Respuestas del examen de Cálculo de 29—I—2016

1. a) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8m, y el ángulo horizontal $60°$. Resolverlo. b) El módulo de un complejo es 8, y su argumento sesenta grados sexagesimales. Escribir su forma binómica. c) Forma binómica de la potencia de exponente 60 del complejo anterior.

Respuestas: a) En el triángulo de la figura:

tenemos: $\dfrac{b}{8} = \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\qquad \dfrac{c}{8} = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$. Luego:

$$b = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m = 4\sqrt{3} m, \qquad c = 8 \cdot \frac{1}{2} m = 4m.$$

Queda el ángulo $C = 90° - 60° = 30°$.

b) Tenemos: $8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 8(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 4 + 4\sqrt{3}i$.

c) Por tener la potencia exponente 60 debemos aplicar la fórmula de Moivre:

$$[m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = m^n(\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha).$$

En este caso:

$$[8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)]^{60} = 8^{60}(\cos 60 \times 60° + i \operatorname{sen} 60 \times 60°) = 8^{60}(\cos 3600° + i \operatorname{sen} 3600°) = 8^{60} = 2^{180},$$

pues $3600° = 10 \times 360°$ y: $\operatorname{sen} 3600° = \operatorname{sen} 0° = 0, \qquad \cos 3600° = \cos 0° = 1.$

2. a) Deducir la expresión de $(A-B)^3$ a partir de $(A-B)^2$. b) Aplicación: Por reducción al absurdo probar que $\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}$ es irracional. c) Explicar cómo es la expresión decimal de un irracional.

Respuestas: a) Siendo: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} (A-B)^3 = (A-B)^2 \cdot (A-B) &= (A^2 - 2AB + B^2) \cdot (A-B) = \\ = A^3 - 2A^2B + AB^2 - A^2B + 2AB^2 - B^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3. \end{aligned}$$

Como se ha dicho muchas veces, *en el resultado final tienen que estar reducidos los términos semejantes.*

b) Supongamos que $\sqrt[3]{7} + \sqrt{2}$ fuese racional: $r = \sqrt[3]{7} + \sqrt{2}, r \in \mathbf{Q}$. Entonces:

$$\sqrt[3]{7} = r - \sqrt{2}.$$

Elevando al cubo los dos miembros, tenemos:

$$7 = (r - \sqrt{2})^3 = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 6r - 2\sqrt{2}.$$

Pasando al primer miembro los términos que no tienen a $\sqrt{2}$ resulta:

$$7 - r^3 - 6r = (-3r^2 - 2)\sqrt{2}.$$

Despejando $\sqrt{2}$, llegamos a:

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 7}{3r^2 + 2}.$$

Esto último es *una contradicción, porque el primer miembro es irracional, y el segundo racional.* A esto se ha llegado por suponer que el citado número es racional; luego es irracional.

c) La expresión decimal de un irracional es *infinita y no periódica.*

3. Calcular los límites:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+2}\right); \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{10^2 + 19^2 + 28^2 + \cdots + (9n+1)^2}{n^3}; \qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{5n+3}\right)^{2n+1}.$$

Respuestas: a) Como $\dfrac{\pi}{n+2} \to 0$ cuando $n \to \infty$, aplicamos la equivalencia: $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, válida cuando $x \to 0$, y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2 n^2}{2(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

b) Este límite necesita el criterio de Stolz para su resolución, pues el número de sumandos del numerador crece sin cesar a medida que aumenta n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}.$$

En este caso:

$$A_n = 10^2 + 19^2 + 28^2 + \cdots + (9n-8)^2 + (9n+1)^2, \qquad A_{n-1} = 10^2 + 19^2 + 28^2 + \cdots + (9n-8)^2;$$

luego:

$$A_n - A_{n-1} = (9n+1)^2.$$

$B_n = n^3, \qquad B_{n-1} = (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$; luego:

$$B_n - B_{n-1} = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = 3n^2 - 3n + 1.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^2 + 19^2 + 28^2 + \cdots + (9n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(9n+1)^2}{3n^2 + 3n - 1} = \frac{81}{3} = 27.$$

c) Este límite es del tipo 1^∞; aplicándole la fórmula de los límites de este tipo: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1)}$, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{5n+3}\right)^{2n+1} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-6n-3}{5n+3}} = e^{-6/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^6}},$$

pues: $\dfrac{5n}{5n+3} - 1 = \dfrac{-3}{5n+3}$.

4. Determinar el carácter de las series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}; \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+4}\right)^{3n+2}; \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+5}.$$

Respuestas: a) Por ser un cociente el término general, aplicamos el criterio del cociente: $C = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. En este caso:

$$a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)2n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)(3n+1)}, \qquad a_{n-1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)2n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}.$$

Así: $C = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+1} = 2/3 < 1$.
Luego *la serie es convergente.*

b) El criterio de la raíz es el adecuado para un término general con forma de potencia: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.
Entonces:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+4}\right)^{3n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+4}\right)^{\frac{3n+2}{n}} = (1/2)^3 = 1/8 < 1.$$

Luego *la serie es convergente.*

c) Si multiplicamos el término general por $n^{1/2} = \sqrt{2}$, resulta:

$$n^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}+5} \underset{3}{=} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+5} \to 1,$$

cuando $n \to \infty$.

Hemos aplicado así el criterio de Pringsheim con $\alpha = 1/2 < 1$. Luego *la serie diverge.*

5. a) Enunciar y demostrar el teorema de Rolle.

b) Calcular las constantes a, b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x < 2; \\ cx + 1 & \text{si} \quad x \geq 2, \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

Respuestas: a) El enunciado del teorema es el siguiente:

Teorema de Rolle.—*Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en (a, b), y es: $f(a) = f(b)$, existe, al menos, un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(x_0) = 0.$$

La demostración puede verse en los apuntes de Internet.

b)La primera condición que debe cumplir es ser continua en $[0, 4]$. El único punto donde no puede serlo es $x = 2$. Veamos los límites laterales allí:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b; \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2c + 1.$$

Igualándolos se llega a la ecuación: $2a + b - 2c = -3$.

La segunda, por deber ser derivable en $(0, 4)$, es que las derivadas laterales coincidan en $x = 2$. Por ser:

$$(x^2 + ax + b)' = 2x + a, \text{y } (cx + 1)' = c,$$

tenemos:

$$f'_-(2) = 4 + a, \quad f'_+(2) = c,$$

lo que nos proporciona la ecuación:$a - c = -4$.

La tercera condición es que: $f(a) = f(b)$. Y es: $f(0) = b, \quad f(4) = 4c+1$. Y tenemos la ecuación: $b - 4c = 1$. Obtenemos así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 2a + b - 2c &= -3 \\ a - c &= -4 \\ b - 4c &= 1 \end{aligned}$$

Sus soluciones son: $a = -3, b = 5, c = 1$. Por tanto, la función pedida y sus derivada son:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x < 2; \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 2, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x < 2; \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

La solución de $2x - 3 = 0$ es $x_0 = \dfrac{3}{2}$, que es el punto donde se cumple la tesis del teorema.

6. Calcular los límites:

$$a) \lim_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}; \qquad b) \lim_{x \to +\infty} (e^{-x}\sqrt{x}); \qquad c) \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{2/x}.$$

Respuestas: a) Es un límite del tipo 1^∞, y aplicamos su fórmula:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} e^{\lim_{x \to a} g(x)(f(x)-1)}}.$$

Por tanto:$\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{e^x + x - 1}{x}} = e^2$,
porque:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1}{1} = 2,$$

habiéndose aplicado la regla de L'Hôpital.

b) El límite es del tipo $0 \times \infty$. Se puede escribir en la forma $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$, que es del tipo ∞/∞, a la cual podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0,$$

pues la derivada de $\sqrt{x}$ es: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, y la de e^x ella misma.

c) El límite es del tipo $(+\infty)^0$. Es necesario para resolverlo tomar logaritmos: sea $y = (\ln x)^{2/x}$ y $\ln y = 2/x \ln(\ln x)$. Tomando límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln(\ln x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x \ln x} = 0,$$

habiéndose aplicado la regla de L'Hôpital: la derivada de $\ln(\ln x)$ es: $\dfrac{1}{x \ln x}$.
Ahora bien: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln y = \ln(\lim\limits_{x \to +\infty} y) = 0$. Luego: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = e^0 = 1$.

Nota importante: Es un gran error creer que todos los límites del tipo $(+\infty)^0$ *tienen que valer* 1, *pues, se pueden poner ejemplos cuyos límites son cualesquiera, incluido la inexistencia del límite.*

7. a) Enunciar el teorema fundamental de los límites finitos.

b) Explicar por qué, a partir de cierto término, es: $\dfrac{n}{n+7} > 1/2$. ¿A partir de qué término ocurre eso?

c) De lo anterior se deduce :$\dfrac{\pi n}{n+7} > \pi/2$. Usando el ángulo suplementario, calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{n+7}$.

d) Carácter de la serie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \dfrac{\pi n}{n+7}$.

Respuestas: a) El teorema fundamental dice lo siguiente:

Teorema Fundamental de los límites finitos.—*A partir de cierto término, éstos son mayores que un número menor que el límite. Análogamente, son superados por un número mayor que el límite.*

b) Por ser: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+7} = 1 > 1/2$, a partir de cierto término todos son mayores que 1/2. Resolviendo la inecuación:
$\dfrac{n}{n+7} > 1/2$, tenemos: $n > 7$. En efecto, para $n = 7$ sale: $7/(7+7) = 1/2$; para $n = 8$, es: $a_8 = 8/(8+7) = 8/15 > 8/16 = 1/2$.

c) Desde que $n \geq 8$, es: $\dfrac{n}{n+7} > 1/2$, multiplicando ambos miembros por π, tenemos: $\dfrac{\pi n}{n+7} > \pi/2$. Por estar el ángulo $\dfrac{\pi n}{n+7}$ en el segundo cuadrante, su seno es igual al de su suplementario: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$; en consecuencia:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+7} = \operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi n}{n+7}) = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{n+7}.$$

Cuando $n \to \infty$, $\dfrac{7\pi}{n+7} \to 0$, y aplicando la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim x$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{n+7} = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{7\pi}{n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\pi n}{n+7} = 7\pi.$$

d) El límite anterior es el resultado de aplicar el criterio de Pringsheim a la serie dada con $\alpha = 1$: por tanto, *la serie es divergente.*

8. Por inducción completa probar que la derivada enésima de $y = \ln(x+1)$ es:

$$y^{n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Respuestas: Sabemos que la derivada primera de $y = \ln(x+1)$ es: $y' = \dfrac{1}{x+1} = (-1)^0 \dfrac{0!}{x+1}$, pues: $(-1)^0 = 1$, y, según un convenio de Combinatoria, $0! = 1$. La propiedad, pues, es cierta para $n = 1$.

Tenemos que probar que si es cierta la propiedad para $n = h$, también lo es para $n = h + 1$. Supongamos que la derivada de orden h sea:

$$y^{h)} = (-1)^{(h-1)} \frac{(h-1)!}{(x+1)^h} = (-1)^{(h-1)}(h-1)!(x+1)^{-h}.$$

Teniendo en cuenta la última expresión, y que la derivada de x^α es: $\alpha x^{\alpha-1}$, para todo valor de α real, derivando $y^{h)}$ obtenemos:

$$y^{h+1)} = (-1)^{h-1}(-h)(h-1)!(x+1)^{-h-1} = (-1)^h \frac{h!}{(x+1)^{h+1}},$$

porque: $h(h-1)! = h!$, y el menos uno de $-h$ se ha asociado con la potencia de -1 del comienzo;además, la potencia de $(x+1)$ se ha escrito con exponente positivo, y hemos obtenido la fórmula dada, escrita para $n = h + 1$.

9. a)Escribir la fórmula de Taylor de $y = f(x)$ en $x = a$ hasta el grado n.

b) Escribir los desarrollos de las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ hasta el grado 7, en $x = 0$.

c) Se llama seno hiperbólico, $\operatorname{Sh} x$, a la función:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Usar b) para obtener el desarrollo de Taylor de $\operatorname{Sh} x$, en $x = 0$, hasta el grado 7.

d) Aplicación: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Sh} x - x}{x^3}$. ¿Cuál es el orden del infinitésimo $\operatorname{Sh} x - x$?

Respuestas: a) La fórmula de Taylor escrita en $x = a$ es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{n)}(a)(x-a)^n}{n!} + T_n$$

siendo T_n el llamado *término independiente*, y que es una función de x, a y n:

$$T_n = T_n(x, a, n).$$

Error frecuente de muchos alumnos es escribirla sin el término independiente.

b) Como todas las derivadas de $y = e^x$ son iguales a ella misma, y es: $e^0 = 1$, tenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + T_7.$$

Cambiando x por $-x$ resulta:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + T_7',$$

donde T_7' se obtiene cambiando x por $-x$ en T_7, y siendo ambos infinitésimos de orden superior al séptimo.

c) Restando ambos desarrollos anteriores, tenemos:

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + 2\frac{x^7}{7!} + T_7 - T_7'.$$

Dividiendo por 2:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{T_7 - T_7'}{2}.$$

Llamando U_7 a $\dfrac{T_7 - T_7'}{2}$, resulta:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + U_7,$$

que es el desarrollo pedido.

Como ejercicio, el alumno puede probar fácilmente dos cosas: 1) que U_7 es un infinitésimo cuando $x \to 0$; y: 2) su orden es superior al séptimo.

d) Del desarrollo anterior, tenemos:

$$\operatorname{Sh} x - x = \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

indicando los puntos suspensivos infinitésimos de orden superior al tercero. Dividiendo por x^3, tenemos:

$$\frac{\operatorname{Sh} x - x}{x^3} = 1/3! + \cdots \to 1/3!$$

ya que los puntos suspensivos son cocientes de infinitésimos de orden superior al tercero por x^3, y dichos cocientes tienden a cero, cuando $x \to 0$.

El orden pedido es el tercero, evidentemente.