ÁLGEBRA

Departamento de Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

CURSO 2015/2016

Práctica II: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: MÉTODOS DIRECTOS

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Recordemos que, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas viene dado por:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ son los coeficientes, x_i las incógnitas, y los b_i, $1 \leq i \leq m$ los términos independientes, elementos de $\mathbb{R}$. Un sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

Un ejemplo donde el álgebra matricial es de gran ayuda es en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1
Resolver el sistema de ecuaciones, dado por

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 98 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 95 \end{array}\right.$$

Solución:

```
(%i1) A:matrix([1,5,4], [2,8,1], [6,7,3]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

Para resolver un sistema en *WxMaxima* utilizamos el comando `linsolve` en lugar de `solve`, como vimos en la práctica de introducción. Ambas órdenes se utilizan de la misma forma, pero `linsolve` es más eficiente en estos casos. También podemos escribir dicha orden desde el menú **Ecuaciones** → **Resolver Sistema Lineal**, donde introducimos el número de ecuaciones y a continuación las ecuaciones del sistema y las incógnitas. Sólo una observación: sigue siendo importante escribir correctamente qué variables se consideran como incógnitas.

```
(%i2) linsolve([x1+5*x2+4*x3=98,2*x1+8*x2+x3=60,6*x1+7*x2+3*x3=95],[x1,x2,x3]);
```

(%o2) $[x1 = 1, x2 = 5, x3 = 18]$

Como muestra *WxMaxima* la solución es $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, y $x_3 = 18$. Como observación señalar que con la orden `triangularize` permite hacer ceros por debajo de la diagonal devolviendo una matriz equivalente a la matriz ampliada al realizar el método de Gauss

```
(%i3) b:matrix([98],[60],[95]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 98 \\ 60 \\ 95 \end{bmatrix}$

```
(%i4) Ab:addcol(A,b);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 98 \\ 2 & 8 & 1 & 60 \\ 6 & 7 & 3 & 95 \end{bmatrix}$

```
(%i5) triangularize(Ab);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 98 \\ 0 & -2 & -7 & -136 \\ 0 & 0 & -119 & -2142 \end{bmatrix}$

De manera que la solución del sistema se obtiene sustituyendo recursivamente de forma escalonada.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{-2142}{-119} = 18 \\ x_2 = (-136 + 7 \cdot 18)/-2 = 5 \\ x_1 = 98 - 4 \cdot 18 - 5 \cdot 5 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 1. Averigua si los siguientes sistemas de son de Cramer y, en caso positivo, resolverlos

$$(a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} , \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

Antes de resolver un sistema de ecuaciones conviene realizar un estudio sobre la existencia y unicidad d soluciones, y para ello utilizamos el teorema de Rouché-Frobenius:

Teorema 2

Dado un sistema e ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas se verifica que el sistema tiene solución si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. Es decir, se cumple que: rango $A =$ rango $(A|B)$ Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. *Si $rg(A) = rg(A|B) = r = n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada e igual al número de incógnitas.*
2. *Si $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada pero menor que el número de incógnitas.*

Ejemplo 3

Discutir la existencia de soluciones y calcularlas si procede

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 3 \\ 5x_1 + 11x_2 + 15x_3 + 17x_4 = 15 \end{cases}$$

Solución:

Introducimos las matrices de los coeficientes y la ampliada en el *Maxima*:

```
(%i6)  A:matrix([1,5,2,7],[2,1,5,1],[2,5,8,9],[5,11,15,17]);
```

$$(\%o6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 5 & 11 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

```
(%i7)  b:matrix([5],[7],[3],[15]);
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}$$

```
(%i8)  Ab:addcol(A,b);
```

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 11 & 15 & 17 & 15 \end{bmatrix}$$

Calculamos los rangos de ambas matrices:

```
(%i9)  rank(A);
```

$(\%o9)\quad 3$

```
(%i10) rank(Ab);
```

(%o10) 3

Como observamos, se cumple que $rg(A) = rg(Ab) < 4$ y por lo tanto se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con infinitas soluciones. Pasemos ahora a calcularlas:

```
(%i11) linsolve([x1+5*x2+2*x3+7*x4=5,2*x1+x2+5*x3+x4=7,
       2*x1+5*x2+8*x3+9*x4=3,5*x1+11*x2+15*x3+17*x4=15],[x1,x2,x3,x4]);
```

(%o11) $[x_1 = \frac{226 + 58 \cdot \%r1}{31}, x_2 = -\frac{47 \cdot \%r1 - 5}{31}, x_3 = -\frac{48 + 20 \cdot \%r1}{31}, x_4 = \%r1]$

La orden `linsolve` detecta que existe una ecuación que es combinación lineal del resto y la elimina para resolver el sistema. Las soluciones quedan en función del parámetro $\%r1$.

Ejercicio 2. Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 7 \\ 7x_1 - 14x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

Veamos ahora parte de la potencia del software *Maxima* en cálculo simbólico, cuando tenemos sistemas de ecuaciones lineales en función de algunos parámetros:

Ejemplo 4

Discute, según los valores de a , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Solución:

En primer lugar introducimos las matriz de los coeficientes, que llamaremos $M(a)$ por depender de un parámetro, y la matriz ampliada:

```
(%i12) M(a):=matrix([a,1,1],[1,a,1],[1,1,a]);
```

(%o12) $M(a) := \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

```
(%i13) Mb(a):=addcol(M(a),[1,a,a^2]);
       Mb(a)
```

(%o13) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$

A continuación calculamos el determinate de la matriz de los coeficientes para poder estudiar su rango:

```
(%i14) determinant(M(a));
```

(%o14) $a \cdot (a^2 - 1) - 2 \cdot a + 2$

```
(%i15) solve(\%=0);
```

(%o15) $[a = -2, a = 1]$

Ahora distinguiremos tres casos posibles. El primero de ellos cuando $a = -2$ y estudiamos los rangos de ambas matrices. Para el caso $a = 1$ procedemos igual sólo que en este caso tendremos que sustituir dos variables por parámetros.

```
(%i16) rank(M(-2));
```

(%o16) 2

```
(%i17) rank(Mb(-2));
```

(%o17) 3

En este caso, como $rg(M) \neq rg(Mb)$ podemos afirmar que el sistema es Incompatible y no tiene solución.

```
(%i18) rank(M(1));
```

(%o18) 1

```
(%i19) rank(Mb(1));
```

(%o19) 1

En este caso $rg(M) = rg(Mb) < n$ por lo tanto mi sistema es Compatible Indeterminado y pasamos a resolverlo para $a = 1$

```
(%i20) linsolve([x+y+z=1,x+y+z=1,x+y+z=1],[x,y,z]);
```

(%o20) $[x = -\%r5 - \%r4 + 1, y = \%r5, z = \%r4]$

Para el caso en que $a \neq 1, -2$ resolvemos el sistema directamente, ya que sabemos que el Sistema es Compatible Determinado

```
(%i21) linsolve([a*x+y+z=1,x+a*y+z=a,x+y+a*z=a^2],[x,y,z]);
```

(%o21) $[x = -\frac{1+a}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1+2 \cdot a + a^2}{a+2}]$

Ejercicio 3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =1 \\ 2x+2y+(1+\alpha^2)z & =2\alpha \\ x+(1-\alpha)z & =-\alpha \\ x+y+\alpha^2 z & =\alpha \end{array}\right.$$

1. Analizar para qué valores de α el sistema tiene solución.

2. Resolver el sistema para los valores de α encontrados en el apartado anterior.

Aplicación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

En este último apartado veremos una de las múltiples aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales, en concreto la aplicación a la *Redes de Conducción de Fluidos* .

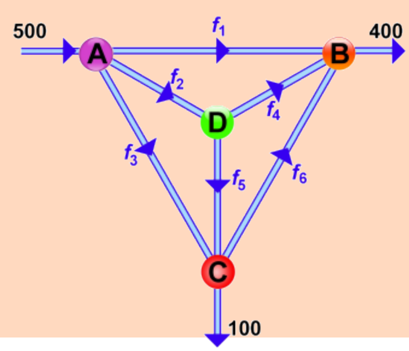
Existen diferentes tipos de problemas que tratan sobre una red de conducciones por la que fluye alguna clase de fluido. Por ejemplo, una red de riego, una red de calles o una red de autovías. A menudo hay puntos en el sistema por los cuales el fluido entra en la red o sale de ella. El principio básico que rige estas redes se conoce como:

> Regla de los nodos: El fluido total que entra en cada uno de los nodos o intersecciones de la red debe ser igual al fluido que sale.

Este requerimiento proporciona una ecuación lineal que relaciona los fluidos que pasan por los nodos.

Ejemplo 5

En el diagrama adjunto se muestra una red de calles de un solo sentido. La tasa de los coches que fluyen de la intersección A es de 500 coches por hora. De las intersecciones B y C, emergen 400 y 100 coches por hora, respectivamente. Encuentre los posibles flujos que recorren cada calle.



Solución:

En primer lugar tendremos que definir correctamente cuales son las incógnitas de forma precisa, posteriormente expresar el problema matemáticamente por medio de un sistema de ecuaciones lineales y por último resolver e interpretar dicha solución. En este ejemplo las incógnitas serían los posibles flujos que recorren cada calle, es decir, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 y f_6.

A continuación planteamos las ecuaciones que rigen nuestro problema y que formarán un sistema de ecuaciones lineales. Observando la figura se pueden determinar cuatro ecuaciones, una por cada nodo:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 = 500 \\ f_1 + f_4 + f_6 = 400 \\ f_3 + f_5 - f_6 = 100 \\ f_2 - f_4 - f_5 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema utilizando el *Maxima* y tenemos

```
(%i22) linsolve([f1+f2+f3=500,f1+f4+f6=400,f3+f5-f6=100,f2-f4-f5=0],[f1,f2,f3,f4,f5,f6]);
```

(%o22) $[f1 = -\%r3 - \%r1 + 400, f2 = \%r3 + \%r2, f3 = -\%r2 + \%r1 + 100, f4 = \%r3, f5 = \%r2, f6 = \%r1]$

Por último, ahora toca interpretar las posibles soluciones y en algunos casos contrastar las mismas.

Ejercicio 4. Encuentre los posibles flujos en las siguiente red de tuberías:

1. ¿Cuáles son los flujos que determinan a todos los demás?.
2. ¿Cuáles son las restricciones que deben satisfacer estos flujos?