SOLUCIONES DEL EXAMEN DE 29—I—2008

1. Hallar las raíces cúbicas del número $-1 - i\sqrt{3}$, y expresarlas en forma binómica.

Solución: Para aplicar la fórmula que nos da las raíces enésimas de un complejo, es necesario escribirlo en forma binómica. El módulo es:

$$m = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

El argumento se halla por la fórmula:$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. En este caso tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

El ángulo de 60^0 tiene de tangente: $\sqrt{3}/2 : 1/2 = \sqrt{3}$.

Pero **el argumento no puede ser** 60 **porque el complejo tiene el afijo en el tercer cuadrante: el afijo es el punto** $(-1, -\sqrt{3})$**, que está en el tercer cuadrante.**

Al ser $\operatorname{tg}(180+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, **el argumento es** $60 + 180 = 240$**.**

Así:$-1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 240 + i \operatorname{sen} 240)$.

La fórmula que da las raíces enésimas es:

$$\sqrt[n]{m(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)} = \sqrt[n]{m}\left[\cos\frac{\alpha+360k}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha+360k}{n}\right],$$

para los valores de $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\sqrt[3]{2(\cos 240 + i\operatorname{sen} 240)} = \sqrt[3]{2}\left[\cos\frac{240+360k}{3} + i\operatorname{sen}\frac{240+360k}{3}\right] \text{ para } k = 0, 1, 2.$$

Para $k = 0$ obtenemos:

$$r_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 80 + i\operatorname{sen} 80) = \sqrt[3]{2}\cos 80 + \sqrt[3]{2}\operatorname{sen} 80\, i.$$

Para $k = 1$ es:

$$r_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 200 + i\operatorname{sen} 200) = \sqrt[3]{2}\cos 200 + \sqrt[3]{2}\operatorname{sen} 200\, i.$$

Para $k = 2$ es:

$$r_3 = \sqrt[3]{2}(\cos 340 + i\operatorname{sen} 340) = \sqrt[3]{2}\cos 340 + \sqrt[3]{2}\operatorname{sen} 340\, i.$$

Se han quitado los paréntesis para que las raíces estén en forma binómica, como nos pide el enunciado.

2. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{8^2+15^2+22^2+\cdots+(7n+1)^2}{n^3}; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{3n^3}; \quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5n+3}}.$$

Solución: a) Al tener el numerador un número variable de sumandos el único procedimiento para calcular el límite es el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}.$$

La única condición necesaria para aplicarlo es que B_n sea monótono creciente y divergente: $B_n < B_{n+1}, B_n \to +\infty$. Evidentemente, el denominador de nuestro límite las cumple:

$$n^3 < (n+1)^3, n^3 \to +\infty.$$

En nuestro caso es:

$$B_n = n^3, B_{n-1} = (n-1)^3$$

$$B_n - B_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = 3n^2 - 3n + 1.$$

$$A_n = 8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n-6)^2 + (7n+1)^2,$$

$$A_{n-1} = 8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n-6)^2,$$

$$A_n - A_{n-1} = (7n+1)^2 = 49n^2 + 14n + 1.$$

En conclusión:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^2+15^2+22^2+\cdots+(7n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{49n^2+14n+1}{3n^2-3n+1} = \frac{49}{3}.$$

b) El límite de este apartado es de la forma 1^∞, ya que la base tiende a 1 y el exponente a infinito:

$$\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right) \to 1, 3n^3 \to \infty.$$

Aplicando la fórmula de los límites de este tipo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^{3n^3} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3+1}} = e^3.$$

c) *Cuando* $n\to\infty$, *los ángulos* $\frac{\pi}{3n+1}$ *y* $\frac{2\pi}{5n+3}$ *tienden a cero*;por consiguiente, se producen las siguientes equivalencias de infinitésimos:

Asegura tu aprobado con nuestros cursos de cálculo

CEUS es una empresa con mas de 50 años de experiencia en el sector de la educación y la formación lo que la hacen la opción ideal para recibir los cursos que está buscando en multitud de ámbitos.

Si está buscando algun tipo de curso en Cádiz, no dude en contactar con nosotros. Nuestro conocimiento del sector le ayudará a encontrar siempre la mejor opción gracias al asesoramiento que nuestra experiencia puede brindarle.

www.ceusformacion.com

99%
satisfacción

CEUS ONLINE

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}\sim\frac{\pi}{3n+1}, \text{ y } \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5n+3}\sim\frac{2\pi}{5n+3}.$$

Aplicando ambas, resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3n+1}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3n+1}}{\frac{2\pi}{5n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{6n+2}=\frac{5}{6}.$$

3. Hallar el carácter de las siguientes series:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n^2};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^{n^2};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

Soluciones: a)Por ser un cociente el término general, lo más sencillo es aplicar el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} C=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{-n}}{n^2}}{\frac{e^{-n+1}}{(n-1)^2}}= \\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}(n-1)^2}{e^{-n+1}n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}=1/e<1. \end{aligned}$$

Luego la serie dada es convergente.
Otra manera de verlo es la siguiente:

$$\frac{e^{-n}}{n^2}=\frac{1}{e^n n^2}<\frac{1}{n^2}.$$

Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente, por el teorema de las series armónicas generalizadas. Por tener nuestra serie los términos menores que una convergente también converge.

b) Como el término general tiene forma de potencia, conviene aplicarle el criterio de la raíz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^{n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1}}=e^{-1/2}<e^0=1.$$

Luego la serie converge.

c) La equivalencia de infinitésimos: $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{n}+2}\equiv\frac{1}{\sqrt{n}+2}$ facilita la aplicación del criterio de Pringsheim con $n^{1/2}$:

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/2}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}=1.$$

Por ser $1/2<1$ la serie es divergente.

RONFUNDING.COM
Ron RITUAL
HAZ ALGO BUENO EN

NOTA: En el examen, muchos alumnos estudiaron la condición necesaria de convergencia en las tres series, y vieron que las tres la cumplen; es trabajo perdido, la serie armónica y la del apartado c la cumplen,y, sin embargo, son divergentes.*Es necesario aplicar un criterio, que son condiciones suficientes para la convergencia.*

4. a)Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2 & \text{si } x \leq 0; \\ x - x^2 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

estudiar la continuidad y derivabilidad.
b)Calcular los extremos relativos.
c) Calcular los extremos absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.

Soluciones: a) Por ser polinomios las dos ramas de la función $f(x)$, la continuidad de ambas ramas está garantizada;*el único punto donde podría haber discontinuidad es el origen, donde se juntan ambas ramas.* Estudiemos los límites laterales en dicho punto:

$$\lim_{x \to 0^+} (x - x^2) = 0 - 0^2 = 0. \ \lim_{x \to 0^-} (x^4 - 2x^2) = 0^4 - 20^2 = 0 = f(0).$$

Luego existe el límite ordinario (da lo mismo que x tienda a cero por la derecha), es nulo, y es igual a $f(0)$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Como esta es la definición de continuidad, la función es continua.

Estudiemos ahora la derivabilidad. Como las ramas de la función son polinomios y éstos son derivables para todo valor de x, el único punto donde podría no ser derivable es el origen.

Lo mejor y más riguroso sería calcular las derivadas laterales en el origen, usando la definición; pero como las derivadas en las ramas son polinomios, y éstos son continuos, podemos calcular ambas derivadas laterales aprovechando la continuidad.

La función derivada a la izquierda del origen es:

$$(x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x.$$

La derivada lateral en el origen por la izquierda es:

$$f'_{0^-}(0) = \lim_{x \to 0^-} (4x^3 - 4x) = 4 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 = 0.$$

La función derivada a la derecha del origen es:

$$(x - x^2)' = 1 - 2x.$$

La derivada lateral en el origen por la derecha es:

$$f'_{0^+}(0) = \lim_{x \to 0^+} (1 - 2x) = 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

Al ser distintas las derivadas laterales en el origen, la función no es derivable allí: es el único punto donde ocurre ésto, en todos los demás es derivable, y la derivada viene dada por los polinomios arriba expresados.

b) Sabemos desde el Bachillerato que *la condición necesaria, aunque no suficiente, para que haya un extremo relativo es que la derivada se anule.*

Como en origen hay cambio de signo de la función(a la derecha $x - x^2 = x(1-x)$ es positivo porque lo son los dos factores; a la izquierda, $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ es negativo si $0 > x > -\sqrt{2}$, ya que lo es el factor $x^2 - 2$ la función es creciente en él:no hay ni máximo ni mínimo allí.

Busquemos en las ramas. En la rama izquierda, la derivada $4x^3 - 4x$ se anula para el valor: $x = -1$. El valor 0 no es aceptable por lo antes dicho, y $x = 1$ no está a la izquierda del origen.

La derivada segunda es $12x^2 - 4$ que vale en $x = -1$: $12 - 4 = 8 > 0$. Luego la función allí tiene un mínimo, cuyo valor es: $(-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$.

Si se estudia el signo de la derivada, se ve que pasa de $-$ a la izquierda de -1, a $+$ a la derecha: luego tiene un mínimo como ya sabíamos.

En la rama derecha, la derivada $1 - 2x$ se anula para $x = \frac{1}{2}$. La derivada segunda es -2, que es negativa: luego aquí tenemos un máximo.

A la izquierda de $\frac{1}{2}$ la derivada es positiva, y a la derecha, negativa: luego tiene un máximo como ya sabíamos.

El valor del máximo es: $\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

c) Sabemos que máximo absoluto es el mayor valor de la función en el intervalo; y mínimo absoluto el menor.

El valor en el extremo -2 es: $(-2)^4 - 2(-2)^2 = 16 - 8 = 8$.

El valor en el extremo 2 es: $2 - 2^2 = 2 - 4 = -2$.

Es fácil ver, por lo visto en el máximo relativo y el mínimo relativo, que éstos son los valores mayor y menor en el intervalo, respectivamente.

5. a) Se considera la función $y = x^{7/2}$ para $x \geq 0$. Estudiar el crecimiento y decrecimiento,máximos y mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

b) Enunciar el teorema del valor medio de Lagrange, y demostrarlo. Aplicarlo a la función del apartado anterior en el intervalo $[n-1, n]$.

c) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^7} - \sqrt{(n-1)^7}},$$

acotando la fracción del límite entre dos de límite conocido (utilizar los apartados anteriores).

Soluciones: a) Empezamos explicando por qué x debe ser positivo:

$x^{7/2} = \sqrt{x^7}$. Si $x < 0$, la potencia x^7 es negativa, y no tiene raíz cuadrada.

Su derivada es: $y' = 7/2x^{5/2}$. Ésta se anula en $x = 0$, y para los demás valores es positiva; es claro que en el origen tiene el mínimo absoluto en el intervalo $[0, +\infty]$, único mayor intervalo en el que está definida. Luego la función es siempre creciente, y no tiene otros extremos.

La segunda derivada es: $y'' = 35/4x^{3/2}$ es siempre positiva; luego la función es siempre cóncava, y no tiene puntos de inflexión.

b) El enunciado del teorema de Lagrange es el siguiente:

Teorema del valor medio o de Lagrange: Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,\, b]$, y derivable en el abierto $(a,\, b)$, existe $x_0 \in (a,\, b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0).$$

La demostración, que es una simple aplicación del teorema de Cauchy, la tiene el alumno el el tema "Propiedades de las funciones derivables".

La interpretación geométrica de dicho teorema es la siguiente: Existe un punto en $(a,\, b)$ cuya tangente es paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y la tiene el alumno en el tema antes citado.

Aplicándolo a la función dada, tenemos:

$$\sqrt{n^7} - \sqrt{(n-1)^7} = 7/2{x_0}^{5/2}, \quad x_0 \in (n-1,\, n).$$

c) Por ser creciente la función $x^{5/2}$ tenemos:

$$\frac{7}{2}(n-1)^{5/2} < \sqrt{n^7} - \sqrt{(n-1)^7} = \frac{7}{2}{x_0}^{5/2} < \frac{7}{2}n^{5/2}.$$

En consecuencia, tenemos:

$$\frac{2}{7}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{5/2} > \frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^7} - \sqrt{(n-1)^7}} > \frac{2}{7}.$$

Si hacemos tender n a infinito, como $\frac{2}{7}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{5/2} \to \frac{2}{7}$, aplicando la conocida propiedad de las sucesiones:

Si una sucesión se encuentra entre dos que tienen igual límite, tiene el mismo límite que aquéllas, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^7} - \sqrt{(n-1)^7}} = \frac{2}{7}.$$

6. a)Escribir el desarrollo de Taylor de e^x en el origen.

b) Se llaman, respectivamente, *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* a las funciones:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hallar sus desarrollos taylorianos.

c) A partir de los resultados anteriores, calcular los límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sh} x}{x}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\frac{1}{2}x^2}.$$

¿Se deducen de ellos alguna equivalencia de infinitésimos?

Soluciones: a) Como las derivadas sucesivas de e^x son todas iguales a la función, y es $e^0 = 1$, el desarrollo de Taylor en $x = 0$ (y sabemos que todos los desarrollos en dicho punto, se llaman de MacLaurin) es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + T_n(x),$$

siendo T_n el término complementario.

Por lo dicho sobre las derivadas, tenemos:

$$T_n = \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!},\ 0 < \theta < 1.$$

b) Cambiando en x por $-x$, obtenemos:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + T_n(-x).$$

Observemos que *en e^{-x} los términos de exponente impar han cambiado de signo.* Restando de la expresión nueva , obtenemos:

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + U_n(x),$$

siendo $U_n(x) = T_n(x) + T_n(-x)$.

De aquí deducimos:

$$\mathrm{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + U_n(x).$$

El desarrollo anterior de $\mathrm{Sh}\, x$ *es el mismo que el de* $\mathrm{sen}\, x$*, cambiando los signos menos en* $\mathrm{sen}\, x$ *por signos más.* El nombre de seno hiperbólico es porque tiene unas propiedades muy parecidas.

b)Sumando los desarrollos y , se obtiene:

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + V_n(x),$$

siendo $V_m(x) = T_n(x) + T_n(-x)$.

Es inmediato que, al sumar,*los términos de exponente impar se reducen, por ser opuestos, quedando únicamente términos de exponente par.* Dividiendo por dos, nos queda:

$$\mathrm{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + V_m(x).$$

Obsérvese que este desarrollo es el mismo de $\cos x$, sustituyendo los términos con signo menos, por los mismos con signo más.

c) Si en el desarrollo de $\mathrm{Sh}\, x$, se divide por x, se obtiene:

$$\frac{\mathrm{Sh}\, x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-1)!} + \frac{U_m(x)}{x}.$$

Haciendo tender x a cero, resulta:

RONFUNDING.COM
Ron RITUAL
HAZ ALGO BUENO EN

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sh} x}{x} = 1.$$

Puesto que los términos que siguen al 1 se anulan, y también $\frac{U_m(x)}{x}$, por ser $U_m(x)$ un infinitésimo de orden superior a uno.

Conclusión: Los infinitésimos $\operatorname{Sh} x$ *y* x *son equivalentes, como ocurre con* $\operatorname{sen} x$ *y* x.

Del desarrollo de $\operatorname{Ch} x$, obtenemos:

$$\frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{V_m(x)}{\frac{1}{2}x^2}.$$

Si hacemos tender a cero x, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 1,$$

por las mismas razones antes dichas.

Conclusión: Los infinitésimos $\operatorname{Ch} x - 1$ *y* $\frac{1}{2}x^2$ *son equivalentes, como lo son* $1 - \cos x$ *y* $\frac{1}{2}x^2$.

NOTA: Es claro que $U_m(x)$ es un infinitésimo de orden superior al $2m-1$, por ser suma de $T_n(x)$ y $T_n(-x)$, ambos de orden superior a n, y $n \geq 2m-1$. Lo mismo ocurre con $V_m(x)$.

7. Calcular el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \ln(x+1)$ hasta el grado 5, y también el resto de Lagrange. Utilizarlos para calcular $\ln 1,2$ con error menor de $0,001$.

Soluciones: La derivada de $y = \ln(x+1)$ es: $y' = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$. La derivada segunda es: $y'' = (-1)(x+1)^{-2}$;la tercera:$y''' = (-1)(-2)(x+1)^{-3}$. Es fácil ver que: $y^{n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}$. De este resultado se obtiene:

$$y^{n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad y^{n)}(0)/n! = (-1)^{n-1}/n.$$

Luego obtenemos el resultado:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + T_5(x).$$

Al ser $y^{6)} = -5!(x+1)^{-6}$ el término complementario de Lagrange es:

$$T_5(x) = \frac{-1}{6(1+\theta x)^6}, \; 0 < \theta < 1.$$

De la igualdad anterior, resulta:

$$\ln 1,2 \simeq 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{3} - \frac{0,2^4}{4} + \frac{0,2^5}{5}.$$

Operando con tres cifras en cada sumando, tenemos:

$$\ln 1,2 \sim 0,182.$$

8. Calcular los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}; \quad b)\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\log(e^{x^2}+x^2)}; \quad c)\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Soluciones: a) Sea $y = x^{\operatorname{sen} x}$. Se trata de un límite de la forma 0^0, razón por la que debemos tomar logaritmos: $\ln y = \operatorname{sen} x \ln x$. Tomando límites para $x \to 0^+$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} x \ln x =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 = \ln(\lim_{x\to 0^+} y).$$

Luego: $\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\log(e^{x^2}+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}+x^2-1}$.

La igualdad de estos límites resulta de la equivalencia de infinitésimos:

$$\ln(e^{x^2}+x^2) \sim e^{x^2}+x^2-1,$$

ya que, si $x \to 0$, $e^{x^2}+x^2 \to 1$, y si $t \to 1$, $\ln t \sim t-1$.

Aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}+x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2xe^{x^2}+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x+\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x+\cos x-1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}(\cos x-\operatorname{sen} x)} = e^1 = e.$$

Este límite es del tipo 1^∞, pues $\operatorname{sen} x+\cos x \to 1$ y $\frac{1}{x} \to \infty$, cuando $x \to 0$;aplicando la fórmula de este tipo de límites:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[\,f(x)-1]\,g(x)},$$

se obtiene la primera igualdad.

Aplicando luego la regla de L'Hôpital al límite del exponente,aplicación facilísima, resulta el límite.

9. Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}x^n$, hallar su radio de convergencia y el intervalo de convergencia. (Sólo Grupo B de Sistemas.)

Soluciones: Aplicando la fórmula del radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n-1)^3+1} = 1,$$

por ser límite de un cociente de polinomios del mismo grado.

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$ converge, el punto extremo $x = 1$ pertenece al campo de convergencia.

También converge absolutamente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}(-1)^n$, y el otro extremo es del campo de convergencia.

El intervalo de convergencia es, pues, $[-1,\, 1]$.

Ejercicio 1.—Aprovechar el resultado del problema 5 para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^{5/2} + 3^{5/2} + \cdots + n^{5/2}}{\sqrt{n^7}}.$$

Solución: $2/7$.

Ejercicio 2.—Probar, por las definiciones dadas de $\mathrm{Sh}\, x$ *y de* $\mathrm{Ch}\, x$ *en el problema 6, que:*

$$\mathrm{Ch}^2\, x - \mathrm{Sh}^2\, x = 1,$$

igualdad semejante a $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$.