Boletín del Tema I: MATRICES Y DETERMINANTES

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

   Calcular A^2, B^2, AB, AC, BC y $(A-C)B$.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calcular $A+B, A-B, A^2, B^2, AB$ y BA

3. Hallar las matrices A y B que verifican:

$$5A - 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 23 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}, \quad 4A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 17 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Calcular las matrices M y N que son soluciones del siguiente sistema

$$3M - 2N = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -9 \\ -6 & -8 & 7 \end{pmatrix}, \quad 5M + 7N = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 47 \\ 52 & 28 & 22 \end{pmatrix}$$

5. Probar las siguientes propiedades de las matrices simétricas y antisimétricas:

   a) La suma de dos matrices simétricas del mismo orden es otra matriz simétrica del mismo orden.

   b) La traspuesta de una matriz simétrica es simétrica.

   c) El producto de una matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.

   d) La traspuesta de una matriz antisimétrica es antisimétrica.

   e) La suma de una matriz y de su traspuesta es simétrica.

6. *a*) Demostrar que toda matriz se puede descomponer de manera única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

   b) Descomponer la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

   en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

7. Sean a, b, c números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que la matriz A es antisimétrica y probar que la matriz $M = A^2 + I_3$ es simétrica.

8. Efectuar el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Prueba que si A es una matriz simétrica de orden n, entonces $B^t AB$ es simétrica cualquiera que sea la matriz cuadrada B de orden n.

10. Encuentra la forma canónica de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 & -3 \\ -4 & 12 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

encuentra una matriz triangular superior con pivotes iguales a uno que sea equivalente a ella.

12. Hallar las inversas de las siguientes matrices, justificando previamente su existencia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Calcular el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ -1 & 3 & x-1 \end{pmatrix}$$

14. Resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15. Sea M el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -5b \\ b & a+3b \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales. Determina a y b para que dichas matrices sean inversibles.

16. Encuentra el valor de α para que sea 2 el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & \alpha-1 & -2 & 0 & 4 & 2\alpha \\ 1 & 2 & \alpha^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & \alpha+1 & 2\alpha-2 \end{pmatrix}$$

17. Hallar el rango de las siguientes matrices en función de los valores de los cuales dependen:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & \beta^2 \\ 1 & 1 & 2\alpha & \beta \\ 1 & 1 & 2\alpha & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & 1 \\ 2 & \alpha\beta & 1 \\ 2 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra una matriz triangular superior y otra triangular inferior que sean equivalentes a ella.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in R$, discute para qué valores de α es A inversible.

20. Calcula α y β para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & \alpha & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & \beta \end{pmatrix}$, sea el más pequeño posible.

21. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

encuentra unas equivalentes a ellas reducidas por filas, calcula su forma canónica y encuentra matrices regulares P_1, P_2 y Q_1, Q_2 tales que

$$P_1AQ_1 = P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 13 \\ -13 & -4 & -8 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

    a) Una matriz A' equivalente a ella escalonada por filas

    b) Una matriz A'' equivalente a ella escalonada por columnas

    c) Una matriz B escalonada por columnas equivalente a la matriz A' obtenida en el apartado primero

    d) Una matriz C escalonada por filas equivalente a la matriz A'' obtenida en el apartado segundo

    e) Encuentra dos matrices P y Q tales que $PAQ = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

23. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \alpha & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

    Determina según los valores de α el rango de A

24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \alpha & 5 \\ 1 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

    a) Calcular el rango de A en función de los valores de α.

    b) Para $\alpha = 0$, encuentra una matriz B, escalonada por filas equivalente a la matriz A, y una matriz C escalonada por columnas equivalente a la matriz B anterior.

25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in R$, se pide:

    a) Para $\alpha = 1$, encuentra la forma canónica de la matriz A.

    b) Discute para qué valores de α es A inversible.

26. Calcula el valor de los determinantes de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{pmatrix}$$

27. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula el valor de los siguientes determinantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

28. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ x & -4 & 4 \\ 3 & x & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad b)\ \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 4x+8 & x+2 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 0, \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

siendo a, b, y c distintos de cero.

29. Calcula el valor del siguiente determinante (determinante de Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

30. Calcula la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

31. Determina el valor de x para que la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ tenga rango igual a cuatro.

32. Determina a, b, c para que la ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & a-x & b-x \\ -a-x & 0 & c-x \\ -b-x & -c-x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

tenga una raíz múltiple.

33. Calcula las matrices adjuntas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

34. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & n \\ 10 & 3 & -1 & 2 \\ 15 & m+n & 2 & 5 \\ 20 & 1 & 3 & m \end{pmatrix}$, encuentra n y m números naturales tales que $det(A) = 1$.