ÁLGEBRA

Departamento de Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

CURSO 2015/2016

Boletín del Tema IV:
ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

1. Calcular la matriz del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{(1,1,2),(3,1,1),(-2,-1,2)\}$.

2. Calcular la norma del vector $(2,-1)$ respecto al producto escalar usual y al producto escalar en $\mathbb{R}^2$ dado por la expresión
$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

3. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el producto escalar dado por
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 3x_1y_1 + x_2y_2$$
Determina el ángulo entre los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$

4. En el espacio R^2 se definen
$$a)\ \vec{x} \bullet \vec{y} = 2x_1y_1 + 4x_2y_2$$
$$b)\ \vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$$
   a) Estudiar si constituyen un producto escalar.
   b) En caso afirmativo, determinar el ángulo formado por los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$ respecto a dichos productos escalares.

5. En el espacio vectorial R^3 se define
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$
siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.
   a) Prueba que $\bullet$ es un producto escalar sobre R^3.
   b) Encuentra una base ortonormal para dicho producto escalar a partir de la base canónica de R^3

6. Probar que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de un espacio vectorial euclídeo tales que $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$ entonces los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.

7. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ forman un ángulo de 60º y el módulo de $\vec{u}$ es 3. Determinar el módulo de $\vec{v}$ para que $(\vec{v} - \vec{u})$ sea ortogonal a $\vec{u}$.

8. En $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar $\bullet$ y sea $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ una base de R^3 tal que:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1 = 1, \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2 = 1, \vec{v}_3 \bullet \vec{v}_3 = 2, \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$$

$$(2\vec{v}_2 - \vec{v}_3) \perp \vec{v}_1, \quad (2\vec{v}_2 - \vec{v}_3) \perp \vec{v}_3$$

   a) Calcula la matriz del producto escalar en la base B.

   b) Calcula una base ortonormal $B' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

9. En $\mathbb{R}^3$ con el producto usual ortonormalizar la base $B = \{(1,1,1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$

10. Sea el espacio vectorial euclídeo$(R^n, \bullet)$ y sea U un subespacio vectorial de R^n. Prueba que para todo vector $\vec{x} \in R^n$, existe un vector $\vec{y} \in U$ único tal que

$$\vec{x} - \vec{y}$$

es un vector perpendicular a todos los de U. (se dice que el vector $\vec{y}$ es la proyección ortogonal del vector $\vec{x}$ sobre el subespacio U)

11. En el espacio R^3 se define

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

   a) Â¿Para qué valores de α es $\bullet$ un producto escalar?

   b) Para $\alpha = 1$, encuentra todos los vectores que son ortogonales al $\vec{x} = (1, 2, 3)$

12. En el espacio euclídeo R^3 se considera la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$$\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (0,1,1)$$

   a) Obtener a partir de ella una base ortonormal.

   b) Comprueba que los vectores

$$\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \vec{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), \vec{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

   forman una base ortonormal de R^3 y que $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \neq L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$

13. Determina los valores de α para los que

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (2x_1 - x_2 + x_3)(2y_1 - y_2 + y_3) + \alpha(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

con $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, define un producto escalar en R^3. Para $\alpha = 1$, encuentra una base ortonormal de R^3 respecto de dicho producto escalar.