# RESPUESTAS DEL EXAMEN DEL 4–II–2009

**1.** Hallar todos los complejos $z$ tales que $z, \frac{1}{z}$ y $1-z$ tienen el mismo módulo.

*Solución:*Al ser $|\frac{1}{z}| = |z|$ y sabiendo que el módulo del cociente es el cociente de los módulos, tenemos:

$$\frac{1}{|z|} = |z|.$$

De aquí, resulta: $|z|^2 = 1$, luego $|z| = 1$, ya que no es posible que $|z| = -1$. Los complejos que buscamos tienen, pues, módulo 1.

Sea $z = a + bi$; al tener módulo 1, debe ser: $a^2 + b^2 = 1$.

Por otra parte: $1 - z = 1 - a - bi$. Y: $|1-z|^2 = (1-a)^2 + b^2 = 1$. Comparando las dos ecuaciones que satisfacen $a$ y $b$ resulta:

$$(1-a)^2 = a^2.$$

Desarrollando el primer miembro de la igualdad anterior, tenemos: $1 - 2a + a^2 = a^2$. Resolviendo esta ecuación tenemos: $a = \frac{1}{2}$. Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 1$, obtenemos que $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o $b_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hemos obtenido así las dos soluciones que tiene el problema:

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como ejercicio, el lector debería comprobar que efectivamente $z_1$ y $z_2$ satisfacen las condiciones del problema.

**2.** Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n+4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+4}}; \quad b) \lim_{n\to\infty} \frac{8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n+1)^2}{n^3};$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n+4}.$$

*Soluciones:* a) Cuando $n \to \infty$, los ángulos, medidos en radianes, $\frac{\pi}{n+4}$ y $\frac{\pi}{2n+4}$ tienden ambos a cero; por tanto se verifican las siguientes equivalencias de infinitésimos:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n+4} \sim \frac{\pi}{n+4}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+4} \sim \frac{\pi}{2n+4}.$$

Como el límite es de un cociente podemos sustituir el seno por su expresión equivalente, y lo mismo ocurre con la tangente. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n+4}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n+4}}{\frac{\pi}{2n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n+4} = 2.$$

En el cálculo anterior se termina con el límite de un cociente de polinomio: recuérdese que dicho límite es el cociente de los términos de mayor orden.

b) Este límite es un caso típico de aplicación del criterio de Stolz, porque el numerador de la fracción tiene un número variable de sumandos: si $n$ vale cinco, hay cinco sumandos; si $n = 100$,cien,etc.

Al ser: $B_n = n^3 < (n+1)^3 = B_{n+1}$, y $B_n \to +\infty$, podemos aplicar dicho criterio, porque éstas son las únicas condiciones que exige: *el denominador debe ser monótono creciente y divergente.*

Si $A_n = 8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n-6)^2 + (7n+1)^2$ y $A_{n-1} 8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n-6)^2$, entonces:

$$A_n - A_{n-1} = (7n+1)^2 = 49n^2 + 14n + 1.$$

Si $B_n = n^3$ y $B_{n-1} = (n-1)^3$, entonces:

$$B_n - B_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = 3n^2 - 3n + 1.$$

Aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}},$$

tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^2 + 15^2 + 22^2 + \cdots + (7n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{49n^2 + 14n + 1}{3n^2 - 3n + 1} = \frac{49}{3}.$$

Para entender el resultado final, recordemos el siguiente resultado de la teoría:*el límite del cociente de dos polinomios del mismo grado es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.*

c) Si $n \to \infty$, $3n+4 \to +\infty$, y $\frac{n}{n+2} \to 1$, por lo que acabamos de decir. Es un límite, pues, del tipo $1^\infty$. La fórmula de este tipo de límites es:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)} \ (1^\infty).$$

Como $\frac{n}{n+2} - 1 = a_n - 1 = \frac{-2}{n+2}$, es:

# Asegura tu aprobado con nuestros cursos de cálculo

**CEUS es una empresa con mas de 50 años de experiencia en el sector de la educación y la formación lo que la hacen la opción ideal para recibir los cursos que está buscando en multitud de ámbitos.**

**Si está buscando algun tipo de curso en Cádiz, no dude en contactar con nosotros. Nuestro conocimiento del sector le ayudará a encontrar siempre la mejor opción gracias al asesoramiento que nuestra experiencia puede brindarle.**

**www.ceusformacion.com**

**99%**
satisfacción

CEUS
ONLINE

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n+4} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n+2}(3n+4)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-6n-8}{n+2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

**3.** Hallar el carácter de las siguientes series:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3} \quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

*Soluciones:* a) Al ser el término general de la serie de la forma $\frac{P(n)}{Q(n)}$ (cociente de dos polinomios en la variable $n$),el criterio que más rápidamente resuelve la cuestión es el de Pringsheim:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot a_n = L > 0,$$

pues basta mirar los grados de $P(n)$ y $Q(n)$ para encontrar el valor de $\alpha$;en nuestro caso, como el numerador es de primer grado y el denominador de tercero, $\alpha = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{n}{(n+1)^3} = 1.$$

Como $\alpha = 2 > 1$, *la serie converge.*

Si aplicamos el criterio del cociente se llega al caso dudoso; aplicando después el criterio de Raabe, se obtiene 2:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - a_n/a_{n-1}\right) = 2 > 1.$$

Luego la serie es convergente; haga el lector el cálculo indicado como ejercicio.

b) Como el término general tiene forma de potencia, aplicando el criterio de la raíz, tenemos:

$$R = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

La serie es, pues,*convergente.*

Otra forma de verlo es la siguiente: de ser $\frac{n}{n+1} < \frac{1}{2}$, resulta:

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < (\frac{1}{2})^n.$$

Luego la serie tiene los términos menores que los de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$, que converge por tener razón $1/2 < 1$. El primer criterio de comparación nos dice que la serie es convergente.

c) Por la forma del término general, resulta que, si $n \to \infty$, es:

$$\operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

Con esta equivalencia de infinitésimos establecida, es muy fácil calcular el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^{1/2} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}+2} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+2} = \\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1. \end{aligned}$$

El criterio de Pringsheim nos dice entonces que la serie es *divergente*, pues $\alpha = 1/2 < 1$.

El criterio del cociente es de aplicación dificultosa, y, además, nos llevaría al caso dudoso.

**4.** El polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(0, 1)$ tiene un punto extremo en $x = 2$, y un punto de inflexión para $x = 3$. Estudiar: a) los intervalos de crecimiento y decrecimiento; b) los máximos y mínimos relativos;c)los intervalos de concavidad y convexidad;d)los puntos de inflexión; e)máximo absoluto y mínimo absoluto en el intervalo $[0, 1]$.

*Soluciones:* Si la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(0, 1)$ será:

$$1 = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c.$$

Luego $c = 1$.Si tiene un punto extremo (máximo o mínimo relativo), la derivada primera se anulará en $x = 2$: la derivada es $y' = 3x^2 + 2ax + b$, y es:

$$3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0.$$

O sea:$4a + b = -12$.

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 3$, la derivada se anulará en él. La derivada segunda es: $y'' = 6x + 2a$ y es: $18 + 2a = 0$. Luego: $a = -9$. Sustituyendo en $4a + b = -12$, resulta: $b = -4a - 12 = 36 - 12 = 24$.

En consecuencia, la curva es:

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 1.$$

a) La derivada es: $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$. Las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$. Luego: $y' = 3(x-2)(x-4)$. Excluidos los valores 2 y 4 que anulan $y'$, todos los valores de $x$ se distribuyen en los tres intervalos:

$$(-\infty, 2), (2, 4), (4, +\infty).$$

Si $x < 2, x - 2 < 0, x - 4 < 0$, e $y' = 3(x-2)(x-4) > 0$. La función es, pues, *creciente en* $(-\infty, 2)$.

Si es $2 < x < 4$, es: $x - 2 > 0$ y $x - 4 < 0$. Luego: $y' = 3(x-2)(x-4) < 0$.La función es, pues, *decreciente en* $(2, 4)$.

Como ejercicio, vea el alumno que en $(4, +\infty)$ la función *es creciente*, por un razonamiento análogo a los dos anteriores.

b) En $x = 2$ la función derivada pasa de $+$ a $-$;luego, por el primer criterio de máximos y mínimos, *hay un mínimo relativo.*

En $x = 4$, la derivada pasa de $-$ a $+$;*luego tiene un máximo relativo* por el mismo criterio.

Usando el segundo criterio –el de la derivada segunda– se puede ver ésto también; hágalo el alumno como ejercicio.

c) La derivada segunda es: $y'' = 6x - 18 = 6(x-3)$. Para que $y'' = 6(x-3) > 0$, debe ser: $x - 3 > 0$ y $x > 3$. Análogamente, para que $y'' < 0$, debe ser $x < 3$. Luego *la función es cóncava en* $(3, +\infty)$ *y convexa en* $(-\infty, 3)$.

d) Al pasar de convexa a cóncava en $x = 3$, tiene en $x = 3$ un punto de inflexión. Como éste es el único punto donde sa anula la derivada segunda, no hay otros puntos de inflexión.

e) El intervalo $[0, 1]$ está incluido en $(-\infty, 2)$ *donde crece la función.* Luego el mínimo absoluto está en $x = 0$ y el máximo absoluto en $x = 1$:

$$y(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 1 = 0 = m$$
$$y(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 1 = 17 = M.$$

**5.** a)Enunciar y demostrar el teorema de Rolle. Interpretación geométrica.

b) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$.Sea $F(x)$ la función definida así:

$$F(x) = [f(a) - f(b)]x - [a - b]f(x).$$

Comprobar que $F(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle, y deducir el teorema de Lagrange: Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(x_0).$$

*Soluciones:* a)El teorema de Rolle dice lo siguiente:

*Si la función $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, siendo además $f(a)=f(b)$ existe un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Estudie el alumno la demostración en los apuntes.La interpretación geométrica es que hay un punto con tangente horizontal por tener la derivada nula.

b) Según el enunciado $f(x)$ es continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,b)$, luego:

$$F(x) = [f(a)-f(b)]x - [a-b]f(x)$$

también lo es, Pues $[f(a)-f(b)]x$ es continua y derivable para todo valor de $x$. Para que $F(x)$ cumpla el teorema de Rolle basta ver que: $F(a)=F(b)$:

$$F(a) = [f(a)-f(b)]a - [a-b]f(a) = \underline{af(a)} - af(b) - \underline{af(a)} + bf(a) = bf(a) - af(b).$$

$$F(b) = [f(a)-f(b)]b - [a-b]f(b) = (\mathbf{a}) - \underline{\mathbf{bf}(\mathbf{b})} - \mathbf{af}(\mathbf{b}) + \underline{\mathbf{bf}(\mathbf{b})} = \mathbf{bf}(\mathbf{a}) - \mathbf{af}(\mathbf{b}).$$

$F(x)$ cumple, pues, el teorema de Rolle. Existe, por tanto, $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$F(x_0) = 0.$$

Pero $F'(x) = [f(a)-f(b)]\cdot 1 - [a-b]f'(x) = [f(a)-f(b)] - [a-b]f'(x)$.

Luego: $F'(x_0) = 0 = [f(a)-f(b)] - [a-b]f'(x_0) = 0$.

Despejando $f'(x_0)$ tenemos:

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(x_0),$$

que es la expresión del teorema de Lagrange.

**6.** Por inducción completa,probar que la derivada enésima de $y = \cos x$ es:

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

*Solución:* La derivada primera de $y = \cos x$ es $y' = -\operatorname{sen} x$. Si aplicamos la fórmula $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, tenemos:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x.$$

Luego: $y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$, y la propiedad se cumple para $n = 1$.
Debemos probar que si $y^{h)} = \cos\left(x + h\frac{\pi}{2}\right)$, entonces:

$$y^{h+1)} = \cos\left(x + (h + 1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Para calcular la derivada de orden $h + 1$ basta derivar respecto $x$ la derivada de orden $h$;haciéndolo tenemos:

$$y^{h+1)} = -\operatorname{sen}\left(x + h\frac{\pi}{2}\right),$$

porque la derivada del coseno es el menos seno, y la derivada de $x + h\frac{\pi}{2}$ respecto de $x$ es 1; luego, por lo visto para $n = 1$:

$$y^{h+1)} = -\operatorname{sen}\left(x + h\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + h\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (h + 1)\frac{\pi}{2}\right),$$

y tenemos resuelto el problema.

**7.** Calcular los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2};\quad b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x + 1)} - \frac{1}{x}\right);\quad c)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(1 - \cos x)^{x-\frac{\pi}{2}}.$$

*Soluciones:* a) Si $x \to 0, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.
Si $t = e^x$, y $x \to 0$, entonces: $t = e^x \to e^0 = 1$. Por la equivalencia $\ln t \sim t - 1$, resulta:

$$\ln(e^x) = x \sim e^x - 1.$$

Aplicando ambas equivalencias, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/2x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

La regla de L'Hôpital también podría aplicarse, pero con más trabajo; hágalo el alumno como ejercicio.

b) Este límite es del tipo $\infty-\infty$;para transformarlo en otro más manejable, hacemos la diferencia de las dos fracciones:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}.$$

Como $\ln(1+x)\sim x$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital a la fracción del segundo miembro:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

Obsérvese que en la diferencia $x-\ln(1+x)$ no podemos sustituir $\ln(1+x)$ por $x$ porque ésto sólo puede hacerse en productos y cocientes; que es lo que se ha hecho en el denominador $x\ln(1+x)$.

c) Cuando $x\to\frac{\pi}{2}^+, \cos x\to\cos\frac{\pi}{2}=0, 1-\cos x\to 1$.

El exponente tiende a cero: $x-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.

Luego este límite no es ninguna indeterminación: es una potencia en que la base tiende a 1 y el exponente a cero; teniendo en cuenta que $1^0=1$, resulta:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(1-\cos x)^{x-\frac{\pi}{2}}=1^0=1.$$

**8.** a) Escribir la fórmula de Taylor para funciones.

b) Escribir el polinomio de grado 5 que mejor aproxima la función $y=\operatorname{sen}2x$ en $x=0$.

c) Aplicar el resultado anterior al límite: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}2x-2x}{x^3}$.

*Soluciones:* a) La fórmula de Taylor es, como puede verse en los apuntes, la siguiente:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{n)}(a)(x-a)^n}{n!} + T_n.$$

Nótese que aparecen en ella *el valor de la función en $x = a$ y los de las derivadas hasta el orden $n$; y que es necesario incluir el término complementario $T_n$.*

b) Calculemos el valor de la función $\operatorname{sen} 2x$ y de sus cinco primeras derivadas para $x = 0$:

$$y(0) = \operatorname{sen} 0 = 0, \quad y' = 2\cos 2x, \quad y'(0) = 2\cos 0 = 2, \quad y'' = -4\operatorname{sen} 2x,$$

$$y''(0) = -4\operatorname{sen} 0 = 0, \quad y''' = -8\cos 2x, \quad y'''(0) = -8\cos 0 = -8, \quad y^{iv)} = 16\operatorname{sen} 2x,$$

$$y^{iv)}(0) = 0, \quad y^{v)} = 32\cos 2x, \quad y^{v)}(0) = 32.$$

Poniendo estos valores en la fórmula hasta el grado quinto, tenemos:

$$\operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + T_5 = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + T_5.$$

O sea:

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2x - \tfrac{4x^3}{3} + \tfrac{4x^5}{15} + T_5.}$$

c) Del resultado anterior sacamos:

$$\operatorname{sen} 2x - 2x = -\frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + T_5.$$

Dividiendo por $x^3$ obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3} = -\frac{4}{3} + \frac{4x^2}{15} + \frac{T_5}{x^3}.$$

Cuando $x \to 0$, $\frac{4x^2}{15} \to 0$; y $\frac{T_5}{x^3} \to 0$, por ser el numerador un infinitésimo de orden 6, como mínimo, y el denominador de orden 3. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3} = -\frac{4}{3}.$$

La regla de L'Hôpital da el mismo resultado, como puede comprobar el alumno como ejercicio.