Capítulo 5

Fórmula de Taylor

5.1. Introducción

En la segunda mitad del siglo XVIII, el matemático inglés James Taylor hizo un desarrollo en serie de funciones. En esta época, el uso de las series era muy poco riguroso, pues no se sabía bien qué significado tenía la suma de infinitos números.

A principios del XIX, Cauchy dio un sentido preciso a las series; y antes de él, Lagrange y otros matemáticos sustituyeron el desarrollo infinito de Taylor por otro finito, que resultó ser un potente instrumento para el estudio y el cálculo de las funciones. Además, por un proceso de paso al límite, pasaron fácilmente al desarrollo en serie.

Para el informático tiene un gran interés en el cálculo numérico de funciones.

La idea fundamental es la siguiente: los polinomios son las funciones más simples y de cálculo más fácil. La diferencial de una función en un punto aproxima el incremento de la función por el incremento de la recta tangente. ¿Es posible aproximar la función por un polinomio de grado n? La respuesta es afirmativa, y la solución es la fórmula de Taylor.

§1. PRELIMINARES

5.2. Derivadas sucesivas de $(x-a)^m$

Antes de abordar la fórmula de Taylor para polinomios, conviene que estudiemos esta cuestión preliminar, pues es fundamental para entender bien todo lo que sigue.

Sea $y = (x-a)^m$. Es claro que: $y(a) = 0$. Derivando la función, tenemos:

$$y' = m(x-a)^{m-1}.$$

Obviamente:$y'(a) = 0$.Derivando de nuevo:

$$y'' = m(m-1)(x-a)^{m-2}.$$

Como antes:$y''(a) = 0$. En una nueva derivación obtenemos:

$$y''' = m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}.$$

Es claro que: $y'''(a) = 0$.

Antes de operar nuevamente, conviene hacer una observación: Los coeficientes son las variaciones de m objetos tomados de n en n; como el exponente de $(x-a)$ en la derivada de orden h es $m-h$, cuando sea $h = m$ el exponente será nulo, y la derivada:

$$m(m-1)(m-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!.$$

Al ser ésta constante, *todas las que le siguen son nulas.*

En conclusión: *La función $y = (x-a)^m$ y todas sus derivadas se anulan en $x = a$, excepto la de orden m cuyo valor es $m!$.*

5.3. Teorema generalizado de Cauchy

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que verifican las condiciones del teorema de Cauchy, tenemos:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)},\ x_1 \in (a,\, b).$$

Si las derivadas $f'(a)$ y $g'(a)$ son ambas nulas, el segundo miembro se puede escribir así:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_1)-f'(a)}{g'(x_1)-g'(a)}.$$

Si además las derivadas segundas respectivas $f''(x)$ y $g''(x)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo abierto (a,b), podemos aplicar de nuevo el teorema de Cauchy, y tenemos:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_1)-f'(a))}{g'(x_1)-g'(a)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}.$$

Si el anterior procedimiento es extensible a otras derivadas, resulta:

Teorema 13 (Teorema generalizado de Cauchy) *Si en el punto $x = a$ se anulan las derivadas de órdenes $1, 2, \ldots, n-1$ de $f(x)$ y $g(x)$, pero ningún par de ellas, ni tampoco $f^n(x)$ y $g^n(x)$ se anulan simultáneamente en ningún punto de (a, b), existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^n(x_0))}{g^n(x_0)}, x_0 \in (a, b).$$

Corolario 4 *La aplicación reiterada de la regla de l'Hôpital resulta directamente del teorema anterior.*

5.4. Comparación de infinitésimos por cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos para $x \to a$: $f(x), g(x) \to 0$. Una manera de comparar sus valores respectivos, al acercarse x a a, es calcular el límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Resultan así las siguientes posibilidades:

1) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En este caso decimos que *el numerador es de mayor orden que el denominador.*

   El numerador tiende a cero con mayor rapidez que el denominador: en cierto entorno de a es menor que cualquier fracción previamente determinada del denominador.

2) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. En este caso decimos que *el numerador es de menor grado que el denominador.*

   El numerador tiende a cero con menor rapidez que el denominador: en cierto de entorno de$a$ es más grande que cualquier múltiplo prefijado del denominador. Es el caso recíproco del anterior: la fracción de este caso es la recíproca de la de 1).

3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$. (El límite L es finito y no nulo) En este caso decimos que *$f(x)$ y $g(x)$ son del mismo orden.*

Si en vez del límite anterior calculamos: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{Lg(x)} = 1$, vemos que los infinitésimos $f(x)$ y $Lg(x)$ son equivalentes.

4) El $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe. En este caso decimos que *los infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ no son comparables.*

Para dar un orden a cada infinitésimo, se ha hecho la siguiente definición de unos infinitésimos, con los que comparar los demás:

Definición 11 *Para $x \to a$, $(x-a)^n$ es el infinitésimo principal de grado n.*

Para $x \to \infty$, $\frac{1}{x^n}$ es el infinitésimo principal de grado n.

Sea $S = \alpha + \beta + \gamma$ una suma de tres infinitésimos, siendo β y γ de orden superior a α; entonces:

$$\frac{\beta}{\alpha} \to 0, \frac{\gamma}{\alpha} \to 0.$$

Y tenemos:

$$\frac{S}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \to 1.$$

De aquí deducimos: *la suma de varios infinitésimos de distintos órdenes es equivalente al sumando de menor orden, y, por tanto del mismo orden.*

Este sumando de menor orden recibe el nombre de *término o parte principal* de la suma.

§2. FÓRMULA DE TAYLOR

5.5. Fórmula de Taylor para polinomios

Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0.$$

Un problema algebraico sencillo es el siguiente: *Escribir el polinomio $P_n(x)$ como combinación de las potencias de $(x-a)$ en lugar de las x^n.*

Tenemos, pues, que calcular los coeficientes b siguientes:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n. \tag{5.1}$$

Si en esta igualdad hacemos $x = a$, obtenemos:

$$P_n(a) = b_0.$$

Es sabido que $P_n(a)$, valor numérico del polinomio para $x = a$ es el resto de dividirlo por $x - a$, división que puede hacerse por la regla de Ruffini:

$$P_n(x) = (x-a)C_1(x) + R_1.$$

Al hacer en esta igualdad $x = a$, se obtiene $P_n(a) = R_1$. Si dividimos el cociente $C_1(x)$ por $x - a$, tenemos:

$$C_1(x) = (x-a)C_2(x) + R_2.$$

Si sustituimos esta igualdad en la anterior, resulta:

$$P_n(x) = (x-a)^2C_2(x) + R_2(x-a) + R_1.$$

Ésto prueba que mediante sucesivas divisiones por $x - a$, los correspondientes restos son los coeficientes b:

$$b_0 = R_1, b_1 = R_2, \ldots, b_{n-1} = R_n, b_n = a_n.$$

El último resultado es evidente por ser $b_n(x-a)^n$ el único sumando de la igualdad 5.1 que aporta el sumando de orden n, b_nx^n. El problema queda así resuelto, y obsérvese que si el polinomio es de grado n hay que hacer n divisiones.

EJEMPLO: *Expresar el polinomio $x^2 + x + 1$ como potencias de $x - 2$.*

Dividiendo dos veces por $x - 2$ mediante la regla de Ruffini, tenemos:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \\ & 2 & 6 & (2 \\ \hline 1 & 3 & (7 & \\ & 2 & (2 & \\ \hline 1 & (5 & & \end{array}$$

O sea: $x^2 + x + 1 = 7 + 5(x-2) + (x-2)^2$.

Otra manera de solucionarlo es la siguiente, que nos proporciona directamente los coeficientes bes en función de las derivadas del polinomio en el punto a.

Si en la igualdad 5.1 hacemos $x = a$, obtenemos: $P_n(a) = b_0$.

Derivando la misma, tenemos:

$$P'_n(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}.$$

Haciendo $x = a$, tenemos:$P'_n(a) = b_1$.

Derivando de nuevo, se obtiene:

$$P''_n(x) = 2b_2 + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}.$$

Haciendo $x = a$,obtenemos: $P''_n(a) = 2b_2$.

Despejando b_2, resulta:

$$b_2 = \frac{P''_n(a)}{2} = \frac{P''_n(a)}{2!}.$$

Antes de derivar nuevamente, conviene considerar el término $b_m(x-a)^m$ del desarrollo 5.1 $(m \geq 1)$: al derivar m veces dicho desarrollo, los términos anteriores se anulan, por lo visto ya de las derivadas de $(x-a)^n$ (por ser $m > n$ dicha derivada es nula);los posteriores, también pues su única derivada no nula es la de orden $n > m$; en conclusión:

$$P_n^{m)}(a) = m!b_m.$$

Despejando, tenemos:

$$b_m = \frac{P_n^{m)}(a)}{m!}.$$

Así acabamos de deducir la llamada *fórmula de Taylor para polinomios* :

$$\boxed{P_n(x) = P_n(a) + \tfrac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{P_n^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.}$$

5.6. Fórmula de Taylor

Sea $y = f(x)$ una función cualquiera, definida en el intervalo $[a,\, b]$, que posee derivadas en a hasta de orden n. Siempre es posible escribir:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f_n^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + T_n,}$$

siendo $T_n = T(x; a; n)$ una función que depende de a, n y x, llamada *término complementario de grado n.*

Como el término complementario posee propiedades notables, la fórmula es muy útil. Mas antes de comenzar el estudio de las propiedades, conviene observar que los dos primeros términos:

$$f(a) + f'(a)(x-a)$$

forman la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x = a$.

Conviene observar también que, excepto el primero todos tienen la misma forma:

$$\frac{f^h(a)(x-a)^h}{h!},$$

siendo h el orden de la derivada.

5.7. Forma infinitesimal del término complementario

La fórmula de Taylor se puede escribir así:

$$f(x) = P_n(x) + T_n(x),$$

siendo:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f_n^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Por el estudio ya hecho de la fórmula para polinomios, resulta:

$$\begin{aligned} f(a) &= P_n(a) \\ f'(a) &= P_n'(a) \\ f''(a) &= P_n''(a) \\ \cdots & \cdots \cdots \\ f^n(a) &= P_n^n(a). \end{aligned}$$

Al ser:$T_n(x) = f(x) - P_n(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} T_n(a) &= 0 \\ T_n(a) &= 0 \\ T_n(a) &= 0 \\ \cdots & \cdots \cdots \\ T_n^n(a) &= 0. \end{aligned}$$

Las derivadas de orden superior a n, por ser nulas las del polinomio $P_n(x)$, coinciden con las de la función $f(x)$; en particular, la de orden $n+1$.

En conclusión: *El término complementario y sus primeras n derivadas son nulas en $x = a$.Las de orden superior a n son iguales a las de la función.*

Vamos ahora a comparar por cociente los infiniésimos T_n y $(x-a)^n$: aplicando reiteradamente la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{T_n}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{T_n'}{n(x-a)^{n-1}} = \\ = \lim_{x \to a} \frac{T_n''}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} &= \cdots = \lim_{x \to a} \frac{T_n^{n)}}{n!} = \frac{0}{n!} = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia: *El término complementario es un infinitésimo de orden superior a n.*

Ésto se escribe así:

$T_n = 0((x-a)^n)$ (Forma infinitesimal del término complementario).

5.8. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Sea $y = f(x)$ una función que tenga derivadas hasta de segundo orden en todo un intervalo. Se presenta entonces el siguiente problema geométrico:

¿Qué posición relativa tiene la curva y la tangente en un punto cualquiera de ese intervalo?

Si se reflexiona un momento se ve enseguida que la respuesta puede ser de tres clases:

Definición 12 *1) Se dice que la curva es cóncava en $x = a$, o que hay* **concavidad** *en ese punto, si en un entorno del mismo las ordenadas de la curva superan a las de la tangente.*

2) Se dice que la curva es convexa en $x = a$, o que hay **convexidad** *en ese punto, si en un entorno del mismo las ordenadas de la curva son superadas por las de la tangente.*

3)Si a un lado de $x = a$ las ordenadas de la curva superan a las de la tangente, y al otro lado ocurre lo contrario, se dice que en $x = a$ hay **un punto de inflexión.**

Geométricamente, en 1) y mirando en el sentido de las y positivas, la curva queda por encima de la tangente, en un entorno cuya amplitud depende de a.

En 2), la curva queda por debajo de la tangente en un entorno de $x = a$.

En 3), la tangente atraviesa la curva, quedando a un lado por encima, y al otro por debajo.

Aplicando la fórmula de Taylor, tenemos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{2)}(a)(x-a)^2}{2!} + T_2.$$

Como la ecuación de la tangente en $x = a$ es: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ llamaremos y_t a la ecuación anterior:

$$y_t = f(a) + f'(a)(x-a).$$

También será: $y_c = f(x)$ la ordenada de la curva. Entonces tenemos:

$$y_c - y_t = \frac{f^{2)}(a)(x-a)^2}{2!} + T_2.$$

Supongamos que $f^{2)}(a) > 0$. Al ser T_2 un infinitésimo de orden superior a 2, en un entorno conveniente, es insignificante frente al primer sumando, y éste impone su signo. Como es positivo, por serlo los tres factores que lo componen, es: $y_c - y_t > 0$. Por tanto: $y_c > y_t$. En consecuencia, en dicho punto hay concavidad.

Si es $f^{2)}(a) < 0$, por el mismo razonamiento anterior, es: $y_c - y_t < 0$, y en dicho entorno es: $y_c < y_t$, y hay convexidad.

Es evidente entonces que *para que haya un punto de inflexión es condición necesaria que sea nula la derivada segunda:* $f''(a) = 0$.

5.9. Discusión general de máximos y mínimos

Sea $f(x)$ un función cuyas derivadas en $x = a$ son todas nulas hasta la de orden $n - 1$, siendo la de orden n la primera no nula: $f^{n)}(a) \neq 0$. ¿Qué clase de punto es $x = a$: máximo, mínimo o punto de inflexión?

Aplicando la fórmula de Taylor, tenemos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{n)}(a)(x-a)^n}{n!} + T_n.$$

A)*Sea n par*. Entonces, si $f^{n)}(a) > 0$ por ser siempre positivo $(x - a)^n$ es: $f(x) > f(a)$, pues T_n es muy pequeño en realción al primer sumando, por ser un infinitésimo de orden superior. En consecuencia, en un entorno de a, es $f(a)$ menor que todos los valores de ese entorno, *y hay un mínimo relativo.* (La condición necesaria se cumple por ser $f'(a) = 0$).

Si $f^{n)}(a) < 0$, por ser positivo $(x - a)^n$ es negativo $\frac{f^{n)}(a)(x-a)^n}{n!}$, y por el mismo razonamiento anterior es $f(x) < f(a)$. Por tanto *hay un máximo relativo en a.*

B)*Sea n impar*. En este caso, si $x > a$ es $(x - a)^n > 0$, y si $x < a$ es $(x - a)^n < 0$. Independientemente del signo de $f^{n)}(a)$, a un lado de a el signo de $\frac{f^{n)}(a)(x-a)^n}{n!}$ es positivo, y al otro, negativo; T_n, en cierto entorno de a es muy pequeño en relación al primer sumando. En conclusión: a un lado de a es $f(x) > f(a)$,y al otro, $f(x) < f(a)$, en ese entorno. La tangente en el punto es horizontal por ser $f'(a) = 0$: su ecuación es $y = f(a)$. Por consiguiente, a un lado la curva está por encima de la tangente, y al otro, por debajo: *en $x = a$ hay un punto de inflexión.*

5.10. Forma de Lagrange del término complementario

El término complementario $T_n(x)$ es una función que se anula en $x = a$ como todas sus derivadas hasta la de orden n. Claramente se ve que las derivadas de orden $n+1$ y siguientes existen y son iguales a las de $f(x)$, si ésta es derivable en estos órdenes, pues el polinomio de Taylor, al ser de grado n, tiene éstas nulas.

La función $(x-a)^{n+1}$ se anula en $x = a$, como todas sus derivadas, excepto la de orden $n+1$ que vale $(n+1)!$; además ella y sus derivadas *no se anulan excepto en* $x = a$.

Supongamos ahora la siguiente *hipótesis*: *existen* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n)}(x)$ *y* $f^{n+1)}(x)$ *en entorno de* a.

Podemos entonces aplicar el teorema generalizado de Cauchy en el intervalo cerrado $[a,\, x], x > a$:

$$\frac{T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{T_n(x) - T_n(a)}{(x-a)^n - (a-a)^n} = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

De aquí resulta:

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

llamada *forma de Lagrange del término complementario.* Esta fórmula tiene la misma estructura de los términos del desarrollo de Taylor, con la única variación de la derivada en el punto ξ, dependiente de a, x y n.

Escolios: 1) Si la derivada $f^{n+1)}(x)$ está acotada en un entorno de $x = a$, la forma infinitesimal es consecuencia de la de Lagrange, pues $T_n(x)$ es el producto de $(x-a)^{n+1}$ por un infinitésimo: si K es la cota del valor absoluto de $f^{n+1)}$ en cierto entorno de a, tenemos:

$$0 \leq \frac{f^{n+1)}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq K\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Pero cuando la derivada no está acotada, la forma infinitesimal no se deduce de ésta.

Veamos un ejemplo: $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que tiene $f(0) = 0, f'(0) = 0$. La derivada primera es:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

que no está acotada en ningún entorno del origen.

5.11. Expresiones varias de la fórmula de Taylor

Formas equivalentes de la fórmula de Taylor resultan de cambiar la forma a los extremos, todas muy usadas y útiles.

Sea $h = b - a$ la longitud del intervalo,entonces la fórmula adquiere esta forma muy usual:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}h^n + T_n. \tag{5.2}$$

El número ξ que aparece en la forma de Lagrange del término complementario es un número comprendido entre a y $a+h$; por tanto se puede escribir en la forma $a + \theta h$, siendo θ un número comprendido entre cero y uno: $0 < \theta < 1$. En consecuencia, el término de Lagrange toma la forma:

$$T_n = \frac{f^n(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \qquad (0 < \theta < 1).$$

Si es $a = 0$ y $b = x$, la fórmula de Taylor es entonces así, en una forma llamada impropiamente *fórmula de Mac-Laurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} + T_n.$$

Al ser $a = 0, b = x$ es $h = x$, y el anterior término de Lagrange se convierte en:

$$T_n = \frac{f^{n+1}(\theta\, x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

La forma infinitesimal es entonces:

$$T_n = o(x^n).$$

§3. DESARROLLOS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

5.12. Desarrollo de la función exponencial

A) Función $y = e^x$.

Al ser todas sus derivadas iguales a e^x y tomar éstas en $x = 0$ el valor $e^0 = 1$, obtenemos:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad (0 < \theta < 1).}$$

B) Función $y = a^x$.

Como $a^x = e^{x \ln a}$, obtenemos del desarrollo anterior:

$$\boxed{a^x = 1 + x\,\ln a + \frac{\ln^2 a}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}\,x^n + \frac{\ln^{n+1} a}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,e^{\theta x \ln a}.}$$

5.13. Función logarítmica

Sea $y = \ln x$ que no está definida en el origen. La derivada primera es: $\frac{1}{x} = x^{-1}$; a partir de este resultado es fácil deducir que la derivada enésima es:

$$y^{n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

El alumno, como ejercicio, puede también demostrar esta fórmula por inducción.

Como $\ln x$ no está definida en el origen, en su lugar desarrollaremos $y = \ln(1+x)$, que sí lo está: las derivadas enésimas vienen dadas entonces por:

$$y^{n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Luego: $y^{n)}(0) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!$. En conclusión, obtenemos:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + T_n.}$$

Además:

$$T_n = (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\,(1+\theta x)^{-(n+1)} \text{ (Lagrange)}.$$

5.14. Desarrollos del seno y coseno

A)Función seno: $y = \operatorname{sen} x$.

Las derivadas sucesivas de $y = \operatorname{sen} x$ son:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\operatorname{sen} x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{IV} = \operatorname{sen} x, \quad \ldots$$

Como se deduce de los resultados anteriores, las derivadas se repiten periódicamente, en un periodo de cuatro elementos.

Si n es un natural cualquiera y lo dividimos por 4 en división entera: $n = 4c + r$ es $r < 4$, y resulta: $y^{n)} = y^{r)}$.

Ejercicio: Probar por inducción que la derivada enésima de $y = \operatorname{sen} x$ es:

$$y^{n)} = \operatorname{sen}(x + n\pi/2).$$

Los valores de la función y de estas derivadas sucesivas en $x = 0$ son:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1, \quad y^{IV}(0) = 0, \quad \ldots$$

Con estos valores, obtenemos:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \cdots \pm \tfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \mp \tfrac{x^{2m}}{(2m)!} \operatorname{sen} \theta x}.$$

B) Función $y = \cos x$.

Las derivadas sucesivas de la función son:

$$y' = -\operatorname{sen} x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \operatorname{sen} x, \quad y^{IV} = \cos x, \quad \ldots$$

con lo cual resulta que las derivadas se repiten de cuatro en cuatro, y se puede afirmar como en el seno:

$$y^{n)} = y^{r)},$$

siendo r el resto de la división entera por 4.

Los valores de la función y las derivadas sucesivas en $x = 0$ son:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{IV}(0) = 1, \quad \ldots$$

Así obtenemos el siguiente desarrollo de Mac-Laurin, con el término de Lagrange:

$$\boxed{\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \cdots \pm \tfrac{x^{2m}}{2m!} \mp \tfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\, \operatorname{sen} \theta x}.$$

5.15. Función potencial

Sea $y = x^\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. Si α es natural, la función se reduce a un polinomio, y tiene poco interés, así que excluiremos este caso. Entonces, tenemos las siguientes derivadas sucesivas:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-2}, \quad \ldots$$

Si $\alpha > 0$, al cabo de unas cuantas derivaciones la x tendrá exponente negativo y no será derivable en $x = 0$; si $\alpha < 0$, es la propia función la que no está definida allí. Por esta razón en vez de x^α desarrollaremos la función $y = (1+x)^\alpha$.

En ésta, el cociente $f^{n)}(0)/n!$ vale:

$$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Con este dato, tenemos:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tbinom{\alpha}{2}x^2 + \tbinom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \tbinom{\alpha}{n}x^n + T_n,}$$

que es una generalización de la fórmula del binomio.

Es claro que, como α puede ser irracional, $\binom{\alpha}{n}$ no es número de combinación ninguna, pero usamos la notación de número combinatorio por su claridad. Igualmente, $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1) = V_{\alpha,n}$, aunque esta notación no tenga significado combinatorio, por no ser α natural.

Por lo ya visto en las derivadas de $(x-a)^n$ la derivada enésima de $(1+x)^\alpha$ es:

$$y^{n)} = V_{\alpha,n}(1+x)^{\alpha-n}.$$

Aplicando la forma de Lagrange al término complementario, resulta:

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \qquad (0 < \theta < 1).$$

5.15.1. Casos particulares

A)Si $\alpha = -1$, es:

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = (-1)^2,$$

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = (-1)^3, \quad \ldots \binom{-1}{n} = (-1)^n.$$

Aplicando estos datos, obtenemos:

$$\boxed{\tfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + T_n.}$$

Si en la fórmula anterior ponemos en lugar de x, x^2, obtenemos el desarrollo de $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\boxed{\tfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + T_n.}$$

Este desarrollo de la derivada de $\operatorname{arc\,tg} x$ será usado más adelante para obtener el del arco tangente.

B) Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, es:

$$\binom{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}, \quad \binom{\frac{-1}{2}}{2} = \frac{(-1)^2\, 1\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3!!}{4!!}, \quad \ldots \binom{\frac{-1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Expliquemos la notación $n!!$: llamamos *semifactorial de n al producto de todos los naturales menores que n y que tienen su misma paridad (son pares o impares según lo sea n).*

Así: $8!! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2 = 384$. $5!! = 5\cdot 3\cdot 1 = 15$.

Por tanto:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \cdots + (-1)^n \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + T_n.}$$

Si en éste sustituimos x por $-x^2$, obtenemos:

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} + T_n.}$$

Así hemos obtenido el desarrollo de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, que es la derivada de $\operatorname{arc\,sen} x$ y que será usado para obtener el desarrollo de éste último.

5.16. Funciones circulares inversas

Integrando los desarrollos de $\frac{1}{1+x^2}$ y de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, obtenemos:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_n.}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + T_n.}$$

Usando teoremas del valor medio de Cálculo Integral es posible también calcular los dos términos complementarios de los desarrollos anteriores, pero ahora no los calcularemos; bástenos saber que ambos son infinitésimos de orden superior al último sumando.

§4. APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

5.17. Orden y parte principal de un infinitésimo para $x \to a$.

La fórmula de Taylor de una función en $x = a$ nos proporciona inmediatamente el orden y la parte principal de un infinitésimo para $x = a$: dicha parte es el sumando de menor orden del desarrollo. El exponente de dicha parte es el orden.

Ejemplo : Orden y parte principal de los siguientes infinitésimos, para $x \to 0$:

$$x \operatorname{sen} x, \quad x\cos x - \operatorname{sen} x, \quad e^x - \cos x, \quad x\cos x - \ln(1+x).$$

1) De $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + T_3$ deducimos: $x \operatorname{sen} x = x^2 + \cdots$ y los puntos suspensivos ocupan el lugar de infinitésimos de orden superior que no necesitamos para nada, y por tanto, podemos no escribir.

La parte principal es x^2 y es de segundo orden.

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$, luego: $x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \cdots$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$ Restando ambos resulta:

$$x\cos x - \operatorname{sen} x = x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \cdots = -\frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

Luego $x\cos x - \operatorname{sen} x$ *es de tercer orden y su parte principal es* $-\frac{1}{3}x^3$.

3) De $e^x = 1 + x + \cdots$ y $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$, deducimos:

$$e^x - \cos x = x + \cdots.$$

Luego $e^x - \cos x$ *tiene* x *como parte principal, y es de primer orden.*

4) Ya hemos visto que: $x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + \cdots$

También: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$. Restando ambas, tenemos:

$$x\cos x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + \cdots$$

En consecuencia, $x\cos x - \ln(1+x)$ *es de segundo orden y la parte principal es:* $\frac{x^2}{2}$.

5.18. Cálculo de límites

El cálculo de límites de cocientes y productos en los casos de indeterminación se hace muy rápidamente por medios de los desarrollos de Taylor de las funciones componentes; el término complementario no se escribe generalmente, porque lo único que necesitamos conocer de él es ser de mayor orden que los sumandos precedentes;y cuando se escribe, es en forma infinitesimal.

Ejemplo 1: Calcular los límites:

$$a) \lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right); b) \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos 3x)}.$$

a) En el primer caso tenemos: $\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$. Pero el infinitésimo del numerador ha sido estudiado ya, y es de tercer orden, mientras que el denominador es de dos: el límite pedido es cero.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3 + \cdots}{x^2 + \cdots} = 0.$$

b) Por los desarrollos del seno y del coseno es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - (x - x^3/6 + \cdots)}{x(9x^2/2 - \cdots)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/6 + \cdots}{9x^3/3 + \cdots} = \frac{1}{27}.$$

Ejemplo 2: Calcular los límites:

$$a) \lim_{x\to 0} \operatorname{cosec} x \cdot \ln(1+x); \qquad b) \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1}{1-\cos\frac{x}{2}}.$$

SOLUCIONES:

$$a) \operatorname{cosec} x \cdot \ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{x-\cdots}{x-\cdots} \to 1.$$

$$b) \frac{e^{-x^2}-1}{1-\cos x} = \frac{-x^2+\cdots}{\frac{x^2}{2}+\cdots} \to \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

5.19. Cálculo numérico de funciones

Tomando en la fórmula de Taylor más o menos términos, según sea la aproximación a conseguir, se obtiene un valor aproximado; acotando el término complementario, se obtiene una cota del error producido.

Ejemplo: Calcular $\operatorname{sen} 1$ *y* $\cos 1$ *con cuatro cifras exactas (o sea un error inferior a* $0,0001$.*)*

Siendo: $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40{,}320$, $9! = 362{,}880$, vemos que la primera factorial superior a 10,000 es 8!, y nos fijamos en ésta al ser:

$$\frac{1}{10{,}000} = 0,0001.$$

Desarrollando el seno hasta x^7 con el resto de Lagrange, tenemos:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5{,}040} + \frac{x^8 \operatorname{sen} \theta x}{40{,}320}.$$

Con lo cual tenemos:

$$\operatorname{sen} 1 \sim 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5{,}040}.$$

El error de esta aproximación se puede calcular con el término complementario:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{40{,}320} < 1/40{,}320 = 0,000024\ldots < 0,00003.$$

De los cuatro sumandos de la aproximación, sólo el 1 no produce error, pues los otros tres dan lugar a expresiones decimales infinitas periódicas, de las que sólo tomaremos cinco cifras (una más de la aproximación perseguida), *por lo que producimos nuevos errores:*

$$\frac{1}{6} = 0,16666\ldots, \quad \frac{1}{120} = 0,00833\ldots, \quad \frac{1}{5{,}040} = 0,00019\ldots$$

Haciendo la suma algebraica de estos cuatro números, tenemos:

$$\operatorname{sen} 1 \sim (1 + 0,00833) - (0,16666 + 0,00019) = 0,84148.$$

El error del número $0,84148$ es menor que: $0,00003 + 0,00003 = 0,00006$. Las segundas tres centesimas es una cota del error producido por tomar únicamente cinco cifras en tres expresiones decimales infinitas:

$$0,00001 \times 3 = 0,00003.$$

Si quitamos la cifra 8 y nos quedamos con $0,8414$ el error es:

$$0,00008 + 0,00006 = 0,00014 > 0,00001.$$

Si tomamos $0,8415$, por ser:$0,8415 - 0,84148 = 0,00002$, tenemos un error total inferior a:

$$0,00002 + 0,00006 = 0,00008 < 0,0001.$$

Luego el valor $0,8415$ es el buscado:

$$\boxed{\operatorname{sen} 1 \sim 0,8415.}$$

El valor que nos da una calculadora de bolsillo, con siete cifras exactas es:

$$\operatorname{sen} 1 = 0,8414709\ldots,$$

y, efectivamente, el valor dado tiene cuatro cifras exactas:

$$0,8415 - 0,8414709\ldots < 0,8415 - 0,8414 = 0,0001.$$

Calculemos ahora el coseno, desarrollando hasta el grado octavo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40{,}320} - \frac{x^9 \operatorname{sen} \theta x}{362{,}880}.$$

Poniendo $x = 1$, tenemos:

$$\cos 1 \sim 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \frac{1}{40{,}320}.$$

De los cinco sumandos, los dos primeros no producen error alguno, pero sí los otros tres, que tienen expresiones decimales periódicas. Haciendo la suma algebraica, tenemos:

$$\cos 1 \sim 0,54030.$$

El error de este valor es:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{362{,}880} < 1/362{,}880 = 0,0000027\ldots < 0,00001.$$

Al tomar cinco cifras de los tres desarrollos periódicos, el error de estos valores aproximados es menor que: $0,00001 \times 3 = 0,00003$; sumándole la cota $0,00001$ del error del desarrollo, resulta un error total menor que $0,00004$. Luego el valor obtenido tiene un error menor que $0,0001$; prescindiendo de la cifra cero, que no aumenta el error (cosa que sí hacía antes la cifra 8), tenemos:

$$\boxed{\cos 1 \sim 0,5403.}$$

La calculadora de bolsillo nos da el valor: $\cos 1 = 0,5403023\ldots$.

5.20. Desarrollos en serie

Sea $f(x)$ una función, definida en $[-a, a]$, que sea *derivable en todos los órdenes, estando acotadas todas sus derivadas:*

$$|f^{n)}(x)| \leq K, \text{ para todo } n.$$

Una función de esta clase es $y = \operatorname{sen} x$, cuya derivada enésima es:

$$y^{n)} = \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2}),$$

que está acotada en todo intervalo $[-a, a]$.

El desarrollo de Mac-Laurin es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{2)}(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{n)}(0)x^n}{n!} + T_n.$$

El término complementario escrito en la forma de Lagrange es:

$$T_n = \frac{f^{n+1)}(\theta_n x)x^{n+1}}{(n+1)!},$$

siendo $0 < \theta_n < 1$, y habiendo un θ_n para cada valor de n.

Por la acotación de las derivadas, tomando valores absolutos es:

$$0 \leq |T_n| \leq \frac{K|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Hagamos tender n a infinito: entonces $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, luego:

$$T_n \to 0.$$

Entonces resulta:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{2)}(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{n)}(0)x^n}{n!} + \cdots,$$

y acabamos de obtener *el desarrollo en serie de Mac-Laurin de la función* $f(x)$.

Ejemplos notables son:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \mp \cdots.}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^{2m}}{2m!} \mp \cdots}.$$

NOTA: Es fácil ver por cálculo directo (fórmula de Stirling o acotación) que $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$. Una manera indirecta y elegante de verlo es considerar la serie de términos positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

cuya convergencia se obtiene inmediatamente por el criterio del cociente. Por tanto debe cumplir la condición necesaria de convergencia:

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$