TEMA III: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática.

Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Definiciones generales

Definición (Sistema de ecuaciones lineales)

Se llama ***sistema de ecuaciones lineales*** *a un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas, que se pueden escribir de la forma:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ son los coeficientes, x_i las incógnitas, y los b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ los términos independientes, elementos de $\mathbb{R}$.

Definiciones generales

Definición (Sistema de ecuaciones lineales)

*Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas, que se pueden escribir de la forma:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

donde los a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ son los coeficientes, x_i las incógnitas, y los b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ los términos independientes, elementos de $\mathbb{R}$.

El número de incógnitas n y el de ecuaciones m no son necesariamente iguales. Nótese que en un sistema de ecuaciones lineales no pueden aparecer términos como una incógnita al cuadrado, el producto de dos incógnitas o una forma trigonométrica o logarítmica.

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

Donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama la **matriz de los coeficientes**.

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

A la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se llama la **matriz de las incógnitas**.

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

Y a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ {}_m \end{pmatrix}$$

se llama la **matriz de los términos independientes**.

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

La matriz de orden $m \times (n+1)$ que se obtiene al añadir a la matriz de los coeficientes la columna formada por los términos independientes,recibe el nombre de **matriz ampliada** del sistema

$$A' = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Definiciones generales

El sistema de ecuaciones lineales general admite, aplicando la definición de producto de matrices, la siguiente representación matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

y como notación utilizaremos $AX = B$.

Objetivo

El principal objetivo es encontrar la matriz o vector X, si es que existe, que haga que se cumplan todas las ecuaciones simultáneamente.

Definiciones generales

Definición (Solución de un sistema)

Se llama ***solución de un sistema*** *de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de n números reales $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema, es decir,*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ a_{21}\lambda_1 & + & a_{22}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\lambda_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Definiciones generales

Definición (Solución de un sistema)

Se llama ***solución de un sistema*** *de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de n números reales $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema, es decir,*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ a_{21}\lambda_1 & + & a_{22}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\lambda_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es hallar todas sus soluciones.

Definiciones generales

Ejemplo

Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 26 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & 6x_4 & = & 10 \end{array}\right.$$

El vector $(2, -1, 4, 1)$ es una solución del sistema. El vector $(8, 2, 3, -3)$ es otra solución de dicho sistema.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Definición

*Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible** cuando posee solución. Si un sistema no tiene ninguna solución se dice que es **incompatible**.*

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Definición

*Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible** cuando posee solución. Si un sistema no tiene ninguna solución se dice que es **incompatible**.*

Definición

*Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible determinado** si posee una única solución. Se dice que un sistemas es **compatible indeterminado** cuando la solución no es única.*

Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Definición

*Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible** cuando posee solución. Si un sistema no tiene ninguna solución se dice que es **incompatible**.*

Definición

*Se dice que un sistema de ecuaciones es **compatible determinado** si posee una única solución. Se dice que un sistemas es **compatible indeterminado** cuando la solución no es única.*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Sistema compatible} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Compatible Determinado}\\ \text{Compatible Indeterminado}\end{array}\right. \\ \\ \text{Sistema incompatible}\end{array}\right.$$

Sistemas Equivalentes

Definición (Sistemas Equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas son ***equivalentes*** *cuando tienen las mismas soluciones.*

Sistemas Equivalentes

Definición (Sistemas Equivalentes)

*Dos sistemas de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.*

Dos sistemas son equivalentes cuando uno puede ser obtenido del otro mediante una o más de las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera entre sí.
- Multiplicar una cualquiera de sus ecuaciones por un escalar no nulo.
- Sumara una de las ecuaciones otra cualquiera multiplicada por un escalar distinto de cero.

Sistemas Equivalentes

Definición (Sistemas Equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas son ***equivalentes*** *cuando tienen las mismas soluciones.*

Dos sistemas son equivalentes cuando uno puede ser obtenido del otro mediante una o más de las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera entre sí.
- Multiplicar una cualquiera de sus ecuaciones por un escalar no nulo.
- Sumara una de las ecuaciones otra cualquiera multiplicada por un escalar distinto de cero.

Si el sistema lo escribimos en forma matricial $AX = B$, las tres operaciones con sistemas corresponden a las tres operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada.

Sistemas Equivalentes

Definición (Sistemas Equivalentes)

*Dos sistemas de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.*

Dos sistemas son equivalentes cuando uno puede ser obtenido del otro mediante una o más de las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera entre sí.
- Multiplicar una cualquiera de sus ecuaciones por un escalar no nulo.
- Sumara una de las ecuaciones otra cualquiera multiplicada por un escalar distinto de cero.

Ejemplo

El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 3 \\ 2x+3y-4z & = & -1 \\ x+9y-2z & = & 4 \end{array}\right. \text{, es equivalente al } \left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 3 \\ 5y-6z & = & -7 \\ 3z & = & 5 \end{array}\right.$$

Sistema Triangular

Definición (Sistema Triangular)

*Un sistema de ecuaciones se dice que es un **sistema triangular** cuando la matriz de los coeficientes es una matriz triangular, es decir, verifica que todos lo elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.*

Sistema Triangular

Definición (Sistema Triangular)

Un sistema de ecuaciones se dice que es un ***sistema triangular*** *cuando la matriz de los coeficientes es una matriz triangular, es decir, verifica que todos lo elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.*

Ejemplo

El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 5 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & -1 \\ x_3 - 2x_4 & = & 4 \\ x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

es triangular ya que la matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema Triangular

Definición (Sistema Escalonado)

Un sistema de ecuaciones se dice que es un ***sistema escalonado*** *cuando la matriz de los coeficientes es una matriz escalonada por filas, es decir, verifica:*

1. *El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior*
2. *Todos los elementos situados por debajo del pivote son nulos*
3. *Si hay filas nulas, están situadas en la parte inferior de la matriz.*

Sistema Triangular

Definición (Sistema Escalonado)

*Un sistema de ecuaciones se dice que es un **sistema escalonado** cuando la matriz de los coeficientes es una matriz escalonada por filas, es decir, verifica:*

1. *El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior*
2. *Todos los elementos situados por debajo del pivote son nulos*
3. *Si hay filas nulas, están situadas en la parte inferior de la matriz.*

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Introducción

Métodos de Resolución

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Los **métodos directos**, permiten obtener la solución del sistema de manera directa. Proporcionan una solución exacta en un número finito de operaciones. Son válidos para valores de n pequeños ya que si n es muy grande, la acumulación de los errores de redondeo puede llegar a provocar que la solución numérica no sea igual que la solución exacta.
- Los **métodos aproximados o iterativos**, que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan las soluciones del sistema por aproximaciones sucesivas. Para ello, construyen una sucesión de vectores destinada a converger a la solución del sistema.

Introducción

Métodos de Resolución

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Los **métodos directos**, permiten obtener la solución del sistema de manera directa. Proporcionan una solución exacta en un número finito de operaciones. Son válidos para valores de n pequeños ya que si n es muy grande, la acumulación de los errores de redondeo puede llegar a provocar que la solución numérica no sea igual que la solución exacta.
- Los **métodos aproximados o iterativos**, que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan las soluciones del sistema por aproximaciones sucesivas. Para ello, construyen una sucesión de vectores destinada a converger a la solución del sistema.

Introducción

Métodos de Resolución

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Los **métodos directos**, permiten obtener la solución del sistema de manera directa. Proporcionan una solución exacta en un número finito de operaciones. Son válidos para valores de n pequeños ya que si n es muy grande, la acumulación de los errores de redondeo puede llegar a provocar que la solución numérica no sea igual que la solución exacta.
- Los **métodos aproximados o iterativos**, que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan las soluciones del sistema por aproximaciones sucesivas. Para ello, construyen una sucesión de vectores destinada a converger a la solución del sistema.

En muchas ocasiones los métodos iterativos permiten obtener un grado de exactitud superior al que se puede obtener empleando los métodos exactos, debido fundamentalmente a los errores de truncamiento que se producen en el proceso.

Sistemas de Cramer

Definición (Sistema de Cramer)

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

se dice que es un ***sistema de Cramer*** *si se verifica que el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero .*

Sistemas de Cramer

Definición (Sistema de Cramer)

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

se dice que es un ***sistema de Cramer*** *si se verifica que el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero .*

Es evidente que se podría decir también que la matriz de los coeficientes es invertible, o bien que el rango de la matriz de los coeficientes es n.

Sistemas de Cramer

Teorema (de Cramer)

El sistema de Cramer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

admite solución única (sistema compatible determinado), y el valor de cada incognita es igual al cociente entre el determinante que se obtiene al sustituir, en el determinante de la matriz de los coeficientes, la columna de coeficientes de dicha dicha incógnita por la columna de los términos independientes, y el determinante de la matriz de los coeficientes.

Sistemas de Cramer

de Cramer

El valor de cada incognita es igual al cociente entre el determinante que se obtiene al sustituir, en el determinante de la matriz de los coeficientes, la columna de coeficientes de dicha dicha incógnita por la columna de los términos independientes, y el determinante de la matriz de los coeficientes.

Cualquiera que sea $i = 1, 2, \cdots, n$, se verifica

$$x_i = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & i) & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Sistemas de Cramer

Cualquiera que sea $i = 1, 2, \cdots, n$, se verifica

$$x_i = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Ejercicio 3.1: Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & 12 \end{array} \right.$$

Método de eliminación de Gauss

Para analizar y resolver sistemas de ecuaciones lineales transformaremos el sistema original en otro equivalente y más sencillo de resolver, para ello utilizaremos la teoría de matrices equivalentes y las propiedades de los sistemas equivalentes de ecuaciones.

Método de eliminación de Gauss

Eliminación de Gauss

El método de **eliminación a algoritmo de Gauss** consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro sistema equivalente que sea triangular

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

o escalonado,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & a_{rr}x_r & + & \cdots & + & a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right.$$

mediante operaciones elementales. De esta manera el nuevo sistema se puede resolver facilmente.

Método de eliminación de Gauss

El método consiste en obtener la matriz escalonada por filas equivalente a la matriz ampliada *(Eliminación de incógnitas)* y luego resolver el sistema de ecuaciones, equivalente al original, proporcionado por dicha matriz *(Sustitución hacia atrás)*.

Método de eliminación de Gauss

El método consiste en obtener la matriz escalonada por filas equivalente a la matriz ampliada *(Eliminación de incógnitas)* y luego resolver el sistema de ecuaciones, equivalente al original, proporcionado por dicha matriz *(Sustitución hacia atrás)*.

Sea un sistema cualquiera escrito en forma matricial $AX = B$ y consideramos la matriz ampliada A'

$$A' = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

El algoritmo de la Eliminación de Gauss es el siguiente:

Método de eliminación de Gauss

1. Supongamos que $a_{11} \neq 0$. Multiplicamos la primera ecuación por $\frac{1}{a_{11}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

2. Sumamos a la fila i–ésima la primera multiplicada por el elemento $-a_{i1}$, siendo $i = 2, 3, \cdots, m$, obtenemos una matriz equivalente a la matriz A' pero que tiene nulos todos los elementos situados debajo del a_{11}.

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

Método de eliminación de Gauss

3. En la matriz obtenida consideramos el elemento que ocupa la posición (2,2) y que representamos por a'_{22} y si $a'_{22} \neq 0$, multiplicamos la segunda fila por $\frac{1}{a'_{22}}$ y hacemos ceros todos los elementos que están debajo suya utilizando la misma técnica que con el a_{11}.
4. El algoritmo se puede realizar si en cada paso el elemento a_{rr} no es cero. Estos elementos se llaman *pivotes* de la eliminación.

Si nos encontramos con algún pivote igual a cero, por ejemplo el a_{rr}, buscamos en la columna r-ésima y por debajo de a_{rr} el primer elemento distinto de cero, $a_{sr} \neq 0$ y procedemos a intercambiar las filas r y s y ya podemos seguir.

Método de eliminación de Gauss

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

Teorema (De Rouché-Frobenius)

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} AX = B$$

se verifica que el sistema tiene solución si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

Es decir, se cumple que: rango $A =$ rango $(A|B)$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = r$$

Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. Si $rg(A) = rg(A|B) = r = n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada e igual al número de incógnitas.
2. Si $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada pero menor que el número de incógnitas.

Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. Si $rg(A) = rg(A|B) = r = n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada e igual al número de incógnitas:

- Si $r = n = m$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al de la ampliada e igual al número de incógnitas y al número de ecuaciones, el sistema es un sistema de Cramer.
  Lo podemos resolver aplicando el método de Gauss para transformarlo en un sistema triangular.
- Si $r = n < m$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al de la ampliada e igual al número de incógnitas pero menor que el número de ecuaciones, podemos prescindir de las $m-n$ ecuaciones que no hayan intervenido en el cálculo del rango y el sistema que nos queda, al que llamaremos **sistema principal** es equivalente al primitivo. Lo podemos resolver aplicando el método de Gauss para transformarlo en un sistema triangular.

Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. Si $rg(A) = rg(A|B) = r = n$.
2. Si $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada pero menor que el número de incógnitas:

En el segundo caso,al ser rango A = rango $(A|B) = r < n$, existen r filas no nulas en la matriz equivalente escalonada por filas , supongamos, por comodidad en la notación, que dichas filas son las r primeras.Suprimimos las m-r últimas ecuaciones y obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}\right.$$

que es equivalente al primitivo. Mediante el método de eliminación de Gauss lo podemos transformar en un sistema escalonado.

1. Si $rg(A) = rg(A|B) = r = n$.
2. Si $rg(A) = rg(A|B) = r < n$, es decir, el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la ampliada pero menor que el número de incógnitas:

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ 4x & + & 2y & & & = & 8 \\ -3x & - & y & + & z & = & -2 \end{array} \right.$$

Sistemas Homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquellos que tienen todos los términos independientes iguales a cero, es decir son sistemas del tipo

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & 0 \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Sistemas Homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquellos que tienen todos los términos independientes iguales a cero, es decir son sistemas del tipo

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & 0 \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

En los sistemas homogéneos siempre se verifica que rang(A)=rang(A') y por tanto un sistema homogéneo siempre tiene solución. A la solución

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

la llamamos **Solución trivial**

Sistemas Homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquellos que tienen todos los términos independientes iguales a cero, es decir son sistemas del tipo

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & 0 \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Nos interesan soluciones distintas de la trivial, y para ello debe ocurrir que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & & & & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Espacio Nulo de una Matriz

Se llama **espacio nulo de una matriz** A, al conjunto formado por todas las matrices columna X tales que $AX = 0$

En definitiva, para calcular el espacio nulo de una matriz A hemos de resolver el sistema homogéneo $AX = 0$.