TEMA IV:
ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$

ÁLGEBRA
Grado en Ingeniería Informática.
Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Después de abordar en los temas anteriores las herramientas básicas: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones, en este tema se presenta la estructura básica del Álgebra Lineal: **El Espacio Vectorial**.

La estructura de espacio vectorial es una de las más frecuentes y de cuyo estudio más provecho se ha obtenido en diversas ramas de la matemática.

Comenzaremos viendo algunos ejemplos conocidos para posteriormente definir dicha estructura. Posteriormente merecen una atención especial los espacios vectoriales de dimensión finita ya que sus teoremas y las consecuencias que de ellos se derivan constituyen el centro neurálgico del Álgebra Lineal, y terminaremos viendo los subespacios vectoriales.

Ejemplos conocidos

Vectores libres en el espacio

Se define l*a suma de dos vectores libres* $\vec{x}$ e $\vec{y}$ y lo representamos por

$$\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{x+y}$$

al vector libre definido de la siguiente manera: por un punto O arbitrario se toma un representante $\overrightarrow{0X}$ del vector libre $\vec{x}$, con origen en el punto X y se toma un representante $\overrightarrow{0Y}$ del vector libre $\vec{y}$, el vector $\overrightarrow{XY}$ es un representante del vector libre $\overrightarrow{x+y}$.

Definimos el *producto de un número real* α por un vector libre $\vec{x}$ como un vector libre representado por

$$\alpha\vec{x} = \overrightarrow{\alpha x}$$

y que tiene por dirección la misma del vector libre $\vec{x}$, por módulo$|\alpha||\vec{x}|$ y por sentido el mismo de $\vec{x}$ si $\alpha > 0$ y contrario si $\alpha < 0$.

¿Qué propiedades verifica la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector?.

Ejemplos conocidos

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas

Definimos la suma usual de matrices como la matriz de orden $m \times n$ dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Y el producto de una matriz por un número real

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

y se puede comprobar que se verifican las misma propiedades que el anterior conjunto.

Definición (Espacio Vectorial)

Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o también un $\mathbb{R}-$espacio vectorial es una terna $(V, +, *)$, donde V es un conjunto cualquiera, + es una operación interna (llamada suma) sobre V, es decir, que cualesquiera que sean $x, y \in V$, $x + y \in V$ (al sumar dos elementos de V obtendremos otro elemento de V) e $*$ es una operación externa sobre V, es decir, que cualesquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y cualesquiera que sea $x \in V$, entonces $\lambda * x \in V$

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (x, y) & \to & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} * : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (\lambda, x) & \to & \lambda * x \end{array}$$

de tal manera que se verifiquen las siguientes propiedades:

Definición (Espacio Vectorial)

Para la operación interna:

1. *Asociativa:* $\forall x, y, z \in V$ *se verifica que*

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

2. *Conmutativa:* $\forall x, y \in V$ *se cumple que*

$$x + y = y + x$$

3. *Existencia de elemento neutro: Existe un elemento* $0 \in V$ *tal que par cualquier otro elemento* $x \in V$, *se verifica que*

$$0 + x = x + 0 = x$$

4. *Existencia de elemento opuesto: Cualquiera que sea el elemento* $x \in V$, *existe un único elemento, representado por* $-x \in V$ *tal que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Definición (Espacio Vectorial)

Para la operación externa

1. *Cualquiera que sea* $x \in V$ *y cualesquiera que sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, se verifica*
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$
2. *Cualesquiera que sean* $x, y \in V$ *y cualquiera que sea* $\alpha \in \mathbb{R}$*, se verifica*
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$
3. *Cualquiera que sea* $x \in V$ *y cualesquiera que sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, se verifica*
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
4. *Si 1 es el elemento unidad de* $\mathbb{R}$ *y* x *es un elemento cualquiera de* V*, se verifica*
$$1x = x$$

A los elementos de V *se les llama vectores y los representaremos con letras negritas. Los elementos del cuerpo* $\mathbb{R}$ *los llamaremos escalares y los notaremos con letras griegas.*

Ejemplo de los espacios vectoriales

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ definimos una operación interna, que llamaremos suma,como sigue:

$$\boxed{\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)}$$

Es una operación interna, ya que al sumar dos elementos de $\mathbb{R}^n$ obtenemos otro elemento de $\mathbb{R}^n$.
En $\mathbb{R}^n$ definimos una operación externa, que llamamos producto por números reales a

$$\boxed{\alpha\cdot\mathbf{x}=\alpha\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)}$$

El producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^n$ es otro elemento de $\mathbb{R}^n$.
Se puede comprobar que se verifican todas las propiedades de la operación externa e interna:

Ejemplo de los espacios vectoriales

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

1. Asociativa: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ se verifica que

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

2. Conmutativa: $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ se cumple que

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

3. Existencia de elemento neutro: Si $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, se verifica que

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

4. Existencia de elemento opuesto: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ existe $-\mathbf{x}$ perteneciente a $\mathbb{R}^n$, cumpliendo que

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ejemplo de los espacios vectoriales

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

1. Cualquiera que sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se verifica
$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$$
2. Cualesquiera que sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se verifica
$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$$
3. Cualquiera que sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se verifica
$$\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$$
4. Si 1 es el elemento unidad de $\mathbb{R}$ y $\mathbf{x}$ es un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^n$, se verifica
$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Ejemplo de los espacios vectoriales

El conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas

En el conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ de todas las matrices de m filas y n columnas, definimos la suma de matrices y el producto de una matriz por un número

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

y se puede comprobar que se verifican todas las propiedades de la definición de espacio vectorial.

Ejemplo de los espacios vectoriales

El espacio vectorial real de los polinomios

y se puede comprobar que se verifican todas las propiedades de la definición de espacio vectorial.

Nosotros nos vamos a centrar ahora en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y todo el tema estará expresado en vectores e $\mathbb{R}^n$:

Propiedades

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ y sean α y β dos números reales. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $0\vec{x} = \vec{0}$
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$
3. $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ó } \vec{x} = \vec{0})$
4. $-(\alpha\vec{x}) = (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x})$
5. $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}$
6. $(\alpha\vec{x} = \beta\vec{x} \quad \text{y} \quad \vec{x} \neq \vec{0}) \Rightarrow \alpha = \beta$
7. $(\alpha\vec{x} = \alpha\vec{y}, \quad \text{y} \quad \alpha \neq 0) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

Definición (Combinación Lineal)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*. Se llama* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m$ *a todo vector* $\vec{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *de la forma:*

$$\boxed{\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m}, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ *se les llama coeficientes de la combinación lineal.*

Definición (Combinación Lineal)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*. Se llama* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m$ *a todo vector* $\vec{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *de la forma:*

$$\boxed{\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m}, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ *se les llama coeficientes de la combinación lineal.*

Ejemplo

1. El vector (3,2) no es combinación lineal de los vectores (1,0) y (5,0)
2. El vector (3,4,-7) es combinación lineal de los vectores (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1), ya que se puede escribir

$$(3,4,-7) = 3(1,0,0) + 4(0,1,0) - 7(0,0,1)$$

Definición (Combinación Lineal)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. *Se llama* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m$ *a todo vector* $\vec{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *de la forma:*

$$\boxed{\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m}, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ *se les llama coeficientes de la combinación lineal.*

Ejemplo

1. El vector (3,2) no es combinación lineal de los vectores (1,0) y (5,0)
2. El vector (3,4,-7) es combinación lineal de los vectores (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1), ya que se puede escribir

$$(3, 4, -7) = 3(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - 7(0, 0, 1)$$

Ejercicio 4.1: ¿Puede expresarse el vector $(1, 4, -2)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 0, 2)$?

Definición (Dependencia e Independencia Lineal)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

1. *Diremos que los vectores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ *son* ***linealmente dependientes*** *si existen* $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *no todos nulos, tal que se verifica*

$$\boxed{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = \vec{0}}$$

Se dice también que el conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m\}$ *es unconjunto ligado.*

2. *Diremos que los vectores* $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ *son* ***linealmente independientes*** *cuando no sean linealmente dependientes, es decir, cuando de la relación*

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = \vec{0}$$

se deduce como única solución que $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0}$. *También se dice que el conjunto de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_m\}$ *es un conjunto libre.*

Ejemplo

1. {(2,1,-5),(1,-4,2),(1,2,-4)} es un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$, ya que

$$2(2,1,-5)+(-1)(1,-4,2)+(-3)(1,2,-4)=(0,0,0)$$

2. Los vectores $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ son linealmente independientes o lo que es lo mismo, forman un conjunto libre de vectores, ya que si

$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$$

se deduce que la única solución posible es $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ejemplo

1. {(2,1,-5),(1,-4,2),(1,2,-4)} es un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$, ya que

$$2(2,1,-5)+(-1)(1,-4,2)+(-3)(1,2,-4)=(0,0,0)$$

2. Los vectores $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ son linealmente independientes o lo que es lo mismo, forman un conjunto libre de vectores, ya que si

$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3)=(0,0,0)$$

se deduce que la única solución posible es $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ejemplo

1. {(2,1,-5),(1,-4,2),(1,2,-4)} es un conjunto de vectores linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$, ya que

$$2(2,1,-5)+(-1)(1,-4,2)+(-3)(1,2,-4)=(0,0,0)$$

2. Los vectores $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ son linealmente independientes o lo que es lo mismo, forman un conjunto libre de vectores, ya que si

$$\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3)=(0,0,0)$$

se deduce que la única solución posible es $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Ejercicio 4.2: Estudiar la dependencia lineal de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1=(1,0,1), \vec{v}_2=(0,2,2), \vec{v}_3=(3,7,1)$

Propiedades

1. El vector nulo depende linealmente de cualquier conjunto de vectores, es decir, todo conjunto de vectores que contenga al vector cero es un conjunto ligado.
2. Todo conjunto unitario, formado por un único vector no nulo es libre.
3. La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de vectores sea ligado es que al menos uno de ellos sea combinación lineal de los restantes, es decir

$$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \cdots, \vec{x}_m\} \text{ es ligado } \Leftrightarrow \exists \vec{x}_i \text{ tal que } \vec{x}_i \text{ depende del resto}$$

4. Si un vector $\vec{w}$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \cdots, \vec{u}_j$ y cada $\vec{u}_i$ depende, a su vez, de otros vectores, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_k$ pertenecientes también a $\mathbb{R}^n$, se verifica que el vector $\vec{w}$ depende linealmente de $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots, \vec{v}_k$.

Definición (Sistema generador)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* $G = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$. *Se dice que* G *es un* ***sistema generador de*** $\mathbb{R}^n$ *cuando todo vector de* $\mathbb{R}^n$ *se puede obtener como combinación lineal de vectores de* G*, es decir, cualquiera que sea el vector* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, existen unos escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\boxed{\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_i}$$

Definición (Sistema generador)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* $G = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*. Se dice que* G *es un* ***sistema generador de*** $\mathbb{R}^n$ *cuando todo vector de* $\mathbb{R}^n$ *se puede obtener como combinación lineal de vectores de* G*, es decir, cualquiera que sea el vector* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, existen unos escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\boxed{\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\mathbf{u}_i}$$

Ejemplo

1. En el espacio $\mathbb{R}^n$, un sistema generador es $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ siendo:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

ya que cualquiera que sea $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Definición (Sistema generador)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* $G = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*. Se dice que* G *es un* ***sistema generador de*** $\mathbb{R}^n$ *cuando todo vector de* $\mathbb{R}^n$ *se puede obtener como combinación lineal de vectores de* G*, es decir, cualquiera que sea el vector* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, existen unos escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\boxed{\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\mathbf{u}_i}$$

Definición (Espacio vectorial de tipo finito)

Se dice que $\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial de tipo finito ya que admite un sistema generador formado por un número finito de vectores*

Definición (Base de $\mathbb{R}^n$)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* B *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, se dice que* B *es una* ***base de*** $\mathbb{R}^n$*, si verifica:*

1. B *es sistema generador de* $\mathbb{R}^n$*.*
2. B *es un conjunto libre de vectores.*

Definición (Base de $\mathbb{R}^n$)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* B *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$*, se dice que* B *es una* ***base de*** $\mathbb{R}^n$*, si verifica:*

1. B *es sistema generador de* $\mathbb{R}^n$*.*
2. B *es un conjunto libre de vectores.*

Ejemplo

1. El conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ no es base, ya que no es sistema generador de $\mathbb{R}^3$.
2. El conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ no es base ya que sus vectores son linealmente dependientes.
3. El conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Definición (Base de $\mathbb{R}^n$)

*Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ y sea B un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se dice que B es una **base de** $\mathbb{R}^n$, si verifica:*

1. B *es sistema generador de* $\mathbb{R}^n$.
2. B *es un conjunto libre de vectores.*

En el espacio $\mathbb{R}^n$, una base es

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

siendo:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

y se llama la **base canónica**.

Veamos ahora dos importantes teoremas relacionados con el concepto de base.

Sea $\mathrm{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, y supongamos que uno de ellos, por ejemplo $\mathbf{e}_1$, depende linealmente del resto. Entonces se verifica que $\mathrm{B}' = (\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$

Veamos ahora dos importantes teoremas relacionados con el concepto de base.

Sea $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, y supongamos que uno de ellos, por ejemplo $\mathbf{e}_1$, depende linealmente del resto. Entonces se verifica que $B' = (\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m)$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$

Este resultado nos permite transformar un sistema generador ligado en otro sistema generador formado por aquellos vectores que son linealmente independientes.

Teorema (Teorema de la base)

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Teorema (Teorema de la existencia de bases)

Todo espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre un cuerpo $\mathbb{R}$ tiene una base.

Como consecuencia del teorema de la base podemos dar la siguiente definición:

Definición (Dimensión de $\mathbb{R}^n$)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *se llama* ***dimensión de*** $\mathbb{R}^n$ *al número de vectores que constituyen una cualquiera de sus bases y se denota por* $\dim(\mathbb{R}^n)$

Como consecuencia del teorema de la base podemos dar la siguiente definición:

Definición (Dimensión de $\mathbb{R}^n$)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *se llama* ***dimensión de*** $\mathbb{R}^n$ *al número de vectores que constituyen una cualquiera de sus bases y se denota por* $\dim(\mathbb{R}^n)$

Ejemplo

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n, ya que la base canónica tiene n vectores.
2. El espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$ tiene dimensión 0.
3. El espacio $\mathcal{M}_{2\times 3}$ tiene dimensión 6.

Como consecuencia de la definición de dimensión podemos establecer los siguientes teoremas:

Teorema

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ que tiene dimensión n, todo conjunto de más de n vectores es ligado, es decir que el máximo número de vectores linealmente independientes es n.

Teorema (Caracterización de una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$)

Sea B un conjunto de n vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. *B es una base de $\mathbb{R}^n$.*
2. *B es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$.*
3. *B es un sistema libre de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema (Teorema de la base incompleta)

Si $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r\}$ *es un conjunto de* r *vectores linealmente independientes, siendo* $r < n$*, siempre se pueden encontrar* $n - r$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$*,* $\{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \cdots, \vec{v}_n\}$ *tales que el conjunto*

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r, \vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \cdots, \vec{v}_n\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^n$

Teorema (Teorema de la base incompleta)

Si $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r\}$ *es un conjunto de* r *vectores linealmente independientes, siendo* $r < n$*, siempre se pueden encontrar* $n - r$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$*,* $\{\vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \cdots, \vec{v}_n\}$ *tales que el conjunto*

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r, \vec{v}_{r+1}, \vec{v}_{r+2}, \cdots, \vec{v}_n\}$$

sea una base de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Sea $\{(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces le podemos añadir a este conjunto los vectores $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ de manera que el conjunto

$$\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$$

constituya una base de $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas de un vector

Definición (Coordenadas de un vector)

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *una base de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\vec{x}$ *un vector de* $\mathbb{R}^n$. *Se llaman coordenadas del vector* $\vec{x}$ *a los únicos escalares*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

tales que

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n}$$

Coordenadas de un vector

Definición (Coordenadas de un vector)

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *una base de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\vec{x}$ *un vector de* $\mathbb{R}^n$*. Se llaman coordenadas del vector* $\vec{x}$ *a los únicos escalares*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

tales que

$$\boxed{\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n}$$

Ejemplo

Sean $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,-1)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ se verifica que:

$$(3,5)_B = (3,5); \qquad (3,5) = \mathbf{3}(1,0) + \mathbf{5}(0,1)$$

$$(3,5)_{B'} = (4,-1); \qquad (3,5) = \mathbf{4}(1,1) + (-\mathbf{1})(1,-1)$$

Rango de un sistema de vectores

Las coordenadas respecto de una base son también muy útiles cuando se trata de determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores:

Definición

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea S un subconjunto de un número finito de vectores de* $\mathbb{R}^n$

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

se llama rango de S al máximo número de vectores linealmente independientes extraidos de S. Se representa por $rg(S)$.

Como consecuencia de la definición anterior, se puede afirmar que: Si $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión n, un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ será una base de $\mathbb{R}^n$ si su rango es n.

Cálculo del rango de un sistema de vectores

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ de dimensión n y sea B una base de $\mathbb{R}^n$. Un conjunto de q vectores, dado por

$$S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q\}$$

Para calcular el rango de S, calcularemos el rango de los q vectores de $\mathbb{R}^n$ definidos por las coordenadas respecto a una base B de los vectores de S.

Ejemplo

Calcular el rango de los vectores

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$$

definidos respecto a la base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$, por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_5 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 - 7\mathbf{u}_4 + 4\mathbf{u}_5 \\
\mathbf{x}_3 &= 2\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3 - 5\mathbf{u}_4 + 5\mathbf{u}_5 \\
\mathbf{x}_4 &= 2\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 8\mathbf{u}_3 - 14\mathbf{u}_4 - 2\mathbf{u}_5
\end{aligned}$$

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ un espacio vectorial y supongamos que tenemos dos bases diferentes:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}, \quad B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \cdots, \vec{u'}_n\}$$

y queremos establecer la relación entre las coordenadas de un mismo vector en las dos bases.

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ un espacio vectorial y supongamos que tenemos dos bases diferentes:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}, \;\; B' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \cdots, \vec{u'}_n\}$$

y queremos establecer la relación entre las coordenadas de un mismo vector en las dos bases.

Sea $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces se puede expresar en función, tanto de los vectores de B como de los vectores de B'. Si designamos por $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de las bases B y B' respectivamente, entonces podemos escribir:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n \tag{1}$$

y

$$\vec{x} = x'_1\vec{u'}_1 + x'_2\vec{u'}_2 + \cdots + x'_n\vec{u'}_n \tag{2}$$

La relación que exista entre estas coordenadas dependerá de la que exista entre ambas bases, por tanto debemos tener ciertas relaciones entre ellas.

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

También los vectores de la base B' son también vectores de $\mathbb{R}^n$ $(B' \subset \mathbb{R}^n)$ y por tanto, también tendrán unas coordenadas respecto de la base B, es decir:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \vec{u'}_1 & = & a_{11}\vec{u}_1 & + & a_{21}\vec{u}_2 & + & \cdots & + & a_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{u'}_2 & = & a_{12}\vec{u}_1 & + & a_{22}\vec{u}_2 & + & \cdots & + & a_{n2}\vec{u}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vec{u'}_n & = & a_{1n}\vec{u}_1 & + & a_{2n}\vec{u}_2 & + & \cdots & + & a_{nn}\vec{u}_n \end{array}\right.$$

Si sustituimos estas expresiones de $\vec{u'}_i$ en la ecuación (2), tendríamos

$$\vec{x} = x'_1\vec{u'}_1 + x'_2\vec{u'}_2 + \cdots + x'_n\vec{u'}_n =$$

$$= x'_1(a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{u}_n) + \cdots + x'_n(a_{1n}\vec{u}_1 + a_{2n}\vec{u}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{u}_n) =$$

$$= (x'_1a_{11} + x'_2a_{12} + \cdots + x'_na_{1n})\vec{u}_1 + \cdots + (x'_1a_{n1} + x'_2a_{n2} + \cdots + x'_na_{nn})\vec{u}_n$$

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

Como tenemos dos expresiones del vector $\vec{x}$ en la misma base y sabemos que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, se verifica que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & a_{11}x'_1 & + & a_{12}x'_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x'_n \\ x_2 & = & a_{21}x'_1 & + & a_{22}x'_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x'_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}x'_1 & + & a_{n2}x'_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

que son **las ecuaciones del cambio de base**. Escritas en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \qquad \boxed{X_B = PX_{B'}}$$

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X_B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X_{B'}}}$$

donde observamos que X_B es la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B. $X_{B'}$ es la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$ respecto de la base B' y P es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

Cambio de base en $\mathbb{R}^n$

A la matriz P se le llama **matriz de cambio de base de B' a B** y se trata de una matriz regular, puesto que sus columnas son las coordenadas de n vectores linealmente independientes y por tanto su rango es n. Por ello podemos escribir

$$\boxed{X_{B'} = P^{-1}X_B}$$

que nos la matriz del cambio de base de B a B'.

Ejemplo

Sean las bases $B_=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^n$. Hallar las ecuaciones del cambio de base

Definiciones Generales

En este apartado, estudiaremos partes de los espacios vectoriales que tiene, las mismas leyes que él, su misma estructura. Frecuentemente, los espacios vectoriales más importantes surgen como subconjuntos de espacios vectoriales más amplios.

Definición (Subespacio Vectorial)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*. Si S es un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *y S es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *respecto a las operaciones interna y externa definidas en* $\mathbb{R}^n$ *, diremos que S es un* ***subespacio vectorial de*** $\mathbb{R}^n$*.*

Definiciones Generales

En este apartado, estudiaremos partes de los espacios vectoriales que tiene, las mismas leyes que él, su misma estructura. Frecuentemente, los espacios vectoriales más importantes surgen como subconjuntos de espacios vectoriales más amplios.

Definición (Subespacio Vectorial)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*. Si S es un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *y S es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *respecto a las operaciones interna y externa definidas en* $\mathbb{R}^n$ *, diremos que S es un* ***subespacio vectorial de*** $\mathbb{R}^n$*.*

Ejemplo

1. El conjunto $F = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R})$
2. El subconjunto F de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$F = \{(x_1, x_2, x_3)/3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$$

es un subespacio vectorial del espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$

Definiciones Generales

Definición (Subespacio Vectorial)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. *Si S es un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *y S es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *respecto a las operaciones interna y externa definidas en* $\mathbb{R}^n$ *, diremos que S es un* ***subespacio vectorial de*** $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Caracterización de los subespacios)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$. *La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío,* $S \subseteq \mathbb{R}^n$, *sea subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$, *es que se verifiquen las siguientes condiciones:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in S \Rightarrow \lambda \vec{x} \in S$

Definiciones Generales

Definición (Subespacio Vectorial)

*Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ respecto a las operaciones interna y externa definidas en $\mathbb{R}^n$, diremos que S es un **subespacio vectorial de** $\mathbb{R}^n$.*

Teorema (Caracterización de los subespacios)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío,$S \subseteq \mathbb{R}^n$, sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in S \Rightarrow \lambda \vec{x} \in S$

Estas dos propiedades que exigimos para que un subconjunto sea subespacio pueden resumirse en una sola:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in S \Rightarrow \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in S$$

Definiciones Generales

Teorema (Caracterización de los subespacios)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto no vacío, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in S \Rightarrow \lambda \vec{x} \in S$

Ejercicio 4.1: Comprobar que el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Definiciones Generales

Definición

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *llamaremos* **subespacio trivial** *de* $\mathbb{R}^n$ *al formado únicamente por el vector cero,* $S = \{\mathbf{0}\}$.

También se verifica que $\mathbb{R}^n$ *es subespacio vectorial de si mismo.*

Se llama ***subespacio propio*** *del espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ *a todo subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *que sea distinto de* $\{\vec{0}\}$ *y de* $\mathbb{R}^n$.

Subespacio engendrado por un sistema de vectores

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ y dado un subconjunto cualquiera de vectores de $\mathbb{R}^n$, digamos que

$$A = \{\vec{u}_1, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u}_p\},$$

no vacío del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se define un nuevo conjunto formado por todos los vectores del espacio que son combinaciones lineales de los vectores de A y lo representamos por $L(A)$ ó $< A >$:

$$\boxed{\vec{x} \in L(A) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p}$$

Ejemplo

En el espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[t], +, *)$ se considera el conjunto de vectores

$$A = \{t^2 - 1, t + 1, t^2 - 7t - 10\}$$

Es fácil comprobar que el polinomio $3t^2 - 2t + 5$ pertenece a$L(A)$.

Subespacio engendrado por un sistema de vectores

Teorema

Sea A un conjunto de vectores del espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ entonces $L(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y además es el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ que contiene al conjunto A.

Definición (Subespacio engendrado por un sistema de vectores)

Al subespacio vectorial $L(A)$,

$$L(A) = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \}$$

le llamamos **subespacio vectorial o variedad lineal engendrado por A**, *ya que A es un sistema generador de dicho subespacio vectorial.*

Subespacio engendrado por un sistema de vectores

Definición (Subespacio engendrado por un sistema de vectores)

Al subespacio vectorial $L(A)$*,*

$$L(A) = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\}$$

le llamamos **subespacio vectorial o variedad lineal engendrado por A***, ya que* A *es un sistema generador de dicho subespacio vectorial.*

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, los vectores $(1,2,0,0), (0,3,-1,0), (0,0,5,4)$ engendran al subespacio

$$< F >= \{\alpha(1,2,0,0), \beta(0,3,-1,0) + \gamma(0,0,5,4), \quad \forall\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R}\}$$

Subespacio engendrado por un sistema de vectores

Definición (Ecuación vectorial de $L(A)$)

Si $L(A)$ es el subespacio vectorial o variedad lineal engendrada por el conjunto $A = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$, de vectores de $\mathbb{R}^n$, la igualdad

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{u}_p, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

que expresa un vector, $\vec{x}$, cualquiera de $L(A)$ como combinación lineal de los vectores de A, se llama ***ecuación vectorial de L(A).***

Base y Dimensión de un subespacio vectorial

También podemos hablar de base de un subespacio vectorial, es decir, un sistema generador del subespacio que es linealmente independiente y por tanto tenemos también el concepto de dimensión de un subespacio.

Base y Dimensión de un subespacio vectorial

Definición

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de dimensión n y sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamamos ***base de S*** *a todo conjunto de vectores linealmente independientes de S que sean un sistema generador de S.*

Definición

Llamaremos dimensión de un subespacio vectorial al número común de vectores que tienen todas sus bases.

Base y Dimensión de un subespacio vectorial

Definición

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de dimensión n y sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamamos **base de S** *a todo conjunto de vectores linealmente independientes de S que sean un sistema generador de S.*

Definición

Llamaremos dimensión de un subespacio vectorial al número común de vectores que tienen todas sus bases.

Teorema

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $S \neq \{\vec{0}\}$, se verifica que

$$\dim S \leqslant \dim \mathbb{R}^n$$

y recíprocamente, toda parte libre $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ engendra un subespacio de $\mathbb{R}^n$ de dimensión p.

Base y Dimensión de un subespacio vectorial

Teorema

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, $S \neq \{\vec{0}\}$, *se verifica que*

$$\dim S \leqslant \dim \mathbb{R}^n$$

y recíprocamente, toda parte libre $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *engendra un subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensión p.*

Ejemplo

Calcula una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$L(S) = \{(1,3,4,1),(2,6,8,2),(2,5,7,2)\}$$

Subespacio fila y columna de una matriz

Dada una matriz de orden $m \times n$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada una de las filas de A pueden ser vista como un vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{f_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ \vec{f_2} = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \vec{f_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

y cada una de las columnas de dicha matriz también pueden ser vistas como un vector de $\mathbb{R}^m$:

$$\vec{c_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),\ \vec{c_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, \vec{c_m} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

Subespacio fila y columna de una matriz

Definición

Llamamos ***espacio fila de dicha matriz*** *y lo representamos por* $SF(A)$ *al subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *engendrado por los vectores fila de dicha matriz, es decir*

$$SF(A) =< \vec{f_1}, \vec{f_2}, \cdots, \vec{f_m} >= \{\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots \alpha_m \vec{f_m}\}$$

Definición

Llamamos ***espacio columna de dicha matriz*** *y lo representamos por* $SC(A)$ *al subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^m$ *engendrado por los vectores columna de dicha matriz, es decir*

$$SC(A) =< \vec{c_1}, \vec{c_2}, \cdots, \vec{c_n} >$$

Subespacio fila y columna de una matriz

Definición

Llamamos ***espacio fila de dicha matriz*** *y lo representamos por* $SF(A)$ *al subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *engendrado por los vectores fila de dicha matriz, es decir*

$$SF(A) = < \vec{f_1}, \vec{f_2}, \cdots, \vec{f_m} > = \{\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots \alpha_m \vec{f_m}\}$$

Definición

Llamamos ***espacio columna de dicha matriz*** *y lo representamos por* $SC(A)$ *al subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^m$ *engendrado por los vectores columna de dicha matriz, es decir*

$$SC(A) = < \vec{c_1}, \vec{c_2}, \cdots, \vec{c_n} >$$

Teorema

Se verifica que la dimensión del espacio fila de A *es igual a la del espacio columna de* A *igual al rango de* A.

$$\dim(SF(A)) = \dim(SC(A)) = rg(A)$$

Ecuaciones de una variedad lineal: Paramétricas

En este apartado estudiaremos y calcularemos las ecuaciones de los subespacios vectoriales y podremos interpretar cada subespacio como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Ecuaciones de una variedad lineal: Paramétricas

En este apartado estudiaremos y calcularemos las ecuaciones de los subespacios vectoriales y podremos interpretar cada subespacio como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Definición (Ecuaciones paramétricas)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y sea* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ *una base de* $\mathbb{R}^n$*. Sea S un subconjunto de vectores de* $\mathbb{R}^n$

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$$

Se llaman ***ecuaciones paramétricas del subespacio*** $L(S)$ *a las ecuaciones que existen entre las coordenadas de un vector de* $L(S)$ *respecto de la base B y las coordenadas de los vectores de S respecto de la misma base.*

Veamos como obtenerlas:

Ecuaciones de una variedad lineal: Paramétricas

Si $\vec{x} \in L(S) \Longrightarrow \vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_s\vec{v}_s$, pero por ser $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n$$

Como los vectores de S pertenecen a $\mathbb{R}^n$, se cumple

$$\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & = & a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{u}_n \\ \vec{v}_2 & = & a_{21}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{u}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \vec{v}_s & = & a_{s1}\vec{u}_1 + a_{s2}\vec{u}_2 + \cdots + a_{sn}\vec{u}_n \end{array}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior obtenemos

$$\vec{x} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\vec{u}_i + \cdots + \lambda_s \sum_{i=1}^{n} a_{si}\vec{u}_i =$$

$$(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_{i1})\vec{u}_1 + (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_{i2})\vec{u}_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_{in})\vec{u}_n$$

Ecuaciones de una variedad lineal: Paramétricas

Y como las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas, nos queda:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \cdots + a_{s1}\lambda_s \\ x_2 & = & a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{s2}\lambda_s \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \cdots + a_{sn}\lambda_s \end{array}\right.$$

Este sistema obtenido es lo que se conoce como **ecuaciones paramétricas** del subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s\}$. Observando su forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix}$$

vemos que las columnas son las coordenadas de los vectores de S respecto a la base de $\mathbb{R}^n$

Ecuaciones de una variedad lineal: Paramétricas

Y demás podemos afirmar que el rango de la matriz anterior coincide con la dimensión del subespacio vectorial $L(S)$:

$$\dim(L(S)) = rg \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Determina las ecuaciones paramétricas del subespacio $L(H)$ siendo H el subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^5$ dados por

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1,0), \mathbf{v}_2 = (0,-1,-1,4,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,0,0,-4), \mathbf{v}_4 = (3,-2,4,-25,20)$$

Ecuaciones de una variedad lineal: Implícitas

Definición (Ecuaciones Implícitas)

El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que verifican o que son solución del sistema

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & 0 \end{array}$$

constituyen un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ y las expresiones anteriores se llaman sus ***ecuaciones implícitas****, es lo que hemos llamado el espacio nulo de la matriz A.*

Ecuaciones de una variedad lineal: Implícitas

Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

formada por los coeficientes de las incógnitas, se verifica que

$$\boxed{\dim(S) = n - rg(A)}$$

Ecuaciones de una variedad lineal

Si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

formada por los coeficientes de las incógnitas, se verifica que

$$\boxed{\dim(S) = n - \mathrm{rg}(A)}$$

Veamos a través de sendos ejercicios como pueden obtenerse, partiendo de las ecuaciones paramétricas de una variedad lineal, las condiciones que han de cumplir las coordenadas de un vector cualquiera de V para pertenecer a ella, es decir las ecuaciones implícitas y viceversa.