SOLUCIONES EXAMEN DE PROBLEMAS
28/01/2010

1)
a) Para todo t se tiene que $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.
En particular, para $0 < t < 2$ se tiene que $F(t) = \int_0^t \frac{3x2}{8}dx = \frac{t^3}{8}$.
Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

b) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 xf(x)dx = 1,5$
La mediana es el valor m tal que $F(m) = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\frac{m^3}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow m = \sqrt[3]{4}$$

La moda es el valor x que maximiza la función de densidad. Como $f(x)$ es creciente entre 0 y 2, la moda es $x = 2$.

c) $P[X > 1] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
$P[X = 1,5] = 0$ ya que X es continua.

2) Sean los sucesos:

B_i = “se extrae bola blanca en extracción i”, $i = 1, 2$.
N_i = “se extrae bola negra en extracción i”, $i = 1, 2$.

a) Aplicando teorema de la probabilidad total:

$$P(N_2) = P(N_2/B_1)P(B_1) + P(N_2/N_1)P(N_1) = \frac{3}{7}\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Aplicando teorema de Bayes:

$$P(B_1/B_2) = \frac{P(B_2/B_1)P(B_1))}{P(B_2)} = \frac{\frac{4}{7}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

3) $X \simeq Bi(25, 0.05)$
a)

$$P[X \leq 2] = \sum_{i=0}^{2} \binom{25}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{25-i} = 0,872$$

$$P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - \left(\sum_{i=0}^{4} \binom{25}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{25-i} \right) = 0,0074$$

$$P[1 \leq X \leq 4] = \sum_{i=1}^{4} \binom{25}{i} 0,05^i \cdot 0,95^{25-i} = 0,7153$$

NOTA: La aproximación normal NO ES VÁLIDA en este caso, ya que $npq = 25 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 1,1875 < 5$.

b)

$$P\left[X = 0\right] = \left(\begin{array}{c} 25 \\ 0 \end{array} \right) 0,05^0 \cdot 0,95^{25} = 0,277$$

$$P\left[X < 6\right] = P\left[X \leq 4\right] + P\left[X = 5\right] = 0,998$$

(aquí se utiliza el valor $P\left[X \leq 4\right]$ hallado en el apartado a)

c) $E(X) = np = 25 \cdot 0,05$
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 1,089$