Nombre y Apellidos:

EJERCICIOS

1. **Para la inspección de una pieza recién fabricada, se le aplica un proceso refrigerante de alta velocidad que le permite llegar a una temperatura adecuada. El proceso dura unos minutos y los datos de tiempo y temperatura se adjuntan en la siguiente tabla:**

Temperatura (ºC)	**253**	**232**	**210**	**200**	**191**	**187**
Tiempo (m)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

a) **(0.4 ptos) Determina la recta de regresión del tiempo sobre temperatura.**

b) **(0.2 ptos) ¿En qué minuto se alcanzarán los 25º?**

c) **(0.4 ptos) ¿Qué puedes decir de la bondad del ajuste? ¿por qué?**

SOLUCIÓN: Completamos la siguiente tabla de cálculos, donde *X=Temperatura* e *Y=Tiempo*. Para la realización de estos cálculos el modo estadístico de nuestra calculadora es una ayuda bastante buena.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
253	2	64009	4	506
232	3	53824	9	696
210	4	44100	16	840
200	5	40000	25	1000
191	6	36481	36	1146
187	7	34969	49	1309
$\sum(x_i) = 1273$	$\sum(y_i) = 27$	$\sum(x_i^2) = 273383$	$\sum(y_i^2) = 139$	$\sum(x_i \cdot y_i) = 5497$

$$n = 6 \qquad S_x^2 = \frac{\sum(x_i^2)}{n} - \overline{x}^2 = \frac{273383}{6} - 212{,}167^2 = 549{,}139$$

$$\overline{x} = \frac{\sum(x_i)}{n} = \frac{1273}{6} = 212{,}1667 \qquad S_y^2 = \frac{\sum(y_i^2)}{n} - \overline{y}^2 = \frac{139}{6} - 4{,}5^2 = 2{,}9167$$

$$\overline{y} = \frac{\sum(y_i)}{n} = \frac{27}{6} = 4{,}5 \qquad S_{xy} = \frac{\sum(x_i \cdot y_i)}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{5497}{6} - 212{,}1667 \cdot 4{,}5 = -38{,}5833$$

a) Obtenemos la Recta de Regresión del Tiempo (Y) sobre la Temperatura (X):

$$\left.\begin{array}{l} b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = -\frac{38{,}5833}{549{,}139} = -0{,}07 \\ \\ a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 4{,}5 + 0{,}07 \cdot 212{,}1667 = 19{,}352 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{y}(x) = a + b \cdot x = 19{,}352 - 0{,}07 \cdot x}$$

b) Sustituimos en la recta obtenida en el apartado anterior el valor x=25:

$$\hat{y}(25) = 19{,}352 - 0{,}07 \cdot 25 = \boxed{17{,}6}$$

c) Determinamos primero el coeficiente de correlación lineal:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-38{,}5833}{\sqrt{549{,}139} \cdot \sqrt{2{,}9167}} = -0{,}964$$

lo que se interpreta como una relación estadística fuerte e inversa. El coeficiente de determinación sería $R^2 = r^2 = 0{,}929$ lo que representa un buen ajuste, porque la variable predictora o independiente (en este caso X) explica un $\boxed{92{,}9\,\%}$ de la variabilidad que tiene la variable respuesta o dependiente (en este caso Y).

2. **Para el tratamiento de una mala combustión de un tipo de motor, se dispone de tres aceites. El porcentaje de motores que utiliza el aceite A_1 es el 40 %, el del aceite A_2 es el 40 % y el del A_3 es el 20 %. Estudios que se realizaron en diversos laboratorios han comprobado que A_1 produce mejoras en el 3 % de los motores, A_2 los mejora en el 5 % y A_3 mejora el rendimiento en el 12 % de los motores.**

   ***a*) (0.5 ptos) Si un motor ha mejorado en su combustión ¿Cuál es el aceite que se le ha administrado con mayor probabilidad?**

   ***b*) (0.5 ptos) Si un motor no ha tenido ninguna mejora ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido utilizado el A_1?**

SOLUCIÓN:

a) Denominamos por A_1,A_2 y A_3 a los sucesos que representan el tipo de aceite utilizado. Con el suceso M representamos que el rendimiento de un motor ha mejorado. Del enunciado pueden deducirse los siguientes datos:

$$P(A_1) = 0{,}4 \qquad P(A_2) = 0{,}4 \qquad P(A_3) = 0{,}4$$

$$P(M/A_1) = 0{,}03 \qquad P(M/A_2) = 0{,}05 \qquad P(M/A_3) = 0{,}12$$

Sabiendo que el rendimiento de un motor ha mejorado, queremos determinar la probabilidad de que se hayan utilizado cada uno de los tres tipos de aceite. Para ello vamos a determinar en primer lugar la probabilidad del suceso M que nos hará falta más adelante:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M/A_1) \cdot P(A_1) + P(M/A_2) \cdot P(A_2) + P(M/A_3) \cdot P(A_3) \\ &= 0{,}03 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}4 + 0{,}12 \cdot 0{,}2 = 0{,}056 \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de Bayes para determinar las siguientes probabilidades y poder ordenar los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} P(A_1/M) &= \frac{P(M/A_1) \cdot P(A_1)}{P(M)} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}4}{0{,}056} = 0{,}2143 \\ P(A_2/M) &= \frac{P(M/A_2) \cdot P(A_2)}{P(M)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}4}{0{,}056} = 0{,}3571 \\ P(A_3/M) &= \frac{P(M/A_3) \cdot P(A_3)}{P(M)} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}2}{0{,}056} = 0{,}4286 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Los aceites ordenados de mayor a menor eficacia quedan: } A_3 \rightarrowtail A_2 \rightarrowtail A_1}$$

b) En este caso debemos calcular $P(A_1/\overline{M})$ y nuevamente utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(A_1/\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}/A_1) \cdot P(A_1)}{P(\overline{M})} = \frac{(1 - 0{,}03) \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}056} = \boxed{0{,}411}$$

3. **Un estudio realizado recientemente reveló que el 30 % de los usuarios de gimnasios tienen sobrepeso.**

   a) **(0.5 ptos) Si seleccionamos aleatoriamente a 10 usuarios de gimnasios, calcula la probabilidad de que tengan sobrepeso como mucho 2 de ellos.**

   b) **(0.5 ptos) Si seleccionamos aleatoriamente a 500 usuarios de gimnasios, calcula la probabilidad de que al menos 375 socios no tengan sobrepeso.**

   SOLUCIÓN:

   a) La variable aleatoria X=*"Nº de usuarios con sobrepeso en un grupo de 10 elegidos aleatoriamente"* sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0{,}3$:

$$X \sim Bi(10; 0{,}3) \quad \Rightarrow \quad P[X \leq 2] = p_0 + p_1 + p_2 =$$
$$= \binom{10}{0}(0{,}3)^0(0{,}7)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}3)^1(0{,}7)^9 + \binom{10}{2}(0{,}3)^2(0{,}7)^8 = \boxed{0.3828}$$

   b) La variable aleatoria Y=*"Nº de usuarios que no tienen sobrepeso en un grupo de 500 elegidos aleatoriamente"* sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 500$ y $p = 0{,}7$. Esta distribución puede aproximarse por la Normal (se verifica que $np, nq > 5$ y $p, q > 0{,}05$):

$$X \sim Bi(500; 0{,}7) \simeq N(\mu; \sigma) \quad \begin{cases} \mu = np = 350 \\ \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{105} \end{cases}$$

   Realizando la corrección por continuidad calculamos:

$$P[X \geq 375] \overset{(c.c.)}{=} P[X \geq 374{,}5] = P[Z > 2{,}49] = 1 - F_Z(2{,}49) = 1 - 0{,}9936 = \boxed{0{,}0064}$$

4. **(1 pto) En una fábrica de placas base de ordenadores se realiza un experimento en el que se mide la velocidad de respuesta de dos de ellas. Los resultados obtenidos son los siguientes:**

Placa 1	*Placa* 2
$\overline{x}_1 = 38$	$\overline{x}_2 = 70{,}5$
$S^2_{c_1} = 273{,}33$	$S^2_{c_2} = 335{,}83$
$n_1 = 10$	$n_2 = 10$

   Suponiendo normalidad en los datos, ¿podemos afirmar con un nivel de significación del 10 % que existen diferencias entre la velocidad de ambos tipos de placa?

   SOLUCIÓN: Para estudiar si existen diferencias significativas de velocidad entre los 2 tipos de placas, suponiendo Normalidad en las poblaciones, debemos contrastar primero la igualdad de varianzas:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 \equiv \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 \equiv \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array}\right\} \qquad f_{exp} = \frac{S^2_{c_1}}{S^2_{c_2}} = \frac{273{,}33}{335{,}83} = 0{,}814$$

   La región crítica de este contraste para un valor $\alpha = 0{,}1$ tiene la expresión:

$$\text{R.C.} = \{f_{exp} < F_{0{,}05}(9,9)\} \cup \{f_{exp} > F_{0{,}95}(9,9)\}$$

   siendo el percentil $F_{0{,}95}(9,9) = 3{,}179$, según la tabla, y utilizando que

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)} \quad \Rightarrow \quad F_{0{,}05}(9,9) = \frac{1}{F_{0{,}95}(9,9)} = \frac{1}{3{,}179} = 0{,}315$$

   se tiene que

$$\text{R.C.} = \{f_{exp} < 0{,}315\} \cup \{f_{exp} > 3{,}179\} \Rightarrow H_1$$

luego no podemos rechazar la hipótesis de igualdad de las varianzas poblacionales.

Con este resultado, utilizaremos ahora el contraste de comparación de medias suponiendo varianzas iguales:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 \equiv \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 \equiv \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}\right\} \qquad t_{exp} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{38 - 70{,}5}{\sqrt{304{,}58}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = -4{,}164$$

donde hemos calculado

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_{c_1}^2 + (n_2 - 1)S_{c_2}^2}{n_1 + n_2 - 2} = 304{,}58$$

En este caso el estadístico t_{exp} se ajusta a una distribución $t(n_1 + n_2 - 2)$. La región crítica del contraste al 10 % de significación es

$$\text{R.C.} = \{|t_{exp}| > t_{0{,}95}(18)\} = \{|t_{exp}| > 1{,}734\} \quad \Rightarrow \quad H_1,$$

$$\boxed{\text{Por tanto podemos rechazar } H_0 \text{ para } \alpha = 0{,}10\text{, es decir, podemos afirmar que la diferencia de velocidad entre ambos tipos de placa es significativa para } \alpha = 0{,}1.}$$