Práctica IV: ESPACIOS VECTORIALES $\mathbb{R}^n$. ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS.

1. Introducción.

En esta práctica vamos a mostrar la utilidad de las herramientas de manipulación de matrices y vectores en algunos espectros de los espacios vectoriales. Resolveremos algunos de los problemas comunes que aparecen al estudiar los espacios vectoriales R^n y en los espacios vectoriales euclídeos.

Recordemos que en *WxMaxima* un vector se representa como una lista (al igual que las matrices), y por ejemplo para introducir el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$ tendremos que poner la entrada: v:[1,2,3]. Un vez introducidos los vectores las operaciones (suma, producto de un vector por un escalar, producto escalar de dos vectores) se pueden realizar de forma sencilla.

2. Dependencia e Independencia de vectores.

En este apartado vamos a estudiar como determinar la dependencia o independencia de un conjunto de vectores. Para ello, formamos la matriz con dichos vectores (puestos en fila o columnas, es indiferente) y el número de vectores independientes es el rango de la matriz. Ya sabemos determinar el rango de una matriz.

Ejemplo 1
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ *y dados los vectores* $(1, 0, 2, 3)$, $(2, 1, 4, 6)$, $(3, -1, 7, 10)$ *y* $(4, 2, 9, 14)$. *¿Son linealmente independientes?*

Solución:

En primer lugar introducimos cada uno de los vectores y formamos la matriz

```
(%i1) u1:[1,0,2,3]
```

(%o1) $[1, 0, 2, 3]$

```
(%i2) u2:[2,1,4,6]
```

(%o2) $[2, 1, 4, 6]$

```
(%i3) u3:[3,-1,7,10]
```

(%o3) $[3, -1, 7, 10]$

```
(%i4) u4:[4,2,9,14]
```

(%o4) $[4, 2, 9, 14]$

(%i5) `A:matrix(u1,u2,u3,u4)`

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 10 \\ 4 & 2 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

Y ahora calculemos el rango de la matriz

(%i6) `rank(A)`

(%o6) 4

Por lo tanto, los cuatro vectores son linealmente independientes. También podíamos haber utilizado la orden `triangularize(A)`, y obtener la matriz escalonada por filas y comprobar si resulta alguna fila de ceros, que indicará que los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicio 1. ¿Existe algún valor de α para el cual sean linealmente dependientes los vectores de $\mathbb{R}^4$ $\{(\alpha, -1, 0, 1), (0, \alpha, -1, 1), (1, 0, -1, 2)\}$?

3. Bases. Coordenadas de un vector.

Para localizar una base de un espacio vectorial, en primer lugar, se busca un sistema de vectores generadores del mismo y, después, se eliminan los vectores que dependen linealmente de los demás. Para ello, se estudia la dependencia lineal de los vectores calculando el rango de vectores mediante la reducción por filas de la matriz que tiene por columnas o filas las coordenadas de los vectores o directamente.

Las coordenadas de un vector respecto de una base se pueden calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 2

Consideremos el vector $\vec{v}$ de R^3 con coordenadas $(4, 1, -2)$ respecto a la base canónica, determinar las coordenadas respecto a los vectores $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$

Solución:

Lo primero será probar si dichos vectores forman una base de R^3, por lo que formemos la matriz asociada a ellos

(%i7)
```
v1:[1,0,1];
v2:[-1,1,0];
v3:[0,1,-1];
```

(%o7) $[1, 0, 1]\quad[-1, 1, 0]\quad[0, 1, -1]$

(%i8) `A:tranmatrix(v1,v2,v3)`

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i9) `triangularize(A)`

$$(\%o9) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por tanto B es una base de R^3. Las coordenadas buscadas serán los números (x, y, z) tales que

$$(4, 1, -2) = x(1, 0, 1) + y(-1, 1, 0) + z(0, 1, -1),$$

es decir la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Como ya están introducidos los vectores, formamos la matriz de los coeficientes

(%i10) `A:transpose(matrix(v1,v2,v3))`

$$(\%o10) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i11) `v:[4,1,-2]`

$(\%o11)\ [4, 1, -2]$

(%i12) `ecu:A.transpose([x,y,z])`

$$(\%o12) \quad \begin{bmatrix} -y + x \\ z + y \\ -z + x \end{bmatrix}$$

(%i13) `linsolve([-y+x=4,z+y=1,-z+x=-2],[x,y,z]);`

$(\%o13)\ [x = \frac{3}{2}, y = -\frac{5}{2}, z = \frac{7}{2}]$

Que son las coordenadas de v respecto a la base B.

Ejercicio 2. En el espacio vectorial R^4 se consideran los vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,2), \mathbf{u}_2 = (0,1,1,2), \mathbf{u}_3 = (1,1,0,4), \mathbf{u}_4 = (2,-1,-1,6), \mathbf{u}_5 = (1,-1,-2,-4)$$

Se pide:

1. Determina cuales de ellos forman una base de R^4

2. Calcula las coordenadas de los restantes vectores con respecto a la base obtenida anteriormente.

4. Cambio de Base.

Sea el espacio vectorial $(R^n, +, \cdot)$ un espacio vectorial y supongamos que tenemos dos bases diferentes:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}, \ \ B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \cdots, \vec{u'}_n\}$$

y queremos establecer la relación entre las coordenadas de un mismo vector en las dos bases. Una forma de hacerlo es usar las ecuaciones del cambio de base , que en su forma matricial son

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X_B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X_{B'}}}, \quad X_B = PX_{B'}$$

donde observamos que X_B es la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B. $X_{B'}$ es la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B' y P es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B y se le llama matriz de cambio de base de B' a B

Ejemplo 3
Sean las bases $B = \{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,-1)\}$ y $B' = \{(0,1,1),(0,3,-1),(1,0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar las ecuaciones del cambio de base de B a B'

Solución:

Debemos de determinar las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B', ya que el cambio de base que nos piden viene dado por

$$X_{B'} = PX_B$$

```
(%i14) v1:[0,1,1];
       v2:[0,3,-1];
       v3:[1,0,-1]
```

(%o14) $[0,1,1] \quad [0,3,-1] \quad [1,0,-1]$

```
(%i15) ecu1: a*v1+b*v2+c*v3-[1,0,1]
```

(%o15) $[c-1, 3\cdot b+a, -c-b+a-1]$

```
(%i16) coordenadas1:linsolve(ecu1,[a,b,c])
```

(%o16) $[a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=1]$

```
(%i17) ecu2: a*v1+b*v2+c*v3-[0,0,1]
```

(%o17) $[c, 3\cdot b+a, -c-b+a-1]$

```
(%i18) coordenadas2:linsolve(ecu2,[a,b,c])
```

(%o18) $[a=\frac{3}{4}, b=-\frac{1}{4}, c=0]$

```
(%i19) ecu3: a*v1+b*v2+c*v3-[0,1,-1]
```

(%o19) $[c, 3*b+a-1, -c-b+a+1]$

```
(%i20) coordenadas3:linsolve(ecu3,[a,b,c])
```

(%o20) $[a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=0]$

Y ya tendremos las columnas de la matriz P

```
(%i21) P:transpose(matrix([3/2,-1/2,1],[3/4,-1/4,0],[-1/2,1/2,0]))
```

(%o21) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Si un vector tiene de coordenadas en la base B, $\vec{v_B}=(5,7,9)$, ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?. Para ello, introducimos el vector $\vec{v}$ y aplicamos las ecuaciones del cambio de base

```
(%i22) vB:transpose([5,7,9])
```

(%o22) $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

```
(%i23) X:P.vB
```

(%o23) $\begin{bmatrix} \frac{33}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Calcular las coordenadas del vector $v \in \mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ si respecto de la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ tiene como coordenadas $(2, 3, -2)$, y los vectores v_j están definidos por

$$v_1 = u_1 + 3u_2 - u_3, \;\; v_2 = u_1 - u_2 - u_3, \;\; v_3 = u_2 - u_3$$

Ejercicio 4. En el espacio vectorial R^3 se considera el sistema de vectores

$$B = \{(-1, 0, 1), (0, 1, -1), (4, -2, -1)\}$$

Comprueba que es una base de R^3. Halla lamatriz del cambio de base de la base canónica a la base B. Obtén las coordenadas en la base B del vector cuyas coordenadas en la base canónica son $(-1, 1, 2)$.

5. Subespacios vectorial engendrado por un conjunto de vectores. Ecuaciones de una variedad lineal.

La orden `triangularize(A)` es interesante para el estudio de subespacios vectoriales engendrados por un conjunto de vectores, ya que nos permite determinar la dimensión del subespacio y una base del mismo.

Ejemplo 4
Consideremos el subespacio de R^4 generado por los vectores $\{(1, 2, -1, 1), (0, 2, 4, 6), (3, 1, 1, 2), (2, 3, -1, 2)\}$. *Determinar la dimensión de mi subespacio y una base del mismo*

Solución:

Para ello formemos la matriz que tiene por filas dichos vectores y le aplicamos la orden `triangularize(A)`

```
(%i24) v1:[1,2,-1,1];
       v2:[0,2,4,6];
       v3:[3,1,1,2];
       v4:[2,3,-1,2]
```

(%o24) $[1, 2, -1, 1] \quad [0, 2, 4, 6] \quad [3, 1, 1, 2] \quad [2, 3, -1, 2]$

```
(%i25) A:matrix(v1,v2,v3,v4);
```

(%o25) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
(%i26) triangularize(A)
```

$$(\%o26) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la dimensión de $L(v1, v2, v3, v4)$ es tres y una base sería $\{(1, 2, -1, 1), (0, 2, 4, 6), (3, 1, 1, 2)\}$

Ahora estudiaremos las ecuaciones, tanto paramétricas como implícitas de un subespacio vectorial. Para ello veremos una orden nueva del *WxMáxima*, `eliminate`, que nos permite convertir ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial en ecuaciones implícitas.

Ejemplo 5

Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio de R^4 *generado por los vectores* $\{(1, 2, 1, 1), (0, 1, 0, -1\}$

Solución:

Supongamos que hemos demostrado que son una base del subespacio, es decir, que son linealmente independientes. Determinemos en primer lugar las ecuaciones paramétricas

```
(%i27) v1:[1,2,1,1];
       v2:[0,1,0,-1]
```

$(\%o27)\ [1, 2, 1, 1] \quad [0, 1, 0, -1]$

```
(%i28) ecu:a*v1+b*v2-[x,y,z,t];
```

$(\%o28)\ [a - x, -y + b + 2 \cdot a, a - z, -t - b + a]$

```
(%i29) solve(ecu,[x,y,z,t]);
```

$(\%o29)\ [[x = a, y = b + 2 \cdot a, z = a, t = a - b]]$

Por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \beta + 2 \\ z = \lambda \\ t = \lambda - \beta \end{cases}$$

Obtenemos ahora las ecuaciones implícitas eliminando parámetros.

```
(%i30) eliminate(ecu,[a,b])
```

$(\%o30)\ [y - 3 \cdot x + t, x - z]$

Y las ecuaciones resultantes serán las ecuaciones implícitas de nuestro subespacio.

$$\begin{cases} y - 3x + t = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (3, 2, -1)$, $v_2 = (2, 5, 6)$, $v_3 = (1, -3, -7)$. Sea S el subespacio vectorial engendrado por dichos vectores, se pide:

1. Hallar una base de S.
2. Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio S.

Ejercicio 6. En el espacio vectorial R^5 y respecto a la base canónica, hallar un sistema de ecuaciones paramétricas y un sistema de ecuaciones implícitas independientes, de los subespacios siguientes:

$$\begin{aligned} L_1 &= L((1, 0, 1, -1, 1), (1, 1, 1, 0, 0)) \\ L_2 &= L((0, 1, 2, 1, 0), (1, 1, -1, -2, 1), (3, -1, -7, -8, 3)) \end{aligned}$$

6. Producto Escalar. Método de ortonormalización de Gram-Schimdt.

Recordemos que dado un espacio vectorial $(R^n, +, \cdot)$, llamamos producto escalar definido sobre R^n a cualquier aplicación

$$R^n \times R^n \longrightarrow R$$

tal que a cada par de vectores $(\vec{x}, \vec{y})$ le hace corresponder un número real, representado por $\vec{x} \bullet \vec{y}$ y que satisface las siguientes condiciones:

1. $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in R^n, \quad \tilde{x} \bullet \tilde{y} = \tilde{y} \bullet \tilde{x}$
2. $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n \quad \tilde{x} \bullet (\tilde{y} + \tilde{z}) = (\tilde{x} \bullet \tilde{y}) + (\tilde{x} \bullet \tilde{z})$
3. $\forall\, \vec{x}, \mathbf{y} \in R^n, \quad \forall\, \lambda \in R \quad (\lambda\tilde{x}) \bullet \tilde{y} = \tilde{x} \bullet (\lambda\tilde{y}) = \lambda(\tilde{x} \bullet \tilde{y})$
4. Si $\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{x} \bullet \vec{x} > 0$

Para demostrar que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ es la matriz de un producto escalar definido en el espacio vectorial n-dimensional R^n respecto a una base B , sólo tenemos que comprobar si es simétrica y además los menores principales de A son todos mayores que cero.

Ejemplo 6
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Probar que $\bullet$ es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$.

Solución:

En primer lugar introducimos la matriz y comprobamos que la matriz es simétrica

```
(%i31) A:matrix([1,1,0],[1,2,-1],[0,-1,2]);
```

(%o31) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i32) M: transpose(A)
```

(%o32) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Ahora comprobemos que todos los menores principales son mayores que cero

```
(%i33) A1:submatrix(3,A,3);
```

(%o33) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i34) determinant(A1);
```

(%o34) 1

```
(%i35) determinant(A);
```

(%o35) 1

Queda demostrado que $\bullet$ es un producto escalar.

Dada una base de R^n es fácil calcular una base ortonormal del mismo espacio a partir de ella usando el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, que nos permite dada una base cualquiera $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ obtener, a partir de ella, una base ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\,\vec{v}_1 \\
\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\,\vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2}\,\vec{v}_2 \\
\cdots & \cdots \cdots \\
\vec{v}_n &= \vec{u}_n - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\,\vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2}\,\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\vec{v}_{n-1} \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_{n-1} \bullet \vec{v}_{n-1}}\,\vec{v}_{n-1}
\end{aligned}$$

y posteriormente, haciendo los vectores unitarios

$$B' = \left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\}$$

hemos obtenido una base ortonormal.

Para ejecutar el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre una base, utilizando el producto escalar usual es necesario cargar el paquete *eigen*, y luego ejecutamos la orden `gramschmidt` para obtener una base ortogonal

Ejemplo 7
Obtén una base ortonormal con el producto usual a partir de la base de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$B = \{(1,0,2,3),(2,1,4,6),(3,-1,7,10),(4,2,9,14)\}$$

Solución:

En primer lugar introducimos los vectores, formamos la matriz asociada y calculamos su rango para ver si son base de R^4

```
(%i36) u1:[1,0,2,3];
       u2:[2,1,4,6];
       u3:[3,-1,7,10];
       u4:[4,2,9,14]
```

(%o36) $[1,0,2,3] \quad [2,1,4,6] \quad [3,-1,7,10] \quad [4,2,9,14]$

```
(%i37) A:(matrix(u1,u2,u3,u4)
```

(%o37) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 7 & 10 \\ 4 & 2 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

```
(%i38) rank(A)
```

(%o38) 4

Entonces B es una base de R^4. Carguemos el paquete *eigen* y utilicemos la orden `gramschmidt`

```
(%i39) load(eigen)
```

(%o39) *C:/Program Files (x86)/Maxima-sbcl-5.37.2/share/maxima/5.37.2/share/matrix/eigen.mac*

```
(%i40) y:gramschmidt(A)
```

(%o40) $[[1,0,2,3],[0,1,0,0],[-\frac{5}{2\cdot 7},0,\frac{2}{7},-\frac{1}{2\cdot 7}],[-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]]$

```
(%i41) ratsimp(%)
```

(%o41) $[[1,0,2,3],[0,1,0,0],[-\frac{5}{14},0,\frac{2}{7},-\frac{1}{14}],[-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]]$

Estos vectores son ortogonales pero no están normalizados, para ello tendríamos que dividir cada uno de ellos por su módulo, a modo de ejemplo veamos el primero de ellos

```
(%i42) v1:[1,0,2,3]/sqrt(v1.v1);
```

(%o42) $[\frac{1}{\sqrt{14}}, 0, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}]$

También podemos aplicar el método de Gram-Schmidt calculando vector a vector, como se ha realizado en teoría.

Ejercicio 7. Obten una base ortonormal con el producto usual a partir de la base de $\mathbb{R}^3$ siguiente

$$B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,1)\}$$

Ejercicio 8. En el espacio euclídeo R^3 se considera la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$$\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,1)$$

1. Obtener a partir de ella una base ortonormal.
2. Comprueba que los vectores

$$\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \vec{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), \vec{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

   forman una base ortonormal de R^3 .