VARIABLE ALEATORIA

Escuela Superior
de Ingeniería

INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Frecuentemente, cuando realizamos un experimento aleatorio nos interesa, más que el resultado del experimento, una característica de interés asociada a los resultados.

Experimento 1: Lanzamiento de dos dados.
"Característica de interés" = Suma de ambos dados

Experimento 2: Lanzar una moneda cinco veces.
"Característica de interés" = Nº de veces que ha salido cara

Estas "Características de interés" son variables que dependen del resultado obtenido al efectuar el experimento aleatorio. Por tanto, pueden entenderse como funciones que asignan a cada posible resultado del experimento un número real.

Escuela Superior de Ingeniería

CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

- Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número a cada resultado posible de un experimento aleatorio. Suele designarse el nombre de la variable con una letra mayúscula, por ejemplo X.

- Conviene tener en cuenta que a un mismo experimento aleatorio pueden asociarse diversas variables aleatorias, dependiendo de la observación que realicemos.

Ejemplo → En el lanzamiento de dos dados podríamos considerar las siguientes variables aleatorias:

X = Suma de las puntuaciones.

Y = Producto de las puntuaciones.

Z = Nº de veces que ambos dados han sacado la misma puntuación.

Escuela Superior de Ingeniería

TIPOS DE VARIABLES ALEATORIAS

DISCRETAS	Variables aleatorias que toman valores numéricos aislados y puntuales.	▪ Llamadas de teléfono que recibimos en nuestro móvil cada día. ▪ Aciertos en un examen tipo test. ▪ Coches que atraviesan una calle cada 5 minutos.
CONTINUAS	Variables aleatorias que toman todos los valores posibles dentro de un intervalo.	▪ Estatura de un individuo. ▪ Temperatura de un individuo. ▪ Tiempo de duración de una bombilla.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Las variables discretas quedan determinadas cuando conocemos los posibles valores que toma y la probabilidad que toma cada uno de sus valores .

FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD

La **función de masa de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es una función que asigna a cada valor posible de esta variable aleatoria una probabilidad.

Si la variable aleatoria X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y conocemos los valores $p_i = P[X = x_i]$ con i= 1,…,n, la función de masa de probabilidad de la v.a discreta X viene dada por:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$p_i = P[X = x_i]$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Escuela Superior de Ingeniería

FUNCIÓN DE MASA DE PROBABILIDAD

Para que la función de masa de probabilidad esté bien definida debe respetar las siguientes condiciones:

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

EJEMPLO

Experimento Aleatorio: Lanzamiento de dos dados.

Variable Aleatoria: Suma de las puntuaciones de ambos dados.

X= Suma de las puntuaciones de ambos dados

$$\boxed{\text{Rango de } X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$$

Resultados posibles del experimento según las puntuaciones obtenidas con los dados. Cada uno de estos 36 casos son equiprobables.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Escuela Superior de Ingeniería

EJEMPLO

La función de masa de probabilidad de la v.a discreta

X= Suma de las puntuaciones de ambos dados

viene dada en la siguiente tabla:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob. Pi	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{36} \Rightarrow [(1,1)]}$$

$$\boxed{P(X = 3) = \frac{2}{36} \Rightarrow [(2,1),(1,2)]}$$

$$\boxed{\text{Prob}(X = k) = \frac{\#(\text{Suman } k)}{36}}$$

Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

La función de distribución de una variable aleatoria se corresponde con el concepto de frecuencia relativa acumulada. La función de distribución, F(x), se define:

$$\boxed{F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)}$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

1. Siempre es monótona creciente → Si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$
2. F(x) verifica: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$
3. F(x)es siempre continua por la derecha.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES

La Función de Distribución permite calcular la probabilidad de los sucesos más usuales asociados a una variable. De forma general:

1) $P(X \leq a)=F(a)$

2) $P(X > a)= 1-F(a)$

3) $P(a<X\leq b)= F(b)-F(a)$.

"Esta propiedad me permite calcular fácilmente la probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo".

Cuidado con las desigualdades en las variables discretas.

Probabilísticamente NO es lo mismo '≤' que '<' y '≥' que '>'

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

EJEMPLO

Experimento Aleatorio: Lanzamiento de dos dados.

La función de distribución de la v.a discreta

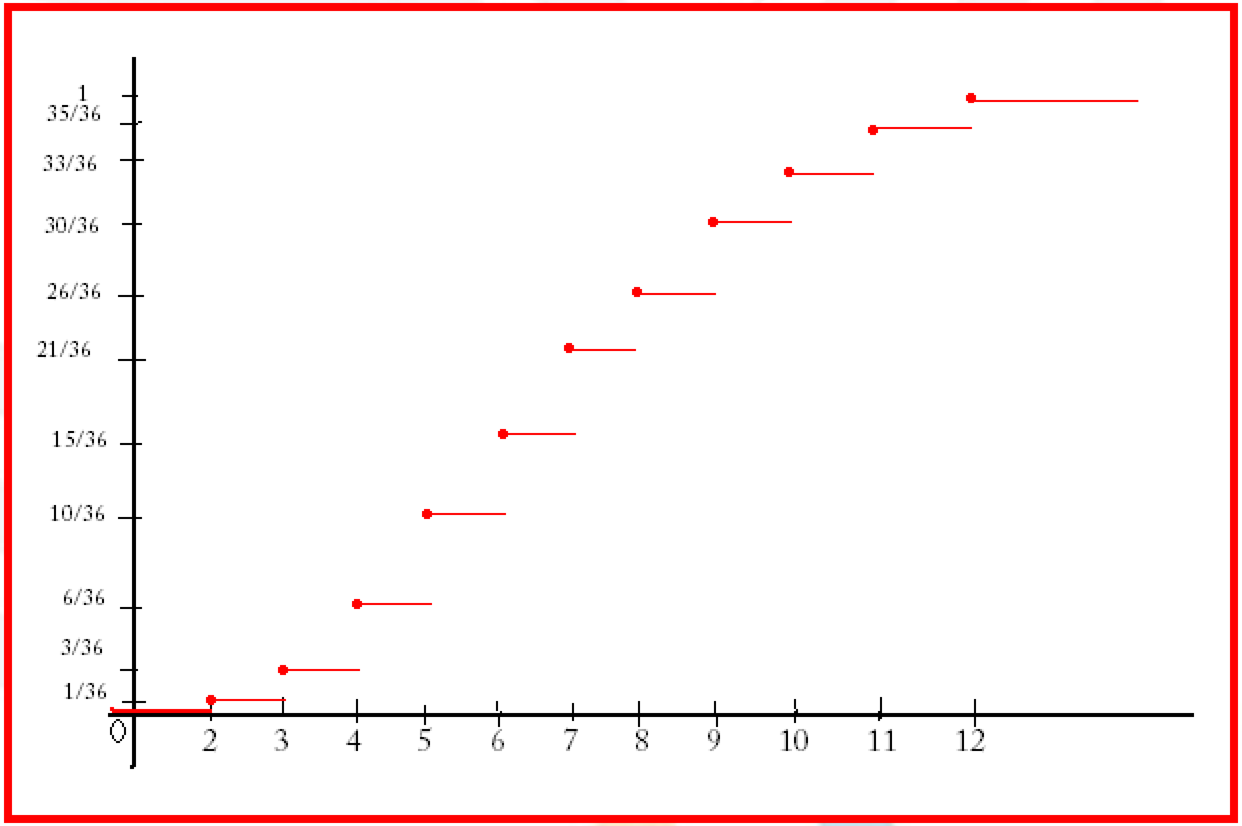
X= Suma de las puntuaciones de ambos dados

viene dada en la siguiente tabla:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F(xi)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

EJEMPLO

La representación gráfica de esta función de distribución es:



¡Atención! Gráfica escalonada

MEDIA Y VARIANZA

El valor esperado, esperanza o media de una variable aleatoria discreta se define como:

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \mu}$$

La varianza de una variable aleatoria discreta se define como:

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 = \sigma^2}$$

En estas expresiones se ha sustituido la frecuencia relativa, que se usaba en el caso de los parámetros muestrales correspondientes, por la probabilidad.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

EJEMPLO

Experimento Aleatorio: Lanzamiento de dos dados.

Variable Aleatoria: X= Suma de las puntuaciones de ambos dados

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob. Pi	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + \ldots + 12\cdot\frac{1}{36} = 7 \text{ puntos}$$

$$Var(X) = \left(2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + \ldots + 12^2\frac{1}{36}\right) - (7)^2 = 5{,}83 \ puntos^2$$

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

A los experimentos aleatorios en los que sólo se pueden dar dos resultados posibles (éxito - fracaso) se denominan experimentos o pruebas de Bernoulli.

Ejemplos de pruebas de Bernoulli:

- Lanzar un dado y observar si el resultado es par.
- Lanzar una moneda y observar si el resultado es cruz.
- Observar si una pieza fabricada por una determinada máquina es defectuosa.
- Observar si un recién nacido es varón.
- Observar si un accidente de tráfico tiene resultado de muerte.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Dada una prueba de Bernoulli, la v.a X que toma el valor 1 si se presenta éxito y el valor 0 si se presenta fracaso, diremos que se distribuye según una distribución de Bernoulli:

$$\boxed{X \rightarrow Be(p)}$$

X	0	1
P(X)	1-p	p

E(X) = p

Var(X) = p(1-p)

p : probabilidad de obtener éxito en el experimento

1-p : probabilidad de obtener fracaso en el experimento.

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

EJEMPLO

Si un proceso de fabricación produce un 2% de elementos defectuosos y llamamos éxito el resultado de obtener un producto correcto, entonces la v.a:

X= Observar si el producto es correcto

sigue una distribución de Bernoulli, es decir, $\boxed{X \rightarrow Be(p = 0.98)}$

X	0	1
P(X)	0.02	0.98

$E(X) = p = 0.98$

$Var(X) = p(1-p) = 0.98 \cdot 0.02 = 0.0196$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Si una prueba de Bernoulli, se realiza consecutivamente n veces, de forma independiente y siempre en las mismas condiciones que la primera vez puede interesarnos conocer el número total de éxitos conseguidos.

En una prueba de Bernoulli, la variable aleatoria:

X= Nº de éxitos aparecidos en n pruebas.

decimos que sigue una distribución Binomial de parámetros n y p.

$$\boxed{X \rightarrow B(n, p)}$$

p : probabilidad de obtener éxito en cada prueba.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La **función de probabilidad** de la distribución Binomial viene dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k} (1 - p)^{n-k}$$

n : número de veces que se realiza el experimento.
p : probabilidad de éxito en cada prueba.
1-p : probabilidad de fracaso en cada prueba.
k : Nºde éxitos al que queremos calcular la probabilidad.

¡Atención! → Rango de k: 0, 1,…,n

La **media y la varianza** de la distribución Binomial son:

$$E(X) = n\,p$$

$$Var(X)=n\,p(1-p)$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO

En un proceso de fabricación industrial se producen un 12% de piezas defectuosas.
¿Cuál es la probabilidad de que de un lote de 20 piezas resulten defectuosas al menos 3?

Definimos la variable : X="Nº de piezas defectuosas en un lote de 20"

$$\boxed{X \rightarrow B(20; 0.12)}$$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3] = 1 - [P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]] = \mathbf{0.43688}$$

$$P[X = 0] = \binom{20}{0} (0.12)^0 (0.88)^{20} = 0.07756$$

$$P[X = 1] = \binom{20}{1} (0.12)^1 (0.88)^{19} = 0.21153$$

$$P[X = 2] = \binom{20}{2} (0.12)^2 (0.88)^{18} = 0.27403$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

En una proceso de Bernoulli, la variable aleatoria:

X= Nº de prueba en la que aparece el primer éxito.

decimos que sigue una distribución Geométrica de parámetro p.

$$\boxed{X \rightarrow Ge(p)}$$

p : probabilidad de obtener éxito en cada prueba.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

La **función de probabilidad** de la distribución Geométrica viene dada por:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

p : probabilidad de éxito en cada prueba.
q = 1-p : probabilidad de fracaso en cada prueba.
k : Nº de intentos necesarios para conseguir el primer éxito.

¡Atención! → Rango de k: 1, 2,…

La **media y la varianza** de la distribución Geométrica son:

$$E(X) = 1/p$$

$$Var(X) = q/p^2$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

EJEMPLO

En un proceso de fabricación industrial se producen un 12% de piezas defectuosas.
¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario fabricar 8 piezas hasta encontrar la primera pieza defectuosa?

Definimos la variable : Y=" Nº de piezas que se necesitan fabricar hasta encontrar la primera defectuosa"

$$\boxed{Y \rightarrow Ge(0.12)}$$

$$P[Y = 8] = (0.88)^7 (0.12) = \mathbf{0.049}$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

EJEMPLO

¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario fabricar más de 3 piezas hasta encontrar la primera pieza defectuosa?

$$P[Y > 3] = 1 - P[Y \le 3] = 1 - [P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3]] = \mathbf{0.6815}$$

$$P[Y = 1] = 0.12$$

$$P[Y = 2] = (0.88)(0.12) = 0.1056$$

$$P[Y = 3] = (0.88)^2(0.12) = 0.0929$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

En una proceso de Bernoulli, la variable aleatoria:

X= Nº de pruebas que son necesarias hasta obtener r éxitos.

decimos que sigue una distribución Binomial Negativa de parámetros p y r.

$$\boxed{X \rightarrow BN\ (r\,,\ p)}$$

p : probabilidad de obtener éxito en cada prueba.

r : número de éxitos que se quieren conseguir.

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

La **<u>función de probabilidad</u>** de la distribución Binomial Negativa viene dada por:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r\cdot(1-p)^{k-r}$$

p : probabilidad de éxito en cada prueba.
q=1-p : probabilidad de fracaso en cada prueba.
r : número de éxitos que se quieren conseguir.
k : número de intentos necesarios para conseguir r éxitos.

¡Atención! → Rango de k: r, r+1,…

La **<u>media y la varianza</u>** de la distribución Binomial Negativa son:

$$E(X) = r/p$$

$$Var(X) = rq/p^2$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

EJEMPLO

En un proceso de fabricación industrial se producen un 12% de piezas defectuosas.
¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario fabricar entre 40 y 42 piezas para conseguir 5 piezas defectuosas?

Definimos la variable : T="Nº de piezas que se necesitan fabricar hasta encontrar la 5ª defectuosa"

$$\boxed{T \rightarrow BN(5;0.12)}$$

$$P[40 \le T \le 42] = P[T=40] + P[T=41] + P[T=42] = \mathbf{0.06839}$$

$$P[T=40] = \binom{39}{4}(0.12)^5(0.88)^{35} = 0.02333$$

$$P[T=41] = \binom{40}{4}(0.12)^5(0.88)^{36} = 0.02281$$

$$P[T=42] = \binom{41}{4}(0.12)^5(0.88)^{37} = 0.02225$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

- Un modelo o variable con distribución Hipergeométrica surge cuando medimos el nº de éxitos obtenidos al realizar n extracciones sin reemplazamiento de una población de tamaño N, donde M individuos presentan una característica determinada (éxitos) y los restantes N-M individuos no presentan dicha característica (fracasos).

- La distribución Hipergeométrica representa una variante de la distribución Binomial cuando no podemos suponer que las pruebas de Bernoulli son independientes.

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Si se tiene un conjunto con N elementos, M de una clase y N-M de otra, y se extraen n de ellos sin reemplazamiento, la probabilidad de extraer k elementos de la primera clase es:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Decimos que la variable aleatoria:

X= Nº de elementos obtenidos de la primera clase

sigue una distribución hipergeométrica de parámetros N, M y n.

$$\boxed{X \rightarrow H(N, M, n)}$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Si llamamos p= M/N, la **media y la varianza** de la distribución Hipergeométrica son:

$$\boxed{\begin{gathered} E(X) = np \\ Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot np(1-p) \end{gathered}}$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

EJEMPLO

En un lote de 50 piezas hay 10 defectuosas. Si elegimos al azar 6 piezas: ¿Cuál es la probabilidad de que 2 sean defectuosas?

Definimos la variable : X="Nº de piezas defectuosas extraídas"

$$\boxed{X \rightarrow H(50;10;6)}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{40}{4}}{\binom{50}{6}}=\frac{45\cdot 91390}{15890700}=\mathbf{0.2588}$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

EJEMPLO

Si elegimos al azar 6 piezas:
¿Cuál es la probabilidad de que menos de 2 sean defectuosas?

$$P[X < 2] = P[X = 0] + P[X = 1] = 0.24159 + 0.41408 = \mathbf{0.65567}$$

$$P[X = 0] = \frac{\binom{10}{0}\binom{40}{6}}{\binom{50}{6}} = 0.24159$$

$$P[X = 1] = \frac{\binom{10}{1}\binom{40}{5}}{\binom{50}{6}} = 0.41408$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

EJEMPLO

¿Cuál es el número de piezas defectuosas que se espera obtener cuando elegimos al azar 15 piezas?

Definimos la variable : X=”Nº de piezas defectuosas extraídas”

$$\boxed{X \rightarrow H(50;10;15)}$$

$$E(X) = n \cdot p = n \cdot \frac{M}{N} = 15 \cdot \frac{10}{50} = 3$$

El nº medio de piezas defectuosas que se obtendrá al extraer 15 piezas será 3.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson constituye una familia de distribuciones de probabilidad que tienen un papel muy importante en la estadística.

Situaciones empíricas que se rigen por un comportamiento de tipo Poisson:

- nº de llamadas telefónicas que recibimos en una hora.
- nº de faltas de ortografía que se producen en un texto.
- nº de nacimientos en un día.
- nº de averías de una máquina en un año.

Estas variables describen el número de veces que ocurre un suceso "raro" o "poco frecuente" por unidad de tiempo, longitud, etc.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Si llamamos λ = nº medio de ocurrencias del suceso "raro", entonces la variable aleatoria:

X= Nº de veces que ocurre un suceso "raro" por unidad de tiempo, longitud, etc.

decimos que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ .

$$\boxed{\begin{array}{c} X \rightarrow P(\lambda) \\ \lambda > 0 \end{array}}$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La **<u>función de probabilidad</u>** de la distribución de Poisson viene dada por:

$$P[X = k] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!}$$

¡Atención! → Rango de k: 0, 1,…

La **<u>media y la varianza</u>** de la distribución de Poisson son:

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

EJEMPLO

El promedio de llamadas telefónicas atendidas en la centralita de una cierta Facultad es de 36 llamadas por hora. Calcular la probabilidad de que en un periodo de 5 minutos:

a) Se atiendan 5 llamadas
b) Se atiendan más de 2 llamadas

¡Ojo!

Una variable Poisson queda definida por una determinada unidad de tiempo y por el término medio de llegadas en la misma.

λ = 36 llamadas / hora
Llegadas en una hora P(36)

λ = 3 llamadas / 5 Minutos
Llegadas en 5 minutos P(3)

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

EJEMPLO

X="Nº de llamadas atendidas en 5 minutos"

λ = nº medio de llamadas atendidas en 5 minutos = 3

$$\boxed{X \rightarrow P(3)}$$

a) Probabilidad de que se atiendan 5 llamadas

$$P[X = 5] = \frac{e^{-3}3^{5}}{5!} = \mathbf{0{,}100819}$$

b) Probabilidad de que se atiendan más de 2 llamadas

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \left[\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!}\right] = \mathbf{0'57681}$$

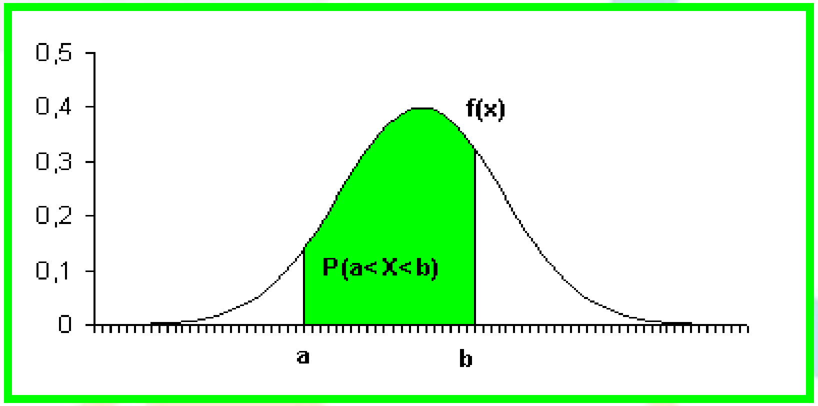
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Las variables continuas quedan determinadas cuando conocemos cómo se “distribuye” la probabilidad entre los posibles valores que tome.

Para determinar la probabilidad de cada posible intervalo de valores utilizaremos la función de densidad.

FUNCIÓN DE DENSIDAD

La **<u>función de densidad</u> f(x)** de una variable aleatoria continua es una expresión matemática que permite determinar la probabilidad de cada posible intervalo de valores a través del área que encierra la curva entre los límites del intervalo.



Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

FUNCIÓN DE DENSIDAD

Las propiedades que debe cumplir f(x) para que pueda ser considerada una función de densidad de una variable aleatoria continua son las siguientes:

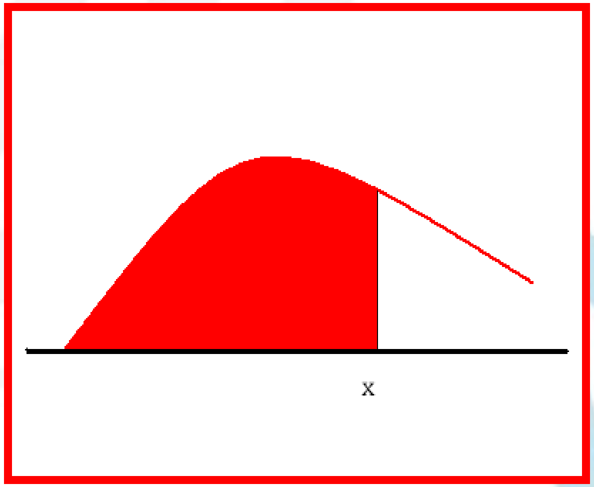
$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

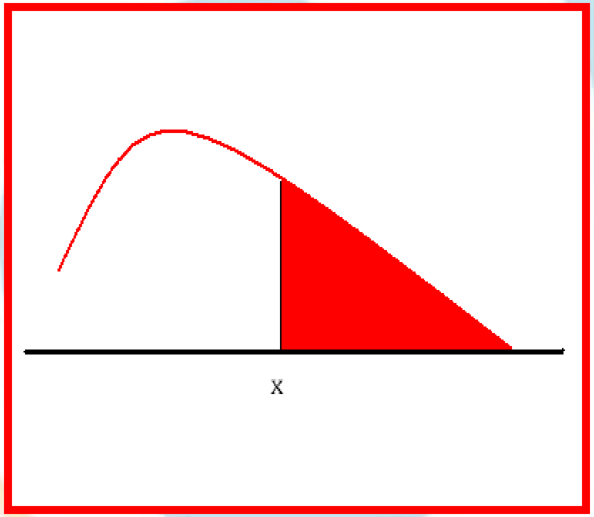
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

¿CÓMO UTILIZAR f(x) PARA CALCULAR PROBABILIDADES?

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$



$$P(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt$$

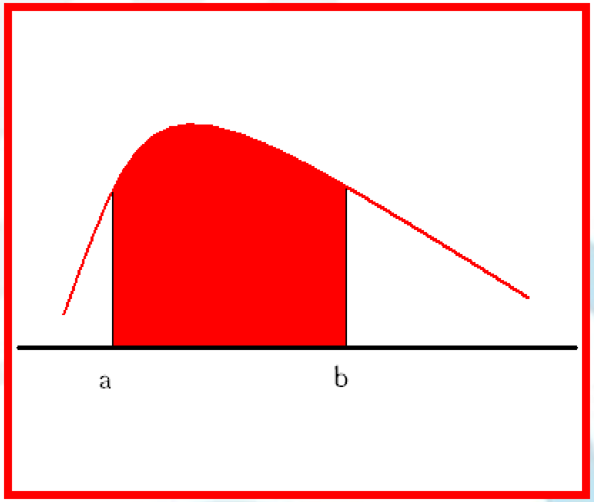


Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

¿CÓMO UTILIZAR f(x) PARA CALCULAR PROBABILIDADES?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$



¡IMPORTANTE!

En v.a continuas la probabilidad de un punto aislado siempre es 0

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

- La función de distribución de una variable aleatoria se corresponde con el concepto de frecuencia relativa acumulada. La función de distribución, F(x), se define:

$$\boxed{F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

Por tanto, la función de distribución de una variable aleatoria continua puede ser obtenida a partir de la función de densidad f(x)

- Recíprocamente, la función de densidad f(x) de una variable aleatoria continua puede ser obtenida a partir de la función de distribución F(x).

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Son las **mismas propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria discreta** dadas en la **diapositiva 9**.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Para una variable continua, el hecho de que un valor tenga probabilidad cero conduce a una mayor flexibilidad:

1) $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

2) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < x < b) = F(b)-F(a)$

3) $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a)$

Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

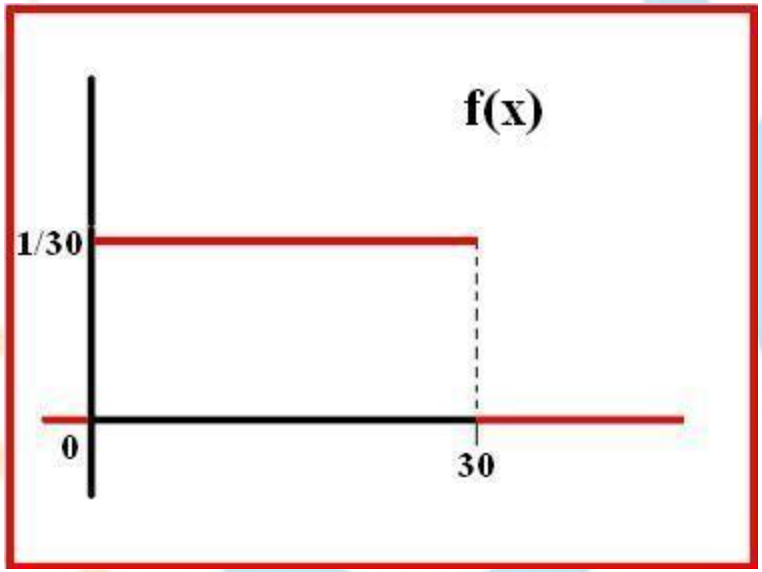
EJEMPLO

Sea X = tiempo de espera a un amigo entre las 10:00h y las 10:30h, suponiendo que el amigo llega con la misma probabilidad en cada instante del intervalo.

X es una v.a continua. Rango de valores →[0min.,30min.]

Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/30 & \text{si } 0 \le x \le 30 \\ 0 & \text{si } \quad \text{c. c.} \end{cases}$$



VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

EJEMPLO

Sea X = tiempo de espera a un amigo entre las 10:00h y las 10:30h, suponiendo que el amigo llega con la misma probabilidad en cada instante del intervalo.

X es una v.a continua. Rango de valores →[0min.,30min.]

Función de Disribución

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{30} dt = \frac{x}{30}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/30 & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ 1 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

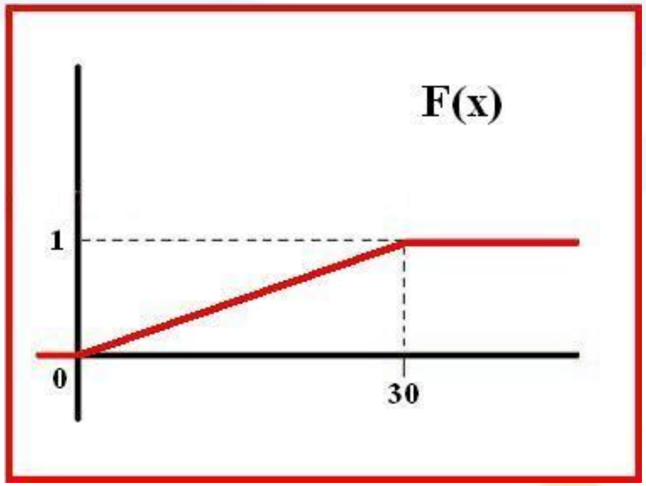
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

EJEMPLO

Sea X = tiempo de espera a un amigo entre las 10:00h y las 10:30h, suponiendo que el amigo llega con la misma probabilidad en cada instante del intervalo.

X es una v.a continua. Rango de valores →[0min.,30min.]

¿Probabilidad de esperar más de 5 min?



$$P(X > 5) = 1 - F(5) = \frac{25}{30}$$

Escuela Superior de Ingeniería

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

MEDIA Y VARIANZA

El valor esperado, esperanza o media de una variable aleatoria continua se define como:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f(x)dx = \mu}$$

La varianza de una variable aleatoria continua se define como:

$$\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \sigma^2}$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

EJEMPLO

Sea X = tiempo de espera a un amigo entre las 10:00h y las 10:30h, suponiendo que el amigo llega con la misma probabilidad en cada instante del intervalo.

X es una v.a continua. Rango de valores →[0min.,30min.]

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{30} x \cdot \frac{1}{30} dx = \frac{1}{30} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{30} = 15 \text{ minutos}$$

$$Var(X) = \int_0^{30} x^2 \cdot \frac{1}{30} dx - (15)^2 = \frac{1}{30} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{30} - (15)^2 = 75$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En un proceso de Poisson con λ = nº medio de sucesos acontecidos por unidad de tiempo, la variable aleatoria:

T= Tiempo transcurrido entre dos sucesos consecutivos.

decimos que sigue una distribución Exponencial de parámetro λ .

$$\boxed{\begin{array}{c} T \rightarrow Exp(\lambda) \\ \lambda > 0 \end{array}}$$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La **función de densidad** para una Exponencial viene dada por:

$$f(x) = / e^{- / x} \qquad x > 0 \qquad / > 0$$

La **función de Distribución** para una Exponencial viene dada por:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

La **media y la varianza** de la distribución Exponencial son:

$$E(X) = 1/\lambda$$

$$Var(X) = 1/\lambda^2$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

EJEMPLO

El tiempo medio transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos al departamento de ventas de un concesionario de una determinada marca de automóviles es de 20 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos no supere la media hora.

T=”Tiempo transcurrido (en min) entre la llegada de dos clientes consecutivos ”

E(T)= tiempo medio transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos = 20 min

$$E(T) = {}^{1}\!/_{\lambda} = 20 \rightarrow \lambda = {}^{1}\!/_{20} = 0.05$$

$$\boxed{T \rightarrow Exp(0.05)}$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

EJEMPLO

a) La probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos no supere la media hora.

$$P(T < 30) = F(30) = 1 - e^{-0.05 \cdot 30} = \mathbf{0.77687}$$

b) La probabilidad de que el nº de clientes que entren en el intervalo de una hora sea al menos 4.

Tenemos que λ = 0.05 = nº medio de clientes que llegan al concesionario cada minuto. Por tanto, el nº medio de clientes que llegan en una hora será:

$$\lambda = 0.05 \cdot 60 = 3$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

EJEMPLO

b) La probabilidad de que el nº de clientes que entren en el intervalo de una hora sea al menos 4.

La variable aleatoria que ahora nos interesa es:

X= Nº de clientes que llegan cada hora al concesionario

$$\boxed{X \rightarrow P(3)}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \left[\frac{e^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} + \frac{e^{-3}3^{3}}{3!}\right] = \mathbf{0.3528}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Es el modelo de distribución de probabilidad continua más importante. Son muchos los experimentos y fenómenos que pueden ser modelizados por esta distribución.

La distribución Normal explica:

- ❑Comportamientos biológicos.
- ❑Errores de medidas.
- ❑Medidas biológicas: alturas, pesos, etc.

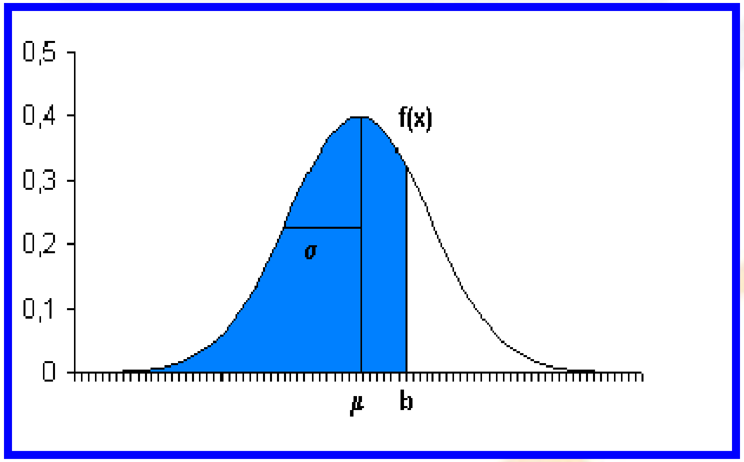
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

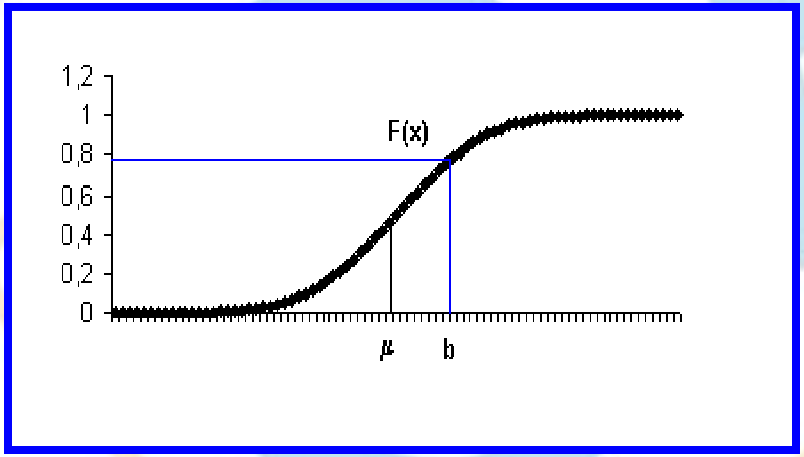
DISTRIBUCIÓN NORMAL

Decimos que una variable aleatoria X se distribuye según una Normal de media μ y de desviación típica σ > 0, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Se representará por: $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$





Escuela Superior de Ingeniería

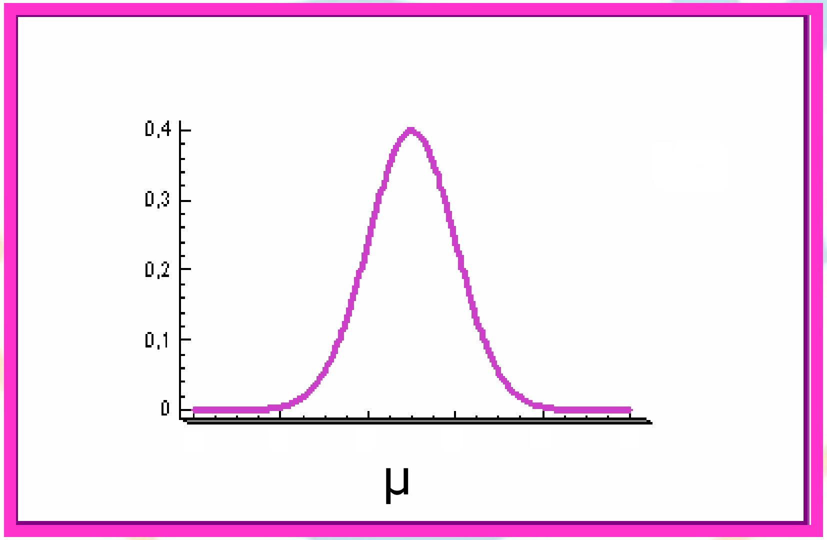
DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

1) f(x) tiene un máximo absoluto en μ.
2) f(x) es simétrica respecto de μ.
3) f(x) tiene forma de campana, conocida como campana de Gauss.
4) μ y σ son parámetros.
5) La media, la moda y la mediana coinciden.

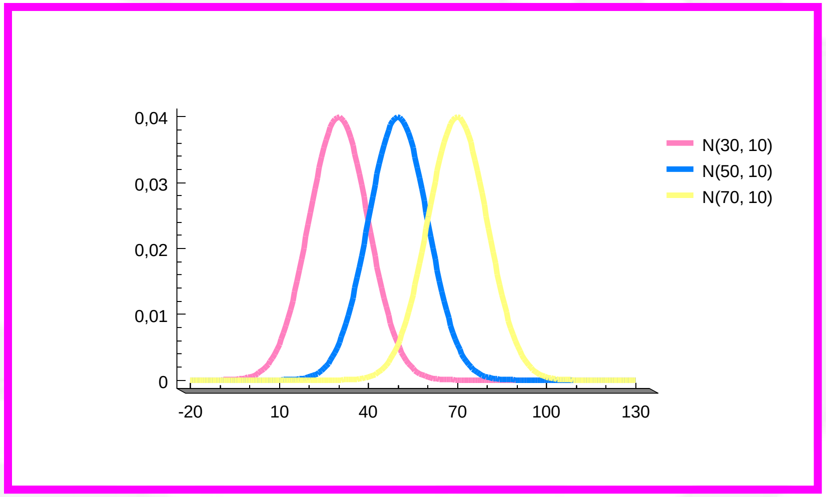
Observación

μ=E(X)= término medio de X
μ= moda –Máxima Densidad-
μ= mediana –Simetría-



DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

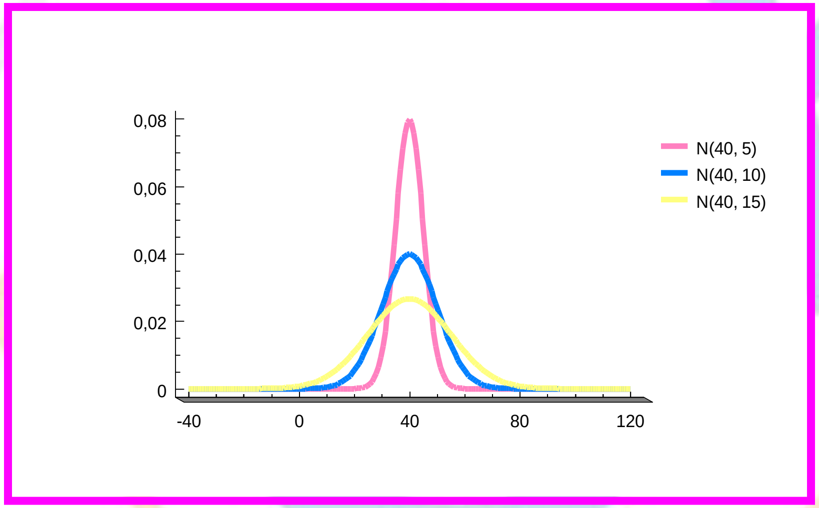
DISTRIBUCIÓN NORMAL



- Si cambiamos el valor medio μ la curva se traslada.

- Si σ aumenta, mayor dispersión y la curva se aplana, menor concentración alrededor de μ.

- Si σ disminuye, menor dispersión, más concentración alrededor de μ.



DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON X→N(μ,σ)

Para calcular probabilidades tendremos que evaluar la función de Distribución, es decir, necesitaremos calcular:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

F(x) no se puede obtener explícitamente, hay que obtenerla por aproximación mediante *"Métodos numéricos de integración"*.

Para subsanar este inconveniente podemos:

1) Tipificar
2) Usar software estadístico

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON $X \rightarrow N(\mu,\sigma)$

- Para calcular probabilidades con la Normal, utilizaremos unas **Tablas Estadísticas**, donde vienen los valores de la Función de Distribución de la N(0, 1).

- Previamente, habrá que **tipificar** la variable $N(\mu,\sigma)$ que estemos tratando, es decir, pasar a una N(0, 1)

$$\boxed{X \rightarrow N(\mu,\sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1)}$$

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO

Sea X→N (60,5) , calcula las siguientes probabilidades:

P(X=60)

$$P(X = 60) = \mathbf{0}$$

Probabilidad Puntual en una variable continua

P(X >50)

$$P(X > 50) = P\left(Z > \frac{50-60}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2)$$

Tipificación

N(0,1) es simétrica respecto a la media

Escuela Superior de Ingeniería

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO

$P(X > 50) = P(Z < 2) = \mathbf{0.9772}$

Tabla Estadística de N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8655	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO

$P(55 < X < 62)$

$$P(55 < X < 62) = P\left(\frac{55-60}{5} < Z < \frac{62-60}{5}\right) = P(-1 < Z < 0.4) =$$

Tipificación

$$= P(Z < 0.4) - P(Z < -1) = P(Z < 0.4) - P(Z > 1) =$$

P (a < x < b)= F(b)-F(a)

N(0,1) es simétrica respecto a la media

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJEMPLO

$$= P(Z < 0.4) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0.6554 - (1 - 0.8413) = \mathbf{0.4967}$$

Probabilidad del suceso contrario

Tabla Estadística de N(0,1)

z	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	0.5080
0.1	0.5398	0.5438	0.5478
0.2	0.5793	0.5832	0.5871
0.3	0.6179	0.6217	0.6255
0.4	0.6554	0.6591	0.6628
0.5	0.6915	0.6950	0.6985
0.6	0.7257	0.7291	0.7324
0.7	0.7580	0.7611	0.7642
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
0.9	0.8159	0.8186	0.8212
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8655	0.8686
1.2	0.8849	0.8869	0.8888

DISTRIBUCIÓN NORMAL

EJERCICIO PROPUESTO

En una determinada ciudad, la cuota por contribuyente del impuesto municipal de vehículos de tracción mecánica sigue una distribución normal con media 30€ y desviación típica 12 €.

¿Qué porcentaje de contribuyentes paga una cuota comprendida entre 12€ y 24€?

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

APROXIMACIONES

Aproximación de una Binomial por una Normal

Si **n es suficientemente grande** y **np(1-p)>5**, entonces:

$$\boxed{B(n,p) \xrightarrow{n \to \infty} N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)}$$

Aproximación de una Poisson por una Normal

Si **λ es suficientemente grande, λ >10**, entonces:

$$\boxed{P(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} N(\lambda, \sqrt{\lambda})}$$

Aproximamos por el teorema central del límite

APROXIMACIONES

CORRECCIONES POR CONTINUIDAD

Para que la aproximación sea más precisa, cuando aproximo un comportamiento discreto con uno continuo, se utiliza un factor de corrección :

Binomial Poisson	Normal Aproximada
$P(X \geq k)$	$P(Y > k - 0'5)$
$P(X > k)$	$P(Y > k + 0'5)$
$P(X \leq k)$	$P(Y < k + 0'5)$
$P(X < k)$	$P(Y < k - 0'5)$
$P(X = k)$	$P(k - 0'5 < Y < k + 0'5)$

APROXIMACIONES

EJEMPLO

El porcentaje de fumadores en la población de estudiantes universitarios es del 35% en el caso de los varones y del 45% en el caso de las mujeres.

Calcular la probabilidad de que en un Colegio Mayor masculino con 225 estudiantes halla exactamente 80 fumadores.

X="Nº de fumadores varones de entre 225 estudiantes "

$$\boxed{X \to B(225;0.35)}$$

Como n=225 es suficientemente grande y np(1-p)=51.19 > 5, entonces:

$$\boxed{B(225;0.35) \longrightarrow N\left(78.75, \sqrt{51.19}\right)}$$

Escuela Superior de Ingeniería

APROXIMACIONES

EJEMPLO

$$P(X = 80) \approx P(79.5 < Y < 80.5) = P\left(\frac{79.5 - 78.5}{7.15} < Z < \frac{80.5 - 78.5}{7.15}\right) =$$

Corrección por continuidad

Tipificación

$$= P(0.1 < Z < 0.24) = P(Z < 0.24) - P(Z < 0.1) =$$

P (a < x < b)= F(b)-F(a)

Tabla Estadística N(0,1)

$$= 0.5948 - 0.5398 = \mathbf{0.055}$$

APROXIMACIONES

EJERCICIO PROPUESTO

El promedio de llamadas telefónicas atendidas en la centralita de una cierta Facultad es de 36 llamadas por hora. Calcular la probabilidad de que en un periodo de 3 horas:

a) Se atiendan más de 100 llamadas telefónicas.

b) El número de llamadas telefónicas esté comprendido entre 80 y 100, ambos valores inclusive.