Problemas de Complejos II

1. Calcular el valor de la expresión:

$$\frac{1+2i-(-3+4i)+(-5+6i)\times(-7-8i)}{1+i}.$$

2. Resolver la ecuación:

$$\frac{z}{i}+\frac{2z}{2+i}+\frac{3z}{2-i}=i.$$

3. Calcular de dos maneras el cociente:

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}},$$

y comprobar la igualdad de los resultados.

4. Hallar dos complejos cuya suma sea $5+3i$ y su cociente i.

5. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcrcl} ix & + & (1+i)y & = & 2 \\ (1-i)x & + & 3y & = & 1+4i \end{array}\right\}$$

6. La suma de los cuadrados de dos complejos es 0, y su producto $-2i$. Calcularlos y comprobar los resultados obtenidos. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

7. Escribir en forma binómica los cuatro complejos de módulo 4 y cuyos argumentos son, respectivamente, $45, 135, 225$ y 315 grados sexagesimales. Hallar el producto de los cuatro en las formas trigonométrica y binómica.

8. El mismo problema anterior con argumentos $30, 150, 210$ y 330 grados.

9. Idem para $60, 120, 240$ y 300 grados.

10. El primer elemento de una progresión geométrica es 3 y la razón $-i$. Hallar: a)El término general. b) La fórmula de la suma de los n primeros términos lo más simplificada posible. c) La suma de los veinte primeros términos.

11. Calcular el parámetro m para que la ecuación:

$$2x^2 + ix + m = 0,$$

tenga al número $1+i$ entre sus raíces. Una vez calculado, resolver la ecuación y factorizar el polinomio del primer miembro de la misma.

12. Si n es natural, calcular el valor de la potencia:

$$(-\sqrt{3} - i)^n.$$

¿Es real la potencia para algún valor de n? En caso afirmativo, póngase un ejemplo. Hágase lo mismo, para imaginario puro.

13. a) Probar que las raíces enésimas de la unidad están en progresión geométrica. b) Utilizar el hecho anterior para probar que su suma es nula.

14. a)Dado un número finito de términos consecutivos de una progresión geométrica, probar que el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de éstos. b) Utilizar lo anterior para probar que el producto de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$P = \sqrt{(a_1 a_n)^n}.$$

c) Con la ayuda del resultado anterior, probar el siguiente resultado: *El producto de las raíces enésimas de la unidad es* 1 *si* n *es impar, y* -1 *si* n *es par.*

15. a)Efectuar el desarrollo de $(x + yi)^5$, y obtener la parte real y la imaginaria de la potencia.

b)Plantear el sistema de dos ecuaciones para calcular las raíces quintas de la unidad en forma binómica.

c)Dado que las raíces quintas de la unidad son de módulo 1, añadir la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ a las anteriores, y resolver el sistema, obteniendo las cuatro raíces quintas, distintas de 1:

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right), \qquad -\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

d) Calcular trigonométricamente las raíces quintas de la unidad.

e)Identificando los valores obtenidos en c) con los de d), obtener las razones trigonométricas de $18°, 36°$ y $72°$.

16. Resolver la ecuación: $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Explicar por qué ninguna de las raíces es real.

17. Escriba el alumno dos complejos conjugados cualesquiera, que no sean reales ni imaginarios puros, y halle una ecuación de segundo grado que los tenga por raíces.

18. a)Hallar las raíces sextas de la unidad.

b) Probar la identidad: $\frac{x^6-1}{x^2-1} = x^4 + x^2 + 1$.

c)Explicar por qué las raíces sextas de la unidad que no son raíces cuadradas son las raíces de $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

19. a)Probar la identidad: $\frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

b)¿Por qué las raíces quintas de la unidad, distintas de 1, son las raíces de la ecuación:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0?$$

c)Resolver esta ecuación, dividiéndola por x^2, y haciendo el cambio de variable $y = x + \frac{1}{x}$. Se obtendrán así las raíces obtenidas en el ejercicio 15.

20. Si n es natural, calcular el valor de la expresión:

$$(1+i)^n + (1-i)^n.$$

21. a)Determinar los complejos cuyos cubos son iguales a sus conjugados. (Úsese la forma trigonométrica.)

b)Determinar los complejos cuyos cubos son iguales a sus opuestos.

22. a)Probar que el conjugado de una suma de complejos es la suma de los conjugados.

b)Probar que el conjugado de un producto de complejos es el producto de los conjugados.

c) Como consecuencia de a) y b), probar que si un polinomio de coeficientes reales tiene una raíz compleja, tiene también a su conjugada.

23. a) Si un polinomio con coeficientes enteros tiene una raíz entera, probar que dicha raíz divide al término independiente.

b)Usar a) para averiguar si el polinomio $5x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x + 46$ tiene raíces enteras, y factorizarlo.

24. Probar que la fórmula de Moivre es cierta para exponente entero, pues sólo se ha probado para exponente natural. (Recordar que $z^{-p} = \frac{1}{z^p}$, siendo p entero positivo.)
