ÁLGEBRA

Departamento de Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

CURSO 2015/2016

Práctica I: MATRICES Y DETERMINANTES.

0.1. Matrices. Operaciones con Matrices

En esta práctica se estudiará como se trabaja con matrices con *WxMaxima*, desde la creación de matrices y acceso a sus elementos hasta las operaciones más importantes y frecuentes del álgebra matricial. Las matrices constituyen una herramienta que facilita el cálculo y que puede representar elementos tan dispares como una aplicación lineal o una imagen digital.

Para introducir una matriz en el *WxMaxima*, se utiliza la orden `matrix` a la que pasamos cada una de las filas de la matriz, cuyos elementos escribimos entre corchetes. A veces resulta útil trabajar con elementos de una matriz, para ello se debe tener en cuenta la posición que ocupa cada elemento.

```
(%i1) A:matrix([1,0,-2], [2,3,2], [-2,0,1]);
```

$$(\%o1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) A[2,3];
```

$(\%o2)$ 2

En *WxMaxima* también podemos escribir una matriz usando el menú **Algebra** → **Introducir matriz**, donde introducimos el número de filas y columnas, y posteriormente rellenamos los valores. Las dimensiones de una matriz se pueden recuperar mediante la orden `matrix_size` que devuelve una lista con el número de filas y columnas.

```
(%i3) matrix_size(A);
```

$(\%o3)$ $[3,3]$

Una segunda forma de definir matrices cuyos elementos se ajusten a una regla predefinida, basada en la posición que ocupa cada elemento de la matriz. Por ejemplo, para escribir la matriz que tiene como entrada $a_{ij} = i * j$, escribimos en primer lugar dicha regla

```
(%i4) a[i,j]:=i+j-1;
```

$(\%o4)$ $a_{ij} := i + j - 1$

y luego utilizamos la orden `genmatrix` para construir la matriz (3×3 en este caso):

```
(%i5) C:genmatrix(a,3,5);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Una vez analizadas las distintas formas de crear una matriz con *WxMaxima* es interesante conocer cómo se puede acceder a las filas o columnas. Las ordenes `row` y `col` nos permiten acceder, respectivamente, a filas y columnas que deseemos.

```
(%i6) row(C,1);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

```
(%i7) col(C,5);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

Se pueden añadir filas y columnas nuevas con `addrow` y `addcol`

```
(%i8) addrow(C,[1,1,7,8,9]);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Puesto que *WxMaxima* es un programa simbólico, las matrices no se limitan al almacenar valores numéricos, sino que estos pueden venir dados por cualquier tipo de expresión

```
(%i9) D:matrix([x^2,1+x/y],[sqrt(y),x^2-y=0])
```

(%o9) $\begin{bmatrix} x^2 & \frac{x}{y}+1 \\ \sqrt{y} & x^2-y=0 \end{bmatrix}$

Las operaciones algebraicas habituales están también disponibles para matrices. En este caso, debemos prestar especial atención a las restricciones de cada operación. Por ejemplo, no se pueden sumar matrices de distintos ordenes, no están definidas las potencias de matrices no cuadradas, el producto de matrices no es conmutativo. A continuación se detalla la nomenclatura usada por *WxMaxima* al operar con matrices:

- El operador +(-) permite sumar (resta) dos matrices del mismo orden.
- El operador asterisco, $*$, se interpreta como producto elemento a elemento.
- El producto matricial viene dado a través del operador punto, $\cdot$.
- El operador $\wedge$ se utiliza para calcular las potencias de los elementos de una matriz.

Ejemplo 1
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular $AB, A+B$, A^2 *y* $2A$.

<u>Solución:</u>

```
(%i10) A:matrix([1,3,-2], [-1,0,-3], [4,5,2]);
       B:matrix([-2,3,-1], [4,2,1], [5,-2,4]);
```

$$(\%o10) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i11) A+B;
```

$$(\%o11) \begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
(%i12) A.B;
```

$$(\%o12) \begin{bmatrix} 0 & 13 & -6 \\ -13 & 3 & -11 \\ 22 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

```
(%i13) A^2;
```

$$(\%o13) \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \\ 16 & 25 & 4 \end{bmatrix}$$

Para calcular potencias de matrices cuadradas se utiliza el operador $\wedge$

```
(%i14) 2*A;
```

$$(\%o14) \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $A+B, A-B, A^2, B^2, AB$ y BA

0.2. Otras operaciones usuales

Además de las operaciones anteriores, *Maxima* dispone de ordenes para la mayoría de las operaciones comunes. Podemos calcular la matriz traspuesta, calcular el determinante, la matriz inversa y su rango. Para ello las ordenes son:

- `transpose(A)`, devuelve la matriz traspuesta de A.
- `invert(A))`, calcula la inversa de la matriz A.
- `rank(A)`, calcula el rango de la matriz A.
- `determinant(A)`, calcula el determinante de la matriz A.

Ejemplo 2
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular su matriz traspuesta, su determinante y su matriz inversa

Solución:

```
(%i15) A:matrix([1,2,3], [-1,0,3], [2,1,-1]);
```

$$(\%o15) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
(%i16) transpose(A);
```

$$(\%o16) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
(%i17) determinant(A);
```

$(\%o17)\ 4$

y como ya que sabemos que el determinante no es cero, su inversa es

```
(%i18) invert(A);
```

$$(\%o18) \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como $det(A) \neq 0$, la matriz A tiene rango 3.

En general, podemos calcular el rango de una matriz cualquiera $n \times m$ con la orden 'rank'

```
(%i19) m:matrix([1,3,0,-1],[3,-1,0,6],[5,-3,1,1]);
```

$$(\%o19) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i20) rank(m);
```

$(\%o20)\ 3$

Ejercicio 2. Hallar las inversas de las siguientes matrices, justificando previamente su existencia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Calcular el rango de las siguientes matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ -1 & 3 & x-1 \end{pmatrix}$$

0.3. Equivalencia de Matrices. Rango de una matriz

El rango de una matriz es fácil de determinar si obtenemos una matriz equivalente en forma triangular (escalonada por filas) utilizando el método de Gauss. Para ello el *WxMaxima* usa la orden `triangularize`.

```
(%i21) triangularize(m);
```

(%o21) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & 102 \end{bmatrix}$

Éste método es más rápido que ir menor a menor buscando alguno que no se anule. El menor de una matriz A, se obtiene con la orden `minor`, por ejemplo el menor cuando se eliminan la segunda fila y la minor primera columna es

```
(%i22) A:matrix([1,2,3], [-1,0,3], [2,1,-1]);
```

(%o22) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i23) minor(A,2,1);
```

(%o23) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Caso de que no fuera suficiente con eliminar una única fila y columna podemos eliminar tantas filas y columnas como queramos con la orden `submatrix`. Esta orden elimina todas las filas que escribamos antes de una matriz y todas las columnas que escribamos después. Por ejemplo, para eliminar la primera y última columnas junto con la segunda fila de la matriz m escribimos:

```
(%i24) submatrix(2,m,1,4);
```

(%o24) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Añade la primera columna de B a la matriz A y almacena la nueva matriz en la variable C.
2. Selecciona la submatriz que se obtiene al eliminar la primera fila y segunda columna de la matriz C.
3. Determina el rango de A, B y C.
4. Estudia si las matrices A y B son inversibles y calcula, en su caso, la matrices inversas.

Ejercicio 5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in R$, discute para qué valores de α es A inversible.