Boletín del Tema IV: ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$

1. En R^2 se definen las operaciones

$$(x,y)+(x',y')=(x+x'+1,y+y'+1)$$

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$$

   Estudiar si $(R^2,+,.)$ es un R-espacio vectorial.

2. Sea $F=\{(-1,0,2),(1,1,0),(-10,-7,1)\}\subset R^3$. Indicar si el vector $(5,-2,3)$ pertenece a L(F).

3. ¿Existe algún valor de α para el cual sean linealmente dependientes los vectores de R^4

$$\mathbf{a}=(\alpha,-1,0,1),\quad \mathbf{b}=(0,\alpha,-1,1),\quad \mathbf{c}=,0,-1,2)$$

4. Dados los vectores

$$\mathbf{u}_1=(-1,0,4,1),\mathbf{u}_2=(3,-2,0,2),\mathbf{u}_3=(2,\alpha,-2,0),\mathbf{u}_4=(2,-3,-2,3)$$

   de R^4, determinar qué condición ha de verificar α para que $\mathbf{u}_4$ sea combinación lineal de $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$.

5. En R^4 se consideran los vectores

$$\mathbf{u}_1=(1,-2,1,3),\quad \mathbf{u}_2=(2,-4,0,2),\quad \mathbf{u}_3=(3,-6,1,5),\quad \mathbf{u}_4=(2,-4,-4,-6)$$

   Calcula una base de la variedad lineal engendrada por ellos.

6. Determina, en función de los valores de α y β, si los vectores de R^4

$$\{(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,\beta),(4,1,2,\alpha)\}$$

   son linealmente dependientes o independientes.

7. Determina a y b para que el sistema $B=\{(1,-1,-3,1),(a,-1,1,-1),(2,-b,1,-2),(1,1,-b,1)\}$ constituya una base de R^4

8. En el espacio vectorial R^4 se consideran los siguientes conjuntos de vectores

$$A=\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1)\},\quad B=\{(2,0,0,0),(-2,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

   Se pide:

   a) Demostrar que forman bases de R^4

   b) Calcular las coordenadas de cada vector de una base respecto de la otra.

c) Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (-4, -4, 1, 2)$ respecto de ambas bases.

9. En el espacio vectorial R^3 se consideran los vectores

$$\mathbf{u} = (-1, 0, 1), \mathbf{v} = (1, 1, 0), \mathbf{w} = (-10, -7, 3)$$

Se pide:

a) Determina cuales de ellos son linealmente independientes.

b) Halla una base de R^3 que contenga a los vectores que son linealmente independientes

10. En el espacio vectorial R^4 se consideran los vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, 2), \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 4), \mathbf{u}_4 = (2, -1, -1, 6), \mathbf{u}_5 = (1, -1, -2, -4)$$

Se pide:

a) Determina cuales de ellos forman una base de R^4

b) Calcula las coordenadas de los restantes vectores con respecto a la base obtenida anteriormente.

11. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos bases del espacio vectorial R^3. Sea $\vec{x}$ un vector de R^3 cuyas coordenadas respecto de B son $(1, -1, 2)$. Sabiendo que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 & = & \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 & = & \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{u}_3 & = & \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \end{array}\right.$$

Calcula las coordenadas de $\vec{x}$ respecto de B'

12. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dos bases del espacio vectorial R^3 ligadas por:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 & = & \vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_2 & = & \alpha\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 & = & -5\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \end{array}\right.$$

Si $\vec{x} \in R^3$ tiene por coordenadas respecto de B y B' $(-2, 1, 3)$ y $(-9, -9, 8)$ respectivamente, ¿cuál es el valor de α?

13. Sean $B_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ y $B_2 = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ dos bases del espacio vectorial R^3 de la que sabemos que:

$$\begin{array}{lcccccc} \vec{u}_1 & = & 2\vec{w}_1 & + & \vec{w}_2 & - & \vec{w}_3 \\ \vec{u}_2 & = & 5\vec{w}_1 & - & \vec{w}_2 & + & \vec{w}_3 \end{array}$$

Si $\vec{x} \in R^3$ tiene coordenadas $(1, -1, 1)$ respecto de B_1 y $(2, 3, 0)$ respecto de B_2, >cuál es la matriz del cambio de base de B_1 a B_2?

14. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ y $B_2 = \{(2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$

a) Calcular la matriz del cambio de base de B_2 a B_1

b) Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en la B_2 son $(3, -2, 2)$

15. Sea $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ un subconjunto del espacio vectorial R^4.

a) Probar que H es un subespacio vectorial de R^4.

b) Encontrar en H tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ linealmente independientes, y probar que todo vector de H se puede poner como combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

16. Sea el espacio vectorial R^4 y $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base de R^4. Se consideran los subespacios vectoriales de R^4 engendrados por los vectores que se indican:

$$L_1 = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4), \quad L_2 = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)$$

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + 6\mathbf{u}_4 & \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 6\mathbf{u}_3 - 3\mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 3\mathbf{u}_4 & \mathbf{w}_2 = -\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_3 + 5\mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_3 = 6\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 + 9\mathbf{u}_4 & \mathbf{w}_3 = 3\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 - 8\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\
\mathbf{v}_4 = 4\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3 + 6\mathbf{u}_4 & \mathbf{w}_4 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 + 6\mathbf{u}_4
\end{array}$$

Se pide:

a) Hallar la dimensión de cada uno de ellos y una base contenida en el sistema generador dado.

b) Expresar los restantes vectores que generan el subespacio como combinación lineal de la base obtenida.

17. Consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (3, 2, -1)$, $v_2 = (2, 5, 6)$, $v_3 = (1, -3, -7)$. Sea S el subespacio vectorial engendrado por dichos vectores, se pide:

a) Hallar una base de S.

b) Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio S.

18. Sea L el subespacio de R^4 dado por las ecuaciones implícitas

$$\begin{array}{rrrrcl}
x_1 & -x_2 & -x_3 & & = & 0 \\
x_1 & +3x_2 & & +x_4 & = & 0 \\
2x_1 & -6x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 0
\end{array}$$

Determinar sus ecuaciones paramétricas, una base y su dimensión.

19. En el espacio vectorial R^5 y respecto a la base canónica, hallar un sistema de ecuaciones paramétricas y un sistema de ecuaciones implícitas independientes, de los subespacios siguientes:

$$\begin{array}{rcl}
L_1 & = & L((1,0,1,-1,1),(1,1,1,0,0)) \\
L_2 & = & L((0,1,2,1,0),(1,1,-1,-2,1),(3,-1,-7,-8,3))
\end{array}$$

20. Encontrar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = 0,\ 2y + z = 0\},$$

halla las coordenadas del vector $(1, 1, -2, 1)$ respecto de dicha base y determina las ecuaciones paramétricas del subespacio.

21. Sean S_1 el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ engendrado por los vectores $(1, 1, a)$, $(1, a, 1)$, $(a, 1, 1)$, con $a \in \mathbb{R}$, y el subespacio $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ y + z = 0\}$

a) Estudiar, según los valores de a, la dimensión del subespacio S_1.

b) Dar una base, la dimensión y las ecuaciones paramétricas de S_2.

22. Sea el espacio vectorial R^4 y sea B un base de R^4. Sea H el subespacio de R^4 dado por:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Se pide:

a) Hallar la dimensión y una base de H.

b) Completar dicha base para obtener una base de R^4.

23. Sea el espacio vectorial R^5. Sean los sistemas

$$S_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3), \quad S_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1,2,5,3,2) \\ \mathbf{u}_2 &= (3,1,5,-6,6) \\ \mathbf{u}_3 &= (1,1,3,0,2) \end{aligned} \ , \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (2,1,4,-3,4) \\ \mathbf{v}_2 &= (3,1,3,-2,2) \\ \mathbf{v}_3 &= (9,2,3,-1,-2) \end{aligned}$$

Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios

$$L(S_1),\ L(S_2)$$

24. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el conjunto de vectores

$$B = \{(1,1,0,2), (1,0,6,0), (0,12,0,0), (12,0,0,0)\}$$

Se pide

a) Demostrar que el conjunto es una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular las coordenadas del vector $v = (1,4,0,-1)$ respecto de la base B. Indicar las ecuaciones del cambio de base entre B y la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Dado el subespacio vectorial generado por

$$L = \{(1,3,5,0), (-1,0,2,0), (3,3,1,0)\}$$

Calcular su dimensión y ecuaciones implícitas.

25. Sea el espacio vectorial R^5 y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ una base de R^5. Sea L_1 el subespacio de R^5 engendrado por los vectores

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4,\ \mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5,\ \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_4,\ \mathbf{w}_4 = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 + 4\mathbf{v}_5$$

Sea L_2 el subespacio que respecto a B tiene por ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 - x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Se pide:

a) Determinar la dimensión, una base, unas ecuaciones implícitas y otras paramétricas de

$$L_1, L_2$$

b) Prolongar una base de L_1 para obtener una base B_1 de R^4.

c) Prolongar una base de L_2 para obtener una base B_2 de R^4.

d) Escribir las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_2