

Tema 0: Combinatoria.

**Grado en Ingeniería Informática y
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales**

**Escuela Superior de Ingeniería.
Departamento de Estadística e I.O.**

Antonio Gámez y Luis M. Marín, 2011

Índice del tema: Combinatoria

1. **Introducción**
2. **Principios básicos de recuento**
3. **Conceptos básicos**
4. **Muestras ordenadas: Variaciones. Permutaciones.**
 - a. Sin repetición
 - b. Con repetición
5. **Muestras no ordenadas: Combinaciones. Números combinatorios**
 - a. Sin repetición
 - b. Con repetición
6. **Binomio de Newton**

Introducción

“Es importante aprender métodos y técnicas de investigación, pero sin caer en un fetichismo metodológico. Un método no es una receta mágica. Más bien es como una caja de herramientas, en la que se toma la que sirve para cada caso y para cada momento”

Ander-Egg

La combinatoria es el arte de contar. Mediante la combinatoria podemos calcular cardinales de conjuntos y enumerar los elementos que satisfacen determinados criterios de formación. La combinatoria trata, ante todo, de contar el número de maneras en que unos objetos dados pueden organizarse de una determinada forma.

La combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal (1623-1662) y de Pierre Fermat (1601-1665) sobre la teoría de juegos de azar. Mientras Pascal se encontraba trabajando en sus Cónicas en 1654, su amigo el caballero de Meré, gran aficionado al juego, le planteó algunas cuestiones como la siguiente: «En ocho lanzamientos sucesivos de un dado intenta un jugador obtener un uno, pero el juego se interrumpe después de tres intentos fallidos. ¿En qué proporción ha de ser compensado el jugador?». Pascal escribió a Fermat sobre este problema y la correspondencia intercambiada contenía los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y constituyó el punto de partida de la moderna teoría de las probabilidades.

Aunque ni Pascal ni Fermat expusieron sus resultados por escrito, Huygens publicó en 1657 un breve tratado titulado “*Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados*” inspirado en la correspondencia de estos dos matemáticos franceses. Mientras tanto, Pascal había relacionado el estudio de las probabilidades con el triángulo aritmético de Cardano, al que desde entonces ha

pasado a llamarse triángulo de Pascal y que tiene gran utilidad en el cálculo de los términos del desarrollo de la potencia de un binomio.

El término **combinatoria** tal y como lo usamos actualmente, fue introducido por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) en su Dissertatio de Arte Combinatoria. De gran importancia para la consolidación de la combinatoria fue el artículo de Ars Conjectandi (El arte de conjeturar) de Jakob Bernoulli (1654-1705); este trabajo estaba dedicado a establecer las nociones básicas de probabilidad. Para esto fue necesario introducir un buen número de nociones de combinatoria pues se usaron de manera abundante en las aplicaciones del cálculo de coeficientes de probabilidades. Se puede decir que con los trabajos de Leibniz y Bernoulli se inicia el establecimiento de la combinatoria como una nueva e independiente rama de las matemáticas.

Es una rama de utilidad en diversas especialidades, tales como la biología, la física, la química y la propia matemática, en el desarrollo de la geometría combinatoria, los grafos, programación lineal y, por supuesto, como ya se ha dicho, en la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones prácticas.

En este tema vamos a exponer las reglas generales de la combinatoria, los principios aditivos y multiplicativos, las variaciones, permutaciones y combinaciones con y sin repetición. Los definiremos dando las características que permitirán reconocer su aplicación en el trabajo práctico, y los teoremas que permitirán su resolución.

1. Principios básicos de recuento

Las técnicas de recuento son las que permiten averiguar el número de agrupamientos que se puede realizar con los elementos de conjuntos cuando se ordenan según determinados criterios. Se trata de técnicas que derivarán en los procedimientos y estrategias de la combinatoria actual. Los principios básicos del recuento nos permitirán descomponer los problemas en partes.

Definición Se denomina cardinal de un conjunto A al número de elementos de dicho conjunto y lo denotaremos $|A|$ o $\text{card}(A)$

Para el conjunto vacío \emptyset se define $|\emptyset|=0$. Si $|A| = n$, siendo n un número natural, entonces diremos que A es un conjunto finito.

1.1. Principio del producto

Si un procedimiento se puede separar en dos etapas una de m maneras y otra de k maneras, de forma tal que el resultado de una no influye en el resultado de la otra, entonces ambas situaciones pueden ocurrir de $m \cdot k$ maneras.

Si A y B son conjuntos finitos no vacíos y $A \times B$ es su producto cartesiano, entonces $|A \times B| = |A| \times |B|$ generalizando este principio a n conjuntos finitos no vacíos tenemos que:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

Este principio es útil cuando se puede descomponer el proceso de recuento en pasos independientes.

Ejemplo 1.1

¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar una moneda 3 veces?

Puesto que los resultados de cada lanzamiento son independientes y el resultado obtenido en un lanzamiento no influye en los siguientes, vamos a aplicar el principio del producto.

En cada lanzamiento podemos obtener 2 resultados (cara o cruz). Por tanto, se trata de un conjunto A con dos elementos que se multiplica por sí mismo tres veces. En total hay: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultados posibles.

Esta situación se puede esquematizar en forma de un diagrama de árbol que quedaría como el diagrama que se puede ver en la figura 1.

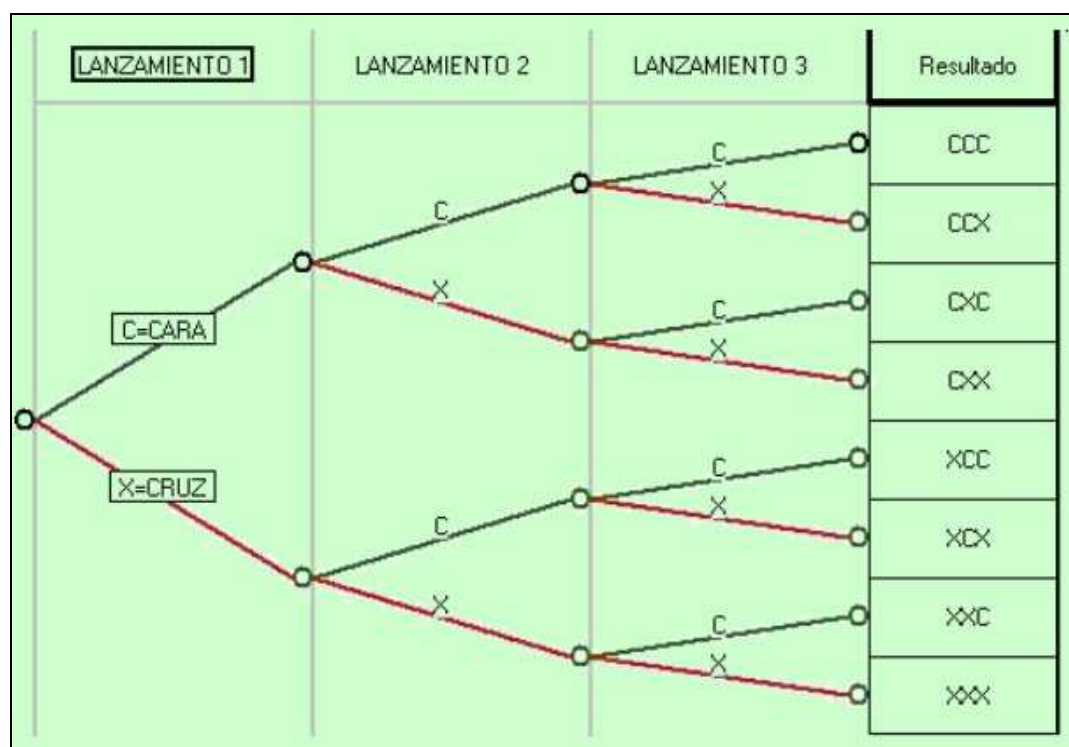
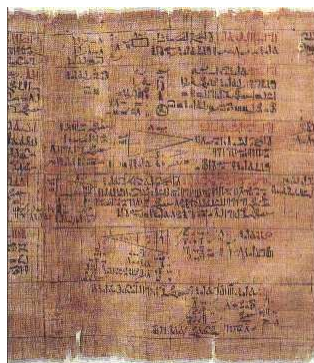


Figura 1: Diagrama de árbol de resultados del lanzamiento de tres monedas.

Ejemplo 1.2

Versión actualizada del problema 79 del Papiro Rhind (1650 a.C.).



Según iba a St. Ives
me crucé con un hombre con 7 esposas.
Cada esposa tenía 7 sacos,
cada saco tenía 7 gatos,
cada gato tenía 7 gatitos.
Gatitos, gatos, sacos y esposas.
¿Cuántos iban a St. Ives?

St. Ives Mother Goose
(La mamá oca de San Ives)

$$\underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7}_4 = 7^4 = 2401$$

Ejemplo 1.3

Mozart compuso un vals con 11 posibilidades distintas para 14 de los 16 compases y 2 posibilidades para cada uno de los restantes.

¿Se habrán llegado a escuchar alguna vez todas las realizaciones posibles?

¿Cuántas posibilidades son?



$$\underbrace{11 \times 11 \times \dots \times 11}_{14} \times 2 \times 2 = 11^{14} \times 2^2 =$$

$$1.518.999.334.332.964 \approx 1,5 \times 10^{15}$$

1.2. Principio de la unión (regla de la suma)

Si una situación se puede dar m veces y la otra k veces, entonces el número total de veces que se pueden dar una situación o la otra, sin que puedan ocurrir conjuntamente, es $m+k$.

Este principio permite calcular el número de formas totales en que puede suceder una situación u otra, pero no ambas.

Si A y B son conjuntos finitos, no vacíos y no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \emptyset$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Generalizando este principio a n conjuntos finitos no vacíos tenemos que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Es también una técnica que se usará para descomponer un problema de recuento en partes más pequeñas.

Ejemplo 1.4

En una biblioteca hay 20 libros de texto de lengua y 30 libros de texto de matemáticas. ¿De cuántas maneras distintas puede un estudiante escoger un libro de cualquiera de las dos asignaturas?

Para la elección del libro, como no se especifica si este debe ser de matemáticas o de lengua, hay, por el principio de la suma, $20 + 30 = 50$ posibilidades, puesto que, ambos grupos son “incompatibles”, esto es: el libro es de lengua o de matemáticas pero no de ambas materias a la vez.

A veces, la resolución de un problema pasa por aplicar ambos principios, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5

En una sociedad en la que hay 30 hombres y 20 mujeres es necesario elegir un presidente y un vicepresidente, sin que una misma persona pueda ocupar los dos cargos. ¿De cuántas maneras distintas pueden elegirse a las dos personas que ocuparán los cargos?

Para la elección del presidente hay, por el principio de la unión, $20 + 30 = 50$ posibilidades, puesto que ambos grupos son incompatibles: o se es hombre o mujer.

Para la elección del vicepresidente disponemos de los 49 restantes puesto que una misma persona no puede ocupar los dos cargos y, aplicando el principio del producto tenemos que hay: $50 \cdot 49 = 2450$ formas posibles de seleccionar los cargos.

1.3. Principio del complementario

Si X es un conjunto finito y A un subconjunto de X , esto es, $A \subset X$, entonces $|A^c| = |X| - |A|$, donde A^c es el conjunto complementario de A .

Esta técnica es de aplicación cuando es más sencillo contar lo que no se pide que lo que queremos. Veamos un caso en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.6

¿Cuántos números naturales de tres cifras que no sean capicúas existen?

Siguiendo el principio del complementario vamos a contar los números capicúas de tres cifras y luego se lo restamos al número total de tres cifras existentes.

Calculemos cuántos números de 3 cifras hay. Un número de tres cifras es de la forma: $a b c$, siendo $a \neq 0$ (en otro caso no sería de 3 cifras) pudiendo tomar el resto de las 9 cifras y las posiciones b y c pueden tomar cualquier valor del 0 al 9, es decir, 10 cifras. Aplicando el principio del producto la cantidad de números de tres cifras es:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900 \text{ números de 3 cifras.}$$

Ahora calcularemos la cantidad de números capicúas de 3 cifras que serán de la forma $a b a$, donde $a \neq 0$ pudiendo tomar el resto de las 9 cifras y la posición b puede tomar una de las 10 cifras. Aplicando nuevamente el criterio del producto obtenemos:

$$9 \cdot 10 = 90 \text{ números capicúas de 3 cifras.}$$

Aplicando el principio del complementario existen $900 - 90 = 810$ números no capicúas de 3 cifras.

1.4. Principio de las cajas (o de Dirichlet)

Si se quieren repartir n objetos en m cajas y $n > m$, entonces en alguna caja habrá más de un objeto.

Teorema Si se tiene un conjunto de n objetos, repartidos en m cajas y $n > m \cdot k$, con m , n y k , números naturales, entonces alguna caja debe recibir más de k objetos.

Demostración

Supongamos que tenemos n objetos repartidos en m cajas y, vamos a demostrar el principio por reducción al absurdo, vamos a suponer que ninguna caja recibe más de k objetos.

Esto quiere decir que todos las cajas tienen a lo sumo k objetos (k o menos objetos). Entonces el número de objetos que hay en las cajas será igual a $n_1 + n_2 + \dots + n_m$, siendo n_i el número de objetos de la caja i . Como sabemos que en cada caja hay k objetos o menos $n_i \leq k, i = 1, 2, \dots, m$.

Sumando todos los objetos de las cajas obtenemos que: $n_1 + n_2 + \dots + n_m \leq k \cdot m \rightarrow n \leq k \cdot m$, contradicción porque $n > m \cdot k$. Por lo tanto, el Principio de Dirichlet es cierto.

Aunque este principio puede ser muy trivial, puede resolver problemas tales como el siguiente.

Ejemplo 1.7

Las notas de una asignatura van de 1 a 10. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener una clase para estar seguros de que al menos 4 recibirán la misma nota?

En este caso, como las notas son del 1 al 10 tendremos 10 cajas en las que ubicar a los estudiantes, para asegurar que en una de esas cajas al menos haya 4 estudiantes, el número total de estudiantes, según el principio de Dirichlet debe ser 31. Cada una de las cajas de las notas con 3 alumnos y una con 4 alumnos.

2. Conceptos básicos

Definición

Se denomina población al conjunto de elementos que estamos estudiando. Llamaremos tamaño de la población al número de elementos de este conjunto.

Definición

Se denomina muestra a un subconjunto de la población.

Llamaremos tamaño de la muestra al número de elementos que la componen.

En las muestras hay que considerar dos aspectos:

- ✓ El orden, es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
- ✓ La repetición, es decir, la posibilidad de que los elementos de la muestra se puedan tomar más de una vez o no; en otros términos: que se repitan o no.

Ejemplo 2.1

En un juego de azar en el que el jugador ha de elegir 6 números de entre los números naturales que van del 1 al 49. ¿Cuántas posibles combinaciones se pueden hacer en ese juego?

Población: $\{1, 2, \dots, 49\}$

Muestra: como hay que elegir 6 números una muestra estará formada por cualquier combinación de 6 números tomados de la población anterior, es decir, del 1 al 49 (una de ellas es la siguiente: 1, 17, 23, 27, 34, 45, 48)

Orden: ¿Importa el orden de elección? No

Repetición: ¿Se pueden repetir los números en la muestra? No (los números no pueden repetirse)

La combinatoria es la parte de las matemáticas que estudia métodos para determinar el número de muestras que se pueden extraer de una determinada población sin necesidad de enumerarlos uno por uno en cada caso. Para ello, es preciso aprender técnicas de ordenación, colocación, selección, etc., de objetos. Las técnicas que aprenderemos en este tema para calcular el número de muestras se basan en los principios que se describen en el siguiente capítulo.

3. Muestras ordenadas

3.1. Muestras ordenadas sin repetición

3.1.1. Variaciones sin repetición

Si tenemos una población de tamaño n y queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño k ($k < n$), podemos hacerlo de este modo:

- ✓ El primer elemento lo podemos elegir entre los n elementos.
- ✓ El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre los $n-1$ elementos restantes.
- ✓ ...
- ✓ El elemento k , lo podremos elegir entre $n-k+1$ elementos que quedan sin usar.

Por tanto, y aplicando el principio del producto, en total hay:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

muestras de tamaño k ordenadas y sin repetición.

Ejemplo 3.1

¿De cuántas maneras se pueden elegir los miembros del comité de una clase de 40 estudiantes formado por el delegado, el subdelegado y el secretario, teniendo en cuenta, además, que una misma persona no puede ocupar más de una cargo?

Población: $\{1,2,3,\dots,40\}$, los 40 estudiantes.

Muestra: como hay que elegir 3 cargos será cualquier selección de 3 personas tomadas de la población.

Orden: ¿Importa el orden de elección? Sí. Si una muestra está formada por A como delegado, B como subdelegado y C como secretario, y se cambian los papeles entre sí, entonces se tiene una muestra distinta.

Repetición: ¿Se pueden repetir los números en la muestra? No. Lo dice explícitamente el texto.

Para el cargo de delegado tenemos 40 posibilidades (daría igual si se empieza por otro cargo).

Determinado el delegado, para el cargo de subdelegado quedan 39 posibilidades.

Para el secretario, finalmente 38 estudiantes.

Por tanto, el número total de comités posibles es de: $40 \cdot 39 \cdot 38 = 59380$.

Definición

Las muestras ordenadas y sin repetición se denominan variaciones sin repetición.

Por tanto, si el tamaño de la población es n y el de la muestra k , el número de variaciones sin repetición lo expresaremos con la notación: V_n^k

Y teniendo en cuenta lo explicado, en número de muestras es:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Obsérvese que k determina el número de factores, es decir: V_9^4 es igual al producto de cuatro factores de la forma: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

3.1.2. Permutaciones sin repetición

Definición En el caso particular de que se tome una muestra de tamaño igual al tamaño de la población, es decir $k=n$, las variaciones sin repetición se denominan permutaciones.

Con esa condición se tiene: $V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$

Definición

Se denomina factorial de n , siendo $n > 1$, al producto de todos los números naturales desde el 1 hasta el n y se representa por $n!$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

Por definición: $0! = 1$ y $1! = 1$.

En consecuencia, las permutaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, que denotamos por P_n , son los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y, en consecuencia, un grupo se diferencia de los demás en el orden de colocación de los elementos. Por tanto: $P_n = n!$

Ejemplo 3.2

¿De cuántas maneras se sentar 8 personas en 8 asientos?

La primera persona se puede sentar en cualquiera de los 8 sitios.

La segunda en cualquiera de los 7 sitios restantes.

La tercera en 6, y así sucesivamente hasta que la octava sólo tiene 1 sitio para sentarse.

Se trata entonces de una permutación de 8 elementos y las posibilidades serán:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

La introducción del concepto factorial nos permite demostrar el siguiente teorema, que es otra forma de calcular el número de variaciones de una población de n elementos con muestras de k elementos.

Teorema

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Demostración

En efecto, sabemos que $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Si multiplicamos y dividimos esta expresión por $(n-k)!$ queda:

$$V_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2. Muestras ordenadas con repetición

3.2.1. Variaciones con repetición

Definición

Las muestras ordenadas y con repetición se denominan variaciones con repetición.

Si la población es de tamaño n y la muestra de tamaño k , pero ahora permitimos repeticiones, entonces procedemos de la siguiente manera:

- ✓ El primer elemento se puede elegir de n maneras.
- ✓ Como podemos repetir, el segundo se puede elegir también de n maneras.
- ✓ ...
- ✓ Y así hasta el elemento número k se puede elegir por tanto de n maneras.

En total tendremos: $n \cdot \overset{k \text{ veces}}{\dots} \cdot n = n^k$ muestras.

Ejemplo 3.3

¿Cuántos números de tres cifras (no necesariamente distintas) pueden formarse con los dígitos 1, 6, 7, 8 y 9?

La primera cifra se puede elegir de entre las 5.

La segunda, al poderse repetir la cifra también se puede elegir de entre las 5.

La tercera también de entre las 5.

Por tanto pueden formarse $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ números de tres cifras.

Las variaciones con repetición de n elementos de orden k , que se pueden repetir, se expresan con la notación:

$$VR_n^k$$

Y según se ha demostrado: $VR_n^k = n^k$

3.2.2. Permutaciones con repetición

Veamos cuántas ordenaciones distintas pueden obtenerse con n elementos si hay k subgrupos cuyos objetos son indistinguibles entre sí y cada subgrupo contiene a_1, a_2, \dots, a_k elementos respectivamente.

Para clarificar lo expresado, consideremos el siguiente ejemplo. En la figura 2 se puede ver la representación de $n=11$ elementos distribuidos en $k=4$ subgrupos de elementos indistinguibles (1,5,3 y 2 respectivamente).

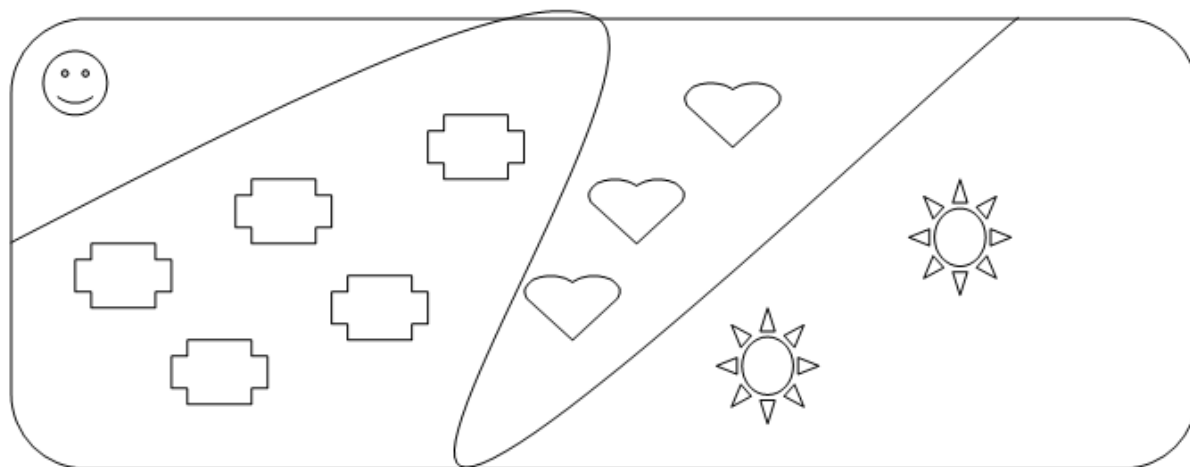


Figura 2: Permutaciones con repetición de cuatro elementos.

Si se colocan todos “en fila”, uno detrás de otro, se tiene una configuración. Si se intercambian entre sí dos objetos iguales la nueva configuración es equivalente a la anterior. Se trata de encontrar cuántas ordenaciones distintas podemos obtener con estos elementos.

En el ejemplo de la figura, las posibles permutaciones de 11 elementos si fueran diferentes son $11!$, pero $2!$ son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los soles ☀ ; $3!$ son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los corazones ♥ ; $5!$ son iguales porque se han obtenido por permutaciones de las cruces ☒ y como solo hay una cara no se intercambia con otra.

Por lo tanto, se tienen: $\frac{11!}{5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 27720$ muestras distintas.

Esta expresión puede generalizarse para calcular el número de ordenaciones distintas que se pueden obtener con n elementos si hay k subgrupos cuyos objetos son iguales y cada subgrupo contiene a_1, a_2, \dots, a_k elementos, respectivamente, de tal forma que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ lo que se expresa como:

$$P_n^{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_k!}$$

Ejemplo 3.4

¿Cuántas palabras, con o sin significado, se pueden formar con las letras de la palabra VIVIR?

La V se repite 2 veces.

La I se repite 2 veces.

La R no se repite.

$2+2+1=5$ que es el número total de letras que vamos a permutar.

Se trata de una permutación con repetición de 5 elementos de los que dos se repiten dos veces:

$$P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30 \text{ palabras.}$$

4. Muestras no ordenadas

4.1. Muestras no ordenadas y sin repetición

En este epígrafe vamos a tratar muestras en las que no importa el orden en el que figuren los elementos de la muestra, es decir, las series 1,2 y 2,1 se tratan como iguales pues ha salido un 1 y un 2 sin importar el orden en el que aparecen.

Ejemplo 4.1

En una asociación formada por 30 hombres y 20 mujeres se quiere formar una comisión de tres personas.

La comisión formada por las personas A, B y C es la misma que las formadas por B, C y A puesto que, en este caso, el orden en el que figuren no modifica la comisión. Esta situación es esencialmente distinta de la planteada anteriormente cuando había que elegir tres cargos.

¿Cómo proceder para calcular el número de muestras en esta situación?

Si influyera el orden, con la muestra A, B, C habría $P_3 = 3! = 6$ grupos que tendrían a esos tres elementos; pero como ahora no influye el orden, el número total hay que dividirlo por esa cantidad, es decir: $\frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} = 19600$, es el número total de comisiones distintas que se pueden formar. Veamos en que consisten las muestras ordenadas sin repetición con el ejemplo 4.2.

Ejemplo 4.2

Supongamos tener una bolsa con 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos tres bolas, sin importarnos el orden y sin repetir, ¿cuántos posibles resultados hay?

Si el orden influyese en el agrupamiento, entonces ya sabemos que tendríamos $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ posibilidades. Ahora bien, como no nos importa el orden, para nosotros los tríos (1,2,3) (1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,1,2) (3,2,1), que son 6, en realidad sólo deberían contar como una, y lo mismo ocurre con el resto de las ternas. Es decir, que tendremos que dividir el número de variaciones por las permutaciones de 3 elementos.

Así resulta que el número de muestras del ejemplo es:

$$\frac{V_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10 \text{ posibilidades de selección de las tres bolas.}$$

De esta forma, el número de muestras no ordenadas y sin repetición de tamaño k que se extraen de una población de tamaño n es igual a:

$$\frac{V_n^k}{P_k}$$

Definición

Las muestras no ordenadas y sin repetición se denominan **combinaciones sin repetición**.

Las notaremos así: C_n^k . Y según se ha deducido, el número de combinaciones sin repetición es igual a:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

A este número resultante se le denomina también **número combinatorio**, que se denota de la siguiente manera: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

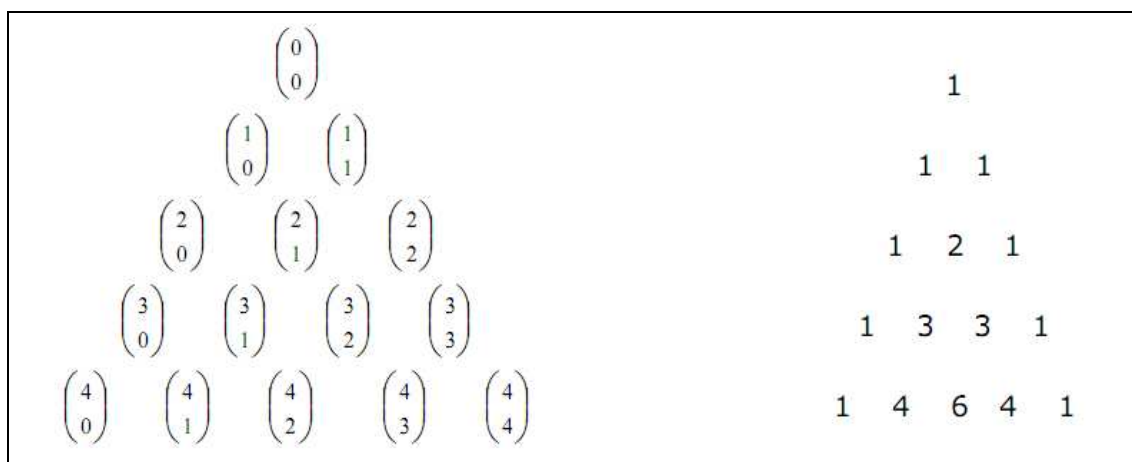
Definición

La expresión $\binom{n}{k}$ se denomina número combinatorio y se lee “ n sobre k ”. Y la expresión que permite calcular su valor es: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Propiedades de los números combinatorios

- 1) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$
- 2) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, a estos números combinatorios se les denomina complementarios.
- 3) Fórmula de Stiefel: $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$

Usando esta última propiedad obtenemos el conocido **triángulo de Pascal**, también llamado de **Tartaglia** o **Cardano**, en el que un número es la suma de los dos que están situados justo encima.



Hemos obtenido dos triángulos equivalentes: el primero formado por los números combinatorios, y el segundo, por los valores de esos mismos números. En ambos casos podemos observar la relación que guardan unos números con otros.

Aplicando la tercera propiedad advertimos que cada número combinatorio es la suma de los dos números que están situados encima de él.

El interés del triángulo de Pascal radica en su aplicación en diversos cálculos, como por ejemplo, el desarrollo del binomio de Newton que veremos más adelante.

4.2. Muestras no ordenadas y con repetición

El grupo sanguíneo se constituye con los genes A, B (dominantes) y O (recesivo). Los genotipos que se pueden formar con estos caracteres son:

$$\begin{array}{c} AA, BB, OO \\ AB, AO, BO \end{array}$$

En estas muestras no importa el orden, es decir, el grupo sanguíneo AB es el mismo que el BA, pero se pueden repetir los genes.

Vamos a calcular el número de posibles combinaciones:

- ✓ Hay 3 casos, tantos como modalidades del gen, en los que se repite el gen.
- ✓ Los otros tres resultan de las posibles combinaciones sin repetición de los 3 genes tomados en grupos de 2, es decir, C_3^2 .

Entonces, el número total de posibilidades sería, en este caso: $3 + C_3^2$

Definición

Se denominan **combinaciones con repetición** al número de muestras de k elementos iguales o distintos que se pueden hacer con una población de n elementos, de forma que dos grupos se diferencian en algún elemento y no en el orden de colocación.

Este número se representa por CR_n^k . Veamos con el ejemplo 4.3 cómo se forman.

Ejemplo 4.3

Tenemos una bolsa con 4 bolas numeradas del 1 al 4 y vamos a construir todas las combinaciones con repetición posibles.

Sacamos una bola: Si tenemos un conjunto de cuatro elementos y queremos hacer grupos de uno, únicamente podremos hacer cuatro grupos: 1, 2, 3, 4.

$$CR_4^1 = 4$$

Sacamos dos bolas: Tendremos las combinaciones sin repetición a las que hay que añadir las repeticiones del mismo elemento. Es decir, se forman añadiendo a cada una de las de orden uno, el mismo elemento y todos los siguientes. Así se obtienen: 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44.

$$CR_4^2 = C_{4+1}^2 = \binom{5}{2} = 10$$

Sacamos tres bolas: Se pueden construir a partir de las anteriores añadiendo a cada combinación de orden dos el último elemento y todos los elementos siguientes. Se obtienen: 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 344, 444.

$$CR_4^3 = C_{4+1+1}^3 = C_6^3 = \binom{6}{3} = 20$$

Sacamos cuatro bolas: Al igual que el caso anterior se pueden obtener a partir de las de orden tres, añadiendo a cada una de ellas el último elemento y los elementos siguientes.

$$CR_4^4 = C_{4+1+1+1}^4 = C_7^4 = \binom{7}{4} = 35$$

De cinco o más elementos: Como estamos construyendo combinaciones con repetición y los elementos se pueden repetir, podríamos continuar construyendo combinaciones de orden cinco o más elementos.

Generalizando el procedimiento del ejemplo, las calculamos de la siguiente forma:

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Ejemplo 4.4

El popular juego del dominó está formado por unas fichas rectangulares divididas en dos partes cuadradas. En cada parte se marcan puntos que pueden ir desde cero hasta seis. Se trata de un caso de combinaciones con repetición pues $n = 7$ y $k = 2$, es decir,

$$CR_7^2 = C_{7+2-1}^2 = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

El juego del dominó tiene 28 fichas diferentes.

5. Binomio de Newton

Vamos a desarrollar la potencia cúbica del binomio $(x + a)$: $(x + a)^3$

Lo vamos a hacer realizando el producto de los tres binomios:

$$(x + a)^3 = (x + a) \cdot (x + a) \cdot (x + a)$$

Para el objetivo que perseguimos, no aplicaremos la propiedad conmutativa, es decir, dejaremos las variables en el mismo orden en el que han sido multiplicadas:

$$(x + a)^3 = (xx + xa + ax + aa) \cdot (x + a) = xxx + (xxa + xax + axx) + (xaa + axa + aax) + aaa$$

En el siguiente paso vamos a agrupar los términos que contienen el mismo número de letras iguales, es decir, igual número de x y de a :

$$xxx + (xxa + xax + axx) + (xaa + axa + aax) + aaa$$

Así tenemos: el primer término contiene tres veces la x ; en el paréntesis que sigue están todas las combinaciones constituidas de dos x y una a y hay tres, los mismos que los que contienen

el siguiente paréntesis, una x y dos a ; en el último término no hay x . En síntesis, tenemos la siguiente expresión:

$$1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 a + 3 \cdot x a^2 + 1 \cdot a^3$$

El primer factor $\binom{3}{0} = 1$ cuenta las combinaciones formadas por las tres x .

El segundo factor $\binom{3}{1} = 3$ cuenta las formadas por dos x y una a .

El tercer factor $\binom{3}{2} = 3$ cuenta las formadas por una x y dos a .

El último factor $\binom{3}{3} = 1$ cuenta las combinaciones formadas por las tres a .

Ejemplo 5.1

Teniendo en cuenta la pauta obtenida en el ejemplo anterior, el desarrollo de la potencia cuarta del binomio $(x + y)^4$ es igual a:

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 = \\ &= 1 x^4 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} x^3 y + \frac{4!}{2! \cdot 2!} x^2 y^2 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} x y^3 + 1 y^4 = 1 x^4 + 4 x^3 y + 6 x^2 y^2 + 4 x y^3 + 1 y^4 \end{aligned}$$

Pero observamos que los coeficientes obtenidos tanto en el ejemplo primero como en el ejemplo segundo se corresponden con las filas del triángulo de Pascal, empezando a contar las filas desde la fila 0, como podemos ver en la figura 3.

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	p=8	p=9
n=0	1									
n=1	1	1								
n=2	1	2	1							
n=3	1	3	3	1						
n=4	1	4	6	4	1					
n=5	1	5	10	10	5	1				
n=6	1	6	15	20	15	6	1			
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n=8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n=9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 3: Triángulo de Tartaglia o de Pascal, para las 10 primeras filas.

Se conoce por el nombre de **binomio de Newton** a la fórmula que nos proporciona la potencia n -ésima del binomio. Así, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

Los coeficientes del binomio de Newton de exponente n son, pues, números combinatorios que corresponden a la fila n -ésima del triángulo de Pascal.

Resumiendo:

Variaciones sin repetición o variaciones **ordinarias** de n elementos tomados de k en k ($n \geq k$), son los distintos grupos de k elementos no repetidos que se pueden formar, escogidos de entre los n elementos posibles, de forma que en cada grupo haya algún elemento distinto, o tenga los mismos elementos que otro grupo, pero colocados en distinto orden. Cada uno de los posibles grupos es una variación. Se representa por V_n^k , y se calcula $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

Permutaciones ordinarias de n elementos son las distintas formas de ordenar dichos elementos. Cada forma de ordenarlos es una permutación. El número de permutaciones de n elementos se representa por P_n , y su valor es: $P_n = n!$

Combinaciones ordinarias o combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k ($n \geq k$) son los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos disponibles, de modo que en cada grupo haya k elementos distintos. En este caso para que dos grupos sean distintos, han de tener algún elemento diferente; no basta con que tengan distinto orden de colocación. Se representa por $C_{n,k}$ o C_n^k y su valor viene dado por $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k , son los distintos grupos de k elementos repetidos o no que se pueden formar, escogidos de entre los n elementos posibles. En este caso, dos grupos son distintos si tienen algún elemento diferente o si, siendo todos los elementos iguales, están colocados en distinto orden.

Se representa por VR_n^k y su valor viene dado por $VR_n^k = n^k$.

Dados n elementos de los cuales el primer elemento está repetido a_1 veces, el segundo a_2 veces, ..., el último a_r veces, de tal forma que $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$. Llamaremos **permutaciones con repetición** de esos n elementos a los distintos grupos que se pueden formar, de forma que en cada grupo de n elementos, el primer elemento está repetido a_1 veces, el segundo a_2 veces, ..., el último a_r veces. La única diferencia entre los grupos está en el orden de colocación de sus elementos distinguibles.

El número de permutaciones con repetición de n elementos se representa por $P_n^{a_1, a_2, \dots, a_k}$ y se calcula como: $P_n^{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$

Se denominan **combinaciones con repetición** al número de muestras de k elementos iguales o distintos que se pueden hacer con una población de n elementos, de forma que dos grupos se diferencian en algún elemento y no en el orden de colocación.

Este número se representa por CR_n^k , y se calcula como: $CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$

El algoritmo que podemos ver representado en la figura 4 puede resultar de ayuda en la resolución de problemas de combinatoria. Este procedimiento puede resultar útil para la clasificación de los problemas de combinatoria.

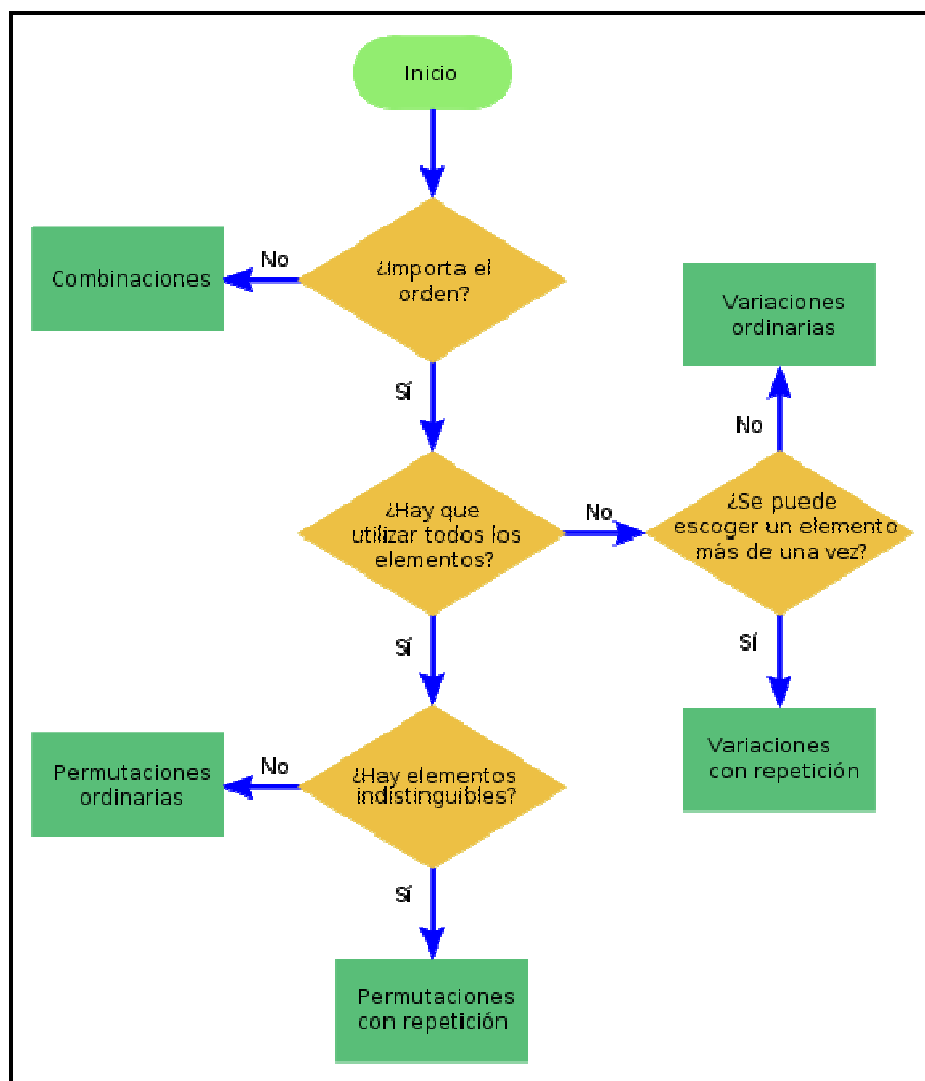


Figura 4: Procedimiento para resolver problemas de combinatoria.

Bibliografía y Referencias:

1. Boyer, C. (1996) **Historia de la matemática**. Ed. Alianza Universidad.
2. Grimaldi, R.P. (1989). **Matemática discreta y combinatoria**. Ed. Addison-Wesley.
3. Criado Herrero, Regino; Muñoz Izquierdo, Roberto (2007). Un semestre de matemática discreta.
4. N. L. Biggs: **Matemática Discreta**. Ed. Vicens Vives, 1994.
5. Wilhelmi, Miguel R. **Combinatoria y Probabilidad**. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
6. Rey Pastor, J. **Elementos de Análisis Algebraico**. Séptima edición corregida. Madrid. Industria Gráfica - Martín. 1941.
7. Cid Valle, A. Recursos Didácticos Thales-CICA-Web. **Combinatoria**, Málaga, 2000. Disponible en [<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0516-02/ed99-0516-02.html>]