SOLUCIONES DEL EXAMEN DE CÁLCULO DE FEBRERO (7–II–2013)

1. a) Escribir la forma binómica del complejo cuyo módulo es 1 y cuyo argumento es de $30°$.

b) Enunciar la fórmula de Moivre, y aplicarla al cálculo de la potencia de exponente 120 del complejo del apartado anterior.

Soluciones: a) La forma trigonométrica es: $1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 1(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, y el último complejo escrito es la solución:

Para pasar de la trigonométrica a la binómica basta con quitar el paréntesis.

b) La fórmula de Moivre es la siguiente:

$$[m(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^n = m^n(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)).$$

Las letras significan: m es el módulo, α es el argumento, y n es el exponente al que se eleva el complejo.

Observación: El corchete del primer miembro es necesario ponerlo porque es todo el complejo lo que se eleva a n;podríamos haber puesto parentésis, pero así es más claro.

Aplicando la fórmula:

$$[1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)]^{120} = 1^{120}(cos 3600° + i \operatorname{sen} 3600° = 1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 1.$$

NO SE ADMITE LA SOLUCIÓN 1^{120}.

2. a)Explicar cómo es la expresión decimal de un número irracional.

b)Por reducción al absurdo, probar que el número $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ es irracional.

Respuestas: *La expresión decimal de un irracional es infinita y no periódica.*

No puede ser finita, porque sería racional; así, $3,14 = \frac{314}{100}$. Y no puede ser periódica, porque por medio de series geométricas se ha probado que todo número periódico, sea puro o mixto, es la expresión decimal de un número racional.

Supongamos que existiese un racional $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r = \sqrt{5} + \sqrt{7}$. No es necesario distinguir entre entero y fraccionario, como se verá enseguida. Elevando al cuadrado la igualdad anterior, por medio de $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, tenemos:

$$r^2 = 5 + 7 + 2\sqrt{5}\sqrt{7} = 12 + 2\sqrt{35}.$$

Como 35 no es cuadrado perfecto$(5^2 = 25 < 35 < 36 = 6^2)$, $\sqrt{35}$ *es irracional.* Esto es lo que afirma un teorema probado en clase: *Todo número que no es cuadrado perfecto, tiene raíz cuadrada irracional.* Despejando $\sqrt{35}$ en el segundo miembro, tenemos:

$$\sqrt{35} = \frac{r^2 - 12}{2}.$$

Esta igualdad es una contradicción: el primer miembro es irracional: $\sqrt{35} \notin \mathbb{Q}$*; mientras que* $\frac{r^2-12}{2} \in \mathbb{Q}$ *porque todas las operaciones hechas con* $r, 12$ *y* 2 *dan como resultado un racional por serlo ellos.*

3. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{7n+1}}{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{8n+1}}; \qquad b) \lim_{n\to\infty} \frac{6 + 10 + 14 + \cdots + (4n+2)}{n^2}; \qquad c) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n+5}{7n+2}\right)^{8n+1}.$$

Soluciones: a) La solución se obtiene por equivalencia de infinitésimos, y es 8/7.

Algunos alumnos deben recordar:$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

b) Por haber una suma variable en el numerador, la única forma de calcularlo es por el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}.$$

En este caso: $A_n - A_{n-1} = 4n$; $B_n - B_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$. Por tanto:

Asegura tu aprobado con nuestros cursos de cálculo

CEUS es una empresa con mas de 50 años de experiencia en el sector de la educación y la formación lo que la hacen la opción ideal para recibir los cursos que está buscando en multitud de ámbitos.

Si está buscando algun tipo de curso en Cádiz, no dude en contactar con nosotros. Nuestro conocimiento del sector le ayudará a encontrar siempre la mejor opción gracias al asesoramiento que nuestra experiencia puede brindarle.

www.ceusformacion.com

99%
satisfacción

CEUS ONLINE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6+10+14+\cdots+(4n+2)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n-1} = 4/2 = 2.$$

NO SE ADMITE LA SOLUCIÓN 4/2.

c) Como $\frac{7n+5}{7n+2} \to 7/7 = 1$ y $8n+1 \to \infty$, el límite es del tipo 1^∞. Aplicando la fórmula de este tipo de límites: $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n+5}{7n+2}\right)^{8n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{24n+3}{7n+2}} = e^{24/7} = \sqrt[7]{e^{24}}.$$

Téngase en cuenta que:

$$a_n - 1 = \frac{7n+5}{7n+2} - 1 = \frac{3}{7n+2}, \qquad (a_n-1)b_n = \frac{24n+3}{7n+2} \to 24/7.$$

4. Hallar el carácter de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}; \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2}; \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

Soluciones: a) El término general de la serie es un cociente: $a_n = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}$, al que podemos aplicar el criterio del mismo nombre:

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

En este caso tenemos:

$$a_n = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)(2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n-3)3n}, \qquad a_{n-1} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n-3)}.$$

Claramente es: $a_n = a_{n-1} \times \frac{2n+1}{3n}$, $\qquad a_n/a_{n-1} = \frac{2n+1}{3n}$.

Luego:

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = 2/3 < 1.$$

La serie es, pues, convergente.

b) El término general de la serie es una potencia: conviene aplicarle el criterio de la raíz.

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n.$$

Este límite es del tipo 1^∞; aplicando la fórmula, citada en el problema anterior, tenemos:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n = e^{-1/3} < e^0 = 1.$$

La serie es, pues, convergente.

c) El término general de la serie es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{\sqrt{n}+2}$:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}+2}.$$

Como el denominador del segundo miembro tiene una raíz cuadrada ($n^{1/2} = \sqrt{n}$, al multiplicarlo por $n^{1/2}$ se obtiene un límite finito:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Por la equivalencia anterior es:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 1.$$

El criterio de Pringsheim ha sido aplicado a la serie dada con $\alpha = 1/2 < 1$; por tanto, *la serie es divergente.*

5. El polinomio $4x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene como raíces 1 y -1, y un punto extremo en $x = 2$. Hallar: a) la tercera raíz ; b)los intervalos de crecimiento y decrecimiento; c) los máximos y mínimos relativos; d)factorizarlo.

a) Tal y como se dijo en el examen, *punto extremo es lo mismo que máximo o mínimo relativo.*

La derivada del polinomio dado $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ es: $f'(x) = (4x^3 + ax^2 + bx + c)' = 12x^2 + 2ax + b$, y dicha derivada debe anularse para $x = 2$:

$$f'(2) = 48 + 4a + b = 0.$$

Como 1 es una raíz tiene que ser:

$$4 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0.$$

Análogamente:

$$4 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0.$$

Esto nos proporciona las ecuaciones: $a + b + c = -4$ y $a - b + c = 4$, que junto con la anulación de la derivada forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -4 \\ a - b + c &= 4 \\ 4a + b &= -48 \end{aligned}$$

Resolviéndolo tenemos: $a = -11, b = -4, c = 11$. Y el polinomio es: $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 4x + 11$.

Por anularse para $x = 1$, el polinomio es divisible por $x - 1$; por la misma razón, es divisible por $x - (-1) = x + 1$; luego es divisible por $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$. Haciendo la división (que puede hacerse aplicando dos veces la regla de Ruffini, primero con $x - 1$, y dividiendo el cociente obtenido por $x + 1$), se obtiene:

$$4x^3 - 11x^2 - 4x + 11 = (x^2 - 1)(4x - 11).$$

El polinomio de primer grado $4x-11$ tiene la raíz $11/4$ (obtenida resolviendo la ecuación $4x-11 = 0$). *Esta es la tercera raíz.*

Es curioso que la factorización obtenida puede conseguirse fácilmente con sólo sacar factor común:

$$4x^3 - 11x^2 - 4x + 11 = 4x(x^2 - 1) + 11(1 - x^2) = 4x(x^2 - 1) - 11(x^2 - 1) = (4x - 11)(x^2 - 1).$$

b) Para estudiar el crecimiento y el decrecimiento, hay que estudiar el signo de la derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 22x - 4.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $12x^2 - 22x - 4 = 2(6x^2 - 11x - 2) = 0$, se obtienen las raíces $x_1 = -\frac{1}{6}$ y $x_2 = 2$.

Todo el eje OX queda, pues, descompuesto en los intervalos:

$$(-\infty,\ -\frac{1}{6}),\qquad (-\frac{1}{6},\ 2),\qquad (2,\ +\infty).$$

El signo de la derivada $f'(x) = 12x^2 - 22x - 4 = 12(x + \frac{1}{6})(x - 2)$ puede verse fácilmente, en cada uno de los intervalos hallados, por los signos de los factores $x - 2$ y $x + \frac{1}{6}$. Así, en el intervalo $(-\infty,\ -\frac{1}{6})$ es:

$$x + \frac{1}{6} < 0 \text{ y } x + 2 < 0.$$

Luego en dicho intervalo es: $f'(x) > 0$, y la función es creciente. Razonando del mismo modo, se ve que en $(-\frac{1}{6}, 2)$ la derivada es negativa, y la función decreciente; y en $(2, +\infty)$ derivada positiva y función creciente.

c) La derivada se anula en $x = -\frac{1}{6}$ y en $x = 2$: éstos son los puntos donde puede haber máximo o mínimo relativo.

Al pasar por $x = -\frac{1}{6}$ la derivada pasa de positiva a negativa: *tiene aquí un máximo relativo,* según el primer criterio de máximos y mínimos.

El segundo afirma lo mismo, pues la segunda derivada $f''(x) = 24x - 22$ es negativa en dicho punto:

$$f''(-\frac{1}{6}) = 24(-\frac{1}{6}) - 22 = -26 < 0.$$

En $x = 2$ la derivada pasa de negativa a positiva:*tiene aquí un mínimo relativo,* según el primer criterio de máximos y mínimos.

El segundo afirma lo mismo, pues la segunda derivada $f''(x) = 24x - 22$ es positiva en dicho punto:

$$f''(2) = 24(2) - 22 = 26 > 0.$$

d) El polinomio dado se puede escribir:

$$4(x - 1)(x + 1)(x - \frac{11}{4}),$$

pues es: $a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$, siendo a_n *el coeficiente de mayor grado, y* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *las n raíces del polinomio, que pueden ser iguales o distintas, reales o complejas.*

6. a) Si $\alpha > 0$, por inducción completa, probar la siguiente desigualdad:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

b) Definir el concepto de límite $+\infty$. Usando la desigualdad anterior, probar que si $a > 1$ entonces $a^n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.

Soluciones: Una demostración por inducción completa tiene *dos partes:*

Primera: Comprobar que la propiedad es verdadera para $n = 1$.

Segunda: Probar que si la propiedad es verdadera para $n = h$ también lo es para $n = h + 1$.

En nuestro caso, para $n = 1$, los miembros de la desigualdad son:

$$(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha; \qquad 1 + 1 \cdot \alpha = 1 + \alpha.$$

Se cumple, pues, para $n = 1$.

Supongamos ahora que se cumple para $n = h$:

$$(1+\alpha)^h \geq 1 + h\alpha,$$

y debemos probar que es verdadera para $n = h + 1$.

Como $(1+\alpha)^{h+1} = (1+\alpha)^h \cdot (1+\alpha)$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad anterior por $1 + \alpha$:

$$(1+\alpha)^{h+1} = (1+\alpha)^h \cdot (1+\alpha) \geq (1+h\alpha)(1+\alpha) = 1 + \alpha + h\alpha + h\alpha^2 > 1 + \alpha + h\alpha = 1 + (h+1)\alpha,$$

y queda demostrada la desigualdad. Por lo visto para $n = 1$, éste es el único valor para el que se cumple la igualdad de ambos miembros.

b) La definición de límite más infinito es la siguiente:

Definición 1 *Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite más infinito, y escribimos:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

si para todo $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$si \quad n \geq n_0, \quad es: \quad a_n > A.$$

Si $a > 1$, entonces $a = 1 + \alpha$, siendo $\alpha > 0$. Aplicando la desigualdad dada, tenemos:

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Sea $A > 0$ un número positivo cualquiera; para que $1 + n\alpha > A$ basta con que $n > \frac{A-1}{\alpha}$. Cuando se tenga ésto será:

$$a^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > A$$

.

O sea: $a^n > A$, para $n \geq n_0$. Luego: $a^n \to +\infty$.

7. Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{tg} 3x}{1 - \cos x}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right); \qquad c)\ \lim_{x\to 1} x^{1/1-x}.$$

Soluciones: a) Cuando $x \to 0$ tenemos las siguientes equivalencias de infinitésimos:

$$\operatorname{sen} 2x \sim 2x; \qquad \operatorname{tg} 3x \sim 3x; \qquad 1 - \cos x \sim 1/2x^2.$$

Aplicándolas se obtiene 12 como resultado.

b) Haciendo la diferencia de las dos fracciones, obtenemos:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Tomando límites tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2},$$

habiendo sustituido en el denominador el producto $x \operatorname{sen} x$ por x^2 ($\operatorname{sen} x$ es equivalente a x). Aplicando a la última fracción la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x}.$$

Aplicando la equivalencia $1 - \cos x \sim 1/2x^2$, o la regla nuevamente, se obtiene el valor 0.

c) Es evidente que se trata de un límite del tipo 1^∞; aplicando la fórmula de este tipo de límites para funciones:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]g(x)},$$

resulta:

$$\lim_{x\to 1} x^{1/1-x} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x}}.$$

Ahora bien, en el límite del exponente, $x \neq 1$, luego $\frac{x-1}{1-x} = -1$ y ese mismo valor es el límite del exponente; luego:

$$\lim_{x\to 1} x^{1/1-x} = e^{-1} = 1/e.$$

8. a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) Calcular las constantes a, b y c para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{si } x < 3; \\ bx + c, & \text{si } x \geq 3, \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle, en el intervalo $[0,\ 8]$. ¿En qué punto se cumple la tesis del teorema? ¿Es máximo o mínimo relativo?

Soluciones: a) **Teorema de Rolle:** *Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en (a, b), y es: $f(a) = f(b)$, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(x_0) = 0.$$

b) La función definida tiene dos ramas; al ser $3 \in [0, 8]$, la función debe ser continua en $x = 3$:

$$3a + 9 = 3b + c,$$

siendo: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3a + 9$, $\qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3b + c$.

Puesto que $3 \in (0, 8)$, la función debe ser derivable en $x = 3$. La derivada de $x^2 + ax$ es $2x + a$ y la de $bx + c$ es b; en consecuencia, las derivadas laterales en $x = 3$ son:

$$f'_-(3) = a + 6, \qquad f'_+(3) = b$$

y ambas deben ser iguales para que la función sea derivable:

$$a + 6 = b.$$

Además debe ser $f(0) = f(8)$. Pero: $f(0) = 0^2 + a \cdot 0 = 0$ y $f(8) = 8b + c$, y obtenemos la igualdad:

$$8b + c = 0.$$

Las tres ecuaciones obtenidas forman el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3a & -3b & -c & = & -9 \\ a & -b & & = & -6 \\ & 8b & +c & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $a = -39/8, b = 9/8, c = -9$.

Como $(9/8x - 9)' = 9/8$, la derivada debe anularse en la otra rama: $(x^2 - 39/8x)' = 2x - 39/8$ que se anula para $x_0 = 39/16$. Obsérvese que es: $0 < 39/16 < 3 < 8$ ya que $3 \times 16 = 48 > 39$.

Ya que $f''(39/16) = 2 > 0$ el segundo criterio de máximos y mínimos nos dice que tiene un mínimo relativo; fácilmente se ve lo mismo por el primero.

9. Por medio de series geométricas hallar la fracción generatriz del número $4,31\widehat{81}$.

Solución:

El número dado puede escribirse así:

$$4,31\widehat{81} = 4 + 0,31 + 0,0081 + 0,000081 + 0,00000081 + 0,0000000081 + \cdots$$
$$= 4 + \frac{31}{10^2} + \frac{81}{10^4} + \frac{81}{10^6} + \frac{81}{10^8} + \frac{81}{10^{10}} + \cdots$$

Prescindiendo de los dos primeros sumandos, el resto forma una serie geométrica, cuyo primer término es:

$a_1 = \frac{81}{10^4}$ y cuya razón es $r = 1/10^2 < 1$. La suma de la serie es:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{81}{10^4}}{1 - 1/10^2} = \frac{81}{10^4 - 10^2} = \frac{81}{9900}.$$

Para quitar los denominadores en la segunda fracción se han multiplicado numerador y denominador por 10^4, que es la mayor potencia de 10 en ella.

Por tanto, el número dado se escribe así:

$$4,31\widehat{81} = 4 + \frac{31}{10^2} + \frac{81}{9900} = \frac{4 \cdot 9900 + 31 \cdot 99 + 81}{9900} = \\ = \frac{4(10000-100) + 31(100-1) + 81}{9900} = \frac{43181 - 431}{9900} = \frac{42750}{9900} = \frac{95}{22}.$$

Este problema no se puede hacer mal, porque al disponer el alumno de calculadora puede comprobar el resultado: al dividir 95 por 22 se obtiene el número periódico propuesto.