Análisis de Algoritmos y Estructuras de Datos

Tema 1: Órdenes asintóticos

Versión 1.0

1. Demuestre, a partir de la definición de O, que la relación binaria $\leq_O$ dada por:

$$f \leq_O g \equiv f \in O(g)$$

es un preorden, es decir, que es reflexiva y transitiva.

2. Demuestre, a partir de la definición de O, que son ciertas las siguientes relaciones:

a) $1000 \in O(1)$

b) $n\sqrt{n} \in O(n^2)$

c) $2^n \in O(3^n)$

d) $n! \in O((n+1)!)$

e) $n \notin O(\sqrt{n})$

f) $n \log n \notin O(n)$

g) $3^n \notin O(2^n)$

h) $(n+1)! \notin O(n!)$

3. Sea $k \geq 0$ una constante y f, g y h, funciones. Demuestre las siguientes propiedades a partir de la definición de O y de sus propiedades que relacionan pertenencia y contención.

a) $O(f) = O(g) \implies O(f^k) = O(g^k)$

b) $O(g) \subseteq O(f) \implies O(f+g) = O(f)$

c) $O(g) = O(h) \implies O(f+g) = O(f+h)$

d) $O(g) = O(h) \implies O(f \cdot g) = O(f \cdot h)$

4. Demuestre, empleando límites, que:

a) $O(2^n) \subset O(3^n)$

b) $\Omega(\sqrt{n}) \subset \Omega(\sqrt[3]{n})$

c) $\Omega(\sqrt{n}) \subset \Omega(\log n)$

d) $\Theta(\sum_{i=0}^{k} c_i n^i) = \Theta(n^k)$, con $c_k \in \mathbb{R}^+$

e) $\Theta(\sum_{i=1}^{n} i^k) = \Theta(n^{k+1})$

f) $\Theta(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = \Theta(\log n)$

Pista. En ocasiones, el *criterio de Stoltz*, la *regla de L'Hôpital*, el *binomio de Newton* o una definición de e como límite pueden resultar de gran utilidad.

5. Las siguientes funciones modelan, con $t(0) = 0$, los tiempos de distintos algoritmos. Calcule su forma explícita y orden Θ. Ordénelas según su complejidad.

a) $t(n) = t(n-1) + 1$

b) $t(n) = t(n-1) + n$

c) $t(n) = t(n-1) + 2^n$

d) $t(n) = t(n-1) + 2^n + n + 1$

6. Generalice, por inducción, la regla del máximo a un número arbitrario de funciones. Es decir, sean k funciones $f_1, \ldots, f_k$, demuestre que:

$$O(f_1 + \cdots + f_k) = O(\text{máx}\{f_1, \ldots, f_k\})$$