Departamento de Ingeniería Informática
Grado en Ingeniería Informática
Elisa Guerrero Vázquez
Esther L. Silva Ramírez

Metodología de la Programación

Tema 4 – Teoría

ANÁLISIS DE ALGORITMOS

1. Introducción

- Problema=Epecificación de la tarea a automatizar
- Algoritmo=Procedimiento de resolución de un problema que debe cumplir:
  - Acciones bien definidas.
  - Secuencia finita de operaciones en un orden definido.
  - Debe acabar en un tiempo finito.
- Programa=Algoritmo implementado en un lenguaje de programación.

- Pueden existir múltiples algoritmos que resuelvan un mismo problema. Por ejemplo: Búsqueda de un elemento en un vector ordenado.

1. Introducción

Problema: **Búsqueda de un elemento en un Vector Ordenado**

2 métodos distintos para resolver un mismo problema:

- Algoritmo 1: Búsqueda Secuencial
- Algoritmo 2: Búsqueda Dicotómica

Para resolver el problema ¿Cuál se elige?

Conceptos

- Determinar dominio de definición cuando se especifica un problema.
- Dominio *D* de definición de un problema – conjunto de ejemplares que deben considerarse para dicho problema.
- Entrada – ejemplar o caso del problema.
- Cálculo – ejecución del algoritmo.
- Salida – solución del ejemplar.
- Tamaño *n* del ejemplar *d* – cualquier entero que mida de alguna manera el nº de componentes del ejemplar $n=\|d\| \geq 0$

2. Eficiencia de un algoritmo

- Vg. Dos algoritmos de ordenación (quicksort y burbuja) en dos ordenadores distintos.
- ¿Cómo seleccionar de entre todos los algoritmos de que disponemos para resolver un problema el mejor?
  - Si se tiene que resolver pocos casos pequeños seleccionar el más fácil de programar.
  - Si es un problema difícil y es necesario resolver muchos casos hay que llevar a cabo una selección más precisa.

2. Eficiencia de un algoritmo

¿Qué algoritmo es mejor?

- **Tiempo** que tarda en resolver el problema.
- Recursos que se necesitan para implementar el algoritmo: memoria principal y memoria secundaria.

Única dependencia importante en la mayoría de los casos para medir la eficiencia de un algoritmo es la entrada, pero a veces conviene medirlo en función del tamaño *n* de la entrada.

Casos a considerar:

- Mejor: menor tiempo de ejecución

$$t_{min}(n)=\text{mín}\{t(d) \mid d \in D \wedge \|d\|=n\}$$

- **Peor : mayor tiempo de ejecución**

$$t_{max}(n)=\text{máx}\{t(d) \mid d \in D \wedge \|d\|=n\}$$

- Promedio: Se debe conocer el tiempo de ejecución de cada caso y la frecuencia con que se presentan (distribución de probabilidades)

$$t_{promedio}(n)= \sum_{d \in D} Pr(d) \cdot t(d) = \sum_{k \geq 0} k \cdot Pr(t(d)=k)$$

$$t_{mejor}(n) \leq t_{promedio}(n) \leq t_{peor}(n), d \in D$$

2. Eficiencia de un algoritmo

Enfoques para seleccionar un algoritmo:

- **Enfoque empírico** (a posteriori).
- **Enfoque teórico** (a priori).
- **Enfoque híbrido** (mezcla de los anteriores).

Ventajas de la aproximación teórica:

- Independiente del ordenador, lenguaje de programación y habilidades del programador.
- Ahorro tiempo: no se implementa hasta el final. Con el empírico se deben implementar todos.
- Permite realizar un estudio para casos de todos los tamaños. Con el empírico sólo pueden probarse un nº pequeño de ejemplares.

3. Criterio Asintótico

A. **INDEPENDENCIA DEL HARDWARE**

Programa: implementación concreta de un determinado algoritmo, sujeta a una serie de limitaciones, tales como el tamaño de la memoria, de los datos que representa, … etc.

B. **PRINCIPIO DE INVARIANZA**

2 implementaciones distintas de un mismo algoritmo no diferirán en su eficiencia en más de alguna constante multiplicativa.

3. Criterio Asintótico

INDEPENDENCIA DEL HARDWARE

Pueden existir múltiples algoritmos que resuelvan un mismo problema.

Programa: implementación concreta de un determinado algoritmo, sujeta a una serie de limitaciones, tales como el tamaño de la memoria, de los datos que representa, … etc.

Única dependencia importante en la mayoría de los casos para medir la eficiencia de un algoritmo es la entrada, pero a veces conviene medirlo en función del tamaño *n* de la entrada.

Problema: **Búsqueda de un elemento en un Vector Ordenado**

- Algoritmo 1: Búsqueda Secuencial
  - Versión 1: usando menor número de variables
  - Versión 2:usando variable Encontrado
- Algoritmo 2: Búsqueda Dicotómica
  - Implementación Dicotómica Iterativa
  - Implementación Dicotómica Recursiva

3. Criterio Asintótico

PRINCIPIO DE INVARIANZA

2 implementaciones distintas de un mismo algoritmo no diferirán en su eficiencia en más de alguna constante multiplicativa.

- Búsqueda Secuencial A1:

  $t_{A1}(n)=$ 2***n Unidades de tiempo***

- Búsqueda Secuencial A2:

  $t_{A2}(n)=$ 4***n Unidades de tiempo***

Por tanto: $t_{A1}(n) \cong m^* t_{A2}(n)$

NO OLVIDAR LAS CONSTANTES OCULTAS – tamaño *n* grande

4. ¿Por qué hay que buscar la eficiencia?

Algoritmo con tiempo $t_1(n) = 10^{-4} \cdot 2^n$

- Invertir en maquinaria (máquina 100 veces más rápida):

$$t'_1(n) = 10^{-6} \cdot 2^n$$

Calcular para tamaños n=10 y n=20.

¿Tamaño se conseguiría resolver en un año?

- Invertir en algoritmia:

$$t_2(n) = 10^{-2} \cdot n^3$$

Calcular para tamaños n=10 y n=20.

¿Tamaño se conseguiría resolver en un año?

- Invertir en ambos:

$$t'_2(n) = 10^{-4} \cdot n^3$$

Calcular para tamaños n=10 y n=20.

¿Tamaño se conseguiría resolver en un año?

5. Análisis de la Complejidad

Búsqueda Secuencial

1) Empieza en la primera posición del vector
2) Mientras
   - no se sobrepase la longitud del vector
   - los elementos del vector sean menores que el buscado
     - Avanzar una posición más en el vector
3) Si el elemento de la posición actual coincide con el elemento buscado,

   Entonces devolver dicha posición

   Si no devolver longitud+1

5. Análisis de la Complejidad

```
const
      N=10; // por ejemplo
tipo
      vector[N] de entero: Vec

entero funcion busqueda(E entero: elem, E Vec: v, E entero: n)
var
      entero: i
inicio
(1) i←1
(2) mientras (i≤n) ∧ (elem≠v[i])
(3)          i←i+1
fin_mientras
(4)   devolver i
fin_funcion
```

5. Análisis de la Complejidad

¿Cómo medir el tiempo t(n) en un algoritmo?

1. Contar cuántas instrucciones de cada tipo
2. Multiplicar por el tiempo que tarda en ejecutarse
3. Realizar la suma

- Por ejemplo:
  - t_a: tiempo en ejecutar una asignación
  - t_c: tiempo en ejecutar una comparación
  - t_o: tiempo en ejecutar una operación aritmético-lógica
  - t_v: tiempo de acceso a un vector
  - t_d: tiempo en ejecutar la instrucción **devolver**

5. Análisis de la Complejidad

```
const
      N=10; // por ejemplo
tipo
      vector[N] de entero: Vec

entero funcion busqueda(E entero: elem, E Vec: v, E entero: n)
var
      Entero: i
inicio
(1) i←1   t_a
(2) mientras (i≤n) ∧ (elem≠v[i])  t_c + t_o + t_v + t_c
(3)         i←i+1    t_a+t_o
fin_mientras
(4)   devolver i      t_d
fin_funcion
```

Caso Peor: se repite n veces

Caso Mejor: sólo la comparación del bucle pero no itera

5. Análisis de la Complejidad

- $t_{min}(n)=t_a+2t_c+ t_o+t_v+t_d$
- $t_{max}(n)=t_a+ (2t_c+ t_o+t_v)*(n+1) + n*(t_a+t_o) + t_d$

Si consideramos que cada operación elemental

t_x=Coste Unitario $t_x \in \Theta(1)$

Caso Peor: $t_{max}(n)=1+(n+1)*4+ 2*n + 1 = 6*n+6$

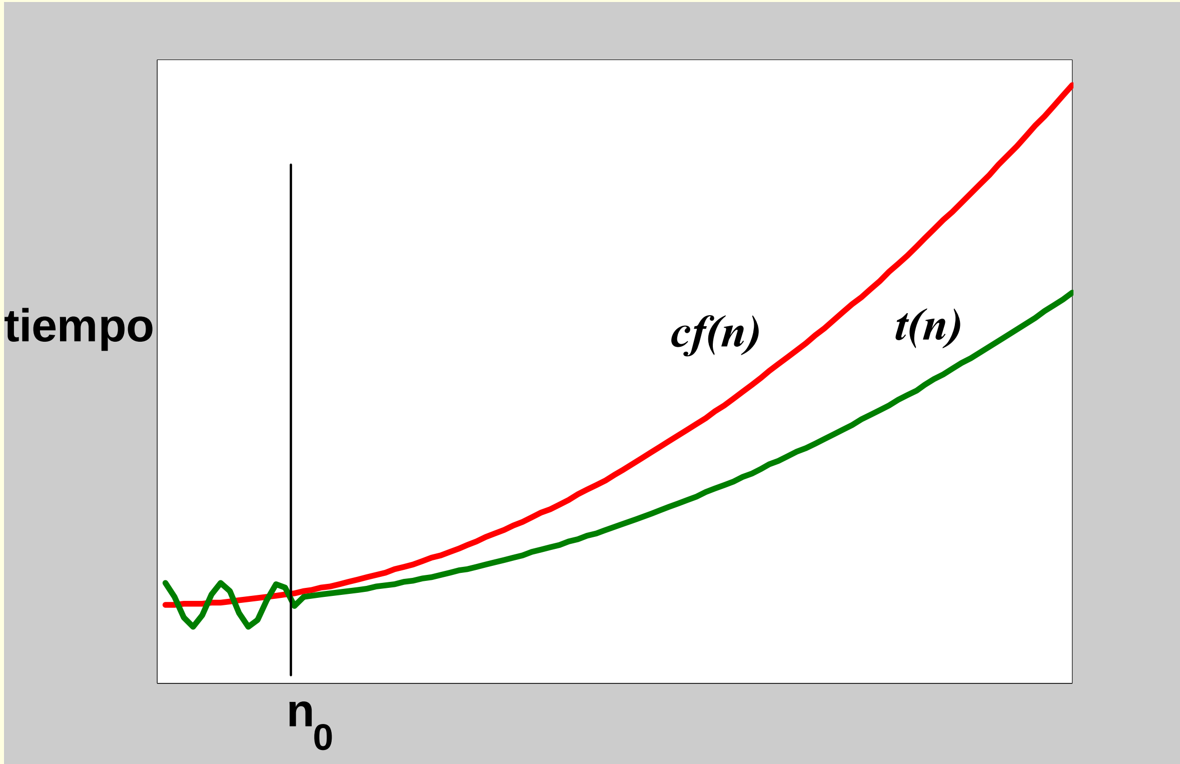
6. Estimación Objetiva

- Se denomina **Notación Asintótica** porque trata acerca del comportamiento de funciones en el límite, es decir, para valores suficientemente grandes de su parámetro.

- En Análisis de Algoritmos se estudia cómo crece el tiempo de proceso a medida que crece **n**.

6. Orden de Complejidad: Cota Superior

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$



umbral

6.- Orden de Complejidad: Cota Superior

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

Una función ***t(n)*** está en el orden de ***f(n)*** sii ***t(n)*** $\in$ ***O(f(n))***

Significa que t(n) está acotada superiormente por *f(n)* para valores de *n* suficientemente grandes y haciendo abstracción de posibles constantes multiplicativas

6. Orden de Complejidad: Cota Superior

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

Ejemplo:

¿ t(n)=n+1 pertenece a O(n) ?

Demostración:

Se cumple si existe no y c tal que:

$t(n) \leq c f(n)$

$n+1 \leq cn$ por ejemplo para no=1 y c=2

Por tanto: $\forall n \geq 1 \quad n+1 \leq 2n$

6. Orden de Complejidad: Cota Superior

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

Ejemplo: ¿A qué orden pertenece la función de búsqueda Secuencial?

¿ $t(n)=6n+6$ pertenece a $O(n)$?

Demostración:

Se cumple si existe no y c tal que:

$t(n) \leq c f(n)$

$6n+6 \leq cn$ por ejemplo para $c=7$ y $n_0=6$

ó $n_0=1$ y $c=12$

Por tanto: $\forall n \geq 2 \quad 6n+6 \leq 7n$

6. Orden de Complejidad

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

Demostrar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- **$t(n)=10n^2+9n+1 \in O(n^2)$**
- **$t(n)=10n^2+9n+1 \in O(n)$**
- **$t(n)=6*2^n+n^2 \in O(2^n)$**
- **$t(n) = 3 \in O(1)$**

6. Pertenencia y contención para *O*

$$f \in \mathrm{O}(g) \Leftrightarrow \mathrm{O}(f) \subseteq \mathrm{O}(g)$$

$$f \in \mathrm{O}(g) \wedge g \notin \mathrm{O}(f) \Leftrightarrow \mathrm{O}(f) \subset \mathrm{O}(g)$$

$$f \in \mathrm{O}(g) \wedge g \in \mathrm{O}(f) \Leftrightarrow \mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g)$$

6. Regla del Límite para *O*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$a)$Si $\quad k = 0$ entonces $f \in O(g)$ pero $g \notin O(f), O(f) \subset O(g)$

$b)$Si $\quad k = +\infty$ entonces $f \notin O(g)$ pero $g \in O(f), O(g) \subset O(f)$

$c)$Si $\quad k \neq 0 \;\; y \;\; k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$

Esta Regla es muy importante para poder demostrar las pertenencias de cada función a los órdenes de magnitud

6. Regla del Límite

t(n)=6n+6 pertenece a O(n)

Demostración:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+6}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{6}{n}\right)=6$$

Por lo que se cumple $6n+6\in O(n)$

6. Regla del Límite

$$n^2 \in O(n^3)$$

Sí, porque $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

y además $n^3 \notin O(n^2)$ $\lim \frac{n^3}{n^2} = \infty$

6. Operaciones entre Órdenes

- Regla de la Suma:

$$O(f+g)= O(\text{máx}(f,g))$$

$$\textit{Si } f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(\text{máx}(g,h))$$

- Regla del Producto:

$$O(f)\cdot O(g)= O(f\cdot g)$$

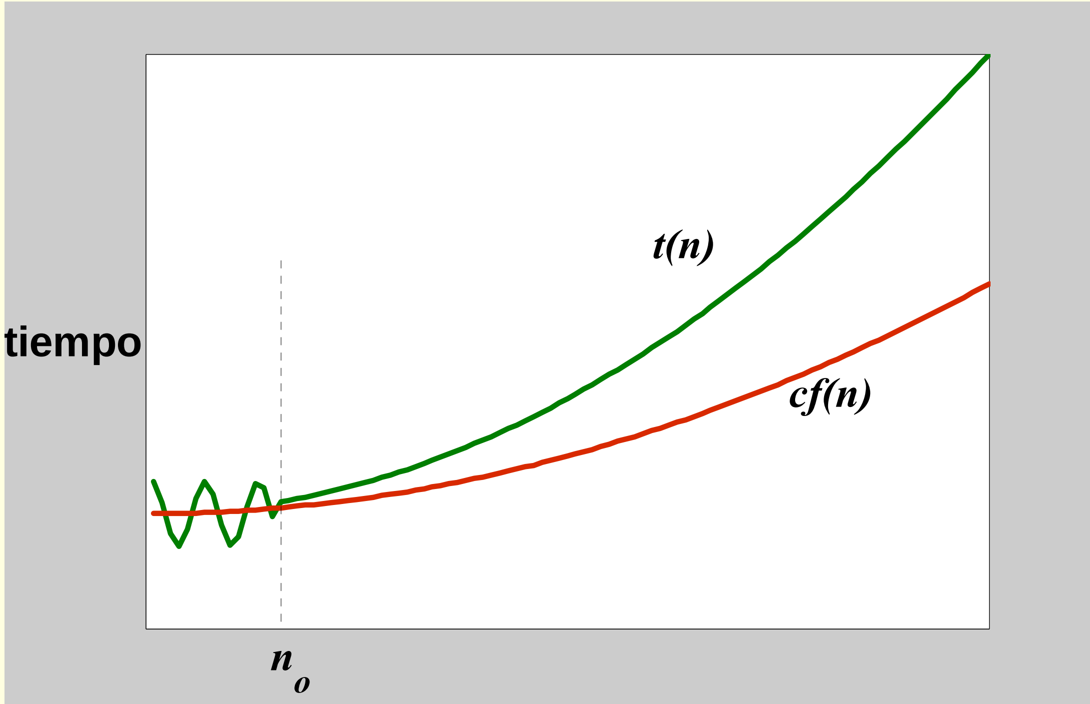
$$\textit{Si } f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in O(g\cdot h))$$

- Propiedad Transitiva

$$\textit{Si } f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$$

6. Omega: Cota inferior

$$\Omega(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n) \right\}$$



umbral

6. Omega: Cota inferior

$$\Omega(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n) \right\}$$

Una función ***t(n)*** está en omega de ***f(n)*** sii ***t(n)*** $\in$ ***Ω(f(n))***

Significa que t(n) está acotada inferiormente por *f(n)* para valores de *n* suficientemente grandes y haciendo abstracción de posibles constantes multiplicativas

6. Omega: Cota Inferior

$$\Omega(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n) \right\}$$

Asintóticamente podemos acotar Inferiormente t(n) con una función proporcional a *f(n)* : $\forall n \geq n_o \; t(n) \geq c f(n)$

Ejemplo:

¿ $t(n)=10n^2+9n+1 \in \Omega(n^2)$?

Demostración:

Se cumple si existe n_o y c tal que:

$$t(n) \geq c f(n)$$

$10n^2+9n+1 \geq cn^2$ por ejemplo para $n_o=1$ y $c=10$

Por tanto: $\forall n \geq 1 \;\; 10n^2+9n+1 \geq 10n^2$

6. Omega: Cota Inferior

- **Dualidad**:

$$g \in \Omega(f) \Leftrightarrow f \in O(g)$$

Permite traspasar las propiedades de O a Ω y viceversa.

- **Relación entre O y Ω**

$$O(f) = O(g) \Leftrightarrow \Omega(f)=\Omega(g)$$

$$3n^3 + 7n^2 \in \Omega(n)$$

- Por la regla del máximo: Ω(f+g)= Ω(máx(f,g))

$$\Omega\left(3n^3 + 7n^2\right) = \Omega\left(max\left(3n^3 + 7n^2\right)\right) = \Omega\left(3n^3\right)$$

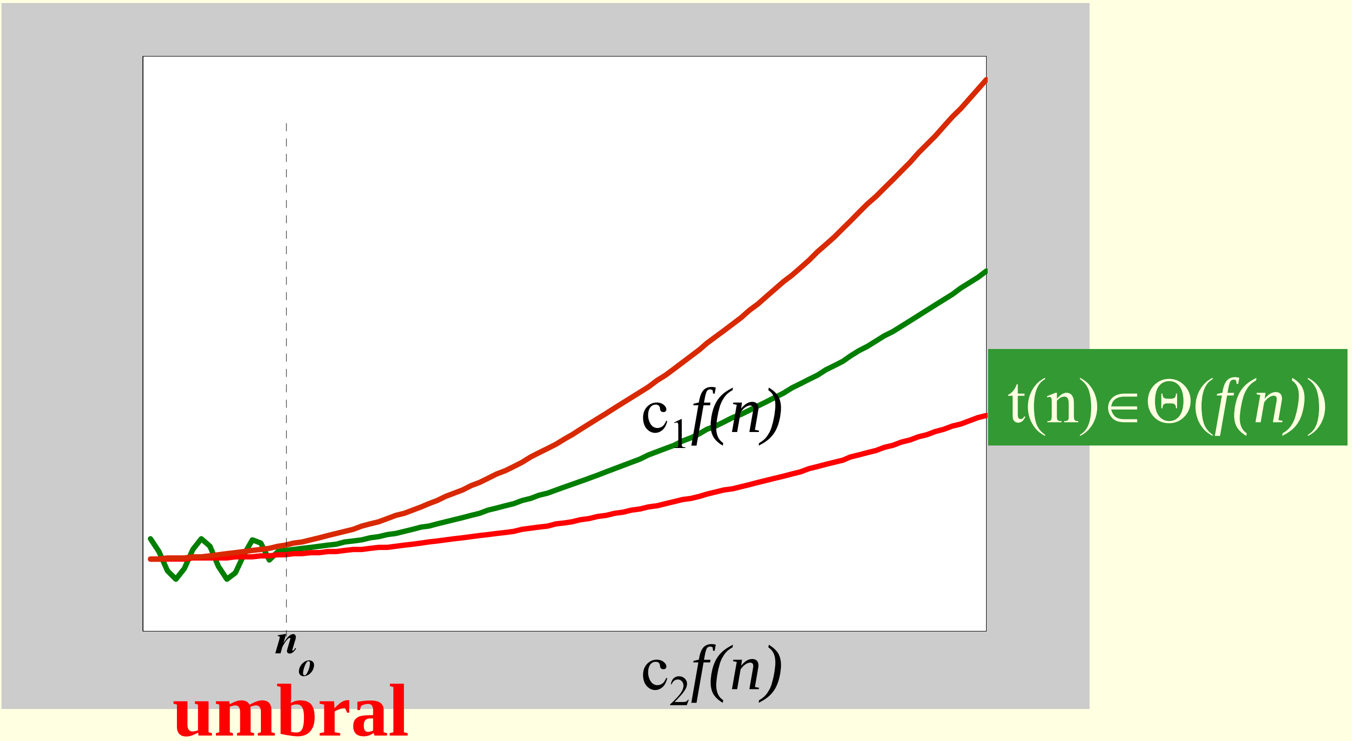
- Por tanto hay que demostrar que: $3n^3 \in \Omega(n)$
- Se cumple si existe n_o y c tal que: $3n^3 \geq cn$

Y en efecto, para n_o=1 y c=2 se verifica que:

$$3n^3 \geq 2n$$

6. Zeta: Orden Exacto

$$\Theta(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \middle| \exists c, d \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : d \cdot f(n) \leq t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$



6. Zeta: Exacto

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

Ejemplo:

¿ **$t(n)=3n + 1 \in \Theta(n)$** ?

Demostración

$3n+1 \in$ **$O(n)$** Se cumple si existe n_o y c_1 tal que:

$$t(n) \leq c_1 f(n) \ \forall n \geq n_0$$

➡ Para $n_o=1$ y $c_1=4$ se cumple que: $3n+1 \leq 4n$

$3n+1 \in$ **$\Omega(n)$** Se cumple si existe n_0 y c_2 tal que:

$$t(n) \geq c_2 f(n) \ \forall n \geq n_0$$

➡ Para $n_o=1$ y $c_2=2$ se cumple que: $3n+1 \geq 2n$

Por tanto: $\forall n \geq 1 \ \ 3n+1 \in \Theta(n)$

6. Zeta: Exacto

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

Considerando de nuevo la búsqueda secuencial:

¿ **$t(n)=6n + 6 \in \Theta(n)$** ?

Demostración

$6n+6 \in$ **$O(n)$** Se cumple si existe n_o y c_1 tal que:

$$t(n) \leq c_1 f(n) \ \forall n \geq n_0$$

Para $n_o=1$ y $c_1=12$ se cumple que: $6n+6 \leq 12n \ \forall n \geq n_0$

$6n+6 \in$ **$\Omega(n)$** Se cumple si existe n_0 y c_2 tal que:

$$t(n) \geq c_2 f(n) \ \forall n \geq n_0$$

Para $n_o=1$ y $c_2=4$ se cumple que: $6n+6 \geq 12n \ \forall n \geq n_0$

Por tanto: $\forall n \geq 1 \ \ 6n+6 \in \Theta(n)$

6. Regla del Límite para el Orden Exacto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$a)$Si $\quad k = 0$ entonces $f \in O(g)$ pero $f \notin \Theta(g)$

$b)$Si $\quad k = +\infty$ entonces $f \in \Omega(g)$ pero $f \notin \Theta(g)$

$c)$Si $\quad k \neq 0$ y $k < \infty$ entonces $f \in \Theta(g)$

6. Relación entre O, Ω y Θ

$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$

$$O(f) = O(g) \Leftrightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$$

$$\Omega(f) = \Omega(g) \Leftrightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$$

6. Propiedades de los Órdenes

Dado $\Xi \in \{O, \Omega, \Theta\}$ y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ se definen las propiedades:

* Propiedad reflexiva. Para cualquier función f se cumple $f \in \Xi(f)$

* Invariancia aditiva. Para toda constante $c \in \mathbb{R}^+$, $g \in \Xi(f) \Leftrightarrow c + g \in \Xi(f)$

* Invariancia multiplicativa. Para toda constante $c \in \mathbb{R}^+$, $g \in \Xi(f) \Leftrightarrow c \cdot g \in \Xi(f)$

* Regla de la Suma.

Si $f_1 \in \Xi(g) \wedge f_2 \in \Xi(h) \Rightarrow f + g \in \Xi(g + h) \Rightarrow f + g \in \Xi(\text{máx}(g, h))$

$\Xi(f) + \Xi(g) = \Xi(f + g) = \Xi(\text{máx}(f, g))$

* Regla del Producto. Si $f_1 \in \Xi(g) \wedge f_2 \in \Xi(h) \Rightarrow f \cdot g \in \Xi(g \cdot h)$

$\Xi(f) \cdot \Xi(g) = \Xi(f \cdot g)$

* Propiedad Transitiva. Si $f \in \Xi(g) \wedge g \in \Xi(h) \Rightarrow f \in \Xi(h)$

6. Regla del Límite para *O*, *Ω*, *Θ*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$a)$Si $k = 0$ entonces $f \in O(g)$ $g \notin O(f)$ $g \notin \Theta(f)$ $g \in \Omega(f)$ $O(f) \subset O(g)$

$b)$Si $k = +\infty$ entonces $f \notin O(g)$ $f \notin \Theta(g)$ $g \in O(f)$ $f \in \Omega(g)$ $O(g) \subset O(f)$

$c)$Si $k \neq 0$ y $k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$ $f \in \Theta(g)$ $\Omega(f) = \Omega(g)$ $\Theta(g) = \Theta(f)$

$$f \in \mathrm{O}(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$$

$$\mathrm{O}(f) = \mathrm{O}(g) \Leftrightarrow \Omega(f) = \Omega(g)$$

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow g \in \Theta(f)$$

Ejemplo:

$$2^n \in O\left(50n^2\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{50n^2} = +\infty \quad \textit{por lo que } 2^n \notin O\left(50n^2\right)$$

$$\textit{y además } 50n^2 \in O(2^n)$$

$$3n^3 * 7n^2 \in \Theta\left(n^5\right)$$

- Por la regla del Producto: f*g$\in$ Θ(f*g)

$$\Theta\left(3n^3 * 7n^2\right) = \Theta\left(21 * n^5\right)$$

Por tanto, se verifica que pertenece al Orden Exacto de n^5

- Aplicando la definición: $21 * n^5 \in \Theta\left(n^5\right)$
- Por la Regla del Límite $\lim_{n \to \infty} \frac{21 * n^5}{n^5} = 21$

Notación asintótica

- *Está en el orden de* (Cota Superior):

$$O(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

- *Está en el orden de* (Cota Superior):

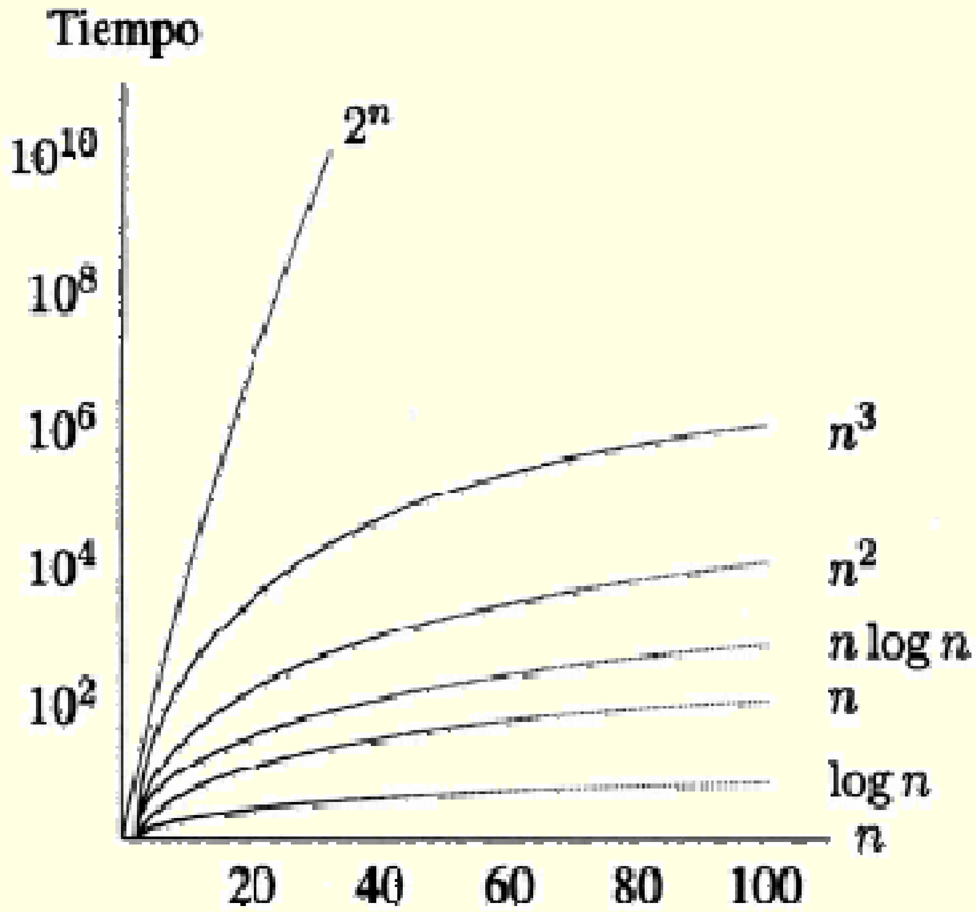
$$\Omega(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : t(n) \geq c \cdot f(n) \right\}$$

- *Está en Theta de* (Oden de magnitud exacto)

$$\Theta(f(n)) = \left\{ t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \,\middle|\, \exists c, d \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : d \cdot f(n) \leq t(n) \leq c \cdot f(n) \right\}$$

7. Jerarquía de Órdenes

$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \cdot \log n) \subset O(n^2) \subset \ldots \subset O(n^k) \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$



7. Jerarquía de Órdenes

$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \cdot \log n) \subset O(n^2) \subset \ldots \subset O(n^k) \subset O(2n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$

$t(n)$	n=100	n=200
$k_1 \log n$	1h.	1,15h.
$k_2 n$	1h.	2h.
$k_3 n \log n$	1h.	2,30h.
$k_4 n^2$	1h.	4h.
$k_5 n^3$	1h.	8h.
$k_6 2^n$	1h.	$1{,}27 * 10^{30}$ h.

Efecto de duplicar el tamaño del problema

7. Jerarquía de Órdenes

$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \cdot \log n) \subset O(n^2) \subset \ldots \subset O(n^k) \subset O(2n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$

$t(n)$	Tiempo=1h.	Tiempo=2h.
$k_1 \log n$	n=100	n=10.000
$k_2 n$	n=100	n=200
$k_3 n \log n$	n=100	n=178
$k_4 n^2$	n=100	n=141
$k_5 n^3$	n=100	n=126
$k_6 2^n$	n=100	n=101

Efecto de duplicar el tiempo disponible

8. Reglas prácticas - cálculo de eficiencia

1. Instrucciones elementales $\Theta(1)$
2. Composición:

   s_1 $t_{s1}(n)$

   s_2 $t_{s2}(n)$ $t(n) = t_{s1}(n) + t_{s2}(n)$
3. Condicional simple:

   si B **entonces** $t_B(n)$

   s_1 $t_s(n)$ $t(n) = t_B(n) + t_s(n)$
4. Condicional:

   si B **entonces** $t_B(n)$

   s_1 $t_{s1}(n)$

   si_no $t(n) = t_B(n) + \max\{t_{s1}(n), t_{s2}(n)\}$

   s_2 $t_{s2}(n)$

8. Reglas prácticas - cálculo de eficiencia

5. Estructura repetitiva:

   Sea i el número de iteración

   Sea p(n) el número total de iteraciones

   mientras B **hacer** $t_B(n)$ no varía en cada iteración

   s $t_s(n)$ no varía en cada iteración

$$t(n) = t_B(n) \cdot (p(n) + 1) + t_s(n) \cdot p(n)$$

   mientras B **hacer** $t_B(n)$ no varía en cada iteración

   s $t_s(i,n)$ varía en cada iteración

$$t(n) = t_B(n) \cdot \left(p(n) + 1 \right) + \sum_{i=1}^{p(n)} t_s(i,n)$$

8. Reglas prácticas - cálculo de eficiencia

5. Estructura repetitiva:
   Sea i el número de iteración
   Sea p(n) el número total de iteraciones

   mientras B **hacer** $t_B(i,n)$ varía en cada iteración
   s $t_s(i,n)$ varía en cada iteración

$$t(n) = \sum_{i=1}^{p(n)+1} t_B(i,n) + \sum_{i=1}^{p(n)} t_s(i,n)$$

6. Si se producen llamadas a un subalgoritmo se calcula el tiempo que tarda en ejecutarse éste.

   El coste total del algoritmo es la suma de todos los costes de las instrucciones que lo forman.

Notación asintótica. Operación crítica

- Una **operación** es **elemental** si se ejecuta en un tiempo acotado por una constante.

- Una **operación** es **crítica** si no hay ninguna que se ejecute más que ella. Se ejecuta al menos tantas veces como cualquier otra.

Dado el siguiente procedimiento, calcule su orden de complejidad:

```
procedimiento proc(E entero: n)
var
    entero: z, d, x
inicio
    z ← 0
    d ← 1
    mientras d ≤ n hacer
        x ← d
        mientras x ≥ 0 hacer
            z ← z + x
            x ← x – 1
        fin_mientras
        d ← d + 1
    fin_mientras
fin_procedimiento
```

Búsqueda Dicotómica

```
entero función busq_binaria_rec(E/S Vect: v, E entero: n, E entero: elem, E entero: izqda, E
entero: drcha)
var
        entero: central, pos inicio
        inicio
        izqda ← 1
        drcha ← n
        central ← (izqda + drcha) div 2
        mientras v[central] ≠ elem ∧ izqda < drcha hacer
                si elem > v[central] entonces
                      izqda ← central+1
                si_no
                     drcha ← central -1
                fin_si
                central ← (izqda + drcha) div 2
      fin mientras
       si v[central]=elem entonces pos=central
       si_no pos=n+1
      devolver pos
fin_función
```

Búsqueda Dicotómica

```
entero función busq_binaria_rec(E/S Vect: v, E entero: n, E entero: elem, E entero: izqda, E
entero: drcha)
var
    entero: central, pos inicio
    inicio
    izqda ← 1
    drcha ← n
    central ← (izqda + drcha) div 2
    mientras v[central] ≠ elem ∧ izqda < drcha hacer
        si elem > v[central] entonces
             izqda ← central+1
        si_no
            drcha ← central -1
        fin_si
        central ← (izqda + drcha) div 2
   fin mientras
    si v[central]=elem
        entonces pos←central
        si_no pos ← n+1  fin_si
   devolver pos
fin_función
```

Caso Mejor: el elemento buscado es el central
Caso Peor: buscar un elemento que no está en el vector

Búsqueda Dicotómica

- Peor Caso: buscar un elemento que no se encuentra en el vector.
- Cada iteración del bucle reduce el vector a la mitad:
  - Inicialmente: n
  - Tras la 1ª iteración: $\frac{n}{2}$
  - Tras la 2ª iteración: $\frac{n}{4}$
  - Tras la 3ª iteración: $\frac{n}{8}$

Búsqueda Dicotómica

- Peor Caso: buscar un elemento que no se encuentra en el vector.
- Cada iteración del bucle reduce el vector a la mitad:
  - Inicialmente: n
  - Tras la 1ª iteración: $\frac{n}{2} = \frac{n}{2^1}$
  - Tras la 2ª iteración: $\frac{n}{4} = \frac{n}{2^2}$
  - Tras la 3ª iteración: $\frac{n}{8} = \frac{n}{2^3}$
  - De forma general: $\frac{n}{2^{nveces}}$

Búsqueda Dicotómica

- Última iteración cuando sólo quede un elemento en el vector por tanto:

Cuando $\frac{n}{2^{nveces}} = 1$

$$\frac{n}{2^{nveces}} = 1 \quad aplicando\ \ log\, aritmos$$

$$log_2 \frac{n}{2^{nveces}} = log_2 1 \quad y\ como\ \ log_2 1 = 0 \quad entonces$$

$$log_2 \frac{n}{2^{nveces}} = log_2 n - log_2 2^{nveces}$$

$$log_2 n = log_2 2^{nveces}$$

$$\boxed{log_2 n = nveces}$$

El número de iteraciones está acotado por el logaritmo en base 2 de n

Búsqueda Dicotómica

Todas las operaciones elementales son de O(1), por tanto:

Peor Caso:

$$t(n) = 5 + 4 + \sum_{\alpha=1}^{nveces} (4 + 7) + 5$$

nveces = $\log_2 n$

$$t(n) = 5 + 4 + \sum_{\alpha=1}^{\log_2 n} (4 + 7) + 5 = 14 + 11 \cdot \log_2 n$$

Búsqueda Dicotómica $\in \Theta(\log n)$

Aplicando conjuntamente las propiedades:

Invariancia multiplicativa: $c \in \mathbb{R}^+, g \in \Theta(f) \Leftrightarrow c \cdot g \in \Theta(f)$

Y regla de la Suma: $\Theta(f+g) = \Theta(\text{máx}(f,g))$

Peor Caso: $t(n) = 14 + 11 * \log_2 n$

Por tanto, $t(n) \in \Theta(14 + 11\log_2 n) = \Theta(11\log_2 n) = \Theta(\log_2 n)$

Búsqueda Dicotómica – Operación crítica

Este cálculo del coste total del algoritmo se puede simplificar aún más, teniendo en cuenta la *operación crítica*.

Como operación crítica seleccionamos la comparación entre elementos:

$$\mathbf{v[central] \neq elem}$$

Esta operación se repite con tanta frecuencia como cualquier otra y refleja la esencia del algoritmo, ya que comprueba si el elemento buscado es igual a un determinado elemento del vector. Se podría considerar cualquier otra operación, por ejemplo suma o decremento, siempre y cuando el número de veces que se ejecute sea el mismo orden.

Búsqueda Dicotómica $\in \Theta(\log n)$

Así, se puede considerar el coste en el peor caso como el número de veces que se repite esta operación.

Peor Caso: $t(n) = \log_2 n$

Por lo que calculando dicho número de veces, se obtiene directamente el orden de complejidad.

Por tanto, t(n) $\in \Theta(\log_2 n)$

Ejercicios

```
entero función func(E entero: n)
var
    entero: prod
inicio
    prod ← 1
    mientras n>0 hacer
        prod ← prod*n
         n ← n-1
    fin_mientras
    devolver prod
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad del procedimiento en función del valor de n.

Ejercicios

```
entero funcion Ejemplo(E entero: n)
var
    entero: a, b, i, t
inicio
    a ← 1
    b ← 1
    desde i ← 0 hasta n-1 hacer
       t ← b
      b ←  suma(i)
      a ← t
    fin_desde
    devolver a
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad del algoritmo en función del valor de n:

a) Suponiendo que el tiempo de la función *suma* es constante.

b) Suponiendo que el tiempo de la función *suma* estará en $\Theta(n)$.

Ejercicios

```
entero funcion suma-cuadrados(E entero: n)
var
inicio
      s ← 0
      desde i ← 1 hasta n hacer
            p ← producto(i,i)
            s ← s+p
      fin_desde
      devolver s
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad del algoritmo en función del valor de n:

a) Suponiendo que el tiempo de la función *producto* es constante.

b) Suponiendo que el tiempo de la función *producto* estará en $\Theta(n)$.

Ejercicios

```
procedimiento proc(E entero: n)
var
    entero: x
inicio
    x ← 0
    mientras (x+1)*(x+1) ≤ n hacer
        x ← x+1
    fin_mientras
fin_procedimiento
```

Calcular el orden de complejidad del procedimiento en función del valor de n.

Ejercicios

```
entero funcion func(E entero: n)
var
    entero: prod, acum, a
inicio
       acum ← 0
       prod ← n
       mientras prod ≥ 1 hacer
            a ← 0
            desde i←1 hasta n hacer
                si i ≤ prod entonces
                    a ← a + cuadrado(i)
                si_no
                    a ← a – cuadrado(i)
            fin_desde
            acum ← acum + a
            prod ← prod/2
       fin_mientras
       devolver prod
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad del algoritmo en función del valor de n:

a) Suponiendo que el tiempo de la función *cuadrado* es constante.

b) Suponiendo que el tiempo de la función *cuadrado* estará en $\Theta(n)$.

Ejercicios

```
entero función func(E entero: n)
var
    entero: a, b, res
inicio
    res ← 0
    b ← 1
    mientras b ≤ n hacer
            a ← b
            mientras a > 0 hacer
                res ← res + 2·a
                a ← ⌊a/2⌋
        fin_mientras
         b ← b + 1
    fin_mientras
   devolver res
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad en función del valor de n.

Ejercicios

```
entero función func(E entero: n)
var
    entero: z, d, x
inicio
    z ← 0
    d ← 1
    mientras d*d ≤ n hacer
       x ← d
       mientras x ≥ 0 hacer
           z ← z + x
           x ← x – 1
       fin_mientras
       d ← d + 1
    fin_mientras
   devolver z
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad en función del valor de n.

Ejercicios

```
entero función fun(E entero: n )
var
    entero: i,j,k,sum
inicio
    i← ⌊n/2⌋
    sum←0
    mientras i > 0 hacer
          j← 1
      mientras j <= n hacer
          sum←opera(sum)
          j←j*2
      fin_mientras
      i←i-2
     fin_mientras
    devolver sum
fin_función
```

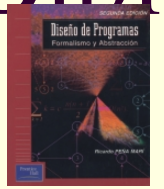
Calcular el orden de complejidad en función del valor de n, considerando la función *opera* $\in O(n)$.

Ejercicios

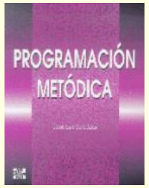
```
entero función fun(E entero: n )
var
    entero: i, j, suma
inicio
    i ← 1
    suma ← 0
    mientras i <= n hacer
      desde i←i hasta n hacer
          suma ← suma+i+j
     fin_desde
     i ← i+1
    fin_mientras
    devolver suma
fin_función
```

Calcular el orden de complejidad en función del valor de n.

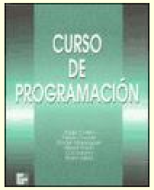
Bibliografía



- Peña Marí, Ricardo; (1998) Diseño de Programas. Formalismo y Abstracción. Prentice Hall.



- Bálcazar José Luis (2001). Programación Metódica. McGraw-Hill.



- Castro Rabal, Jorge; Cucker Farkas, Felipe (1993). Curso de programación. McGraw-Hill / Interamericana de España, S.A.

- Martí Oliet Narciso (2006), Segura Díaz Clara M., Verdejo López José A. Especificación, derivación y análisis de algoritmos : ejercicios resueltos