4.5 EJEMPLOS

4.5.1 EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 *Sea X una v.a. que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente tabla:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x_i)$	0.05	0.10	0.10	0.10	0.20	0.25	0.15	0.05

1. *Verificar que $p(x)$ es función de probabilidad.*
2. *Obtener $E[X]$ y $var[X]$*
3. *Calcular la probabilidad de que en una hora no lleguen menos de 4 clientes.*
4. *Representar gráficamente $F(X)$.*

Solución.-

1. Para comprobar que $p(x)$ es función de probabilidad bastará verificar que:

   (a) $p(x_i) \geq 0 \quad , \quad \forall i$

   (b) $\sum_{i=0}^{7} p(x_i) = 1$

   Observese que efectivamente $p(x_i) \geq 0 \quad , \quad \forall i$ y $\quad 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.25 + 0.15 + 0.05 = 1$

2. Para obtener el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria X, tendremos en cuenta que:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p[X = x_i] = \mu \tag{4.1}$$

$$var[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p[X = x_i] = \sigma^2 \tag{4.2}$$

   en el caso de la varianza será más cómodo utilizar la fórmula reducida:

$$var[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \tag{4.3}$$

   Por tanto, realizando los cálculos oportunos resulta:

$$E[X] = 0 * 0.05 + 1 * 0.1 + 2 * 0.1 + 3 * 0.1 + 4 * 0.2 + 5 * 0.25 + 6 * 0.15 + 7 * 0.05 = \mathbf{3.9} \quad clientes$$

$$E\left[X^2\right] = 0^2 * 0.05 + 1^2 * 0.1 + 2^2 * 0.1 + 3^2 * 0.1 + 4^2 * 0.2 + 5^2 * 0.25 + 6^2 * 0.15 + 7^2 * 0.05 = 18.7$$

$$var[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = 18.7 - (3.9)^2 = \mathbf{3.49}$$

3. Se nos pide calcular $p[X \geq 4]$, es decir:

$$p[X = 4] + p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7]$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} p[X &\geq 4] = p(4) + p(5) + p(6) + p(7) \\ p[X &\geq 4] = 0.2 + 0.25 + 0.15 + 0.05 = \mathbf{0.65} \end{aligned}$$

Calculemos la función de distribución *(F.d.D.)* de esta variable aleatoria de tipo discreto; sabemos que:

$$F(x) = p[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} p[X = x_i] \qquad \forall\, x \in \Re \tag{4.4}$$

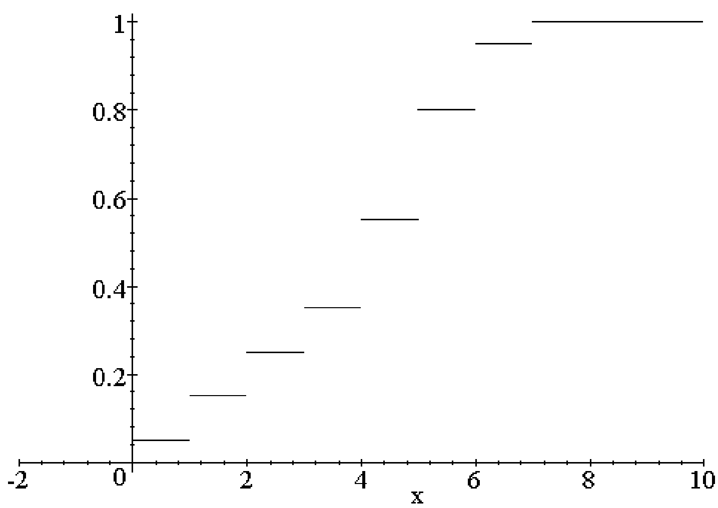
Por ello:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 0.05 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.05 + 0.1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 & si \quad 4 \leq x < 5 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.25 & si \quad 5 \leq x < 6 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.25 + 0.15 & si \quad 6 \leq x < 7 \\ 0.05 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.25 + 0.15 + 0.05 & si \quad 7 \leq x \end{cases}$$

resultando:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 0.05 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.15 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.25 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.35 & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.55 & si \quad 4 \leq x < 5 \\ 0.8 & si \quad 5 \leq x < 6 \\ 0.95 & si \quad 6 \leq x < 7 \\ 1 & si \quad 7 \leq x \end{cases}$$

Bastará con representar esta función escalonada:



NOTA 1 *Utilizando la función de distribución (F.d.D.) , el apartado número 3 se podría haber resuelto del siguiente modo:*

$$p[X \geq 4] = 1 - p[X < 4] = 1 - p[X < 4] - p[X = 4] + p[X = 4]$$

$$p[X \geq 4] = 1 - p[X \leq 4] + p[X = 4]$$

$$\mathbf{p[X \geq 4] = 1 - F(4) + p(4)}$$

$$p[X \geq 4] = 1 - 0.55 + 0.2 = \mathbf{0.65}$$

Ejercicio 2 *Consideremos el lanzamiento de dos dados. Si X es v.a. y representa la suma de las caras.*

1. *Calcular la función de probabilidad de X.*
2. *Obtener $E[X], var[X]$ y la F.d.D. de la varible aleatoria X.*
3. *Calcular: $p[X > 7]$, $p[X = 7]$, $p[5 \leq X \leq 9]$*

Solución.-

1. El espacio muestral en el lanzamiento de dos dados sería:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Si X representa la suma de las caras en el lanzamiento de dos dados , los posibles valores x_i que podrá tomar la variable serán:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

cuyas probabilidades asociadas, utilizando la regla de laplace, serían:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p[X = x_i]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Para calcular la esperanza matemática de la v.a. X utilizaremos la expresión 4.1, resultando:

$$E[X] = 2 * \frac{1}{36} + 3 * \frac{2}{36} + 4 * \frac{3}{36} + ... + 10 * \frac{3}{36} + 11 * \frac{2}{36} + 12 * \frac{1}{36} = \mathbf{7}$$

En cuanto al cálculo de la varianza utilizaremos la fórmula reducida 4.3 , siendo:

$$E[X^2] = 2^2 * \frac{1}{36} + 3^2 * \frac{2}{36} + 4^2 * \frac{3}{36} + ... + 10^2 * \frac{3}{36} + 11^2 * \frac{2}{36} + 12^2 * \frac{1}{36}$$

y resultando

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 51.4 - 7^2 = \mathbf{2.4}$$

Para el cálculo de la F.d. D. , utilizaremos la expresión 4.4, y actuando del mismo modo que en el ejercicio anterior obtendremos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{6}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36} & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36} & 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36} & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} & 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} & 11 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

3. Calculemos las siguientes probabilidades:

p[X>7]

$$p[X > 7] = 1 - p[X \leq 7] = 1 - F(7) = 1 - \frac{21}{36} = \frac{5}{12}$$

p[X=7]

$$p[X = 7] = \frac{6}{36}$$

Si el cálculo lo hubieramos querido realizar a partir del conocimiento de la F.d.D. hubiesemos actuado del siguiente modo:

$$p[X = 7] = p[X \leq 7] - p[X \leq 6]$$

p[5≤X≤9] Para calcular dicha probabilidad podremos actuar de dos formas posibles:

a.-

$$p[5 \leq X \leq 9] = p[X = 5] + p[X = 6] + p[X = 7] + p[X = 8] + p[X = 9] = \frac{24}{36}$$

b.-

$$p[5 \leq X \leq 9] = p[X \leq 9] - p[X \leq 4] = F(9) - F(4) = \frac{24}{36}$$

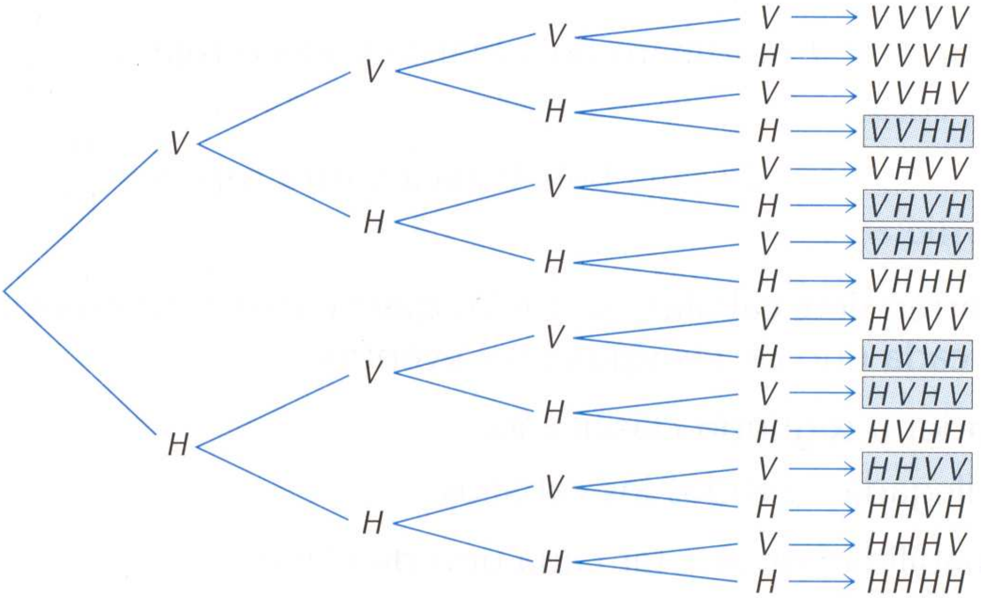
Ejercicio 3 *Consideremos la variable aleatoria X: "Número de niñas en una familia de cuatro hermanos."*

1. *Calcula la función de probabilidad de X.*
2. *Calcula la desviación típica y el número medio de niñas en estas familias.*
3. *Utiliza la distribución Binomial en la resolución de los apartados anteriores.*

Solución.-

1. Construyamos el diagrama de árbol para obtener el espacio muestral asociado:

$$(V \rightarrow NI\tilde{N}O \quad , \quad H \rightarrow NI\tilde{N}A)$$



$\Omega =$

VVVV	VVHV	VVVH	VVHH
HVVV	HVHV	HVVH	HVHH
VHVV	VHHV	VHVH	VHHH
HHVV	HHHV	HHVH	HHHH

Observamos que en una familia de cuatro hermanos puede haber cero, una, dos, tres o cuatro niñas . Por ello los posibles valores que puede tomar la variable X serían:

$$X \equiv 0, 1, 2, 3, 4$$

Para obtener la función de probabilidad de X utilizaremos la regla de Laplace:

$$\begin{aligned} p[X &= 0] = \frac{1}{16} \\ p[X &= 1] = \frac{4}{16} \\ p[X &= 2] = \frac{6}{16} \\ p[X &= 3] = \frac{4}{16} \\ p[X &= 4] = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

2. Para calcular la esperanza, varianza y desviación típica de X, utilizaremos en este caso una tabla:

x_i	0	1	2	3	4	TOTAL
$p[X = x_i]$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
$x_i \cdot p[X = x_i]$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{4}{16}$	2
$x_i^2 \cdot p[X = x_i]$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{24}{16}$	$\frac{36}{16}$	$\frac{16}{16}$	5

utilizando las expresiones 4.1 y 4.3 obtenemos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mathbf{2} \quad \textit{niñas} \\ \sigma^2 &= 5 - 2^2 = 1 \\ \sigma &= +\sqrt{\sigma^2} = \mathbf{1} \quad \textit{niñas.} \end{aligned}$$

3. No Obstante, podríamos calcular la función de probabilidad de dicha variable de otro modo:

   Consideremos X_i la variable aleatoria Bernoulli siguiente:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el i-ésimo hermano de la familia es NIÑA} \\ 0 & \text{si el i-ésimo hermano de la familia es NIÑO} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

siendo :

$$\begin{aligned} p &= p[\acute{E}xito] = p[X_i = 1] = \frac{1}{2} \\ q &= p[Fracaso] = p[X_i = 0] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como los nacimientos se consideran independientes unos de otros, implica que estas variables Bernoulli son independientes entre sí, por tanto:

$$\left.\begin{array}{c} X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ v.a. Be}(\frac{1}{2}) \\ X_i \text{ son independientes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim B(4, \frac{1}{2})$$

es decir, la variable X , que representa el número de éxitos del experimento aleatorio de tipo Bernoulli "NACER CHICA", se distribuye según una Binomial $B(4, \frac{1}{2})$.

Como todos sabemos en una v.a. $X \sim B(4, \frac{1}{2})$, se verifica:

$$p[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \tag{4.5}$$

y

$$\begin{aligned} E[X] &= n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{2} \ \textit{niñas} \\ var[X] &= n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1} = \mathbf{1} \ \textit{niña} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *Consideremos la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & en \quad c.c. \end{cases}$$

1. *Calcula el valor de K para que $f(x)$ sea función de densidad de una v.a. X.*
2. *Calcula y representa la función de distribución.*
3. *Si X representa el número de unidades vendidas de cierto producto en un día, ¿cuál es el número medio de ventas realizadas cada día?*

Solución.-

1. $f(x)$ será función de densidad si:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) \geq 0 & \forall x \in \Re \\ \int\limits_{\Re} f(x)dx = 1 & \end{array} \right. \tag{4.6}$$

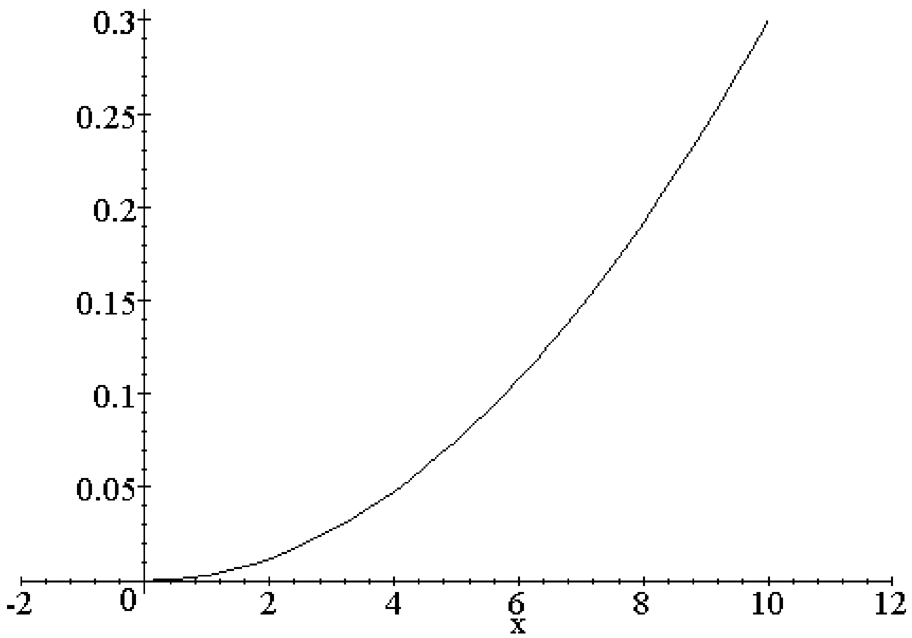
por tanto imponiendo la segunda condición:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Longrightarrow \int\limits_{0}^{10} K \cdot x^2 \cdot dx = 1 \Longrightarrow K = \frac{1}{\int\limits_{0}^{10} x^2 dx} = \frac{3}{1000}$$

resultando:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0.003 \cdot x^2 & si & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & en & c.c. \end{array} \right.$$

Siendo su representación gráfica:



2. La F.d.D. de una variable aleatoria continua viene dada por :

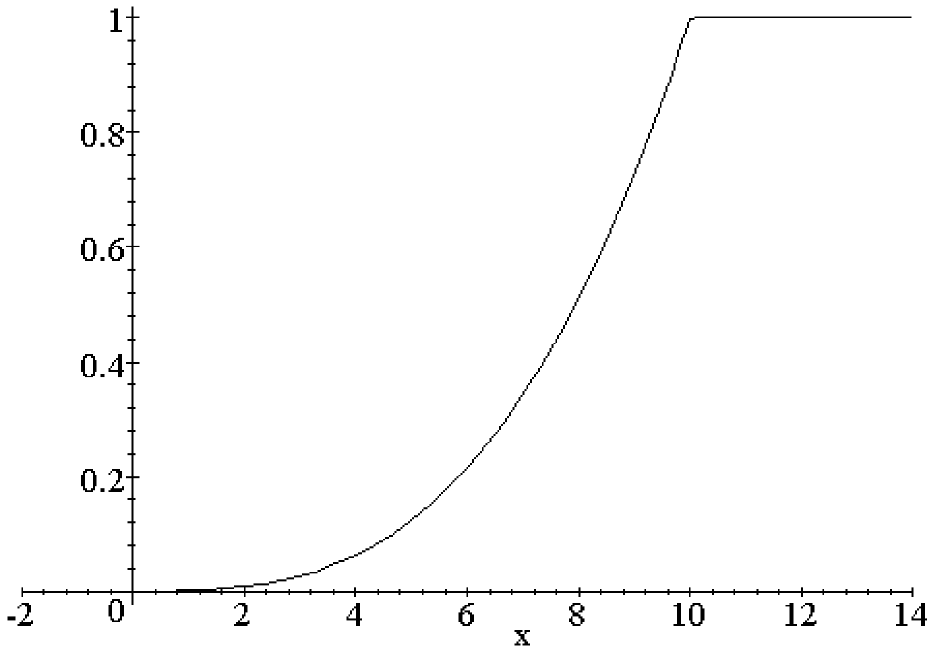
$$F(x) = p[X \leq x] = \int\limits_{-\infty}^{x} f(s) \cdot ds \qquad \forall\ x \in \Re \tag{4.7}$$

Por tanto tendremos que:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x < 0 \\ \int_0^x f(s)ds & si & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & si & 10 < x \end{array} \right.$$

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x < 0 \\ \int_0^x 0.003s^2 \cdot ds & si & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & si & 10 < x \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x < 0 \\ \frac{0.003 \cdot x^3}{3} & si & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & si & 10 < x \end{array} \right.$$

cuya representación gráfica sería:



3.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \tag{4.8}$$

$$E[X] = \int_{0}^{10} x * 0.003 * x^2 dx = \mathbf{7.5} \;\; \textit{unidades.}$$

Ejercicio 5 *La v.a. X representa el intervalo de tiempo entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su f.d.d. es:*

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-\frac{x}{2}} & si \quad x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

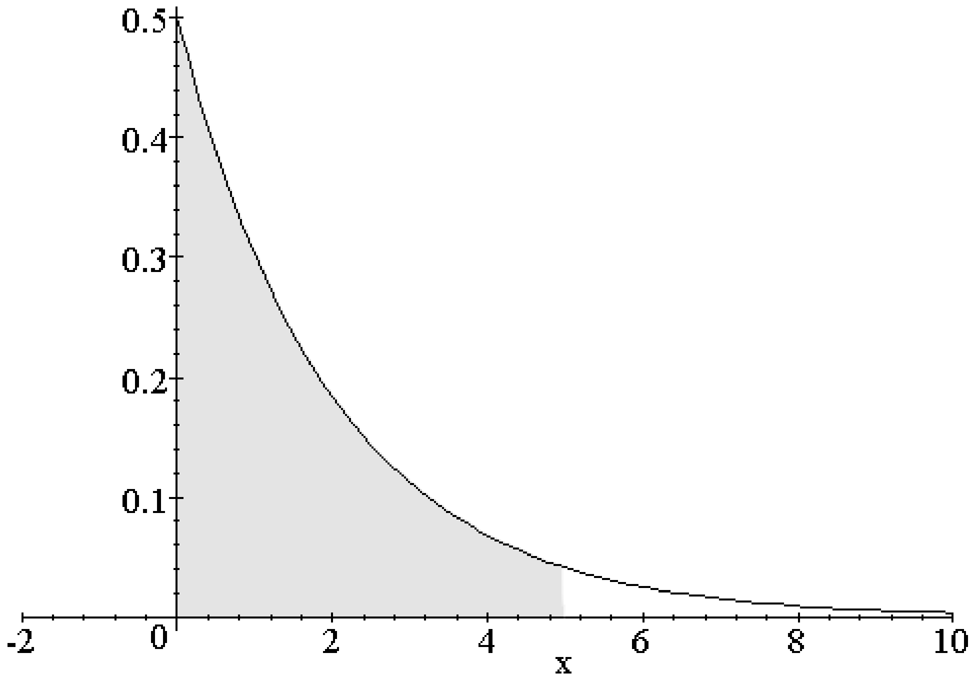
1. *Determine el valor de k.*
2. *Obtenga la F.d.D. de X y calcule* $p[2 < X < 6]$, $p[X \geq 8]$
3. *Calcule la desviación típica y el tiempo medio entre dos llegadas consecutivas.*

Solución.-

1. Teniendo en cuenta la expresión 4.6 , $f(x)$ será función de densidad si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$, es decir si:

$$k \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 \Longleftrightarrow 2k = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{k} = \frac{1}{2}$$

2. Por tanto la función de distribución de X vendrá dada por el área que encierra la función de densidad hasta el punto de abcisa x :



es decir :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} * e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ -e^{-\frac{1}{2}x} + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

p[2<X<6] Para calcular esta probabilidad, bastará con realizar la siguiente consideración:

$$p[2 < X < 6] = \int_2^6 f(x)dx = F(6) - F(2)$$

$$p[2 < X < 6] = \left(-e^{-\frac{1}{2}*6} + 1\right) - \left(-e^{-\frac{1}{2}*2} + 1\right) = -e^{-3} + e^{-1} = \mathbf{0.318}$$

p[X≥8] En este caso,

$$p[X \geq 8] = 1 - p[X < 8]$$

por tratarse de una v.a. continua sabemos que $p[X < 8] = p[X \leq 8]$, por tanto:

$$p[X \geq 8] = 1 - p[X \leq 8]$$

$$p[X \geq 8] = 1 - F(8) = 1 - \left(-e^{-\frac{1}{2}*8} + 1\right) = \mathbf{e}^{-4}$$

3. Para calcular el tiempo medio y la desviación típica, utilizaremos las expresiones 4.8 y 4.3,

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} * e^{-\frac{x}{2}} dx = \mathbf{2} \quad u.t.$$

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} * e^{-\frac{x}{2}} dx = 8$$

$$\sigma = +\sqrt{var[X]} = +\sqrt{8-2^2} = +\sqrt{4} = \mathbf{2} \quad u.t.$$

Ejercicio 6 *Una moneda corriente se lanza 3 veces. Hallar la probabilidad de obtener:*

1. *Tres Caras.*
2. *Dos Caras.*
3. *Una Cara.*
4. *Ninguna Cara.*

Solución.-

Realicemos el experimento tipo bernoulli "lanzar una moneda corriente" tres veces ; la variable X que nos da el número éxitos es una Binomial de parámetros $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Por tanto:

$$p[X = k] = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}$$

1. $p[X = 3] = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{1}{8}$
2. $p[X = 2] = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$
3. $p[X = 1] = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8}$
4. $p[X = 0] = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

Ejercicio 7 *Consideremos una urna en la cual nos encontramos 5 bolas blancas, 6 bolas rojas, 10 bolas negras y 4 bolas azules. Si realizamos 10 extracciones con reposición, calcule:*

1. *La probabilidad de extraer 5 bolas blancas.*
2. *La probabilidad de extraer 3 bolas blancas, 1 roja, 2 negras y 4 azules.*

Solución.-

1. Si consideramos el suceso "extraer bola blanca" como un éxito, y "no extraer bola blanca" como fracaso, tenemos que la variable X_1, que nos indica el número de bolas blancas extraidas en el experimento aleatorio propuesto, sigue una Distribución Binomial, ya que nos contabiliza el número de éxitos en un experimento Bernoulli que reiteramos de modo independiente 10 veces.

$$X_1 \sim B(n,p) \equiv B(10, \frac{5}{25})$$

   Siendo $\frac{5}{25}$ la probabilidad de sacar bola blanca en cada extracción.

   Por tanto :

$$p[X_1 = 5] = \binom{10}{5} \left(\frac{5}{25}\right)^5 \left(\frac{20}{25}\right)^{10-5} = \mathbf{2.64 \times 10^{-2}}$$

2. Sea

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{Número de bolas blancas extraidas.} \\ X_2 &: \text{Número de bolas rojas extraidas} \\ X_3 &: \text{Número de bolas negras extraidas.} \\ X_4 &: \text{Número de bolas azules extraidas.} \end{aligned}$$

   y sea:

$$\begin{aligned} p_1 &: \text{Probabilidad de extraer bola blanca} \\ p_2 &: \text{Probabilidad de extraer bola roja.} \\ p_3 &: \text{Probabilidad de extraer bola negra.} \\ p_4 &: \text{Probabilidad de extraer bola azul.} \end{aligned}$$

   En esta situación el vector aleatorio (X_1, X_2, X_3, X_4) sigue una distribución Multinomial $M(n; p_1, p_2, p_3, p_4)$, con función de probabilidad:

$$p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3, X_4 = k_4] = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot p_4^{k_4} \qquad (4.9)$$

   El ejercicio nos pide :

$$p[X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 4] = \frac{10!}{3! * 1! * 2! * 4!} * \left(\frac{5}{25}\right)^3 * \left(\frac{6}{25}\right)^1 * \left(\frac{10}{25}\right)^2 * \left(\frac{4}{25}\right)^4$$

$$p[X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 4] = \mathbf{2.53 \times 10^{-3}}$$

   Podemos observar que la Distribución Multinomial es una extensión natural de la Binomial, de hecho si tuviesemos solo dos clase de bolas, estaríamos ante una Binomial $B(n, p_1)$.

Ejercicio 8 *Si lanzamos un dado 50 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 25 unos, 10 veces el dos y 15 veces el cinco?*

Solución.-

Supongamos que tenemos una urna U con seis bolas numeradas del 1 al 6, y realizamos 50 extracciones con reeemplazamiento. Este experimento es similar a lanzar 50 veces un dado.

Sea X_i variable que indica el número de veces que se ha extraido la bola con el n^o i

Sea p_i la probabilidad de extraer la bola con el n^o i

en nuestro caso $p_i = \frac{1}{6}$ $\forall i$, y sea $n = 50$.

Tenemos que $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ sigue una distribución multinomial $M(n; p_1, p_2, p_3, p_{4,}p_5, p_6)$.

Por tanto:

$$p[(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = (25, 10, 0, 0, 15, 0)] = \frac{50!}{25! * 10! * 0! * 0! * 15! * 0!} \left(\frac{1}{6}\right)^{50} = \mathbf{5.1 \times 10^{-19}}$$

Ejercicio 9 *La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco en la disciplina tiro con arco es* $\frac{1}{3}$.

1. *Si dispara 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haga dos dianas?*
2. *¿Cuántas veces tendría que disparar para que la probabilidad de acertar por lo menos una vez sea mayor que* $\frac{4}{5}$*?*

Solución.-

1. Sea X_i v.a. Bernoulli tal que $X_i \equiv \begin{cases} 1 & \text{si acierta en el tiro n}^o\ i \\ 0 & \text{si falla en el tiro n}^o\ i \end{cases} \quad i = 1, 2, ...8$

   Tenemos $\left.\begin{array}{c} X_i \sim Be(\frac{1}{3}), \quad i = 1, 2, ..., 8 \\ X_i \ \text{ Independientes} \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Sea $X = \sum_i X_i$ la v.a.$\equiv$ " número total de aciertos".

   Sabemos, por como la hemos definido X, que:

$$X \sim B(8, \frac{1}{3})$$

   Por tanto:

$$p[X \geq 2] = 1 - p[X < 2]$$

$$p[X \geq 2] = 1 - p[X = 0] - p[X = 1]$$

   utilizando la expresión 4.5, resulta:

$$p[X \geq 2] = 1 - \binom{8}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-0} - \binom{8}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^{8-1}$$

$$p[X \geq 2] = \mathbf{0.999}$$

2. Buscamos un n tal que:
$$p[X \geq 1] \geq \frac{4}{5}$$
Como
$$p[X \geq 1] = 1 - p[X = 0] = 1 - q^n$$
resulta que:
$$1 - q^n \geq \frac{4}{5}$$
operando tenemos:
$$1 - q^n \geq \frac{4}{5} \Longleftrightarrow q^n \leq 1 - \frac{4}{5} \Longleftrightarrow q^n \leq \frac{1}{5} \Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{5}$$
$$\text{Si} \quad n = 4 \qquad \text{resulta} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 \leq \frac{1}{5}$$
Por tanto, tendrá que disparar **al menos 4 veces.**

Ejercicio 10 *Hallar el número medio de veces que habrá que lanzar un dado cúbico corriente hasta obtener un cinco, y así poder comenzar a jugar al "PARCHIS".*

Solución.-

Lanzar un dado y considerar Éxito "obtener un cinco" y Fracaso "no obtener un cinco" es un experimento Bernoulli, con probabilidad de éxito $p = \frac{1}{6}$. La variable aleatoria X que cuenta el número de veces que se repite el experimento hasta obtener el primer éxito, al realizar repeticiones independientes de dicho experimento Bernoulli, sigue una distribución Geométrica o de Pascal.
$$X \sim Ge(p)$$
cuya función de probabilidad es:
$$p[X = k] = q^{k-1}p \tag{4.10}$$
y cuya esperanza matemática sería:
$$E[X] = \frac{1}{p} = \mathbf{6}$$
El número medio de lanzamientos de dado sería 6.

Ejercicio 11 *En las condiciones del ejercicio anterior,*

1. *¿Cuál es la probabilidad de tener que lanzar 10 veces el dado para obtener cuatro veces el número cinco?*

2. *¿Cuál sería el número medio de veces que tendríamos que lanzar un dado cúbico para obtener cuatro cincos y así tener todas las fichas del PARCHIS en juego?*

Solución.-

Lanzar un dado y considerar Éxito "obtener un cinco" y Fracaso "no obtener un cinco" es un experimento Bernoulli, con probabilidad de éxito $p = \frac{1}{6}$. La variable aleatoria X que cuenta el número de veces que se repite el experimento hasta obtener el cuarto éxito, al realizar repeticiones independientes de dicho experimento Bernoulli,sigue una distribución Binomial Negativa $BN(r, p)$, donde r representa el número de éxitos requeridos, en nuestro caso $r = 4$, y p es la probabilidad del experimento tipo Bernoulli. Obsérvese que la distribución Binomial Negativa es la extensión natural de la distribución de Pascal.

$$\text{Sea } \; X \equiv \text{ N}^o \text{ de intentos necesarios hasta conseguir el r-ésimo éxito}$$

Los valores que podrá tomar X serán:

$$X \equiv r+1, r+2, ...$$

para calcular la función de probabilidad de X, bastará tener en cuenta que la última realización, por ejemplo la de la posición k, tendrá que ser siempre un éxito y en las anteriores tendremos que combinar de todas las maneras posibles $r-1$ éxitos en $k-1$ intentos.

Con estas consideraciones tenemos que:

$$p[X = k] = \binom{k-1}{r-1} \cdot q^{k-r} \cdot p^r \tag{4.11}$$

observese que si $r = 1$ tenemos la función de probabilidad de una distribución Geométrica.

La esperanza matemática de esta distribución sería:

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

y su varianza:

$$\sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$$

en nuestro caso:

1. $$p[X = 10] = \binom{10-1}{4-1} * \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4} * \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \mathbf{2.17 \times 10^{-2}}$$

2. El número medio de veces que tendríamos que lanzar el dado sería:

$$E[X] = \frac{4}{\frac{1}{6}} = \mathbf{24} \; \textit{veces}$$

Ejercicio 12 *En una convención nacional, hay 50 representantes de un partido político, de los cuales 30 apoyan al candidato A y 20 apoyan al candidato B. Si seleccionamos aleatoriamente cinco representantes, ¿cuál es la probabilidad de que entre esos cinco, por lo menos dos apoyen al candidato A?*

Solución.-

En esta situación nos encontramos ante una distribución hipergeométrica $H(N, N_1, n)$, siendo:

$$\begin{aligned} N &= 50 \\ N_1 &= 30 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

si

$X \equiv$ Representa el número de representantes seleccionados que apoyan al candidato A

$$X \sim H(N, N_1, n)$$

y

$$p[X = k] = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

que en nuestro caso:

$$p[X = 2] = \frac{\binom{30}{2} * \binom{20}{3}}{\binom{50}{5}} = \mathbf{0.234}$$

Ejercicio 13 *Un fabricante de bombillas afirma en su publicidad que cuando sus bombillas se mantienen encendidas 1000 horas, el número medio de fallos que se registran es 3.*

1. *Determinar la probabilidad de que fallen 10 bombillas*
2. *Determinar la probabilidad de que no falle ninguna.*
3. *Obtener la media y la varianza.*

Solución.-

En estas condiciones podemos admitir que el número de bombillas que se funden al estar en funcionamiento 1000 horas sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3$, siendo su función de probabilidad:

$$p[X = k] = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \qquad k = 0, 1, ... \tag{4.12}$$

1. Así la probabilidad de que fallen 10 bombillas es:

$$p[X = 10] = \frac{3^{10} * e^{-3}}{10!} = \mathbf{8.10 \times 10^{-4}}$$

2. La probabilidad de que no se produzcan fallos sería:

$$p[X = 0] = \frac{3^0 * e^{-3}}{0!} = \mathbf{e^{-3}}$$

3. En cuanto a la media y a la varianza, sabemos que en una distribución de Poisson:

$$E[X] = var[X] = \lambda$$

Ejercicio 14 *Si el 4% de los artículos de una fábrica son defectuosos. Hallar la probabilidad, en una muestra de 1000 artículos, de que:*

1. *Haya 3 artículos defectuosos.*
2. *Haya 3 o más artículos defectuosos.*

Solución.-

1. Sea X la variable aleatoria que nos indica el número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 1000. En esta situación :
$$X \sim B(1000, 0.04)$$
Por tanto, a partir de la expresión 4.5 tenemos:
$$p[X=3] = \binom{1000}{3} * (0.04)^3 \, (0.96)^{997} = \mathbf{2.24 \times 10^{-14}}$$

2. Para este cálculo recurrimos a la probabilidad del suceso contrario, es decir:
$$p[X \geq 3] = 1 - p[X=2] - p[X=1] - p[X=0]$$
Operando:
$$p[X \geq 3] = 1 - \binom{1000}{2} * (0.04)^2 \, (0.96)^{998} - \binom{1000}{1} * (0.04)^1 \, (0.96)^{999} - \binom{1000}{0} * (0.04)^0 \, (0.96)^{1000}$$
$$p[X \geq 3] \simeq \mathbf{1}$$

Somos conscientes del costo computacional que suponen estos cálculos, por ello , puesto que p es pequeño y n es suficientemente grande sería conveniente utilizar la aproximación de la Poisson a la Binomial con $\lambda = n \cdot p$.

$$B(1000, 0.04) \equiv P(1000 * 0.04)$$

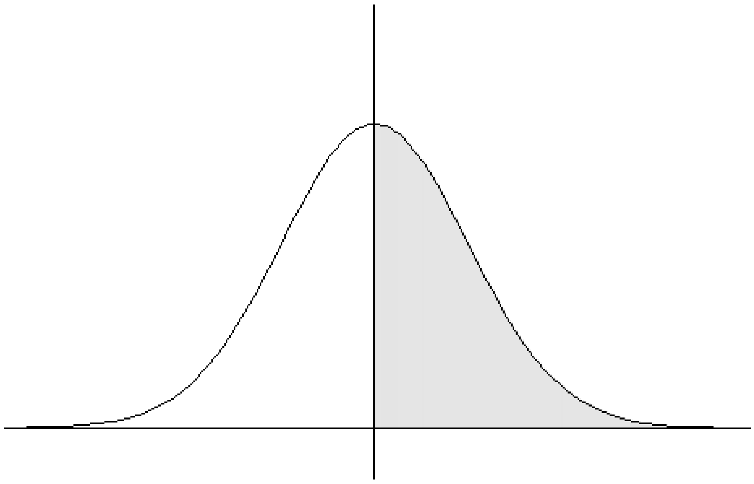
Utilizando la expresión de probabilidad 4.12, resulta:
$$p[X=3] \simeq \frac{40^3 * e^{-40}}{3!} = 4.53 \times 10^{-14}$$
$$p[X \geq 3] = 1 - p[X=2] - p[X=1] - p[X=0]$$
$$p[X \geq 3] \simeq 1 - \frac{40^2 * e^{-40}}{2!} - \frac{40^1 * e^{-40}}{1!} - \frac{40^0 * e^{-40}}{0!} \simeq \mathbf{1}$$

Ejercicio 15 *Sea X una variable aleatoria $N(0,1)$. Calcule y represente gráficamente:*

1. $p[0 \leq X]$
2. $p[0 \leq X \leq 1.32]$
3. $p[-0.83 \leq X]$
4. $p[|X| \leq 1.5]$
5. $p[X > 10]$

Solución.-

1. $p[X \geq 0] = \frac{1}{2}$ puesto que la distribución normal es simétrica respecto a su media que en este caso es cero.



2. $p[0 \leq X \leq 1.32]$ es igual al área que encierra la función de densidad entre el punto 0 y el punto de abcisas 1.32.

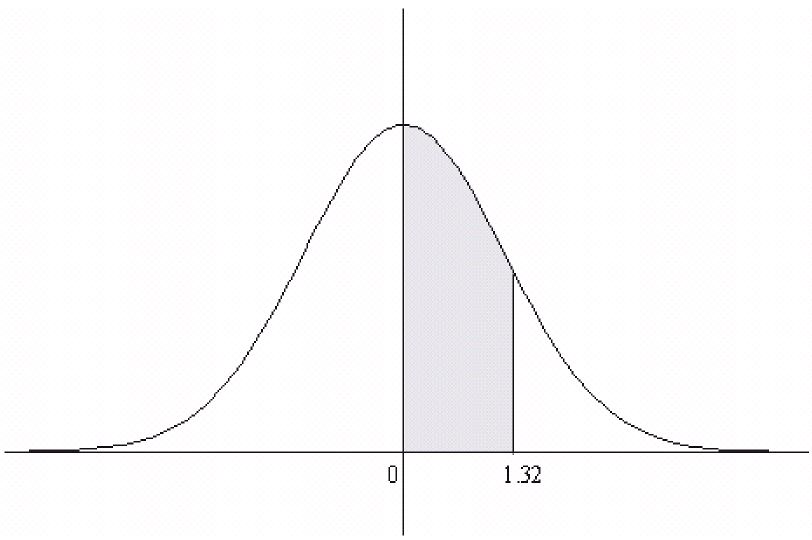
$$p[0 \leq X \leq 1.32] = p[X \leq 1.32] - p[X \leq 0]$$

utilizando el apartado 1,

$$p[0 \leq X \leq 1.32] = p[X \leq 1.32] - \frac{1}{2}$$

busquemos $p[X \leq 1.32]$ en la tabla de la F.d.D. de la $N(0,1)$. En la primera columna de la tabla localizaremos el valor 1.3 (que corresponden a las unidades y a las décimas del valor 1.32), y nos moveremos por dicha fila, celda a celda, hasta localizar en la primera fila el valor 0.02 (correspondiente a las centésimas del número 1.32), el elemento 0.90658 será la cola de probabilidad buscada.
Por tanto,

$$p[0 \leq X \leq 1.32] = 0.90658 - \frac{1}{2} = 0.40658$$



3. $p[X \geq -0.83]$.

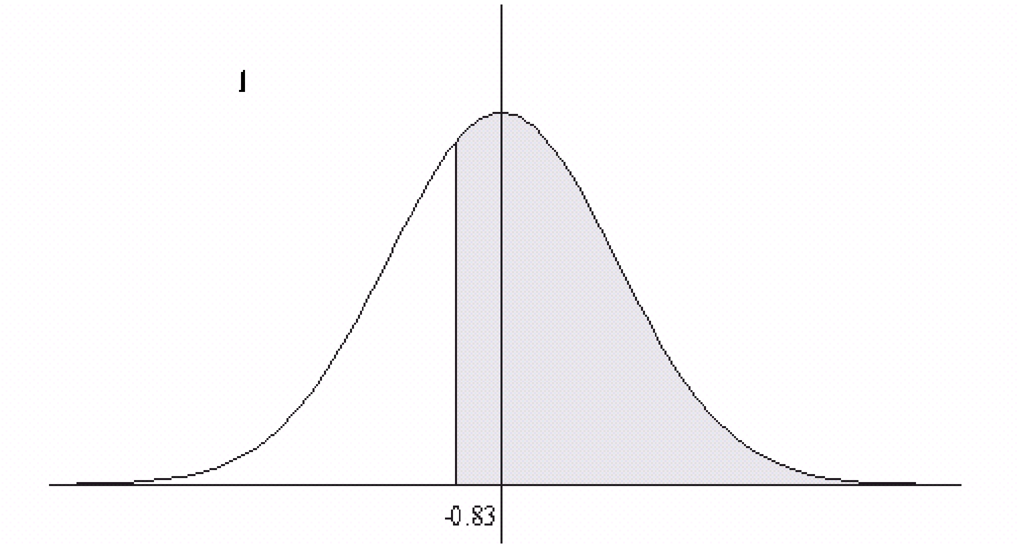
$$p[X \geq -0.83] = 1 - p[X \leq -0.83].$$

Para calcular esta probabilidad , nos encontramos con una dificultad: En la tabla de la F.d.D. de la Normal unicamente están tabulados los valores $\Re^+$. Por ello tendremos que utilizar la simetría de la N(0,1) con respecto al eje Y.

$$p[X \geq -0.83] = 1 - p[X \leq -0.83] = 1 - p[X > 0.83]$$

$$p[X \geq -0.83] = 1 - (1 - p[X \leq 0.83]) = p[X \leq 0.83]$$

$$p[X \geq -0.83] = p[X \leq 0.83] = 0.79673$$



4. $p[|X| \leq 1.5]$

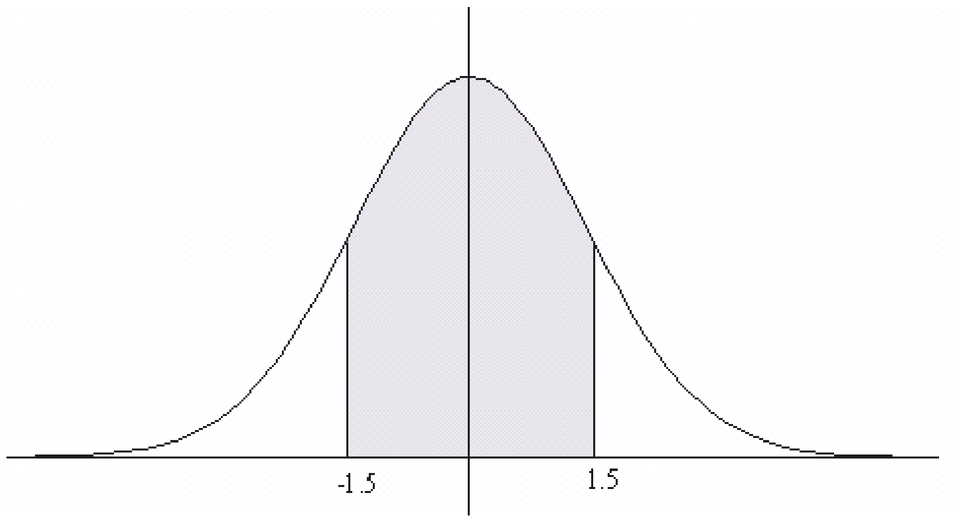
$$p[|X| \leq 1.5] = p[-1.5 < X < 1.5]$$

$$p[|X| \leq 1.5] = p[-1.5 < X < 1.5] = p[X < 1.5] - p[X < -1.5]$$

$$p[|X| \leq 1.5] = p[X < 1.5] - (1 - p[X < 1.5])$$

$$p[|X| \leq 1.5] = 2 * p[X < 1.5] - 1$$

$$p[|X| \leq 1.5] = 2 * (0.93319) - 1 = 0.86638$$



5. Trivialmente se tiene que:
$$p[X > 10] \simeq 0$$

Ejercicio 16 *Supongamos que en el mes de Julio la temperatura se encuentra distribuida normalmente con media 35º C y desviación típica de 3º C. Hallar la probabilidad de que, en un día cualquiera del mes, la temperatura oscile entre 32º C y 38º C.*

Solución.-

Sea $X \equiv$ Temperatura durante el mes de Julio, $X \sim N(35, 3)$. Por tanto para el cálculo de la probabilidad $p[32 < X < 38]$ tendremos que tipificar y obtener los valores estandar , y actuar como en el ejercicio anterior.

$$p[32 < X < 38] = p[\frac{32-35}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{38-35}{3}]$$
$$p[32 < X < 38] = p[-1 < Z < 1] \qquad donde \quad Z \sim N(0,1)$$
$$p[32 < X < 38] = p[Z < 1] - p[Z < -1] = 2 * p[Z < 1] - 1$$
$$p[32 < X < 38] = 2 * p[Z < 1] - 1 = 2 * 0.84134 - 1 = \mathbf{0.68268}$$

Ejercicio 17 *El tiempo de vida de un determinado electrodoméstico puede considerarse una variable aleatoria con distribución exponencial de media 10 años . Si se venden cien electrodomésticos , calcular:*

1. *La probabilidad de que exactamente 5 fallen el primer año.*
2. *La probabilidad de que a lo sumo 5 fallen durante el primer año.*

Solución.-

1. La función de densidad de la variable aleatoria exponencial X que mide el tiempo de vida de los electromésticos es:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$
Entonces la probabilidad de que uno de estos electrodomésticos falle el primer año es:
$$p[X \leq 1] = \int_0^1 \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx = -e^{-\frac{1}{10}} + 1 = 0.09\,5$$
Definamos como Y el número de aparatos que fallan en el primer año de un conjunto de 100 electrodomésticos, siendo la probabilidad de fallo de cada aparato $p = 0.09\,5$, entonces resulta evidente que:
$$Y \sim B(100, 0.09\,5)$$
Por tanto:
$$p[Y = 5] = \binom{100}{5} * (0.095)^5 * (1 - 0.095)^{95} = \mathbf{0.04435}$$
Si hubiesemos optado por realizar la aproximación de la Binomial por la Poisson ($p \ll \quad y \ n \gg$) tendríamos:
$$B(100, 0.09\,5) \approx P(100 * 0.095)$$
$$p[Y = 5] \simeq \frac{(9.5)^5 * e^{-9.5}}{5!} = \mathbf{0.0482}$$

2. En este apartado tendremos que calcular $p[Y \leq 5]$, por simplicidad en los cálculos, realizamos la aproximación de la Binomial por la Poisson:

$$p[Y \leq 5] \simeq \sum_{k=0}^{5} \frac{(9.5)^k * e^{-9.5}}{k!} = \mathbf{0.0885}$$

Ejercicio 18 *Sea X una variable con función de densidad:*

$$f(x) = \begin{cases} k & si \quad 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & en \quad otro\ caso \end{cases}$$

1. *Calcular k para que f(x) se f.d.d.*

2. *Obtener y representar la F.d.D.*

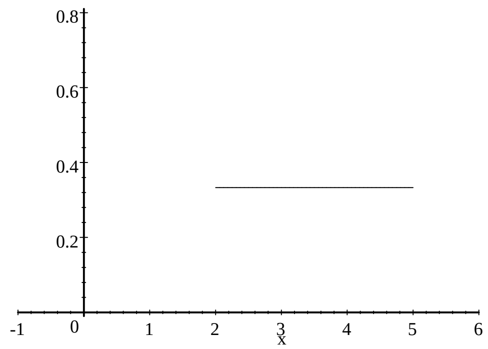
Solución.-

1. Podemos observar que $f(x)$ es la función de densidad de una distribución uniforme, por tanto , para que $\int f(x)dx = 1$, k tiene que ser igual a $\frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$.

   La f.d.d. quedará:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & si \quad 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

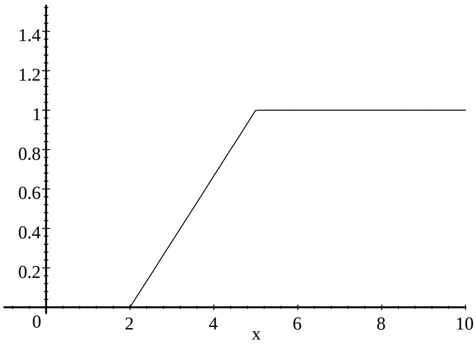
   siendo su representación gráfica:



2. En cuanto a la F.d.D. vendrá dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x \leq 2 \\ \int_2^x \frac{1}{2} ds & si & 2 < x < 5 \\ 1 & si & 5 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0 & si & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{3} & si & 2 < x < 5 \\ 1 & si & 5 \leq x \end{cases}$$

   cuya representación gráfica es:


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2
4
6
8
10
x

4.5.2 EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 19 *La v.a. X representa el intervalo de tiempo entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su f.d.d. es:*

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{-\frac{x}{2}} & si \quad x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

1. *Determinar el valor de k.*
2. *Obtener la F.d.D. de X.*
3. *Calcular* $p[2 < X < 6] \quad , \quad p[X \geq 8]$

Ejercicio 20 *Consideremos la siguiente función:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ 2x - x^2 & si & 0 < x < 1 \\ 1 & si & x > 1 \end{cases}$$

1. *Demuestra que F(x) es una función de distribución.*
2. *Obtener la función de densidad* $f(x)$*.*
3. *Obtener* $E[X]$*,* $var[X]$ *,la desviación típica, la mediana y el recorrido intercuartílico.*
4. *Calcular* $p\left(\frac{3}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 21 *Consideremos una urna con 5 bolas blancas y 2 bolas negras, de la cual un apostante irá extrayendo sin reemplazamiento bolas una a una hasta plantarse. Por cada bola blanca extraida dobla el capital apostado, si sale la primera bola negra pierde la mitad de lo apostado, mientras que si sale la segunda bola negra pierde todo. Sea X = "Número de blas blancas extraidas antes de extraer la primera bola negra"*

1. *Función de probabilidad de X.*
2. *Función de Distribución de X*
3. *Media, mediana, moda y varianza de la v.a. X.*

Ejercicio 22 *Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot x^{-1/2} \cdot \exp\left\{\frac{-x^{1/2}}{4}\right\} & si & 0 < x \\ 0 & & c.c. \end{cases}$$

Determinar la media, la varianza, la desviación típica, la mediana, el recorrido intercuartílico y el recorrido interdecil de X.

Ejercicio 23 *El número de licencias de matrimonio expedidas en cierta ciudad durante el mes de junio puede considerarse como una variable aleatoria con media 124 y desviacion típica 7.5.¿Con qué probabilidad podemos afirmar que se expediran entre 64 y 184 licencias de matrimonio en esa ciudad durante el mes de Junio?*

Ejercicio 24 *Consideremos la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot x & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{3-x}{2} & 2 < x < 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

1. *¿Cuánto ha de valer K para que f sea función de densidad de X?*
2. *Obtener la función de Distribución de X y calcular $f(\frac{3}{2})$*
3. *Calcular $E[Y]$, siendo $Y = x^2 - 5x + 3$*

Ejercicio 25 *La probabilidad de hacer blanco con cada una de las tres armas A,B y C con que se cuenta es: 0.1 , 0.2 y 0.3 respectivamente .Sea X el número de blancos realizados, si se realiza un disparo con cada arma. Obtener las funciones de probabilidad y de distribución de X.*

Ejercicio 26 *El número de veces N que un animal visita un área que contiene una trampa es una v.a. geométrica de parámetro α , y la probabilidad de que un animal caiga en la trampa cuando visita el área es p. Si el animal es liberado cada vez que cae en la trampa , encontrar la ley de probabilidad de $Y \equiv$ número de veces que el animal cae en la trampa.*

Ejercicio 27 *En una sucesión de experimentos Bernoulli determina :*

1. *La distribución del número de ensayos necesarios hasta obtener la primera secuencia de r éxitos consecutivos.*
2. *El número esperado de realizaciones hasta encontrar por primera vez la secuencia: EFFE.*

Ejercicio 28 *Supongamos que el ingreso semanal de un asesor profesional es una variable aleatoria cuya función de densidad está determinada por:*

$$f(x) = \begin{cases} K \cdot \exp\left\{-\frac{x}{800}\right\} & x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

1. *¿Cuánto debe valer K para que f(x) sea función de densidad?*
2. *Determinar los ingresos medios, medianos y el recorrido interdecil.*
3. *Obtener la F.d.D. y calcular la probabilidad de que el ingreso semanal exceda al ingreso promedio.*

Ejercicio 29 *Un examen contiene 15 preguntas tipo test con cuatro posibles opciones de respuesta, habiendo una única respuesta correcta. El examen se aprueba contestando correctamente al menos 8 preguntas.Si un alumno responde al azar y de modo independiente las preguntas entre sí. Calcular la probabilidad de aprobar.*

Ejercicio 30 *En un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de fabricar una pieza defectuosa es 0.0001. En un año se fabrican 20000 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de piezas defectuosas en la produccion de un determinado año sea igual o mayor que 5?*

Ejercicio 31 *Un test de memoria fue aplicado en dos aulas. En la primera de 20 estudiantes se obtuvo un promedio de 125 puntos con una desviación estandar de 30 puntos; y en la segunda, de 30 alumnos se obtuvo un promedio de 136 y una desviación típica muestral de 23 puntos. ¿Puede considerarse los resultados de la segunda clase mejores que los de la primera?*

Ejercicio 32 *Un temario está compuesto por 100 temas. El examen consiste en la exposición al azar de 2 temas. Para aprobar necesita responder correctamente los dos temas. ¿Cuál es el número mínimo de temas que ha de estudiar el opositor para que la probabilidad de aprobar sea superior que la probabilidad de suspender?*

Ejercicio 33 *Una población de 20 animales insectivoros se introduce en una zona donde el 14% de los insectos que les sirven de alimentos son venenosos. Cada animal devora al día 5 insectos.*

1. *Calcular la probabilidad de que un individuo sobreviva una semana.*
2. *¿Cuál sería la probabilidad de que no sobrevivan más de 3 individuos?*

Ejercicio 34 *En una urna hay 8 bolas blancas y 4 negras, en otra urna hay 15 blancas y 9 negras. Si se realizan 500 extracciones con reemplazamiento en cada urna, estimar la probabilidad:*

1. *De que las dos bolas extraidas sean del mismo color.*
2. *De que las dos bolas extraidas sean de distinto color.*
3. *De que las dos bolas extraidas sean blancas.*

Ejercicio 35 *La duración promedio de los neumáticos de una cierta marca es de 80000 km. y sigue una distribución exponencial.*

1. *¿Cual es la probabilidad de que uno de estos neumáticos dure menos de 60000 km?*
2. *¿Cuál es la probabilidad de que un neumático dure más de 100000 km. si ya ha durado 75000 km?*
3. *Determinar el percentil 95 de la distribución.*

Ejercicio 36 *En un estanque hay 45 peces, 15 de colores y el resto grises, si se escapan 10. Calcular la probabilidad de que:*

1. *Haya dos peces de colores en el grupo de escapados.*
2. *No haya ningún pez gris en el de escapados.*
3. *Queden en el estanque el mismo número de peces de colores y grises.*

Ejercicio 37 *Se sabe que el 5% de los tornillos producidos por una máquina son defectuosos. Los tornillos se empaquetan en bolsas de 10 unidades, y las bolsas en cajas de 100 bolsas.*

1. *Calcular la probabilidad de que al comprar una caja, ésta contenga todas las bolsas con menos de dos tornillos defectuosos.*
2. *Si una ferretería compra 200 cajas. Calcular la probabilidad de que más de 100 cajas cumplan el requisito anterior.*

Ejercicio 38 *Un proceso de producción tiene una producción de piezas defectuosas del 25%.*

1. *Si se toman nueve piezas, ¿cual es la probabilidad de encontrar dos defectuosas?*
2. *¿Cuántas piezas, como mínimo, se han de tomar para que la probabilidad de encontrar alguna defectuosas sea al menos 0.8?*

Ejercicio 39 *La variable aleatoria X se distribuye triangularmente en el intervalo (0,a).*

1. *Calcula su función de densidad.*
2. *Calcula su función de distribución.*

Ejercicio 40 *Construye y dibuja la función de densidad y de distribución de una variable uniforme en el intervalo* $(3, 15)$

