Práctica III: MÉTODOS ITERATIVOS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. Introducción

Con frecuencia los sistemas lineales de ecuaciones que se presentan en muchos problemas de la ingeniería no se pueden resolver con métodos exactos o directos, como los vistos en clase (Gauss o Cramer). Estos métodos se caracterizan porque siempre requieren una cantidad fija de pasos para su resolución.

En la realidad es muy frecuente tener que resolver sistemas de ecuaciones de miles de ecuaciones con miles de incógnitas. Afortunadamente existen otros métodos que requieren una cantidad variable de pasos,y que son más eficientes para obtener la solución de un sistema lineal. A esto, vamos a dedicar esta práctica.

Un **método iterativo** es un método que progresivamente va calculando aproximaciones a la solución de un problema, es decir, se repite un mismo proceso de mejora sobre una solución aproximada y se espera que la obtenida sea una solución más aproximada que la inicial. Los métodos iterativos se usan cuando no se conoce un método para obtener la solución en forma exacta. Consta de los siguientes pasos:

1. Se inicia con una solución aproximada.
2. Ejecuta una serie de cálculos para obtener o construir una mejor aproximación partiendo de la inicial. La fórmula que permite construir la aproximación usando otra se conoce como **ecuación de recurrencia**.
3. Se repite el paso anterior pero usando la solución obtenida.

2. Errores y Normas matriciales

Estos métodos iterativos resuelven problemas de modo aproximado a través de un algoritmo que nos proporciona unos resultados a partir de unos datos iniciales. Y dado que cualquier algoritmo y los resultados pueden llevan inherentes distintos tipos de errores, conviene familiarizarse con ellos: Sea $\overline{\alpha}$ una aproximación del valor real α. Llamaremos error absoluto a la expresión

$$|\alpha - \overline{\alpha}|$$

mientras que el error relativo viene dado por

$$\frac{|\alpha - \overline{\alpha}|}{|\alpha|}$$

En la mayoría de los métodos numéricos utilizaremos como error el error absoluto ya que lo que nos interesa conocer es el número de cifras decimales exactas que posee la solución de un determinado problema: Se dice que un valor $\overline{\alpha}$ aproxima a α con k cifras significativas si $k \in \mathbb{Z}$ es el mayor entero positivo tal que

$$\frac{|\alpha - \overline{\alpha}|}{|\alpha|} < 5 \cdot 10^{-k}$$

Sea $A \in \mathcal{M}_n$, entonces definimos **la norma infinito de una matriz** como el máximo de la suma de los valores absolutos de los elementos de cada fila.

$$||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Ejemplo 1
Considerando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar su norma infinita

Solución:

En primer lugar introducimos la matriz y utilizamos la orden `mat_norm(A,inf)`, que nos determina la norma infinito de la matriz A

```
(%i1) A:matrix([1,0,-1,2],[-6,1,0,-1],[3,5,0,-1],[1,0,-1,0]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i2) mat_norm(A,inf);
```

(%o2) 9

3. Métodos iterativos lineales. Criterios de Paro

Consideremos un sistema lineal de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siendo A una matriz invertible, la idea es sustituir dicho sistema por otro equivalente de la forma $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + C$, y a partir de un vector inicial cualquiera $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, generar mediante iteraciones una sucesión de vectores $\{\mathbf{x}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ que convergerá o no a la solución exacta del sistema, $\mathbf{x}$. El cálculo se detiene cuando se ha obtenido una solución aproximada con cierto grado de precisión especificado. Los métodos iterativos más usados son los que construyen la solución de la forma

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + C, \quad T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \; C \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

A la matriz T se le denomina **matriz de iteración**.

Teorema 2
Diremos que un método iterativo $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + C$ es convergente si y sólo si la matriz de iteracción es convergente, es decir que la norma infinito menor que uno, es decir, $||T|| \leq 1$.

Para construir la matriz de iteración T, descomponemos la matriz A en suma de tres matrices, una con su parte inferior (triangular inferior estricta) L, otra con su parte diagonal D, y por último una con su parte superior (triangular superior estricta) U. Así de esta forma

$$A = (D + L + U)$$

Entonces el sistema de la forma $Ax = b$ lo podemos escribir de la forma $(D + L + U)X = b$ lo que nos permitirá realizar transformaciones algebraicas para obtener la matriz de iteración T.

Ejemplo 3

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} 10x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 & = & -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 & = & 15 \end{array}\right.$$

Descomponer la matriz de los coeficientes en la suma de una matriz diagonal, triangular superior e inferior.

Solución:

En primer lugar introducimos la matriz de los coeficientes

```
(%i3) A:matrix([10,-1,2,0],[-1,11,-1,3],[2,-1,10,-1],[0,3,-1,8]);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Y ahora determinamos la matriz diagonal, utilizando la orden `diag_matrix` y las matrices L y U:

```
(%i4) D:diag_matrix(A[1,1],A[2,2],A[3,3],A[4,4]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) U:A-D$ U[2,1]:0$ U[3,1]:0$ U[3,2]:0$
      U[4,1]:0$ U[4,2]:0$ U[4,3]:0$
      U
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i6) L:A-D-U;

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diremos que una forma de paro es suponer que la solución exacta es una de las iteraciones realizadas por lo que podemos en cada iteración ir calculando el error que cometemos $||x^{(n)} - x^{(n-1)}||$ y cuando sea menor que una tolerancia marcada paramos.

3.1. Método de Jacobi

El método de Jacobi es el método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales más simple y se aplica a sistemas cuadrados, es decir, a sistemas con tantas incógnitas como ecuaciones. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lo podemos escribir como

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde D es la matriz diagonal principal de A, L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. Con esta transformación podemos realizar transformaciones algebraicas para obtener la matriz de iteración T

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow D\mathbf{x} + (L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow D\mathbf{x} = -(L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$$

siempre que exista D^{-1}, es decir, siempre que $a_{ii} \neq 0$, $1 < i < n$ (si alguno fuese nulo haría falta permutar previamente las filas).

Si lo definimos como método iterativo de Jacobi toma la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ conocido} \\ x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + C \end{cases}$$

siendo la matriz de iteración de Jacobi T, y la matriz C

$$T = -D^{-1}(L + U) = -\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{a_{11}} \\ -\frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ -\frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el valor de cada incógnita en cada paso del método es

$$x_i^{(k)} = -\frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k-1)}), \ i = 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 4

Resolvamos el siguiente sistema mediante el método de Jacobi

$$\begin{cases} 10x - y + 2z = 2 \\ 3x + 12y + 4z = 7 \\ x - 2y + 16z = 5 \end{cases}$$

Solución:

En primer lugar sería introducir las matrices en el *WxMaxima* y descomponer la matriz de los coeficientes como suma de las matrices $D + L + U$:

```
(%i7) Ab:matrix([10,-1,2,2],[3,12,4,7],[1,-2,16,5]);
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 12 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 16 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) A:submatrix(Ab,4)$
      b:col(Ab,4);
```

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 3 & 12 & 4 \\ 1 & -2 & 16 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) D:diag_matrix(Ab[1,1],Ab[2,2],Ab[3,3])
```

$$(\%o9) \quad \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) U:A-D$ U[2,1]:0$ U[3,1]:0$ U[3,2]:0$ U;
```

$$(\%o10) \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i11) L:A-D-U
```

$$(\%o11) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos ahora las matrices de iteración T y la matriz C:

```
(%i12) T:-invert(D).(L+U);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i13) C:invert(D).b
```

(%o13) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}$

Teniendo en cuenta el método iterativo de Jacobi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{12} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

por lo que las ecuaciones del método son:

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1^{(k)} = & & + & \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} & - & \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} & +\frac{1}{5} \\ x_2^{(k)} = & -\frac{1}{4}x_1^{(k-1)} & & & - & \frac{1}{3}x_3^{(k-1)} & +\frac{7}{12} \\ x_3^{(k)} = & -\frac{1}{16}x_1^{(k-1)} & + & \frac{1}{8}x_2^{(k-1)} & & & +\frac{5}{16} \end{array} \right.$$

Si definimos el vector inicial como el $(0, 0, 0)$ el método de Jacobi iterativo programado vendría dado por:

```
(%i14) x0:[0,0,0]
```

(%o14) $[0, 0, 0]$

```
(%i15) for i:0 thru 4 do
       (i:i+1,
        x1:T.x+C,
        x:x1,
        print(i,transpose(x))
       );
```

(%o15) $1 \begin{pmatrix} \frac{101}{600} & \frac{1181}{2880} & \frac{453}{1280} \end{pmatrix}$
$3 \begin{pmatrix} \frac{1961}{11520} & \frac{2709}{6400} & \frac{40693}{115200} \end{pmatrix}$
$5 \begin{pmatrix} \frac{12361}{72000} & \frac{292399}{691200} & \frac{326957}{921600} \end{pmatrix}$

que converge a la solución. Si no se quiere ralentizar mucho la ejecución del siguiente bucle y del resto de programas en el resto del tema, es conveniente trabajar en modo númerico. Puedes cambiarlo en el menú **Numérico** → **Conmutar salida numérica** o directamente estableciendo el valor de numer en verdadero.

Ejercicio 1. Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Jacobi

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y + z = 1 \\ 3x - 6y + 2z = 2 \\ -x + y + 4z = -1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2. Resolvamos el siguiente sistema mediante el método de Jacobi

$$\begin{cases} 10x - y + 2z = 2 \\ 3x + 12y + 4z = 7 \\ x - 2y + 16z = 5 \end{cases}$$

con uan aproximación inicial de $x_0 = (0,0,0)$ y con un error relativo de 10^{-4}. Obtener la solución exacta y estimar el error relativo obtenido.

3.2. Método de Gauss-Seidel

En el método de Gauss-Seidel el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lo podemos escribir como

$$(D + L + U)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

y haciendo transformaciones algebraicas tenemos que

$$(D+L+U)\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (D+L)\mathbf{x} + U\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (D+L)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = -(D+L)^{-1}U\mathbf{x} + (D+L)^{-1}\mathbf{b}$$

siempre que exista $(D-L)^{-1}$, es decir, siempre que $a_{ii} \neq 0$, $1 < i < n$.

Definimos el método iterativo de Gauss-Seidel como

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \text{ conocido} \\ \mathbf{x}^{(k)} = T_{GS}\mathbf{x}^{k-1)} + \mathbf{C_{GS}} \end{cases}$$

siendo T_{GS} la matriz de iteración de Gauss-Seidel. El valor de cada incógnita en cada paso del método es

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 5

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 10x - y + 2z = 6 \\ -x + 11y - z + 3t = 25 \\ 2x - y + 10z - t = -11 \\ 3y - z + 8t = 15 \end{cases}$$

utilizando el método de Gauss-Seidel.

Solución:

En primer lugar sería introducir las matrices en el *WxMaxima* y descomponer la matriz de los coeficientes como suma de las matrices $D + L + U$:

```
(%i16) A:matrix([10,-1,2,0],[-1,11,-1,3],[2,-1,10,-1],[0,3,-1,8]);
```

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

```
(%i17) b:matrix([6],[25],[-11],[15]);
```

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i18) D:diag_matrix(A[1,1],A[2,2],A[3,3],A[4,4]);
```

$$(\%o18)\quad \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

```
(%i19) U:A-D$ U[2,1]:0$ U[3,1]:0$ U[3,2]:0$  U[4,1]:0$ U[4,2]:0$ U[4,3]:0$ U;
```

$$(\%o19)\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i20) L:A-D-U
```

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos ahora las matrices de iteración T y la matriz C:

```
(%i21) Tgs:-invert(D+L).U
```

$$(\%o21)\quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} & \frac{4}{55} & -\frac{3}{11} \\ 0 & -\frac{21}{1100} & \frac{13}{275} & \frac{4}{55} \\ 0 & -\frac{51}{8800} & -\frac{47}{2200} & \frac{49}{440} \end{bmatrix}$$

```
(%i22) Cgs:invert(D+L).b;
```

$$(\%o23)\quad \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{128}{55} \\ -\frac{543}{550} \\ \frac{3867}{4400} \end{bmatrix}$$

Pariendo del vector inicial $x_0 = (0,0,0,0)$ la primera iteración nos daría como resultado:

```
(%i23) x:[0,0,0,0]$ k:0$
       k:k+1$ x1:Tgs.x+Cgs$
       x:x1$
       [k,transpose(x)];
```

(%o23) $[1, \begin{bmatrix} 0{,}6 & 2{,}327272727272727 & -0{,}9872727272727273 & 0{,}8788636363636364 \end{bmatrix}$

Y de forma iterativa programado

```
(%i24) for k:0 thru 4 do
       (k:k+1,
        x1:Tgs.x+Cgs,
        x:x1,
        print(k,transpose(x))
       );
```

(%o24) $1 \begin{bmatrix} 1{,}006585041322314 & 2{,}003555016904583 & -1{,}002527384673178 & 0{,}9983509455766342 \end{bmatrix}$

$3 \begin{bmatrix} 1{,}000860978625094 & 2{,}000298250656547 & -1{,}000307276101701 & 0{,}9998497464910825 \end{bmatrix}$

$5 \begin{bmatrix} 1{,}000091280285995 & 2{,}000021342246459 & -1{,}000031147183445 & 0{,}9999881032596474 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Resolvamos el siguiente sistema mediante el método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 10x - y + 2z = 2 \\ 3x + 12y + 4z = 7 \\ x - 2y + 16z = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Resolvamos el siguiente sistema mediante los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 3x + 3y + 7z = 1 \\ 3x + 6y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$$

con cinco iteraciones y ver cual converge a la solución antes.

3.3. Métodos de relajación

En este caso, dado $\omega \in \mathbb{R}$ en la familia de los métodos de relajación (SOR) se considera la siguiente transformación algebráica

$$\omega(D-L-U)\mathbf{x} = \omega\mathbf{b} \Rightarrow (D-\omega L)\mathbf{x} = [(1-\omega)D+\omega U]\mathbf{x}+\omega\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]\mathbf{x}+(D-\omega L)^{-1}\omega\mathbf{b}$$

siempre que exista $(D-\omega L)^{-1}$, es decir, siempre que $a_{ii} \neq 0$, $1 < i < n$. Observemos que este método se reduce al método de Gauss-Seidel en el caso particular $\omega = 1$. Definimos el método iterativo de relajación como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(0)} \text{ conocido} \\ \mathbf{x}^{(m+1)} = B_{SOR}\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{c_{SOR}} \end{array} \right.$$

siendo $B_{SOR} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$ la matriz de iteración de relajación. El valor de cada incógnita en cada paso del método es

$$x_i^{(m+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right) + (1-\omega) x_i^{(m)}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejercicio 5. Resolvamos el siguiente sistema mediante los métodos de Gauss-Seidel y de relajación

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 24 \\ 3x + 4y - z = 30 \\ -y + 4z = -24 \end{array} \right.$$