CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARAMÉTRICOS PARA UNA POBLACIÓN.

Escuela Superior de Ingeniería

INTRODUCCIÓN. EJEMPLO 1

La vida cotidiana está llena de problemas de decisión: "Comprar un coche de segunda mano a un individuo desconocido"

Error tipo I: Decido No comprar el coche, por temor a que el vendedor me engañe. Resulta que era un buen coche.
Error tipo II: Decido Comprar el coche, confiando que nos dice la verdad. Resulta un coche para el desguace.

La decisión, acertada o no, dependerá de la información de la que disponga el comprador: referencias del vendedor, lugar, experiencias previas, marca del coche, antigüedad, etc.
La decisión adecuada es la que equilibre ambos posibles errores.

INTRODUCCIÓN. EJEMPLO 2

Tenemos dos tipos de monedas:
→ Una legal donde la P(cara) = 0.5 y P(cruz) = 0.5
→ Otra trucada donde P(cara) = 0.7 y P(cruz) = 0.3

Si nos dan una de las monedas y tenemos que decidir si es legal o trucada, **¿QUÉ HACEMOS? :** Lanzar la moneda 100 veces, por ejemplo, y observar el resultado (obtener información)

¿QUÉ ES LO QUE HEMOS OBSERVADO?

El número de caras obtenidas.

INTRODUCCIÓN. EJEMPLO 2

La situación la podemos modelizar por una distribución B(100, p), donde p sería 0.5 si la moneda es legal ó 0.7 si es trucada.

¿CÓMO DECIDIMOS DESPUÉS DE LO OBSERVADO?

Definimos un criterio de decisión. Por ejemplo:

Si el número de caras que obtenemos es > 60, diremos que la moneda es trucada.
Si por el contrario el nº de caras ≤ 60, diremos que la moneda es legal.

Error tipo I: Decidir que es trucada siendo legal: $P(B(100, 0.5) > 60) = 0.02844$
Error tipo II: Decidir que es legal siendo trucada: $P(B(100, 0.7) \leq 60) = 0.0124$

En vista de los resultados parece lógica la regla, ya que los errores son muy bajos.

¿SE PODRÍA MEJORAR?

FORMALIZACIÓN DEL PROBLEMA

Sea X la variable de interés con $F(X, \theta)$, siendo F conocida y θ desconocida. Plantearemos dos tipos de hipótesis, obviamente excluyentes, acerca del valor del parámetro de interés θ, que determinarán la decisión a tomar.

- **Hipótesis Nula (H_0):** Es la hipótesis de partida, la que se quiere contrastar. Generalmente, la que se viene admitiendo hasta el momento, la más estable. Hipótesis que debemos refutar sólo si tenemos una alta evidencia en contra.
- **Hipótesis Alternativa (H_1):** Lo alternativo a la hipótesis nula (dependerá del contexto)

Escuela Superior de Ingeniería

TIPOS DE CONTRASTES

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = 3 \\ H_1: \theta \neq 3 \end{cases}$$

BILATERALES

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = 3 \\ H_1: \theta < 3 \end{cases}$$

UNILATERALES

$$\begin{cases} H_0: \ \theta \leq 3 \\ H_1: \theta > 3 \end{cases}$$

Escuela Superior de Ingeniería

TIPOS DE HIPÓTESIS

PARAMÉTRICAS: → Son hipótesis sobre los parámetros de la población: media, desviación típica, proporción…

NO PARAMÉTRICAS: → Son hipótesis sobre otras características de la población: normalidad, bondad de ajuste, independencia…

En este tema nos centraremos en los contrastes de **hipótesis paramétricas**.

Formalización del ejemplo 2.

$$X \to Be(p)$$

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \text{ "La moneda es legal" (Lo que se admite de partida)} \\ H_1 : p = 0.7 \text{ "La moneda está trucada" (Lo que se admite sólo si hay evidencia contra } \mathrm{H}_0\text{)} \end{cases}$$

EL CONTRASTE: Es la regla de decisión $\rightarrow$ Consistió en contabilizar el número de caras obtenidas en una muestra de 100 lanzamientos y decidir, en este caso, bajo un criterio intuitivo:

CRITERIO DE DECISIÓN: Aceptamos H_0 si el número de caras obtenidas es igual o inferior a 60, en caso contrario rechazamos H_0 y aceptamos $H_{1.}$

TIPOS DE ERRORES

	DECISIÓN	
	Acepto H_o	Acepto H_1
H_o	√	*Error I*
H_1	*Error II*	√

Prob(Error I)

P(Rechazar H_0 | H_0 cierta) = α (α = nivel de significación del test)

Prob(Error II)

P(Aceptar H_0 | H_0 falsa) = β (1 – β = potencia del test)

Nuestro objetivo principal es encontrar una regla de decisión que minimice ambos errores, pero por lo general, el error tipo I, es el que resulta fácil de controlar y acotar.

ESI de Ingeniería

DEFINICIONES

Una **hipótesis estadística** es una proposición referente a una o varias poblaciones.

Un **contraste o test de hipótesis** es conjunto de reglas para decidir cuál de dos hipótesis debe aceptarse en base a la información obtenida con una muestra.

El rechazo de la Hipótesis Nula equivale a la aceptación de la Hipótesis Alternativa. Debiendo entender la aceptación o rechazo de una hipótesis en el sentido que la muestra **ha proporcionado evidencia** "suficiente", para que sea "razonable" la aceptación o rechazo de la hipótesis.

DEFINICIONES

La decisión del test se toma en base a un estadístico, llamado **estadístico de contraste**, que comprime la información relevante de la muestra y que, si se cumple la hipótesis nula, se rige por una ley de probabilidad conocida.

Para realizar la decisión se obtiene un intervalo de aceptación para el estadístico de contraste (**región de aceptación**). La región complementaria, formada por los valores que no pertenecen a la región de aceptación, se denomina **región crítica o de rechazo.**

Si la muestra da al estadístico un valor dentro de la región de aceptación, se acepta H_0 y se dice que el test es **estadísticamente NO significativo.** En caso contrario, se acepta H_1 y se dice que el test es **estadísticamente significativo**.

RESUMEN DE LOS PASOS A SEGUIR EN UN CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1. **Hipótesis:** Concretar la hipótesis nula y formular una hipótesis alternativa
2. **Estadístico de Contraste:** Decidir qué estadístico de contraste utilizar con función de distribución conocida, si se verifica H_0. Calcular el valor del estadístico a partir de los datos de la muestra.
3. **Regiones de aceptación y de rechazo.** Fijar el nivel de significación deseado α. Usar este valor para construir las regiones de aceptación y rechazo del estadístico de contraste
4. **Decisión:** Si el valor del estadístico pertenece a la región de rechazo, entonces rechazamos H_0. En caso contrario lo que se puede afirmar es que hay suficiente evidencia para aceptar H_0.
5. **Conclusión:** Dar respuesta al problema planteado.

EJEMPLO

Consideremos un proceso de fabricación que, en condiciones correctas, produce elementos cuya vida, en horas, se distribuye según una Normal (5000, 100). Se introducen cambios en el proceso que pueden afectar a la media pero no a la variabilidad. Para contrastar si estos cambios han producido efectos sobre la vida media de los elementos fabricados, se toma una muestra de 30 unidades y se obtiene una media muestral de 5.040 horas.

1. Hipótesis: $\begin{cases} H_0: \ \mu = 5000 \\ H_1: \ \mu > 5000 \end{cases}$

2. Estadístico de Contraste:

Sabemos que: $Si\ \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow \overline{x} \rightarrow \mathrm{N}\left(\mu, \ \sigma/\sqrt{n}\right)$

Escuela Superior de Ingeniería

EJEMPLO

Por tanto, si H_0 es cierta ⟶ $\bar{x} \to N\left(5000 / {}^{100}\!\big/_{\sqrt{30}}\right)$

Esta v.a. cuya distribución conocemos, nos va a servir como estadístico de contraste:

⟶ $$\frac{\bar{x}-5000}{100/\sqrt{30}} \to N(0,1)$$

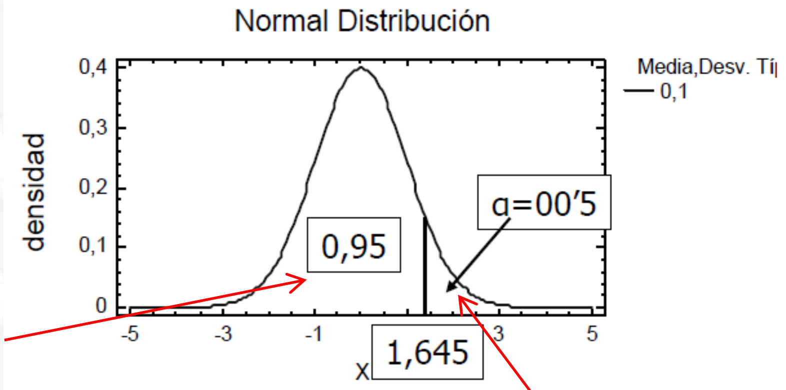
Calculamos el valor de este estadístico para los datos de la muestra:

⟶ $$E.C. = \frac{5040-5000}{100/\sqrt{30}} = 2.19$$

EJEMPLO

3. Regiones de aceptación y rechazo:

Suponemos $\alpha = 0.05$:



Región de aceptación (R.A)

Región crítica o de rechazo (R.C)

4. Decisión:

Como E.C. = 2.19 > 1.645 (Pto crítico) ➡ E.C pertenece a R.C. ➡ Rechazamos H_0

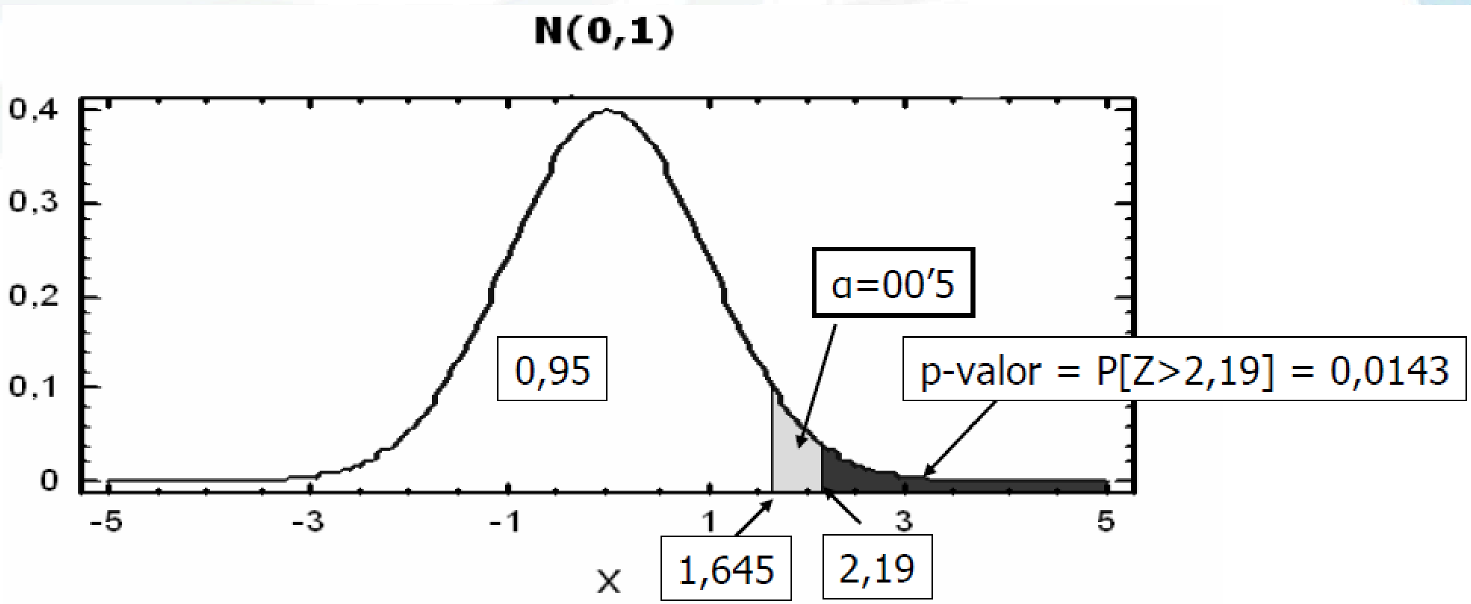
5. Conclusión: Con una significación del 5%, podemos afirmar que la vida media ha aumentado.

Escuela Superior de Ingeniería

P-VALOR (PROBABILIDAD DE SIGNIFICACIÓN)

Llamamos **p-valor** a la probabilidad de obtener una observación muestral más incompatible que la observada.
El p-valor es una medida más precisa del error que podemos cometer si rechazamos la hipótesis.

En el ejemplo:



P-VALOR (PROBABILIDAD DE SIGNIFICACIÓN)

No es lo mismo rechazar la hipótesis si el valor observado es 1.8 que si es 2.19. En este caso, el p-valor es menor (y también menor el error asociado a la decisión).

Para valor observado: 1.8 **p-valor = P(Z > 1.8) = 0.0359**

Para valor observado: 2.19 **p-valor = P(Z > 2.19) = 0.0143**

Para un nivel de significación α:

Si p-valor $\leq \alpha$, rechazamos H_0
Si p-valor $> \alpha$, aceptamos H_0

Escuela Superior de Ingeniería

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

1. Contraste de Hipótesis para la media de una población normal, con desviación típica conocida.

$$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$$

Sabemos que:

$$\bar{x} \to N\left(\mu, \sigma / \sqrt{n} \right) \Rightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0,1)$$

$$\text{Si } H_0 : \mu = \mu_0 \Rightarrow \quad \boxed{z_{\exp} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0,1)}$$

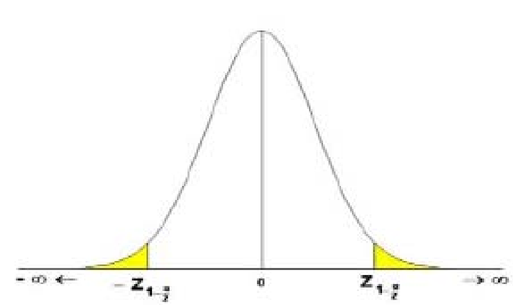
Estadístico de Contraste

Escuela Superior de Ingeniería

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

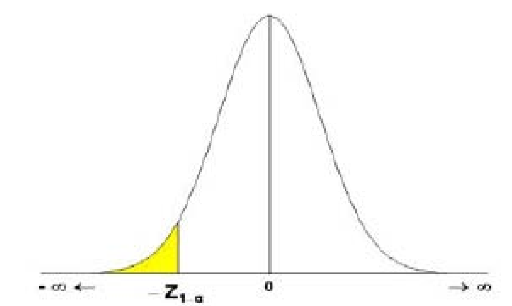
Contrastes Bilaterales:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ | z_{\exp} | > z_{1-\alpha/2} \right\}$$



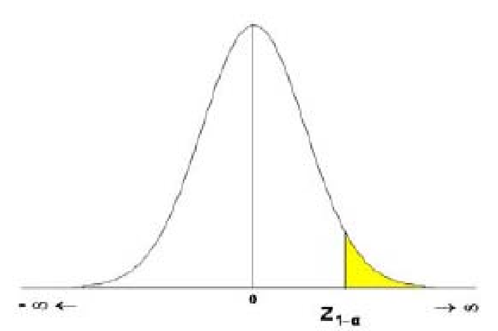
Contrastes Unilaterales:

$$H_1 : \mu < \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ z_{\exp} < -z_{1-\alpha} \right\}$$



ó

$$H_1 : \mu > \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ z_{\exp} > z_{1-\alpha} \right\}$$

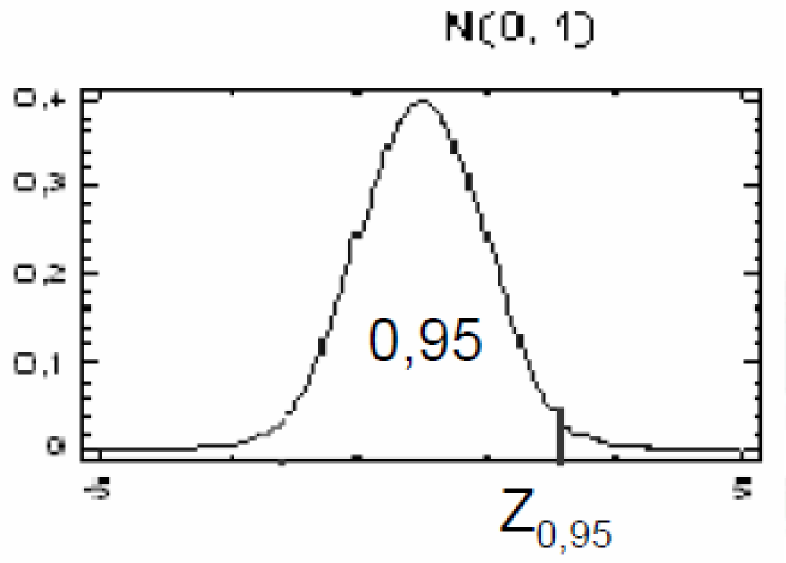


Ejemplo

Sea X una variable aleatoria normal que mide el precio de un determinado bien de consumo. Sabemos que hasta el momento dicha variable tiene un precio medio de 15 euros y una desviación de 1 euro. Queremos contrastar si el precio medio ha aumentado, para ello tomamos una muestra de tamaño 100 y observamos que el precio medio muestral es de 15.5 euros. Tomar un nivel de significación de 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu > 15 \end{cases}$$

$$z_{\exp} = \frac{15.5 - 15}{1/\sqrt{100}} = 5$$



Rechazo H_0 si $z_{exp} > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.64$

Como 5 > 1.64, el estadístico de contraste pertenece a la región crítica y en consecuencia **Rechazo H_0.**

Conclusión: Admitimos con una significación del 5% que el precio medio ha aumentado.

2. Contraste de Hipótesis para la media de una población normal, con desviación típica desconocida.

$$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$$

Sabemos que:

$$\bar{x} \rightarrow N\left(\mu, {S_c}/{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x}-\mu}{S_c/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

$$Si\ H_0: \mu = \mu_0 \Rightarrow$$

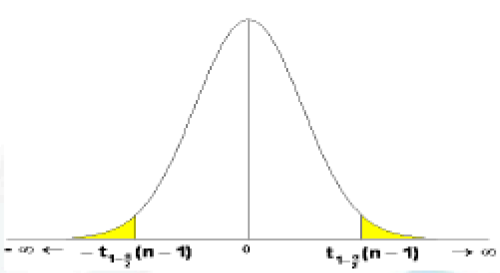
$$\boxed{t_{\exp} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S_c/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}}$$

Estadístico de Contraste

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

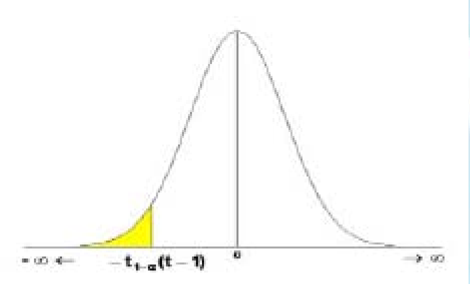
Contrastes Bilaterales:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ |\, t_{\exp} \,| \; > t_{n-1;1-\alpha/2} \right\}$$



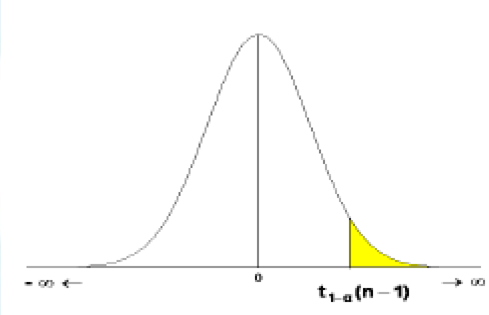
Contrastes Unilaterales:

$$H_1 : \mu < \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ t_{\exp} < -t_{n-1;1-\alpha} \right\}$$



ó

$$H_1 : \mu > \mu_0 \;\Rightarrow\; \text{R.C} = \left\{ t_{\exp} > t_{n-1;1-\alpha} \right\}$$



PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

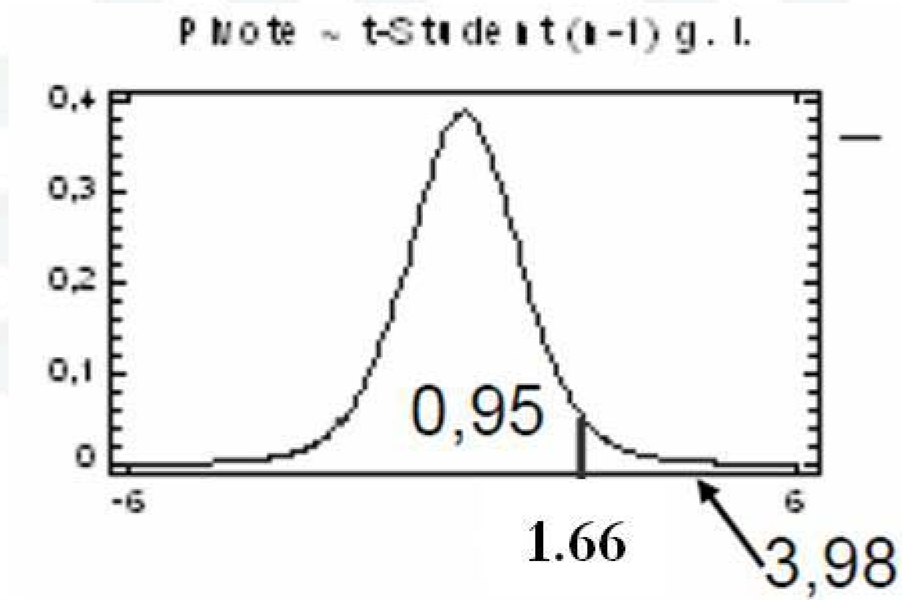
Ejemplo

Ciertas piezas de una máquina tienen una duración media de 1940 horas. Variando uno de los materiales componentes, una muestra de 100 piezas ha dado una vida media de 2000 horas con desviación típica de 150 horas. Con un nivel de significación del 5%, ¿se ha producido un cambio significativo en la vida media de las piezas?

$$\textit{Datos}:\ \text{n=100, } \mu\text{=1940, } \overline{\text{x}}\text{=2000, S=150}$$

$$\text{Calculamos: } S_c = \sqrt{\frac{nS^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{100\cdot 150^2}{99}} = 150.76$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1940 \\ H_1 : \mu > 1940 \end{cases} \qquad t_{\exp} = \frac{2000-1940}{150.76/\sqrt{100}} = 3.98$$



Rechazo H_0 si $t_{exp} > t_{n-1;1-\alpha} = t_{99;0.95} = 1.66$

Como 3.98 > 1.66, el estadístico de contraste pertenece a la región crítica y en consecuencia **Rechazo H_{0}.**

Conclusión: Admitimos con una significación del 5% que la vida media de las piezas ha aumentado.

3. Contraste de Hipótesis para la varianza de una población normal.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Sabemos que:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

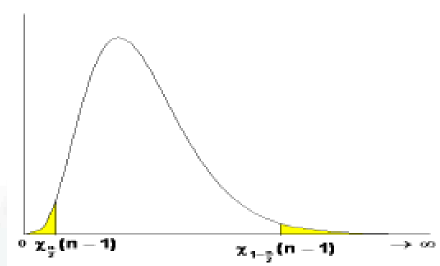
$$\text{Si } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_{\exp} = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma_0^2} \to \chi^2_{n-1}$$

Estadístico de Contraste

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

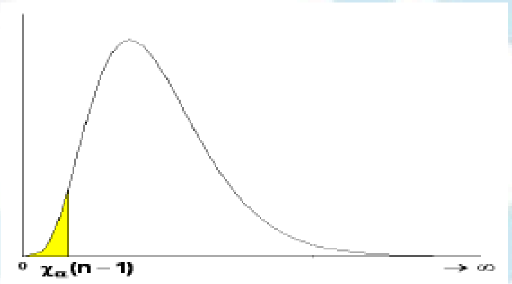
Contrastes Bilaterales:

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ \chi^2_{\exp} < \chi^2_{n-1;\ \alpha/2} \right\} \cup \left\{ \chi^2_{\exp} > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \right\}$$



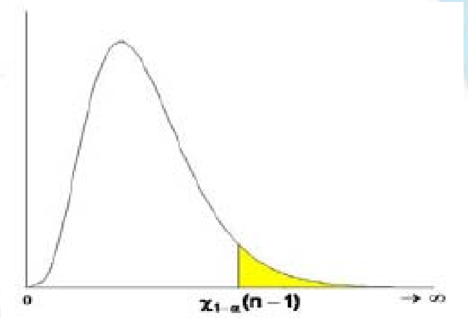
Contrastes Unilaterales:

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ \chi^2_{\exp} < \chi^2_{n-1;\ \alpha} \right\}$$



ó

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ \chi^2_{\exp} > \chi^2_{n-1;\ 1\text{-}\alpha} \right\}$$



Escuela Superior de Ingeniería

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

Ejemplo

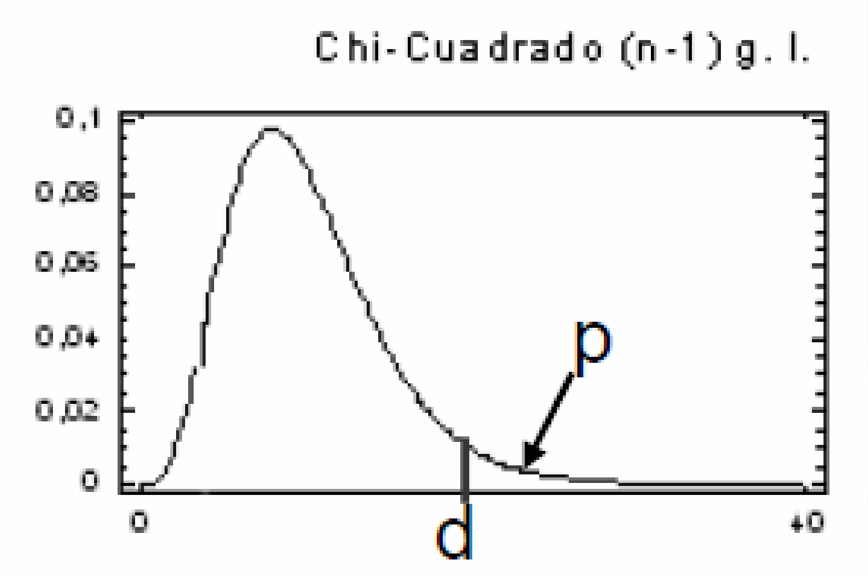
Se admite que un determinado proceso es correcto siempre que la variabilidad, medida por la desviación típica, no supere las 3 unidades. Se dispone de una muestra de tamaño 15, con los siguientes valores: 27, 17,18, 30, 17, 22, 16, 23, 26, 20, 22, 16, 23, 21, 17

Contrastar la hipótesis de que el funcionamiento es correcto indicando el p-valor suponiendo que la población está distribuida normalmente y considerando un nivel de significación del 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma \leq 3 \\ H_1 : \sigma > 3 \end{cases} \quad \text{A efectos prácticos equivale a contrastar} \quad \begin{cases} H_0 : \sigma = 3 \\ H_1 : \sigma > 3 \end{cases}$$

$$\chi^2_{\text{exp}} = \frac{14 \cdot 4.31^2}{9} = 28.89 \quad \Rightarrow \quad \text{p-valor} = P(\chi^2_{14} > 28.89) = 0.0108143$$

Escuela Superior de Ingeniería



Rechazo H_0 si p-valor $< \alpha$

En este caso, α es igual a 0.05, por lo que **Rechazo H_0.** Si α fuera 0.01 tendría que Aceptar H_0.

Conclusión: Admitimos con una significación del 5% que el Proceso no es correcto, ya que σ ha aumentado.

Escuela Superior de Ingeniería

4. Contraste de Hipótesis para una proporción binomial.

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

Sabemos que cuando n tiende a infinito:

$$p \rightarrow N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$$

$$\text{Si } H_0 : \pi = \pi_0 \;\; \Rightarrow$$

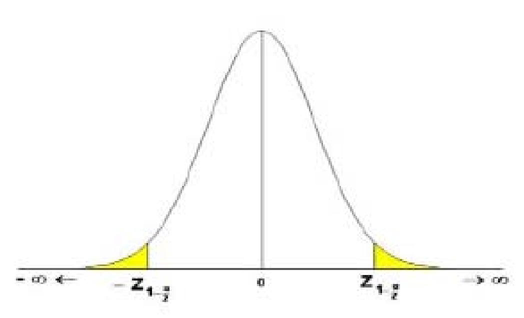
$$z_{\exp} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

Estadístico de Contraste

PRINCIPALES CONTRASTES DE HIPÓTESIS PARA UNA POBLACIÓN

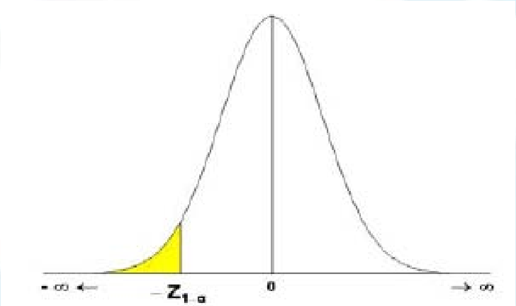
Contrastes Bilaterales:

$$H_1 : \pi \neq \pi_0 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ \left| z_{\text{exp}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$$



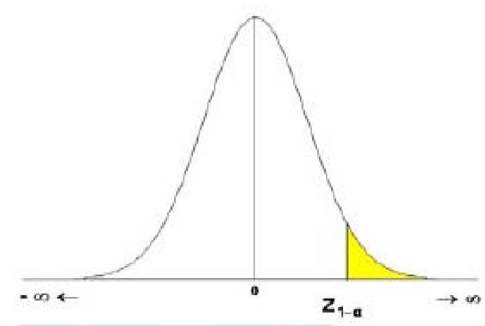
Contrastes Unilaterales:

$$H_1 : \pi < \pi_0 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ z_{\text{exp}} < -z_{1-\alpha} \right\}$$



ó

$$H_1 : \pi > \pi_0 \Rightarrow \text{R.C} = \left\{ z_{\text{exp}} > z_{1-\alpha} \right\}$$

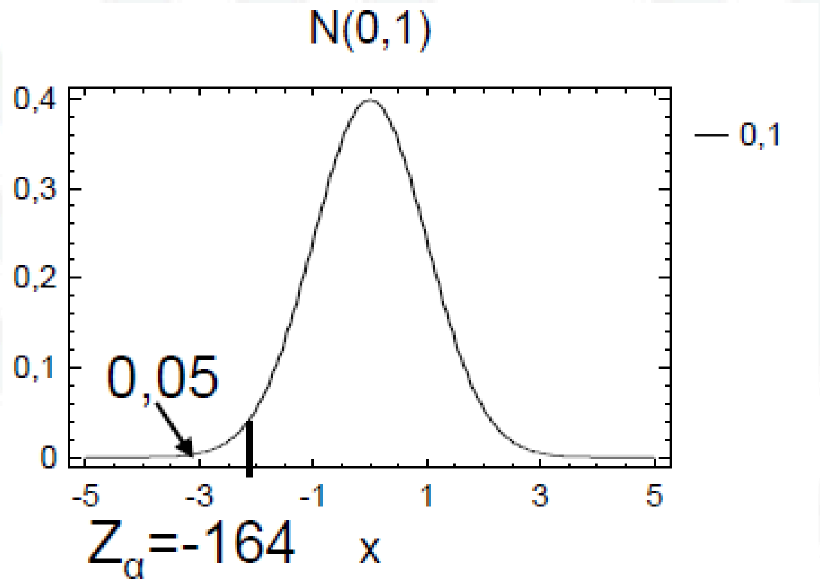


Ejemplo

La proporción de fumadores antes de la ley antitabaco era del 20% de la población. Se ha tomado una muestra de 500 personas de las cuales 75 eran fumadores. A partir de un contraste de hipótesis adecuado, decida si después de la ley antitabaco hay los mismos fumadores o menos, con un nivel de significación del 5%.

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0.2 \\ H_1 : \pi < 0.2 \end{cases}$$

$$z_{\exp} = \frac{0.15 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}} = -2.795$$



Rechazo H_0 si $z_{exp} < z_{\alpha} = z_{0.05} = -1.64$

Como -2.795 < -1.64, el estadístico de contraste pertenece a la región crítica y en consecuencia **Rechazo $H_{0.}$**

Conclusión: Admitimos con una significación del 5% que el número de fumadores ha disminuido después de la ley antitabaco.

Escuela Superior de Ingeniería

EJERCICIOS PROPUESTOS

Problema 1.
Supongamos que 100 neumáticos de cierta marca duraron en promedio 21431 km con una desviación típica poblacional de 1295 km. Utilizando un nivel de significación de 5%, ¿Podemos considerar que la duración media de los neumáticos es inferior a 22000 km?

Problema 2.
Un constructor afirma que el 70% de las casas tienen calefacción. ¿Se estaría de acuerdo con tal afirmación si una inspección aleatoria muestra que 8 de 15 casas cuentan con calefacción? Considerar un nivel de significación de 10%.

Problema 3.

Un aparato de medida tiene garantizada de fábrica una desviación típica de 0.25 unidades. Transcurrido un año, una muestra de 20 medidas del mismo objeto, dio una S=0.32 unidades, ¿Puede decirse que el aparato está estropeado?