Boletín del Tema VI: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

1. Calcula los autovalores y autovectores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$ de la que se sabe que el vector $(2, 0, -1)$ es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda = -1$. Calcula los restantes autovalores y autovectores.

3. Halla los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ sabiendo que admite como autovectores a $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$ y $(0, 1, -1)$.

4. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Hallar, para cada una de ellas, una matriz $P \in \mathcal{M}_3$ tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ sean matrices diagonales.

5. Sea las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Determinar el polinomio característico y los autovalores para cada una de las matrices. Estudiar si son o no diagonalizables, y para las que lo sean, determinar la expresión diagonal D, y la correspondiente matriz de paso P, de manera que $P^{-1}AP = D$.

6. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -a^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

   a) Hallar los autovalores de la matriz A.

   b) Hallar los autovectores asociados a dichos autovalores.

   c) Hallar el valor o valores de a para los cuales la matriz A es diagonalizable.

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

   a) Hallar el valor de a para que $\lambda = 3$ sea autovalor de A.

   b) Para $a = 2$:

      1) Hallar los autovalores y autovectores asociados a A.

      2) Estudiar si A es diagonalizable o no y, en caso afirmativo, hallar una matriz diagonal semejante a A y la matriz P correspondiente.

8. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Se pide:

   a) Calcular los autovalores de A.

   b) Averiguar para qué valor o valores de x la matriz A tiene un autovalor de multiplicidad 2. Sustituir x por estos valores y estudiar si es A diagonalizable.

   c) Estudiar para qué valores de x la matriz A tiene tres autovalores distintos.

9. Sea $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ una base del espacio vectorial real V. Sea f un endomorfismo de V del que se sabe:

   a) El vector $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4)$ es un autovector asociado a $\lambda = 1$,

   b) $\mathbf{e}_2$ es un vector propio asociado a $\lambda = 2$.

   c) $f(\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4) = (\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4), \qquad f(a\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_4) = b\mathbf{e}_2$

   Discute según los valores reales de a y b los valores y vectores propios de f y estudia su posible diagonalización.

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

    a) Estudiar para qué valor o valores de a la matriz A es diagonalizable.

    b) Para $a = 2$:

       1) Hallar los autovalores y autovectores asociados a la matriz A.

       2) Hallar una matriz cuadrada $P \in \mathcal{M}_3$ tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

    a) Calcula los valores de a para los que A es diagonalizable.

    b) Para dichos valores de a, calcula los autovalores y autovectores de A^{-1}.

12. Sea f un endomorfismo de R^3 del que se sabe:

    a) El núcleo de f está engendrado por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$

    b) $f(0,2,1) = (3,-3,0)$

    Encuentra una base de R^3 en la que la matriz fe f sea diagonal.

13. Siendo $\alpha \in R$, calcula los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+3 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha+3 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha-1 & \alpha+1 & \alpha-1 \\ -\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

    Calcula la dimensión de los subespacios propios, según el valor que tome α. Estudia si la matriz es diagonalizable para algún valor de α.

14. Los autovalores de una matriz simétrica A, de orden tres, son $1, -2$ y 3 y los subespacios propios asociados son $V(1) = L\{(1,1,-1)\}$, $V(-2) = L\{(0,1,1)\}$. Obtener una base para $V(3)$ y averiguar cuál es la matriz A.

15. Sea $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ una base del espacio vectorial R^4 y sea $B' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ una base del espacio vectorial R^2. Sea $f \in \mathcal{L}(R^4, R^2)$ de la que se sabe:

    a) $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

    b) $f(\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$

    c) Las ecuaciones del núcleo de f son $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$

    Sea $g \in \mathcal{L}(R^2, R^4)$ que en las bases dadas tiene por matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

    Diagonaliza el endomorfismo $g \circ f \in End(R^4)$ y encuentra una base formada por vectores propios.

16. Encontrar una matriz cuadrada de orden dos cuyos autovalores sean 1 y 2 tal que $V(1) = L\{(1,1)\}$ y $V(2) = L\{(1,0)\}$.

17. Determina α y β, sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

    tiene dos autovalores dobles y es diagonalizable.

18. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

    encuentra dos matrices ortogonales P y Q tales que $P^{-1}AP$ y $Q^{-1}BQ$ sean matrices diagonales.

19. Sea f un endomorfismo de R^4 que verifica:

    - El vector $(1,-1,0,0)$ es un autovector correspondiente al valor propio $\lambda = 2$.
    - El vector $(1,1,0,0)$ es un vector propio correspondiente al autovalor $\lambda = -2$.
    - $f(\mathbf{e}_3) = a\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad f(\mathbf{e}_4) = b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_4$

    siendo $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ la base canónica de R^4.
    Sea g otro endomorfismo de R^4 que verifica:

    - $g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_3, \quad g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_4$
    - El núcleo de g tiene por ecuaciones implícitas respecto de B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

    Se cumple también que la aplicación compuesta $g \circ f$ tiene 2 autovalores dobles y es diagonalizable.

    a) Determina la matriz asociada a $g \circ f$ en la base B y encuentra una base de R^4 respecto de la cual dicha matriz sea diagonal.

20. Sea f un endomorfismo de R^4 cuya matriz respecto a la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha - 1 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 1-\alpha & \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

    a) Estudia, según los valores de α, la posible diagonalización de f

    b) Cuando f sea diagonalizable, encuentra una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.