Cálculo

Convocatoria de Febrero *Primer Curso del Grado en Ingeniería Informática* *5–II–2015*

El alumno hará cinco de los nueve problemas propuestos.

Cada uno, bien hecho, vale dos puntos.

---

1. a) Probar que un número tiene todos sus factores primos elevados a exponentes múltiplos de tres si es cubo perfecto.

b) Aplicación: Si $p > 1$ es un número primo cualquiera, probar que $\sqrt[3]{p}$ es irracional, por reducción al absurdo.

2. Calcular de dos maneras el cociente:

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i}.$$

Aplicación: Calcular el seno, el coseno y la tangente de 75°.

3. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n+3} \cot \frac{\pi}{2n+1}; \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{10} + \cdots + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3n+1}}{n^2}; \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n^2 + 6n + 5}{8n^2 + 10n + 1} \right)^{6n+7}.$$

4. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tales que:

$$\frac{1}{n} < a_n < \frac{5}{n}.$$

¿Qué se puede decir de dicha sucesión? Enunciar el enunciado teórico en que se basa la respuesta.

¿Qué carácter tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

5. Por inducción completa, probar que las derivadas sucesivas de la función $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$ son de la forma:

$$y^{n)} = P_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2},$$

siendo $P_n(x)$ un polinomio de grado n. Establecer la siguiente relación de recurrencia:

$$P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) + P'_n(x).$$

6. Hallar el carácter de las series:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{4\cdot 8\cdot 12\cdots 4n}; \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}; \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4n+3}.$$

7. Sean un número real α, $\alpha > 1$; y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} = +\infty.$$

a) ¿Qué carácter tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, y qué clase de serie es?

b)Definir el concepto de límite infinito.

Probar que, a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, es:

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} > \alpha.$$

c) Deducir del apartado anterior que:

$$a_n < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

¿Qué carácter tiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

d) Aplicación: carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^{\ln n}}$.

8. La suma enésima de una serie viene es: $S_n = \frac{6n+5}{3n+4}$. Hallar: a) el término general de la serie; b) la suma de la serie, si existe; c) carácter de la serie.

9. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+9x+7} - \sqrt{x^2+7x+5}\right); \qquad \text{b)} \lim_{x\to 5} \frac{1-\cos(2x-10)}{\operatorname{sen}^2(x-5)}; \qquad \text{c)} \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+7}\right)^{x+3}.$$