los elementos que forman la matriz suelen ser números reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$).*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Definición (Matriz de orden $m \times n$)

Se llama ***matriz de orden*** $m \times n$ *a cualquier tabla rectangular A formada por $m \cdot n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas. Los elementos que forman la matriz suelen ser números reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$).*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Cada elemento de una matriz se identifica por la fila y la columna a la que pertenece. Las filas se enumeran de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha. Así, el elemento (i, j) de una matriz es el número que pertenece simultáneamente a la fila i y a la columna j, denotado por a_{ij}.

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con elementos en $\mathbb{R}$ se representa por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. En general si una matriz A tiene m filas y n columnas, diremos que el orden es $m \times n$.

Definición (Matriz de orden $m \times n$)

Se llama ***matriz de orden*** $m \times n$ *a cualquier tabla rectangular* A *formada por* $m \cdot n$ *elementos dispuestos en* m *filas y* n *columnas. Los elementos que forman la matriz suelen ser números reales* ($\mathbb{R}$) *o complejos* ($\mathbb{C}$)*.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -8 & 5 \\ -2 & \frac{3}{5} & \sqrt{7} & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A es una matriz de orden 3×4, $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$, y por ejemplo, el elemento a_{23} vale -8. B es una matriz de orden 3×1, $B \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ y el elemento $(3,1)$ de la matriz B es el 5.

Tipos de Matrices

- Una matriz se llama matriz fila cuando $m = 1$, es decir, sólo tiene una fila y su orden es $1 \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir, su orden es $m \times 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

- Se llama matriz nula a la matriz cuyos elementos son todos iguales a cero, es decir

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices

- Una matriz es cuadrada de orden n si el número de filas es igual al número de columnas e igual a n. El conjunto de las matrices cuadradas de orden n cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{R}$, se representa por $M_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices

- Una matriz es cuadrada de orden n si el número de filas es igual al número de columnas e igual a n. El conjunto de las matrices cuadradas de orden n cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{R}$, se representa por $M_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dentro de las matrices cuadradas:

- Se llama diagonal principal de A a la formada por los elementos

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

- Se llama traza de A a la suma de los elementos de la diagonal principal

$$\text{Traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Tipos de Matrices cuadradas

- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ se dice que es triangular superior si cuando $i > j$ es $a_{ij} = 0$, es decir, todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ se dice que es triangular inferior si cuando $i < j$ es $a_{ij} = 0$, es decir, son nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices cuadradas

- Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ se dice que es diagonal si $a_{ij} = 0, \quad i \neq j$, es decir, si es triangular superior e inferior

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, si son nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal.

- Si una matriz diagonal tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a $\alpha \in \mathbb{R}$, le llamamos matriz escalar, es decir, $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = \alpha$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrices cuadradas

- Se llama matriz unidad de orden n a aquella matriz cuadrada escalar de orden n que tiene todos los elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son 1.

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Igualdad de matrices

Igualdad de Matrices

Dos matrices A y B son iguales cuando, además de ser del mismo orden, los elementos que ocupan la misma posición en ambas son iguales, es decir dadas $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$$A = B \Longleftrightarrow A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \text{ y } a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

Suma de Matrices

Suma de Matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$, definimos $A + B$ como la matriz de orden dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Suma de Matrices

Suma de Matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$, definimos $A + B$ como la matriz de orden dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sumar las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \end{pmatrix}$$

Suma de Matrices

Suma de Matrices

Dadas dos matrices A y B de orden $m \times n$, definimos $A + B$ como la matriz de orden dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no se pueden sumar

Propiedades de la Suma de Matrices

Propiedades

- Asociativa: Dadas tres matrices cualesquiera $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se verifica que
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
- Conmutativa: Dadas dos matrices cualesquiera $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se verifica que
$$A+B = B+A$$
- Elemento neutro: Dada cualquier matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y 0 es la matriz nula de orden $m \times n(\mathbb{R})$, se verifica que
$$A+0 = 0+A = A$$
es decir, el elemento neutro de la suma de matrices es la matriz nula.

Propiedades de la Suma de Matrices

Propiedades

- Elemento opuesto: Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ existe una matriz llamada opuesta de A y representada por $-A$ que verifica

$$A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Producto de una matriz por un escalar

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto del escalar λ por la matriz A y se representa por λA como una matriz de orden $m \times n$ definida como

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Producto de una matriz por un escalar

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto del escalar λ por la matriz A y se representa por λA como una matriz de orden $m \times n$ definida como

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 4$,se cumple que $4A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 20 & 28 & 8 \\ 12 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

Propiedades

- Distributiva respecto a la suma de matrices: Dadas dos matrices cualesquiera $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

- Distributiva respecto a la suma de escalares: Dadas dos escalares cualesquiera, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se verifica

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

- Asociativa respecto al producto de escalares: Dados dos escalares cualesquiera, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se verifica

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

- Elemento unidad: Dada una matriz cualquiera $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, si 1 es el elemento unidad respecto a la multiplicación en $\mathbb{R}$, entonces

$$1A = A$$

Producto de matrices

Hay que dejar claro que no todas las matrices pueden mutiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición:

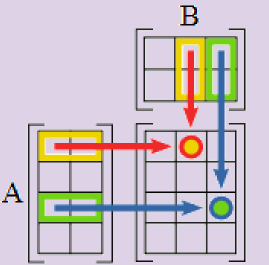
Matrices multiplicables

Dos matrices A y B, pueden multiplicarse en este orden, $A \cdot B$, si el número de columnas de la primera, A sea igual al número de filas de B.

Producto de matrices

Producto de Matrices

Dadas las matrices $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ dos matrices, se define el producto de A por B y se representa por $A \cdot B$ a una nueva matriz de m filas y n columnas tal que el elemento que ocupa la posición (i,j) en dicho producto se obtiene sumando los productos de los elementos de la fila i de la matriz A por los elementos de la columna j de la matriz B, de la siguiente forma



$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}$$

Producto de matrices

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} -11 & 9 & -1 \\ -22 & 18 & -2 \\ -11 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

Propiedades

- No conmutatividad: $AB \neq BA$.
- Asociativa respecto al producto de matrices: Sean $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$, se verifica
$$(AB)C = A(BC)$$
- Asociativa respecto del producto por escalares: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$
- $A(B + C) = AB + AC, \quad \forall A \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), B, C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$
- $(A + B)C = AC + BC, \quad \forall A, B \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$
- Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, puede ser que $AB = 0$. Si esto ocurre, las matrices A y B se llaman divisores de cero.

Matriz Traspuesta

Matriz Traspuesta

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define la **traspuesta de A** y se representa por A^t como una matriz perteneciente a $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que el elemento que ocupa la posición (i,j) en A, ocupa la posición (j,i) en A^t, para $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$.

Matriz Traspuesta

Matriz Traspuesta

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define la **traspuesta de A** y se representa por A^t como una matriz perteneciente a $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que el elemento que ocupa la posición (i,j) en A, ocupa la posición (j,i) en A^t, para $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$.

Obsérvese que la matriz traspuesta de A se obtiene intercambiando entre sí filas y columnas, es decir, las filas de A son las columnas de A^t y las columnas de A son las filas de A^t.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la Matriz Traspuesta

Propiedades

- Traspuesta de la suma:
  La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas $(A+B)^t = A^t + B^t$
- Traspuesta del producto de un escalar por una matriz:
  La traspuesta del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar por la traspuesta de la matriz. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- La traspuesta de la traspuesta de una matriz es la misma matriz $(A^t)^t = A$
- Traspuesta del producto:
  La traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden cambiado $(AB)^t = B^t A^t$

Matriz simétrica y antisimétrica

En base a la matriz traspuesta, podemos definir dos nuevas clases de matrices cuadradas:

Definición

- *Una matriz cuadrada A se dice* ***simétrica*** *si se verifica que coincide con su traspuesta, es decir*

$$A \textit{ es simétrica} \Longleftrightarrow A = A^t$$

- *Una matriz cuadrada A se dice* ***antisimétrica*** *si se verifica que coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir*

$$A \textit{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow A = -A^t$$

Matriz simétrica y antisimétrica

En base a la matriz traspuesta, podemos definir dos nuevas clases de matrices cuadradas:

Definición

- *Una matriz cuadrada A se dice* ***simétrica*** *si se verifica que coincide con su traspuesta, es decir*

$$A \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow A = A^t$$

- *Una matriz cuadrada A se dice* ***antisimétrica*** *si se verifica que coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir*

$$A \text{ es antisimétrica} \Longleftrightarrow A = -A^t$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

A es una matriz simétrica y B es una matriz antisimétrica.

Propiedades de la simetría

Propiedades

- La suma de dos matrices simétricas es, también, una matriz simétrica.
- La transpuesta de una matriz simétrica es, también, una matriz simétrica.
- El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.
- La traspuesta de una matriz antisimétrica es, también, una matriz antisimétrica.
- Toda matriz puede descomponerse, de forma única, en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Matriz inversa

Definición

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es ***regular o inversible*** *si y solo si existe una matriz que representamos por $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, siendo I la matriz unidad de orden n. A la matriz A^{-1} se le llama* ***inversa de*** A**.**

Matriz inversa

Definición

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es ***regular o inversible*** *si y solo si existe una matriz que representamos por $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, siendo I la matriz unidad de orden n. A la matriz A^{-1} se le llama* ***inversa de** A**.***

Teorema (Unicidad de la Inversa)

Si una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene inversa, ésta es única.

Matriz inversa

Definición

*Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es **regular o inversible** si y solo si existe una matriz que representamos por $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, siendo I la matriz unidad de orden n. A la matriz A^{-1} se le llama **inversa de** A.*

Teorema (Unicidad de la Inversa)

Si una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tiene inversa, ésta es única.

Propiedades

- Si A es una matriz invertible entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$, con $\lambda \neq 0$
- La inversa de la traspuesta de una matriz invertible es igual a la traspuesta de la inversa: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Operaciones elementales

Definición

Se llaman ***transformaciones o operaciones elementales de fila*** *sobre una matriz a las siguientes:*

1. *Intercambio de la fila i por la fila j, que se representa por* F_{ij}.
2. *Multiplicación de la fila i por un número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *no nulo. Se representa por* F_i^{α}.
3. *Sustitución de la fila i por la suma de dicha fila con la fila j multiplicada por un número* β. *Se representa por* F_{ij}^{β}.

Operaciones elementales

Definición

Se llaman ***transformaciones o operaciones elementales de fila*** *sobre una matriz a las siguientes:*

1. *Intercambio de la fila i por la fila j, que se representa por* F_{ij}.
2. *Multiplicación de la fila i por un número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *no nulo. Se representa por* F_i^{α}.
3. *Sustitución de la fila i por la suma de dicha fila con la fila j multiplicada por un número* β. *Se representa por* F_{ij}^{β}.

Si A es una matriz cualquiera, a la matriz que se obtiene de ella mediante una operación elemental se representa por

$$F_{ij}(A), \quad F_i^{\alpha}(A), \quad F_{ij}^{\beta}(A)$$

Análogamente se pueden definir operaciones elementales de columna sobre una matriz A y la matriz que se obtiene la representamos por

$$C_{ij}(A), \quad C_i^{\alpha}(A), \quad C_{ij}^{\beta}(A)$$

Operaciones elementales

Definición

Se llaman ***transformaciones o operaciones elementales de fila*** *sobre una matriz a las siguientes:*

1. *Intercambio de la fila i por la fila j, que se representa por* F_{ij}.
2. *Multiplicación de la fila i por un número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *no nulo. Se representa por* F_i^{α}.
3. *Sustitución de la fila i por la suma de dicha fila con la fila j multiplicada por un número* β. *Se representa por* F_{ij}^{β}.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, si sumamos a la fila tercera la primera por -2, es decir, hacemos $F_{31}^{-2}(A)$, obtenemos la matriz $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Operaciones elementales

Definición

Se llaman ***transformaciones o operaciones elementales de fila*** *sobre una matriz a las siguientes:*

1. *Intercambio de la fila i por la fila j, que se representa por* F_{ij}.
2. *Multiplicación de la fila i por un número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *no nulo. Se representa por* F_i^{α}.
3. *Sustitución de la fila i por la suma de dicha fila con la fila j multiplicada por un número* β. *Se representa por* F_{ij}^{β}.

Ejercicio 1.1: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener $F_{41}^{-2}(A)$.

Matrices elementales

Definición (Matriz elemental)

*Se llama **matriz elemental** a cualquier matriz cuadrada obtenida de la matriz unidad mediante **una única operación o transformación elemental**.*

Matrices elementales

Definición (Matriz elemental)

*Se llama **matriz elemental** a cualquier matriz cuadrada obtenida de la matriz unidad mediante **una única operación o transformación elemental**.*

Ejemplo

Consideremos la matriz identidad de orden 4, I_4.

- Si le sumamos a la tercera fila la primera multiplicada por α, obtenemos la matriz elemental

$$F_{31}^{\alpha}(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si intercambiamos las filas 2 y 4, obtenemos la matriz elemental $F_{24}(I_4)$.
- Si multiplicamos la tercera fila por un número β, conseguimos la matriz elemental $F_3^{\beta}(I_4)$.

Matrices elementales

También son matrices elementales las obtenidas al aplicar una única transformación elemental de columna a la matriz unidad.

Matrices elementales

También son matrices elementales las obtenidas al aplicar una única transformación elemental de columna a la matriz unidad.

Para representar las matrices elementales vamos a utilizar la misma notación que utilizamos para representar a las transformaciones elementales. Tenemos así, tres tipos de matrices elementales: Se representa por F_{ij}, F_i^{α}, F_{ij}^{α} a la matriz elemental obtenida al hacer operaciones elementales F_{ij}, F_i^{α}, F_{ij}^{α} a la matriz unidad, es decir:

$$\boxed{F_{ij} = F_{ij}(I), \;\; F_i^{\alpha} = F_i^{\alpha}(I), \;\; F_{ij}^{\alpha} = F_{ij}^{\alpha}(I)}$$

Matrices elementales

También son matrices elementales las obtenidas al aplicar una única transformación elemental de columna a la matriz unidad.

Se representa por C_{ij}, C_i^{α}, C_{ij}^{α} a la matriz elemental obtenida al hacer las operciones elementales C_{ij}, C_i^{α}, C_{ij}^{α} a la matriz unidad, es decir:

$$\boxed{C_{ij} = C_{ij}(I), \;\; C_i^{\alpha} = C_i^{\alpha}(I), \;\; C_{ij}^{\alpha} = C_{ij}^{\alpha}(I)}$$

Matrices elementales

Efectuar una transformación elemental sobre una matriz A es lo mismo que multiplicar A por una matriz elemental adecuada,

Teorema

La matriz que se obtiene al realizar una transformación elemental por filas (columnas) sobre una matriz A coincide con la matriz que resulta de multiplicar dicha matriz por la izquierda (derecha) por la matriz elemental correspondiente, es decir, si F es una transformación elemental cualquiera y $E = F(I)$ es la correspondiente matriz elemental, se verifica que

$$F(A) = EA$$

Matrices elementales

Efectuar una transformación elemental sobre una matriz A es lo mismo que multiplicar A por una matriz elemental adecuada,

Teorema

La matriz que se obtiene al realizar una transformación elemental por filas (columnas) sobre una matriz A coincide con la matriz que resulta de multiplicar dicha matriz por la izquierda (derecha) por la matriz elemental correspondiente, es decir, si F es una transformación elemental cualquiera y $E = F(I)$ es la correspondiente matriz elemental, se verifica que

$$F(A) = EA$$

Ejercicio 1.2: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, comprobar que $F_{41}^{-2}(A) = F_{41}^{-2}A$.

Matrices equivalentes

Definición

Dos matrices A y B se llaman ***equivalentes****, y lo denotamos por $\mathrm{A} \approx \mathrm{B}$, si una puede obtenerse de la otra mediante operaciones elementales.*

Matrices equivalentes

Definición

Dos matrices A y B se llaman ***equivalentes****, y lo denotamos por $A \approx B$, si una puede obtenerse de la otra mediante operaciones elementales.*

Ejemplo

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, son equivalentes, pues, si en la matriz A le sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por 2 (que es la operación elemental F_{21}^{2}, entonces obtenemos la matriz B.

El objetivo de las transformaciones elementales es llegar a unas matrices sencillas llamadas matrices escalonadas por filas.

Matrices escalonada por filas

Definición

*Dada una matriz cualquiera A llamamos **pivote de una fila** al primer elemento no nulo de dicha fila.*

Matriz escalonada por filas

Una matriz A de orden $m \times n$ de se dice que es una **matriz escalonada por filas** si se verifican las siguientes condiciones:

1. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.
2. Todos los elementos situados por debajo del pivote son nulos.
3. Si hay filas nulas (compuestas enteramente por ceros), están situadas en la parte inferior de la matriz.

Matrices escalonada por filas

Matriz escalonada por filas

Una matriz A de orden $m \times n$ de se dice que es una **matriz escalonada por filas** si se verifican las siguientes condiciones:

1. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.
2. Todos los elementos situados por debajo del pivote son nulos.
3. Si hay filas nulas (compuestas enteramente por ceros), están situadas en la parte inferior de la matriz.

Matriz escalonada reducida por filas

Una matriz A de orden $m \times n$ de se dice que es una **matriz escalonada reducida por filas** si además de las tres condiciones anteriores también satisface que:

1. El pivote de cada fila no nula es 1.
2. Cualquier columna en la que aparece un pivote tiene el resto de elementos igual a cero.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{pmatrix}$$

- A es escalonada por filas, pero no es escalonada reducida por filas, pues, el primer elemento no nulo de la primera fila no es 1.
- B no es escalonada por filas porque el pivote de la tercera fila no está a la derecha del de la segunda fila.
- C es escalonada por filas pero no es reducida, ya que en la cuarta columna hay otros elementos no nulos además del pivote de la tercera fila.
- D es escalonada reducida por filas.

Dada una matriz cualquiera A podemos obtener, mediante transformaciones elementales de fila, otra matriz equivalente a ella A'

$$A \approx A'$$

tal que A' sea escalonada por filas.

Método de Gauss

Veamos como puede hacerse, mediante el algoritmo de Gauss:

1. Supongamos que j_1 es el subíndice de la primera columna con un elemento distinto de cero. Haciendo transformaciones elementales de filas, se intercambian las filas de tal manera que este elemento aparezca en la primera fila, es decir, $a_{1j_1} \neq 0$.
2. Mediante la transformación elemental $F_1(1/a_{1j_1})$, se hace$a_{1j_1} = 1$ cuando sea necesario.
3. Mediante transformaciones elementales, F_{i1}^{α} (con unα apropiado), se reducen a cero todos los elementos de la forma a_{ij_1} con $i > 1$, es decir, todos los de la columna j_1 excepto el a_{1j_i} . Se repiten los pasos anteriores para las submatrices que resultan excluyendo, en cada caso, la primera fila.

Forma normal o canónica de una matriz

Definición (Forma normal o canónica)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se puede obtener una matriz B equivalente a ella, mediante transformaciones elementales, que sea de la forma

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

siendo I_r la matriz unidad de orden r y 0 la matriz nula correspondiente. A la matriz B se le llama ***forma normal o canónica*** *de la matriz A.*

Forma normal o canónica de una matriz

Definición (Forma normal o canónica)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ *se puede obtener una matriz* B *equivalente a ella, mediante transformaciones elementales, que sea de la forma*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

siendo I_r *la matriz unidad de orden* r *y* 0 *la matriz nula correspondiente. A la matriz* B *se le llama* ***forma normal o canónica*** *de la matriz* A.

La forma de obtenerla es similar a la de obtener una matriz equivalente escalonada por filas con algunas diferencias.

Forma normal o canónica de una matriz

Definición (Forma normal o canónica)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se puede obtener una matriz B equivalente a ella, mediante transformaciones elementales, que sea de la forma

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

*siendo I_r la matriz unidad de orden r y 0 la matriz nula correspondiente. A la matriz B se le llama **forma normal o canónica** de la matriz A.*

La forma de obtenerla es similar a la de obtener una matriz equivalente escalonada por filas con algunas diferencias.

Ejercicio 1.4: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener su forma normal..

Caracterización de matrices equivalentes

Teorema

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *son equivalentes si y sólo si existen dos matrices invertibles* $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *y* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\boxed{B = PAQ}$$

Caracterización de matrices equivalentes

Teorema

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *son equivalentes si y sólo si existen dos matrices invertibles* $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *y* $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\boxed{B = PAQ}$$

Para el cálculo práctico de P y Q se colocan a la izquierda y a la derecha de la matriz A las matrices unidades correspondientes y se les hacen las mismas operaciones elementales que a la matriz A.

Caracterización de matrices equivalentes

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_p$ y $C_1, C_2, \ldots, C_q$, las transformaciones de fila y de columna, respectivamente, hechas a la matriz A para obtener la matriz B, es decir, tendremos que

$$B = F_p F_{p-1} \cdots F_2 F_1 A C_1 C_2 \cdots C_q$$

y si llamamos,

$$P = F_p F_{p-1} \cdots F_2 F_1, \quad Q = C_1 C_2 \cdots C_q$$

entonces,

$$B = PAQ$$

siendo P y Q invertibles, ya que ambas son producto de matrices elementales y, al ser estas invertibles, su producto también lo será.
Las matrices P y Q pueden obtenerse aplicando a las respectivas matrices unidad las mismas transformaciones elementales de fila o columna que se apliquen en la matriz A.

Caracterización de matrices equivalentes

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_p$ y $C_1, C_2, \ldots, C_q$, las transformaciones de fila y de columna, respectivamente, hechas a la matriz A para obtener la matriz B, es decir, tendremos que

$$B = F_p F_{p-1} \cdots F_2 F_1 A C_1 C_2 \cdots C_q$$

y si llamamos,

$$P = F_p F_{p-1} \cdots F_2 F_1, \quad Q = C_1 C_2 \cdots C_q$$

entonces,

$$B = PAQ$$

siendo P y Q invertibles, ya que ambas son producto de matrices elementales y, al ser estas invertibles, su producto también lo será.
Las matrices P y Q pueden obtenerse aplicando a las respectivas matrices unidad las mismas transformaciones elementales de fila o columna que se apliquen en la matriz A.

Ejercicio 1.5: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, obtener su forma normal. Sea B su forma normal, calcular las marices P y Q tales que $PAQ = B$

Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Los resultados de la sección anterior junto con un teorema que veremos a continuación nos dan un método para calcular la inversa de una matriz cuadrada A. Utilizaremos el método de Gauss-Jordan, que consite en hacer transformaciones elementales en las filas de la matriz para llegar a obtener la matriz identidad. Realizando estas mismas operaciones con la matriz identidad llegamos a la matriz A^{-1}.

Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n y supongamos que mediante transformaciones elementales de fila se puede obtener la matriz unidad de orden n

$$F_p(F_{p-1}(\dots(F_1(A))\dots) = I$$

siendo $F_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$ las transformaciones elementales. Esto es equivalente a multiplicar A por las correspondientes matrices elementales

$$F_pF_{p-1}\dots F_1A = I \Longrightarrow (F_pF_{p-1}\dots F_1)A = I$$

la matriz $F_pF_{p-1}\dots F_1$ es producto de matrices elementales inversibles. Si $E = F_pF_{p-1}\dots F_1 \Longrightarrow EA = I$ y por tanto, A es inversible y su inversa es E

$$A^{-1} = E = F_pF_{p-1}\dots F_1 \Longrightarrow A^{-1} = F_p(F_{p-1}(\dots(F_1(I))\dots)$$

es decir, efectuando sobre la matriz unidad las mismas operaciones elementales que hacemos sobre la matriz A para transformarla en la matriz unidad, obtenemos A^{-1}.

Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Teorema

Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* B *la matriz reducida por filas obtenida de* A *mediante operaciones elementales de fila, entonces existe una matriz regular o invertible* $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *de forma que*

$$B = QA$$

La matriz Q del teorema anterior es fácil de calcular ya que se obtendría aplicando a la matriz identidad las mismas operaciones elementales que se aplican sobre la matriz A para obtener su matriz reducidad por filas.

$$Q = F_p(F_{p-1}(\ldots(F_1(A))\ldots)I$$

Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz inversible, entonces $(I|A)$ se transforma con las operaciones elementales en $(A^{-1}|I)$.

Así pues, si consideramos la matriz $(I|A)$

$$(I|A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

y efectuando sobre la matriz unidad las mismas operaciones elementales que hacemos sobre la matriz A, obtenemos en la parte derecha la matriz reducida por filas de A y en la izquierda tendremos la matriz A^{-1} buscada.

Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz inversible, entonces $(I|A)$ se transforma con las operaciones elementales en $(A^{-1}|I)$.

Así pues, si consideramos la matriz $(I|A)$

$$(I|A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

y efectuando sobre la matriz unidad las mismas operaciones elementales que hacemos sobre la matriz A, obtenemos en la parte derecha la matriz reducida por filas de A y en la izquierda tendremos la matriz A^{-1} buscada.

Ejercicio 1.6: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la inversa por el método de Gauss-Jordan.