# Breve Repaso de las Ecuaciones de Recurrencia

Francisco Palomo Lozano e Inmaculada Medina Bulo

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos. Universidad de Cádiz.
Esc. Superior de Ingeniería de Cádiz. C/ Chile, s/n. 11003 Cádiz. España.
{francisco.palomo, inmaculada.medina}@uca.es

14 de octubre de 2002

## 1. Ecuaciones de recurrencia

**Definición 1.** Una *ecuación de recurrencia* (ER) de orden $k$ es una ecuación funcional

$$F(n, f_n, f_{n-1}, \ldots, f_{n-k}) = 0$$

con $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y $n \geq k$.

La incógnita, $f_n$, es una función; o mejor dicho una *familia de funciones* (como con las EDO).

*Ejemplos.*

$$\begin{aligned} & f_n - nf_{n-1} = 0 && (n \geq 1) \\ & f_n f_{n-1} = 2^n && (n \geq 1) \\ & f_n = f_{n-1} + f_{n-2} && (n \geq 2) \end{aligned}$$

Resolver una ER es, en general, imposible. Normalmente estaremos interesados en versiones más simples. Restringiremos la ecuación general para obtener otras más sencillas.

## 1.1. Relación con el cálculo de sumatorios y productorios

Las ER generalizan a los *sumatorios*:

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{i=0}^{n} h(i) && (n \geq 0) \\ f_{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} h(i) && (n \geq 1) \\ f_n - f_{n-1} &= h(n) && (n \geq 1) \end{aligned}$$

y también al *cálculo de productorios*:

$$\begin{aligned} f_n &= \prod_{i=0}^{n} h(i) && (n \geq 0) \\ f_{n-1} &= \prod_{i=0}^{n-1} h(i) && (n \geq 1) \\ \frac{f_n}{f_{n-1}} &= h(n) && (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ambas ER se completan con $f_0 = h(0)$.

## 1.2. Clasificación

**Definición 2.** Una ER es *lineal* (ERL) si tiene la siguiente forma:

$$f_n + g_1(n)f_{n-1} + \cdots + g_k(n)f_{n-k} = h(n)$$

**Definición 3.** Una ERL es *homogénea* si $h(n) = 0$.

**Definición 4.** Una ERL es *de coeficientes constantes* si $g_i(n) = a_i \in \mathbb{C}$.

Tipos más importantes de ER:

- ERL de coeficientes constantes homogénea
- ERL de coeficientes constantes no homogénea
- ERL de coeficientes no constantes

## 2. ERL de coeficientes constantes homogénea

$$f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = 0$$

Propiedades:

- Siempre tienen una *solución trivial*, que es la función $\theta_n = 0$:

$$\theta_n = 0 \implies \cdots \implies \theta_{n-k} = 0$$
$$\forall n \geq k \ (0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0)$$

- $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. $\theta_n$ es su elemento neutro.

Para resolver la ecuación hay que caracterizar el conjunto de funciones solución.

**Teorema 1.** *El conjunto de soluciones de una ERL de coeficientes constantes homogénea es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.*

*Demostración.* El conjunto de soluciones no está vacío ya que siempre contiene a la solución trivial $\theta_n$. Por lo tanto, basta comprobar que dadas dos soluciones, cualquier combinación lineal es también solución. □

*Nota.* Conque sólo existiera una solución particular no trivial, la solución general estaría formada por un número infinito de funciones (una familia de funciones).

**Proposición 1.** *Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ solución de una ERL de coeficientes constantes homogénea y de orden $k$ está determinada de forma única por los $k$ valores $f_0, \ldots, f_{k-1}$.*

*Demostración.* Despejando el término de mayor orden:

$$\begin{aligned}
f_n &= -a_1 f_{n-1} + \cdots - a_k f_{n-k} \\
f_{n-1} &= -a_1 f_{n-2} + \cdots - a_k f_{n-k-1} \\
&\cdots \\
f_{k+1} &= -a_1 f_k + \cdots - a_k f_1 \\
f_k &= -a_1 f_{k-1} + \cdots - a_k f_0
\end{aligned}$$

y por lo tanto $f_n$ queda determinado por los valores $f_0, \ldots, f_{k-1}$ para todo $n \geq k$. □

**Teorema 2.** *La dimensión del conjunto de soluciones de una ERL de coeficientes constantes homogénea y de orden $k$ es, precisamente, $k$.*

*Demostración.* Sea el conjunto de soluciones $B = \{b_0(n), \ldots, b_{k-1}(n)\}$ en el que los $b_i(n)$ vienen dados por:

$$\forall n < k \; b_i(n) = \delta_{in} \qquad\qquad (\delta \text{ de Kronecker})$$

Por la proposición 1, esto determina de manera única a los $b_i(n)$ como soluciones.

Pero $B$ es una base del conjunto de soluciones: basta comprobar que forma un sistema de generadores linealmente independiente.

Hemos encontrado una base de $k$ elementos, por lo tanto la dimensión del subespacio es $k$. □

Empleando este teorema, el problema se reduce a encontrar $k$ soluciones particulares linealmente independientes distintas de la trivial.

Así se obtiene una base del conjunto de soluciones y con ella la solución general.

Existen distintas técnicas de resolución, las principales son:

- **Método de la ecuación característica**
- Método matricial
- Método de la función generatriz

## 2.1. Método de la ecuación característica

Por la forma de la ecuación, $f_n = x^n$ podría ser una solución particular. Veamos:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$
$$x^{n-k}(x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k) = 0$$

Esta ecuación polinómica equivale al sistema:

$$\begin{cases} x^{n-k} = 0 \\ x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \end{cases}$$

La primera no nos interesa (sólo genera la solución trivial). La segunda se llama *ecuación característica*.

**Definición 5.** Se denomina *polinomio característico* a:

$$c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{C}$ las $k$ raíces de $c(x)$:

$$c(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)$$

*Nota.* Por el *teorema fundamental del Álgebra* todo polinomio de grado $k$ tiene exactamente $k$ raíces.

En general, puede haber raíces repetidas. Sean $r_1, \ldots, r_l$ las $l$ raíces *distintas* de $c(x)$ con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_l$:

$$c(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_l)^{m_l}$$

donde $m_1 + \cdots + m_l = k$.

Distinguiremos dos casos según todas las raíces sean o no simples.

### 2.1.1. Raíces simples

$B = \{r_1^n, r_2^n, \ldots, r_k^n\}$ es una base del conjunto de soluciones.

Basta ver que forman un sistema de generadores, o que son linealmente independientes, ya que la dimensión del conjunto de soluciones y $\text{card}(B)$ coinciden.

Una forma de comprobar que, por ejemplo, forman un sistema de generadores consiste en plantear un sistema infinito de ecuaciones que por la proposición 1 puede reducirse a:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = f_0 \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_k\lambda_k = f_1 \\ \cdots \\ r_1^{k-1}\lambda_1 + r_2^{k-1}\lambda_2 + \cdots + r_k^{k-1}\lambda_k = f_{k-1} \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

que es un *determinante de Vandermonde* o *vandermondiano*; ya que los $r_i$ son todos distintos, el determinante no es nulo.

Por lo tanto, las soluciones particulares forman una base y toda combinación lineal de ellas será solución. La solución general será pues:

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i^n$$

**Definición 6.** Los valores $f_0, \ldots, f_{k-1}$ se denominan *condiciones iniciales.*

Las dadas por

$$f_0 = \cdots = f_{k-1} = 0$$

se denominan *condiciones iniciales nulas.*

*Nota.* Una vez fijados los valores de las condiciones iniciales, estos determinan los parámetros libres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y por consiguiente una solución particular.

*Nota.* La solución de una ERL homogénea bajo condiciones iniciales nulas es la solución trivial.

*Ejemplo.* Se desea la solución general de:

$$t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2}$$

y la particular asociada a $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

$$c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

luego $B = \{2^n, 3^n\}$ y la solución general es:

$$t_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n$$

Cuando $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto la solución particular buscada es:

$$t_n = 3^n - 2^n$$

### 2.1.2. Raíces múltiples

Se demuestra que:

$$B = \{\underbrace{r_1^n, \ldots, n^{m_1-1} r_1^n}_{\text{por } (x-r_1)^{m_1}}, \ldots, \underbrace{r_l^n, \ldots, n^{m_l-1} r_l^n}_{\text{por } (x-r_l)^{m_l}}\}$$

es una base del conjunto de soluciones.

Al igual que antes, basta ver que forman un sistema de generadores, o que son linealmente independientes, ya que $\operatorname{card}(B) = k$.

La solución general es:

$$f_n = \sum_{i=1}^{l} p_i(n) r_i^n$$
$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{m_i-1} \lambda_{ij} n^j$$

*Ejemplo.* Se desea la solución general de:

$$t_n = 2t_{n-1} - t_{n-2}$$

y la particular asociada a $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

$$c(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

luego $B = \{1, n\}$ y la solución general es:

$$t_n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Cuando $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto la solución particular buscada es:

$$t_n = n$$

# 3. ERL de coeficientes constantes no homogénea

$$f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = h(n)$$

**Definición 7.** Dada una ecuación de este tipo, llamamos *ecuación homogénea asociada* a:

$$g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k} = 0$$

**Teorema 3.** *Si $f_n$ es una solución particular de la ecuación original y $g_n$ es la solución general de la homogénea asociada, entonces $f_n + g_n$ es la solución general de la primera.*

El problema está en hallar la solución particular. Esto depende de cómo sea $h(n)$.

En ocasiones, tiene una forma similar a la de $h(n)$ y se puede emplear el *método de los coeficientes indeterminados.*

Un caso bastante general y útil en el estudio de algoritmos es:

$$h(n) = \sum_{i=1}^{j} q_i(n) s_i^n$$

donde los $q_i(n)$ son polinomios de grado $m_i$ y los $s_i$ son todos distintos.

En tal caso, podemos formar un polinomio característico ficticio con el polinomio característico de la homogénea asociada y otro polinomio «aportado» por la solución particular:

$$c(x) = c_1(x)c_2(x)$$

Donde:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k \\ c_2(x) &= (x - s_1)^{m_1+1} \cdots (x - s_j)^{m_j+1} \end{aligned}$$

Sin embargo, la función resultante de este polinomio característico ficticio *no* es la solución general.

Los $j$ parámetros de la solución general aportados por $c_2(x)$ *no son libres*, ya que han de determinar una solución particular.

Estos parámetros pueden calcularse de dos formas:

- Sustituyendo la función obtenida en la ecuación original
- Calculando mediante las condiciones iniciales $j$ valores que deba cumplir la solución particular y completando con ellos el sistema de ecuaciones

*Ejemplo.* Se desea la solución general de:

$$t_n = t_{n-1} + 2$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= x - 1 \\ c_2(x) &= x - 1 \\ c(x) &= (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \end{aligned}$$

luego:

$$t_n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Pero $\lambda_2$ no es libre, sustituyendo:

$$\lambda_2 n = \lambda_2(n-1) + 2$$

se obtiene $\lambda_2 = 2$, con lo que la solución general es:

$$t_n = 2n + \lambda_1$$

## 4. ERL de coeficientes no constantes

No hay un método general de resolución, pero si es de primer orden se puede reducir a una equivalente de coeficientes constantes.

Sea:

$$f_n + g_1(n) f_{n-1} = h(n)$$

aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$f_n = G(n) u_n \qquad\qquad G(n) = \prod_{i=0}^{n} g_1(i)$$

de esta forma obtenemos:

$$G(n)u_n + g_1(n)G(n-1)u_{n-1} = h(n)$$

pero:

$$g_1(n)G(n-1) = G(n)$$

luego:

$$\begin{aligned} G(n)u_n + G(n)u_{n-1} &= h(n) \\ u_n + u_{n-1} &= \frac{h(n)}{G(n)} \end{aligned}$$

que ya tiene coeficientes constantes.

*Nota.* Debe ser $G(n) \neq 0$, si no, basta eliminar los factores conflictivos en $G(n)$. También conviene prescindir de los factores negativos para que el cambio sea sencillo.

Es decir, en general, el cambio empleado será:

$$G(n) = \prod_{\substack{i=0 \\ g_1(i)>0}}^{n} g_1(i)$$

*Ejemplo.*

$$\begin{aligned} f_n &= nf_{n-1} && (n \geq 1) \\ f_0 &= 1 \end{aligned}$$

Aquí $g_1(n) = -n$. Podemos invertir el signo y prescindir del primer valor, que es cero:

$$G(n) = \prod_{\substack{i=0 \\ -g_1(i)>0}}^{n} [-g_1(i)] = \prod_{i>0}^{n} i = n!$$

El cambio de variable es:

$$f_n = n!u_n$$

y la ecuación queda:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} && (n \geq 1) \\ u_0 &= 1 \end{aligned}$$

con lo que $u_n = 1$ y $f_n = n!$