ÁLGEBRA

Departamento de Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

CURSO 2015/2016

Boletín del Tema VI: APLICACIONES LINEALES

1. Sea f una aplicación lineal de R^3 en R^2 definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

Encuentra la matriz de f respecto a las bases canónicas de R^3 y R^2.

2. Sea $f : R^3 \longrightarrow R^4$ una aplicación lineal determinada por

$$f(1,1,0) = (3,2,0,-1), \quad f(2,3,1) = (1,-2,1,1), \quad f(0,-2,1) = (4,0,1,2)$$

Halla la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas. Calcula una base de $Im(f)$ y unas ecuaciones del Núcleo de f.

3. Sean los espacios vectoriales R^3 y R^4 y sean

$$B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$$

bases de R^4 y R^3 respectivamente. Sea f una aplicación lineal de R^4 en R^3 que verifica

$$f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3, \quad f(\mathbf{v}_4) = 0$$

Se pide:

a) Halla la matriz de f respecto de B y B'

b) Determina las dimensiones del núcleo y de la imagen de f.

4. Sea la aplicación lineal $f : R^3 \to R^3$ definida por:

$$f(x,y,z) = (2x + y + 4z, x + y + 2z, x + y + 3z)$$

5. Sean los espacios vectorialesR^4 y R^3 . Se considera la siguiente aplicación

$$f : R^4 \longrightarrow R^3, \quad f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_1, 2a_2, 3a_3)$$

Se pide:

a) Demuestra que la imagen de f es R^3

b) Halla Núc(f).

c) Encuentra, respecto a las bases canónicas, la matriz asociada a f.

6. Sean $f, g \in End(R^3)$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de R^3. Si f y g vienen definidos por

$$f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \quad g(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2, g(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_3, g(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1$$

Prueba que f y g conmutan, es decir, $f \circ g = g \circ f$. Hallar f^2, f^n, g^2, g^3

7. Sean f y g dos endomorfismos de R^3 definidos por

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2+x_3,x_1+x_3,x_1-x_2), \quad g(x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_3,x_3-x_1,x_1-x_2)$$

Se pide:

a) Calcular las ecuaciones implícitas, la dimensión y una base de Núc(f) y de Núc(g)

b) Determinar respecto a la base

$$B=\{(0,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$$

las matrices de f, g, $g\circ f$, y de $f\circ g$

8. Sea la aplicación lineal $f:R^3\rightarrow R^3$definida por

$$f(x,y,z)=(-2x+y+z,x-y,x-z)$$

Determinar unas ecuaciones paramétricas y implícitas) del núcleo y de la imagen de f. Calcular la dimensión y una base de cada uno de los dos subespacios. Estudiar si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

9. Siendo f una aplicación lineal de R^3 en R^2 que hace corresponder a los vectores

$$(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)$$

los vectores

$$(1,0),(0,2),(1,1)$$

respectivamente, definir un endomorfismo g de R^2 tal que $g\circ f$ tenga de matriz asociada, respecto a a las bases canónicas,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que el Núc(g) sea el subespacio de ecuación: $2x_1-x_2=0$

10. Sea el espacio vectorial R^4 y sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ una base de R^4. Sea F el subespacio de R^4 engendrado por los vectores

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2+3\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2=2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3+3\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3=\mathbf{v}_2+4\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4,$$

$$\mathbf{w}_4=2\mathbf{v}_1-3\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_5=4\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+7\mathbf{v}_3+3\mathbf{v}_4$$

y sea G el subespacio de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2-x_4 &= 0 \\ 5x_1-4x_2+x_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Puede existir una aplicación lineal

$$f:R^4\longrightarrow R^4$$

tal que Núc(f) $=F$ e $Imf=G$? Contestar razonadamente.

11. Sean $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$ y $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ bases de R^4 y R^2 respectivamente, y sea $f\in\mathcal{L}(R^4,R^2)$ tal que:

- $f(\mathbf{e}_1)=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$

- $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$
- $\text{Núc}(f) = \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$

Sea $g \in \mathcal{L}(R^2, R^4)$ tal que la matriz de g en las bases dadas es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Obtener la matriz de la aplicación $g \circ f$

b) Obtener unas ecuaciones implícitas y paramétricas de

$$\text{Núc}(g \circ f), \quad Im(g \circ f)$$

12. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

y sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(R) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ definida por $f(X) = A \cdot X$ para cada $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(R)$ Se pide:

a) Probar que f es un endomorfismo de espacios vectoriales

b) Hallar las ecuaciones de f respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(R)$

c) ¿ Es f un automorfismo ?

13. Sea $f \in \mathcal{L}(R^2, R^3)$ tal que

- $\text{Núc}(f) = \{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 = 0\}$
- $f(1, 1) = (0, 0, 1)$

Se pide:

a) Matriz de f respecto a las bases canónicas de R^2 y R^3.

b) Bases de $\text{Núc}(f)$, Imf

14. Sea el espacio vectorial R^4 y sea $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ una base de R^4. Consideremos los subespacios vectoriales de R^4

$$H \equiv \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ 2x - y - t &= 0 \end{cases} \qquad H' = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4)$$

y el endomorfismo de R^4 definido por:

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \\ f\mathbf{v}_4) &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 10\mathbf{v}_4 \end{cases}$$

Halla una base y un sistema de ecuaciones implícitas respecto de B de los siguientes subespacios vectoriales

$$Img(f), \text{Núc}(f), H, H', f(H), f^{-1}(H)$$

15. Sea el espacio vectorial R^4 y sea $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ una base de R^4. Sea $f \in End(R^4)$ tal que

$$f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2) = -f(\mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_4) = \mathbf{0}$$

Se pide:

a) Halla una base $B' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$ de R^4 tal que

$$Img(f) = L(\mathbf{v}'_1), \quad \text{y} \quad \text{Núc}(f) = L(\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$$

b) Sea B'' una base arbitraria de R^4 y A la matriz de f respecto de B''. Demuestra que $A^2 = A$.

16. Sea g un endomorfismo de R^4 cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Se pide:
Determina la dimensión del núcleo de g según los valores de α. Para $\alpha = 0$, y siendo H el subespacio de R^4 de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Calcula $g(H)$ y $g^{-1}(H)$.

17. Consideremos las familias de aplicaciones lineales f_a y g_b definidas respectivamente por:

$$f_a : R^3 \longrightarrow R^2 \qquad (a \in R, a \neq 1) \begin{cases} \text{Núc}(f_a) \equiv \begin{cases} x_1 + a x_2 + x_3 &= 0 \\ a x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \\ f_a(0,0,a-1) = (0, a-1) \\ f_a(1,0,1) = (2,1) \end{cases}$$

$g_b : R^2 \longrightarrow R^3 \qquad (b \in R, b \neq 0)$, siendo la matriz de g_b en las bases canónicas de R^2 y R^3

$$\begin{pmatrix} b/2 & b \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Analiza en función de a las dimensiones de la imagen y del núcleo de f_a.

b) Calcula la matriz de las aplicaciones producto $g_b \circ f_a$ y $f_a \circ g_b$.

18. Sea $f \in \text{End}(R^4)$ tal que

- $f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$
- $f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$
- $\text{Núc}(f) = \text{Im}(f)$

Se pide:
Determina la matriz de f respecto a la base canónica de R^4.

19. Sea $f \in \mathrm{End}(R^4)$ tal que

- $f(0,1,1,1) = (1,0,0,1)$
- $f(2,1,0,1) = (0,1,1,0)$
- $f \circ f$ es la aplicación nula

Se pide:

a) Determina la matriz de f respecto a la base canónica de R^4.

b) Sea $g : R^4 \longrightarrow R^4$ otra aplicación lineal que cumple

$$\mathrm{Núc}(g) = \mathrm{Im}(f), \qquad \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Núc}(f)$$

Encuentra la matriz de g respecto a la base canónica de R^4.

c) Sea H el subespacio de R^4 definido por $\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

Encuentra unas ecuaciones implícitas de $g(H)$