Capítulo 3

Series

§1. CONCEPTO Y PROPIEDADES GENERALES

3.1. Concepto de serie.

A) *Origen de las series.*

El concepto de serie aparece de modo natural con los números cuya expresión decimal es infinita, ya sean racionales o irracionales; en concreto los números racionales de expresión decimal infinita (periódicos puros o mixtos) son series. Veamos un ejemplo sencillo.

Sea el número $\frac{1}{9}$. Su expresión decimal $0,111111\ldots$ se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= 0,111111111\ldots = \\ 0,1+0,01 &+ 0,001+0,0001+0,00001+\cdots = \\ \frac{1}{10}+\frac{1}{100} &+ \frac{1}{1{,}000}+\frac{1}{10{,}000}+\cdots \end{aligned}$$

El tercer miembro de la anterior igualdad es una *serie o suma infinita.*

El término *suma infinita* es contradictorio, porque no podemos sumar infinitos términos, ya que la operación suma sólo está definida para un número finito de sumandos.¿Qué sentido tiene, pues, una tal suma infinita?

Es necesario, pues, dotarla de sentido, e investigar qué propiedades de la suma subsisten con la nueva definición.

B) *Concepto de serie.*

Sea 3.1 la serie o suma infinita siguiente:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.1}$$

A partir de ella construimos una sucesión $\{S_n\}$ que es la llamada *sucesión de las sumas parciales de la serie* 3.1:

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 & = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ S_5 & = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Pueden ocurrir tres posibilidades:

1.^{a}) *La sucesión* $\{S_n\}$ *es convergente.*

Existe un número S que es el límite de la sucesión $\{S_n\}$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

En este caso se dice que *la serie 3.1 es convergente y que su suma es* S, y se escribe:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

2.^{a}) *La sucesión* $\{S_n\}$ *es divergente.*

En este caso es ∞ (o $+\infty$ o $-\infty$) el límite de la sucesión $\{S_n\}$,y se dice que *la serie 3.1 es divergente*, y se escribe:

$$\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

3.^{a}) *La sucesión* $\{S_n\}$ *es oscilante.*

En este caso se dice que la serie es *oscilante o indeterminada, y carece de suma.*

3.2. Condición necesaria de convergencia

Supongamos que la serie 3.1 sea convergente. Se tiene entonces que existe $S = \lim_{n\to\infty} S_n$; por tanto:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

En consecuencia:

Teorema 4 (Condición necesaria de convergencia) *Para que una serie sea convergente es una condición necesaria que el término general tienda a cero.*

Vamos a ver que esa condición necesaria *no es suficiente*: o sea, existen series que cumplen la condición necesaria y son divergentes.

El caso más importante es la llamada *serie armónica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Esta serie se llama armónica, porque cada término es la media armónica del anterior y del siguiente (media armónica de dos números es el recíproco de la media aritmética de los recíprocos): compruébelo el alumno.

Vamos a ver que la armónica es divergente: tomemos una suma parcial cuyo orden sea una potencia de dos, y para mayor claridad, empecemos con una de orden pequeño como S_8:

$$\begin{aligned}
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia: $S_8 > 1 + \frac{3}{2}$. Si en vez de tomar $S_8 = S_{2^3}$, tomásemos S_{2^i}, obtendríamos:

$$S_{2^i} > 1 + \frac{i}{2}.$$

Sea $A > 0$ un número positivo cualquiera; tomemos i_0 de tal modo que:

$$1 + \frac{i_0}{2} > A.$$

Entonces $S_{2^{i_0}} > 1 + \frac{i_0}{2} > A$; tomando $n \geq 2^{i_0}$, resulta:

$$S_n \geq S_{2^{i_0}} > 1 + \frac{i_0}{2} > A.$$

Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Es necesario, pues, obtener condiciones suficientes de convergencia, porque la necesaria que acabamos de obtener no basta.

3.3. Series geométricas

Se llaman series geométricas aquellas formadas por los términos de una progresión geométrica:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$$

Suponemos, para evitar casos triviales, que tanto a_1 como q son no nulos.

Calculemos la suma parcial enésima aplicando la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}.$$

Al ser constantes q (razón de la progresión) y a_1 (primer término), el comportamiento de S_n, al variar n, depende exclusivamente de la potencia q^n.

Es sabido que la potencia q^n tiene un límite, cuando $n \to \infty$ que depende sólo del valor absoluto de q:

1) Si $|q| < 1$, entonces $q^n \to 0$. 2) Si $|q| > 1$, entonces $q^n \to \infty$. 3) Si $q = 1$, $q^n \to 1$.

4) Si $q = -1$, q^n es oscilante, porque es la sucesión cuyos términos impares son -1 y los pares 1.

Sea, en primer lugar $|q| < 1$; entonces $q^n \to 0$ y se tiene:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1} \to \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} = S.$$

La serie es, pues, *convergente y su suma vale* $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, la potencia $q^n \to \infty$ y la serie es *divergente.*

Si $q = 1$, la serie es:

$$a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 + \cdots$$

cuyas sumas parciales son: $S_n = na_1 \to \infty$, y la serie es *divergente.*

Si $q = -1$, la serie es:

$$a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \cdots$$

cuyas sumas parciales de orden par e impar, respectivamente, son:

$$S_{2m} = 0,\ S_{2m-1} = a_1.$$

La serie es, pues, *oscilante.*

3.4. Propiedades asociativa y distributiva

Las únicas propiedades de la suma que se conservan (y no en todos los casos) al pasar a las series son la propiedad asociativa y la distributiva.

I)*Propiedad asociativa.*

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 5 (Propiedad asociativa) *Asociando de cualquier forma los términos de una serie convergente o divergente se obtiene otra serie con el mismo carácter y la misma suma.*

Esta propiedad no la poseen las series oscilantes.

Demostración: Sean las series:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.2}$$

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i)+(a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j)+(a_{j+1}+a_{j+2}+\cdots+a_k)+(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l)+\cdots \quad (3.3)$$

La segunda serie sale de asociar los términos de la primera, del siguiente modo: en el primer paréntesis están los términos del a_1 al a_i; en el segundo, del a_{i+1} al a_j; en el tercero, del a_{j+1} al a_k; en el cuarto, del a_{k+1} al a_l...

Las sumas parciales de la serie 3.2 serán las S_n, y las de la serie 3.3 S'_n.

Consideremos la suma parcial S'_1 de la serie 3.3:

$$S'_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i = S_i$$

Esta suma es la suma parcial S_i de la serie 3.2. Análogamente:

$$\begin{aligned}
S'_2 &= a_1 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = S_j \\
S'_3 &= a_1 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j + a_{j+1} + \cdots + a_k = S_k \\
S'_4 &= a_1 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j + a_{j+1} + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l = S_l
\end{aligned}$$

Esto significa que la sucesión $\{S'_n\}$ es una subsucesión de la $\{S_n\}$:

$$\{S'_n\} \subseteq \{S_n\}.$$

Aplicando el teorema estudiado sobre subsucesiones, válido sólo en los casos convergente y divergente, resulta la propiedad.

II) *Propiedad distributiva*

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 6 (Propiedad distributiva) *Si los términos de una serie se multiplican por una constante, la nueva serie posee el mismo carácter que la original.*

En el caso convergente, la suma de la nueva serie es la original multiplicada por la constante.

Demostración: Sean las series:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (3.4)$$

y

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \cdots + \lambda a_n + \cdots \tag{3.5}$$

Igual que antes, las sumas S'_n son las de la serie 3.5, y las sumas S_n las de 3.4.

Consideremos una suma S'_n de la serie 3.5:

$$S'_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \lambda S_n.$$

Si la serie 3.4 converge: $S_n \to S$ y aplicando la propiedad del límite del producto de sucesiones (el límite del producto de sucesiones convergentes es el producto de los límites):

$$S'_n = \lambda S_n \to \lambda S.$$

Si $S_n \to \infty$, es muy fácil ver que también $S'_n \to \infty$: tomando $|S_n| > A/|\lambda|$(lo cual ocurre a partir de cierto valor de n) es:

$$|S'_n| = |\lambda||S_n| > A,$$

a partir del mismo valor de n.

Queda así demostrada dicha propiedad.

III) *Adición y supresión de un número finito de términos*

Al estudiar el carácter de una serie, es frecuente suprimir un número finito de términos;ello no cambia el carácter, como afirma el siguiente

Teorema 7 *Si a una serie se le añade o suprime un número finito de términos, la nueva serie tiene el mismo carácter que la anterior.*

La suma de la nueva serie aumenta o disminuye en un valor igual a la suma de los términos añadidos o suprimidos.

Demostración: Sea la serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.6}$$

en la que suprimimos los p primeros términos:

$$a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.7}$$

Se tiene entonces:

$$S'_n = S_{n+p} - T$$

siendo $T = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$.

Si $S_{n+p} \to S$, entonces $S'_n = S_{n+p} - T \to S - T$.

Los casos divergente y oscilante son obvias consecuencia de la relación entre ambas series. La demostración en el caso de añadir un número finito de términos se hace igual y se deja al alumno como ejercicio.

Escolio.—Es fundamental que el número de términos añadidos o suprimidos sea *finito*. Si el número fuera infinito, estaríamos creando una nueva serie completamente distinta de la original.

§2. SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

3.5. Definición.— Propiedades fundamentales.

Sea la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.8}$$

Vamos a definir el concepto "serie de términos positivos":

Definición 8 *Una serie se dice de términos positivos si todos sus términos son positivos.*

En nuestro caso anterior: $a_n > 0, \forall n$.

Las series de términos positivos son las más importantes, porque el estudio de las demás se reduce al de éstas, como vamos a ver. Y son las más sencillas porque si S_n es la suma parcial enésima de la serie $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, con $a_n > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1. \\ S_2 &= a_1 + a_2 > S_1. \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 > S_2. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \dots & & \dots\dots \\ S_n & = & S_{n-1} + a_n > S_{n-1} \end{array}$$

ya que el último sumando de cada suma parcial es positivo. En conclusión, resulta:

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \cdots$$

y la sucesión de las sumas parciales es *monótona creciente.* Pueden ocurrir dos casos entonces:

Caso primero: la sucesión de las sumas parciales está acotada.

Por el importante teorema visto en el estudio de las sucesiones que dice:"Toda sucesión monótona creciente que está acotada superiormente es convergente" resulta que nuestra serie es convergente.

Caso segundo: la sucesión de las sumas parciales no está acotada.

Sea A un número positivo cualquiera: por no estar acotada existe una suma parcial S_α tal que: $S_\alpha > A$. Para $n \geq \alpha$, es:

$$S_n \geq S_\alpha > A.$$

Por consiguiente: $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, y la serie es divergente. En resumen:

I Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.(Propiedad del carácter no oscilante)

La imposibilidad de ser oscilante una serie de términos positivos tiene importantes consecuencias, como vamos a ver enseguida.

Hemos demostrado ya la propiedad asociativa para toda clase de series: si en la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots + a_j + \cdots + a_k + \cdots, \tag{3.9}$$

se asocian arbitrariamente los términos consecutivos:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i) + (a_{i+1} + \cdots + a_j) + (a_{j+1} + \cdots + a_k) + \cdots, \tag{3.10}$$

esta serie tiene el mismo carácter que la (3.9), y si (3.9) es convergente,tiene (3.10) su misma suma.

Excluído ya el caso de las series oscilantes, es cierta asimismo la recíproca, es decir,si (3.10) es convergente, también lo es (3.9), pues si ésta fuese divergente, lo sería (3.10) por la propiedad asociativa.

Análogamente, si (3.10) es divergente, también lo es (3.9). Por consiguiente:

II Asociar términos consecutivos de una serie de términos positivos, un némero finito o infinito de veces, o descomponer arbitrariamente cada uno en varios sumandos positivos, no altera el carácter de la serie, ni varía la suma. (Propiedades asociativa y disociativa.)

Definición 9 *Diremos que en una serie se ha alterado el orden de sus términos, o que dos series:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.11}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \tag{3.12}$$

tienen los mismos términos en orden distinto, cuando existe una ley que a cada término de cada serie le asigna el puesto que ocupa en la otra.

Si (3.12) es convergente y es S su suma , para $n \geq \alpha$ en adelante es $S - S_n < \varepsilon$, siendo ε un número positivo cualquiera y S_n la suma parcial enésima de la serie (3.12). Consideremos la suma parcial S_α de la serie 3.12: como la serie 3.12 posee los mismos términos de la serie 3.12 sólo que en orden distinto, a partir de cierta suma parcial S'_β de la serie 3.12(a las sumas parciales de ésta última las escribimos con primas), todas las sumas parciales de dicha serie contendrán los términos contenidos en S_α.Como además contendrán otros, todos positivos, será: $S'_n \geq S_\alpha$ para $n \geq \beta$.

Por otra parte, todos los términos de S'_n están contenidos en alguna suma parcial de 3.12, por la misma razón, y es: $S'_n < S$.

De ambas consideraciones anteriores resulta:

$$-\varepsilon < S - S'_n < S - S_\alpha < \varepsilon, \text{para}\, n \geq \beta.$$

En resumen: $S = \lim_{n\to\infty} S'_n$.

Si 3.12 es divergente, también 3.12, pues si fuese convergente, lo sería 3.12 como acabamos de demostrar, ya que se ha obtenido cambiándole el orden a 3.12.

En conclusión:

III Alterar arbitrariamente el orden de los términos de una serie que los tiene todos positivos, no altera su carácter ni varía su suma (Propiedad conmutativa)

3.6. Criterios de comparación de dos series de términos positivos.

El primer problema que causan las series es averiguar su carácter: si son convergentes, divergentes u oscilantes. Ya hemos visto que una serie de términos positivos no puede ser oscilante.

En este problema el éxito no está asegurado: hay series de forma simple con las cuales fallan los criterios más corrientes. Por eso es conveniente tener unos criterios muy generales que nos permitan comparar una serie con otras de carácter conocido.

PRIMER CRITERIO: *Una serie cuyos términos son menores o iguales (mayores o iguales) que los correspondientes de otra serie, la cual es convergente (divergente), es también convergente (divergente).*

Demostración: Si las series (cuyas sumas parciales son respectivamente S_n y S'_n):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{3.13}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \tag{3.14}$$

están relacionadas por la condición $a_n \leq b_n$, $n = 1,\ 2\,3,\ \ldots$, se verifica también: $S_n \leq S'_n$.

Si (3.14) es convergente, es que la sucesión $\{S'_n\}$ de sus sumas parciales está acotada: existe una constante K tal que: $S'_n \leq K,$para todo$n$. Por lo anterior, $S_n \leq K$, y, por lo visto al principio de este estudio, la serie (3.14) debe ser convergente.

Supongamos ahora que la serie (3.14) sea divergente, y que están relacionadas por la misma relación anterior; entonces: $S_n \leq S'_n$. Si $A > 0$ es un número positivo cualquiera, a partir de cierto término será: $A < S_n$ y entonces $A < S'_n$,lo cual prueba que (3.14) es divergente.

Ejemplo 1.—Sea $\{a_n\}$ una sucesión de némeros reales tales que:

$$0 < a_n < \frac{1}{2^n}, \forall n = 1,\ 2\,3 \ldots$$

Hallar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ser los a_n positivos por definición, y tener los términos menores que la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, la serie dada es convergente,*cualesquiera sean los némeros a_n.*

Ejemplo 2.—Sea la serie:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

Por ser $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ la serie dada es *divergente*, por tener los términos mayores que la serie armónica.

CRITERIO SEGUNDO: *Si la serie* $\sum b_n$ *es convergente(divergente) y la razón* a_n/b_n *se conserva inferior (superior) a un némero positivo* λ,*a partir de cierto valor de* n *la serie* $\sum a_n$*es también convergente (divergente).*

Demostración: Suprimiendo el némero de términos que sea necesario — lo cual no altera el carácter de la serie, pero sí el valor de la suma , podemos suponer que la desigualdad $a_n/b_n < \lambda$ se verifica para todo valor de n. Del cociente se deduce: $a_n < \lambda b_n$.

Por ser la serie $\sum b_n$ convergente, aplicando la propiedad distributiva, resulta que la serie $\sum \lambda b_n$ también lo es; y como la serie $\sum a_n$ tiene los términos menores que los de ésta última, aplicando el criterio anterior resulta convergente.

En el otro caso resulta: $a_n > \lambda b_n$ y con el mismo razonamiento anterior resulta divergente la serie $\sum a_n$.

Ejemplo 3. Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos, tal que* $\lim_{n\to\infty} na_n = L > 0$. *Hallar el carácter de dicha serie.*

Sea λ un némero cualquiera comprendido entre 0 y L: $0 < \lambda < L$. Por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto término será: $na_n > \lambda$. O sea:

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} > \lambda.$$

Por ser la serie armónica divergente, nuestra serie también lo es. Pronto veremos este resultado como consecuencia del criterio de Pringsheim.

3.7. Criterios del cociente y la raíz

El criterio del cociente, también llamado *criterio de D'Alembert* es el resultado de comparar una serie con las más sencillas de la series: las geométricas.

I. (Criterio del cociente) Si desde un valor de n *en adelante a razón* $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ *de un término al anterior se conserva inferior a un némero* $h < 1$, *la serie es convergente. Si desde un valor de* n *es* $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, *la serie es divergente.*

Demostración: Sea la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$, la cual es convergente por ser $h < 1$.

La condición $\frac{a_n}{a_{n-1}} < h$ equivale a ésta:

$$\frac{a_n}{h^n} < \frac{a_{n-1}}{h^{n-1}},$$

y siendo decreciente la razón de cada término a su correspondiente de la progresión geométrica, se conserva inferior a una constante positiva, y por el segundo criterio de comparación, la serie es convergente.

En el segundo caso, los términos crecen, y no tendiendo a cero, la serie diverge.

Ejemplo 1. Es convergente esta serie, formada por los recíprocos de la sucesión de Fibonacci:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{f_n} + \cdots$$

Pues siendo :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_n + f_{n-1}}$$

la fracción $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ está comprendida entre las dos fracciones anteriores $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ y $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$, y como los dos primeros valores son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, la fracción $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ está siempre comprendida entre ambos, siendo, por tanto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{2}{3} < 1$.

En la práctica no se halla el valor de h del criterio anterior, sino que se procede del siguiente modo: sea $C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Entonces:

1) *Si $C < 1$, la serie es convergente.*

2) *Si $C = 1$ y el cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ se mantiene mayor que 1, la serie es divergente.*

3) *Si $C = 1$ y el cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ se conserva menor que 1, no se llega a ninguna conclusión.*(Caso dudoso del criterio del cociente.)

4) *Si $C > 1$, la serie es divergente.*

Demostraciones: En 1), tomemos un h entre C y 1. Por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto término será:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < h < 1$$

y por lo visto, la serie es convergente.

En 2), si $C = 1$y $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, es $a_n > a_{n-1}$, y al ser crecientes los términos de la serie, no pueden tender a cero: $a_n \not\to 0$. Al no cumplirse la condición necesaria de convergencia, la serie no puede ser convergente;por estar excluida la oscilación, la serie es divergente.

En 3), no se deduce nada, y es preciso acudir a otros criterios para resolver la cuestión.

En 4), tomemos un h entre C y 1: por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto valor de n será:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > h > 1$$

y por lo visto la serie es divergente.

Solamente en el caso de no existir el límite $C = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ se investiga un valor de h.

Ejemplo 2. Sea la serie:

$$\frac{2}{5} + \frac{2\cdot 3}{5\cdot 7} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} + \cdots$$

Siendo $a_n = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$, resulta:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n+1)}{(2n+3)} \to \frac{1}{2} < 1,$$

y la serie es *convergente.*

Ejemplo 3. Sea la serie formada por los recíprocos de los números impares:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

En este caso, siendo: $a_n = \frac{1}{2n-1}$, $a_{n-1} = \frac{1}{2n-3}$, se tiene:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-3}{2n-1} \to 1,$$

pero como el numerador es menor que el denominador, el cociente tiende a 1 conservándose inferior a 1, se trata del *caso dudoso.*

Ejemplo 4.—Sea la serie:

$$\frac{3}{1} + \frac{3\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \cdots$$

En este caso resulta: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{n} \to 2 > 1.$

Luego la serie es *divergente.*

Ejemplo 5.—Sea la serie:

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 3}{2^2}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3^2}+\cdots+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{n^2}+\cdots$$

En este caso, tenemos:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n+1)(n-1)^2}{n^2}\to+\infty,$$

y, por consiguiente, a partir de cierto término es:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}>h>1$$

siendo h cualquier némero mayor que 1. La serie es, pues, *divergente.*

Ejemplo 6.—Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}.$$

Como $a_n=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}$, debemos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n-2}}.$$

Puesto que tanto el numerador como el denominador son infinitésimos,y aparecen en un cociente, por la conocida equivalencia del seno al arco cuando éste tiende a cero: $\frac{\pi}{3n+1}\to 0$ y $\frac{\pi}{3n-2}\to 0$, podemos sustituir los senos por sus arcos correspondientes:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n-2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3n+1}}{\frac{\pi}{3n-2}}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{3n+1}=1.\end{aligned}$$

Al ser, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}<\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n-2}$, se trata del *caso dudoso.*

Ejemplo 7. Sea la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+1}$.

En este caso, $a_n=\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+1}$, $a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n-2}$ y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n-2}}=\frac{1}{2}<1,$$

lo cual prueba que la serie es *convergente.*

En el cálculo anterior se ha sustituido cada tangente por su arco correspondiente, ya que $\frac{\pi}{3n+1} \to 0$ y $\frac{\pi}{3n-2} \to 0$, y excepto por la fracción 1/2 resulta el mismo límite del ejemplo anterior, ya que tienen los mismos argumentos.

Sin necesidad de aplicar este criterio también se puede ver que la serie converge; en efecto, para $n \geq 1$ es: $\frac{\pi}{3n+1} \leq \frac{\pi}{4}$ y, por tanto: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n+1} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. La serie dada tiene, pues, los términos menores o iguales que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,la cual es convergente.

El otro criterio que compara a la serie dada con las geométricas es el criterio de la raíz, también llamado criterio de Cauchy:

II (Criterio de la raíz.) Si a partir de un valor de n en adelante es: $\sqrt[n]{a_n} < h < 1$, *la serie es convergente. Si* $\sqrt[n]{a_n} > h > 1$, *para infinitos valores de n, la serie diverge.*

Demostración: La condición $\sqrt[n]{a_n} < h$ equivale a: $a_n < h^n$.

Consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} = h + h^2 + h^3 + \cdots + h^n + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica y convergente, por ser $h < 1$, cuya suma vale $\frac{h}{1-h}$. Por tener nuestra serie los términos menores a los una serie convergente primer criterio de comparación— nuestra serie es convergente.

En el otro caso, $a_n > 1$ y, por tanto, $a_n \not\to 0$; al estar excluida la oscilación, la serie es divergente.

Ejemplo 8.—Estudiar el carácter de la serie:

$$\frac{1}{3} + \frac{2^1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2^3}{3^6} + \cdots$$

Por tener los términos potencias, resulta conveniente aplicarle el criterio de la raíz:

si n es impar, tenemos: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$; si n es par: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Es: $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$, y tomando un h entre el segundo número y 1, deducimos que la serie es *convergente.*

En la práctica, no se calcula el h sino el límite:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Entonces:

1) Si $R < 1$ la serie es convergente.

2) Si $R = 1$ y la expresión $\sqrt[n]{a_n}$ se conserva inferior a 1, estamos en el *caso dudoso* del criterio de la raíz.

3) Si $R = 1$ y la expresión $\sqrt[n]{a_n}$ se conserva superior a 1, la serie es divergente.

4) Si $R > 1$, la serie es divergente.

La explicación es la misma dada en el otro criterio: sólo vamos a hacer, a título de ejemplo, la prueba de 1): si $R < 1$, tomando un h comprendido entre R y 1, por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto n será:

$$\sqrt[n]{a_n} < h < 1$$

y por lo ya probado, la serie converge. Idéntico razonamiento se hace en 4).

En 3),elevando a n los dos miembros, se deduce $a_n > 1$, no se cumple la condición necesaria de convergencia, y la serie diverge.

Ejemplo 9. Sea la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$.

En este caso: $a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$ y $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0 < 1$. Luego la serie *converge.*

Ejemplo 10. Carácter de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Por ser $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. resulta:

$$\sqrt[n]{a_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1.$$

El límite de $\sqrt[n]{a_n}$ es 1, pero como la expresión $1+\frac{1}{n}$ se mantiene superior a 1, la serie *diverge.*

Este carácter divergente se puede ver sin necesidad de aplicar ningún criterio, ya que $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$; y al no cumplirse la condición necesaria de convergencia, la serie *diverge.*

Ejemplo 11.—Estudiar la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

En este caso:

$$\sqrt[n]{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1.$$

Mas aquí la expresión $\sqrt[n]{a_n}$ tiende a 1, conservándose inferior a 1, se trata del *caso dudoso* y nada se deduce del criterio.

Una observación ajena al criterio nos resuelve la cuestión:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e \neq 0$$

y la serie *diverge.*

Ejemplo 12.—Discutir el carácter de la siguiente serie, según los valores del parámetro α $(\alpha \in \mathbb{R})$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}.$$

Aplicando el criterio de la raíz, tenemos:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha.$$

Si $\alpha > 0$ es: $e^\alpha > e^0 = 1$, y la serie *diverge.*

Si $\alpha < 0$ es: $e^\alpha < e^0 = 1$, y la serie *converge.*

Si $\alpha = 0$, el límite es 1; observando la serie, para $\alpha = 0$ se reduce a: $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$, la cual es claramente *divergente.*

En resumen: *para* $\alpha < 0$ *la serie converge; para* $\alpha \geq 0$*, la serie diverge.*

Obsérvese que la serie, si α es negativo tendrá algunos términos negativos;pero sólo un némero finito, porque cuando sea $n > |\alpha|$ la base de la potencia que define a_n es positiva.

No se presentan problemas de definición de la potencia, por ser n^2 un número natural.

La relación entre ambos criterios es una de las consecuencias del criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Frecuentemente, ocurre, sin embargo, que el límite del cociente no existe, y sí el de la raíz. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 13. Carácter de la serie:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \cdots$$

En esta serie, y según sea n impar o par, tenemos:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}} = n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to 0; \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Luego la serie es *convergente.* Si se calcula el cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ resulta:

si n es par: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e$.

Si n es impar:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \to 0.$$

La sucesión $\left\{\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$ carece, pues, de límite, y es oscilante: su límite superior es $1/e$, y el inferior 0. Tomando un h comprendido entre $\frac{1}{e}$ y 1, y aplicando el enunciado primero del criterio del cociente, también obtenemos el carácter convergente de la serie.

3.8. Criterio de Raabe

El criterio del cociente es el más usado y de más cómoda aplicación; tiene, pues, interés resolver el *caso dudoso.* A este fin, se han descubierto varios criterios, siendo el más usado el siguiente:

(Criterio de Raabe) Si a partir de cierto valor de n es:

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) > 1 + \varepsilon,$$

siendo ε un número positivo, la serie es convergente.

Si dicha expresión se conserva inferior a 1, la serie diverge.

Demostración: Obsérvese que el paréntesis de la expresión es la diferencia entre a_n/a_{n-1} y su límite 1.

Probemos la convergencia de la serie si se cumple la primera condición: por hipótesis, se verifica:

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) > 1 + \varepsilon,$$

de donde, multiplicando ambos miembros por a_{n-1} y dejando el término con ε:

$$(n-1)a_{n-1} - na_n > \varepsilon a_{n-1}.$$

Prescindiendo, si es preciso, de un número finito de primeros términos (lo cual no altera el carácter de la serie, pero sí la suma, si converge), podemos suponer que esta desigualdad se verifica desde el término primero. Dando valores a $n : 2, 3, 4, \ldots m$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(n=2) \quad a_1 - 2a_2 &> \varepsilon a_1 \\
(n=3) \quad 2a_2 - 3a_3 &> \varepsilon a_2 \\
(n=4) \quad 3a_3 - 4a_4 &> \varepsilon a_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n=m) \quad (m-1)a_{m-1} - ma_m &> \varepsilon a_{m-1}
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro todas estas desigualdades, y como el sustraendo de cada desigualdad se reduce con el minuendo de la siguiente, resulta:

$$a_1 - ma_m > \varepsilon(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1}).$$

El contenido del paréntesis del segundo miembro es la suma parcial $m-1$:

$$S_{m-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{m-1}.$$

Así que: $a_1 - ma_m > \varepsilon S_{m-1}$.

Despejando la suma parcial S_{m-1} tenemos:

$$S_{m-1} < \frac{a_1 - ma_m}{\varepsilon} < \frac{a_1}{\varepsilon.}$$

Esto prueba que la suma parcial $m-1$ está acotada superiormente por $\frac{a_1}{\varepsilon}$: como m es cualquiera, todas las sumas parciales lo están, y, en consecuencia, la serie es convergente y su suma es menor que $\frac{a_1}{\varepsilon}$.

Si la expresión es menor que 1 de ser:

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) < 1$$

quitando los denominadores tenemos:

$$(n-1)a_{n-1} - na_n < 0.$$

Sumando igual que antes, y para los mismos valores, resulta:$a_1 - ma_m < 0$. Es decir:

$$ma_m > a_1.$$

Despejando a_m, deducimos: $a_m > \dfrac{a_1}{m}$.

Consideremos la serie armónica *divergente* $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$. Por la propiedad distributiva, la serie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_1}{m}$ también es divergente. Y como nuestra serie tiene los términos mayores que una serie divergente, también lo es.

En la práctica, como en los criterios anteriores, no se calcula el ε, sino el siguiente límite:

$$A = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Entonces:

1) Si $A > 1$, la serie es convergente.

2) Si $A < 1$, la serie es divergente.

3) Si $A = 1$ y la expresión de Raabe se conserva superior a 1, nada puede asegurarse.

4) Si $A = 1$ y la expresión de Raabe se conserva inferior a 1, la serie diverge.

La demostración se hace, igual que en los otros criterios, utilizando el teorema fundamental de los límites finitos. Sólo cuando el límite anterior no existe, se trata de encontrar el número ε o 1.

Ejemplo 1:

$$\frac{1}{6} + \frac{1\cdot 2}{6\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 8} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{6\cdot 7\cdot 8\cdots (n+5)} + \cdots$$

En este caso, $a_n = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{6\cdot 7\cdot 8\cdots (n+5)}$, y

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n+5} \to 1.$$

Como el numerador es inferior al denominador, se trata del "caso dudoso".

Aplicando el criterio de Raabe, resulta:

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \frac{5n}{n+5} \to 5 > 1.$$

La serie es *convergente.*

Ejemplo 2.— Sea la serie, ya vista, de los recíprocos de los némeros impares:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

Esta serie tiene: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-3}{2n-1} \to 1$ y

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \frac{2n}{2n-1} \to 1.$$

Al conservarse superior a 1 la expresión de Raabe, *nada puede deducirse.*

Ejemplo 3.—Carácter de la serie:

$$\frac{3}{4} + \frac{3\cdot 6}{4\cdot 7} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \cdots + \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)} + \cdots$$

En este caso $a_n = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}$ y

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3n}{3n+1} \to 1.$$

Dado que el cociente se conserva inferior a 1, por ser $3n < 3n+1$, estamos en el caso dudoso. Aplicando el criterio de Raabe, resulta:

$$n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \frac{n}{3n+1} \to 1/3 < 1.$$

La serie es, pues, *divergente.*

Ejemplo 4.—Discutir el carácter de la siguiente serie, según los valores del parámetro $x > 0$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1\cdot 2}{x(x+1)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} + \cdots$$

En este caso, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n}{x+n-1} \to 1.$

Si $x < 1$, es $n > x+n-1$, el numerador supera al denominador, y la serie es divergente.

Si $x = 1$ la serie se reduce a $1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$, que claramente es divergente.

Si $x > 1$ el numerador es inferior al denominador, y estamos en el caso dudoso. Aplicando el criterio de Raabe, resulta:

$$n\left(1 - \frac{n}{x+n-1}\right) = n\frac{x-1}{x+n-1} \to x-1.$$

En consecuencia, si $x-1 > 1$, o sea, $x > 2$, la serie *converge.*

Si $x-1 < 1$, o sea $x < 2$ la serie *diverge.*

Si $x = 2$ la serie *diverge,* pues aunque el límite es 1, la expresión de Raabe se conserva inferior a 1. Obsérvese que este caso comprende a los antes obtenidos.

3.9. Series armónicas generalizadas

Unas series sencillas, cuyo carácter es conocido, son las llamadas *series armónicas generalizadas:*

Definición 10 *Se llaman armónicas generalizadas a las series:*

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots$$

La serie armónica es un caso particular: $\alpha = 1$. Su carácter lo expresa el siguiente

Teorema 8 *Si el exponente α es menor o igual a 1, la serie armónica generalizada es divergente. Si el exponente es superior a 1, la serie converge.*

Demostración: Si $\alpha \leq 1$, siendo $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ la serie es *divergente.*
Si $\alpha > 1$, la serie tiene sus términos iguales o menores que los de ésta:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\cdots$$

la cual es convergente, pues asociando los términos de igual denominador, resulta:

$$1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\cdots$$

que es una serie geométrica convergente, por ser la razón $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, ya que es $\alpha - 1 > 0$. La serie armónica es, pues, *convergente.*

3.10. Criterio de Pringsheim

El siguiente criterio fundamental, llamado Criterio de Pringsheim, compara una serie cualquiera de términos positivos con las series armónicas:

Criterio de Pringsheim: Si $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = L > 0$*,entonces:*

si $\alpha \leq 1$ la serie es divergente; si $\alpha > 1$, la serie converge.

Demostración: Sea $\alpha \leq 1$ y tomemos un némero real λ comprendido entre L y 0: $L > \lambda > 0$. Por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto término será:

$$n^\alpha a_n > \lambda.$$

O sea:

$$a_n > \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

Consideremos la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, la cual es divergente, por ser $\alpha \leq 1$. Por la propiedad distributiva también es divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha}$. Y como nuestra serie tiene los términos mayores que los de una serie divergente, es divergente.

Si $\alpha > 1$, tomamos un némero λ mayor que L; por el teorema fundamental de los límites finitos, a partir de cierto término será:

$$n^\alpha a_n < \lambda.$$

O sea: $a_n < \frac{\lambda}{n^\alpha}$. Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, la cual es armónica y convergente, por ser $\alpha > 1$. Por la propiedad distributiva, también es convergente la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha}.$$

Y como la serie nuestra tiene los términos inferiores a los de una serie convergente, también es convergente. Con esto termina la demostración.

Aplicar este criterio supone encontrar un valor de α adecuado para que $L = \lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n$ sea finito: esto supone estudiar muy bien a_n.

Como ejercicio, el alumno deber+a considerar los casos extremos $L = 0$ y $L = +\infty$ y ver qué puede deducirse en esos casos.

Veamos ahora unos ejemplos:

Ejemplo 1.—Serie de los recíprocos de los números impares:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

Esta serie, a la cual se han aplicado infructuosamente los criterios del cociente y de Raabe tiene un término general que es cociente de una constante y de un polinomio de primer grado; multiplicando por n^1, resulta:

$$n^1 \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \to \frac{1}{2}.$$

Esto prueba que la serie es *divergente.*

Por la propiedad distributiva o por este criterio, se puede ver que también la serie de los recíprocos de los pares es divergente.

Ejemplo 2.—Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$$

Por tener en el denominador la raíz cúbica de un polinomio de segundo grado, si multiplicamos por $n^{2/3}$, habremos:

$$n^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}} \to 1.$$

Por ser $2/3 < 1$, la serie es *divergente.*

Ejemplo 3.—Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Por ser : $\dfrac{n^2}{n^2+n+1} \to 1$, con $\alpha = 2 > 1$, la serie es *convergente.*

Ejemplo 4. Carácter de la serie:

$$\operatorname{sen} \pi + \operatorname{sen}(\pi/2) + \operatorname{sen}(\pi/3) + \cdots + \operatorname{sen}(\pi/n) + \cdots$$

Excepto el primer término que es nulo, la serie es de términos positivos. El término general es un infinitésimo equivalente a $\frac{\pi}{n}$; aplicando esta equivalencia:

$$\lim_{n\to\infty} n^1 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\pi}{n} = \pi.$$

Por ser $\alpha = 1$ la serie *diverge.*

Observación.—El número de criterios de convergencia existentes es muy grande: nosotros sólo hemos visto los más útiles e importantes. En la obra de Tebar Flores puede ver el alumno otros; y entre los ejercicios que hemos propuesto está la demostración del criterio logarítmico. Es claro que estos otros criterios no deben estudiarse.