0.1. Introducción

Los números irracionales fueron descubiertos por la escuela de Pitágoras siglos antes de Cristo, y hasta el siglo XIX no tuvieron una teoría rigurosa.

Surgieron entonces dos equivalentes: la teoría de las cortaduras de Dirichlet, y la de las sucesiones nulas de Weierstrass, que no expondremos. Sí daremos el rasgo más importante de estos números, y que debe conocer el informático para saber operar con ellos: Su expresión decimal es *infinita y no periódica.*

0.2. Números irracionales

0.2.1. $\sqrt{2}$ es irracional.

Vamos a empezar demostrando lo que los griegos de la escuela pitagórica hicieron: probar que el número $\sqrt{2}$ no es racional.

Nuestra demostración es ligeramente diferente de la usual; necesita un poco más de esfuerzo de comprensión, pero este esfuerzo se ve recompensado por obtener fácilmente una generalización útil. Usaremos el método de demostración al absurdo: supondremos que es racional, y llegaremos a un absurdo.

Demostración: Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional: habrá una fracción a/b tal que, al elevarla al cuadrado, se obtiene $\sqrt{2}$:

$$(a/b)^2 = 2.$$

O sea: $\frac{a^2}{b^2} = 2$. Por tanto, debe ser:

$$a^2 = 2b^2.$$

Vamos a probar que *esta igualdad es imposible.*

Descompongamos b en factores primos, escribiendo sólo el factor primo 2 e ignorando todos los demás:

$$b = 2^\alpha \ldots$$

A esta igualdad se puede objetar que puede ocurrir que b carezca del factor primo 2; pero entonces α vale cero: así, si $b = 5$ tenemos:

$$5 = 2^0 \cdot 5^1.$$

Elevando al cuadrado la igualdad: $b = 2^\alpha \ldots$, resulta: $b^2 = 2^{2\alpha} \ldots$. Multiplicando por 2, tenemos:

$$2b^2 = 2^{2\alpha+1} \ldots$$

Al ser $2\alpha + 1$ un número impar, independientemente del valor de α, *el segundo miembro de la igualdad tiene el factor primo 2 elevado a un exponente impar.*

Descompongamos ahora a en factores primos, ignorando los factores que no sean 2:

$$a = 2^\beta \ldots$$

Elevando al cuadrado, tenemos:

$$a^2 = 2^{2\beta} \ldots$$

El número 2β es par siempre: luego *el primer miembro de la igualdad* $a^2 = 2b^2$ *tiene el factor primo 2 elevado a un exponente par.*

Un teorema de Aritmética afirma que *la descomposición de un número en factores primos es única.* Pero entonces *la igualdad* $a^2 = 2b^2$ *es imposible, porque el primer miembro tiene el factor 2 elevado a un exponente par, mientras que el segundo a impar.*

Consecuencia: si p *es un número primo mayor que 1, entonces* $\sqrt{p}$ *es un número irracional.*

Pues en la anterior demostración podemos sustituir el primo 2 por cualquier otro primo p distinto de 1.

A la demostracion anterior podemos darle un mayor alcance en el siguiente teorema:

0.2.2. Resultado general

Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1 *Si un número no es cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es irracional.*

Demostración: Sea m un número que no es cuadrado perfecto; entonces m tiene algún factor primo elevado a un exponente impar, pues si todos los exponentes son pares el número es cuadrado perfecto. Por ejemplo, sea $m = 2^{14} \cdot 3^{20} \cdot 5^8 \cdot 7^{18}$; entonces: $\sqrt{m} = 2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^9$, y es cuadrado perfecto.

Entonces tendremos:

$$m = p_1^{2\alpha+1} \dots$$

siendo p_1 uno de los factores primos cuyo exponente es impar: $2\alpha + 1$. Supongamos que $\sqrt{m}$ es racional e igual a a/b; llegamos entonces a la igualdad:

$$a^2 = mb^2 = b^2 \cdot p_1^{2\alpha+1} \dots$$

Razonando igual que antes, respecto de los exponentes del factor primo p_1 en ambos miembros, se llega a conclusión análoga: el primer miembro tendría p_1 elevado a exponente par, mientras que el segundo lo tendría a exponente impar: haga el alumno el razonamiento completo como ejercicio. c.q.d.

Este teorema se puede usar para resolver problemas como estos:

Probar que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Procedamos por reducción al absurdo: supongamos que existe un racional $r = a/b$ igual a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$:

$$r = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros resulta: $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Despejando $\sqrt{6}$ tenemos:

$$\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}.$$

El teorema anterior nos dice que $\sqrt{6}$ es irracional, mientras que el segundo miembro es racional: hemos llegado a una contradicción que prueba lo afirmado sobre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Probar que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ es irracional.

Supongamos que existe un racional $r = a/b$ igual a $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Sería, pues:

$$r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}.$$

Despejando el radical cúbico, tenemos:

$$\sqrt[3]{3} = r - \sqrt{2}.$$

Elevando al cubo los dos miembros, por la igualdad $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$, se tiene:

$$3 = r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 6r - 2\sqrt{2}.$$

Despejando $\sqrt{2}$ resulta:

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2}.$$

Esta igualdad es imposible como vamos a ver: el miembro izquierdo es irracional como hemos visto, mientras que el de la derecha es racional pues todos los números allí lo son.

§ 2. GENERATRICES DE LOS NÚMEROS PERIÓDICOS

0.3. Progresiones geométricas

Definición 2 *Se llama progresión geométrica a toda sucesión de números en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante,r, la cual recibe el nombre de razón de la progresión:* $a_n = a_{n-1}r$.

Ejemplos:
1) Las potencias del número $2 : 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ La razón es 2.
2) $2, 14, 98, \ldots$ En este caso la razón es $r = 7$.

0.3.1. Término general

Consideremos una progresión geométrica cuyo primer término sea a_1 y r la razón: el segundo será: a_1r; el tercero,
a_1r^2; el cuarto, a_1r^3, ... Estos valores nos llevan al *término general*:

$$a_n = a_1r^{n-1} \tag{1}$$

0.3.2. Suma de los n primeros términos

Vamos a calcular la suma de los n primeros términos de la progresión:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando por r los dos términos de esta igualdad tenemos:

$$rS_n = ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_{n-1} + ra_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n r.$$

El último sumando de la anterior suma se podría escribir como a_{n+1}, pero para no meter más términos que los n primeros ponemos ra_n. Los términos comunes entre la segunda suma y la primera son: $a_2, a_3, \ldots a_n$: restando miembro a miembro estas igualdades, se reducen:

$$rS_n - S_n = (r-1)S_n = a_n r - a_1.$$

Despejando S_n tenemos:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}.$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior de las potencias de 2, es:

$$a_1 = 1, r = 2, a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1},$$

$$S_n = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2^{n-1} \times 2 - 1}{2-1} = 2^n - 1.$$

0.3.3. Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que uno

Es sabido que la sucesión $\{a^n\}$ de las potencias de un número real a tiene un límite que depende sólo del valor absoluto de a: si $|a| < 1, a^n \to 0$. Este caso es el más importante, y es el que se usará en el cálculo siguiente.

Consideremos la progresión geométrica siguiente:

$$a_1,\ a_1 r,\ a_1 r^2,\ a_1 r^3, \ldots a_1 r^{n-1}, \ldots$$

en la cual $|r| < 1$.

Con ayuda de la fórmula ya obtenida, calculemos la suma de los n primeros términos de la progresión:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \frac{a_1 r^{n-1} \times r - a_1}{r-1} =$$

$$= \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}.$$

Si $|r| < 1, r^n \to 0$ y resulta:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \times 0 - a_1}{r-1} = a_1/1 - r.$$

A este valor $a_1/1 - r$ lo llamaremos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica y lo indicaremos como S_∞:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}.$$

Cuando estudiemos las series, veremos el significado de este resultado que consideramos *la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica.*

0.3.4. Generatriz de un número periódico

A) *Números periódicos puros*

Sea, por ejemplo, el número $2,\widehat{34} = 2,34343434\ldots$, cuya parte entera es 2 y cuyas cifras decimales 34 se repiten infinitas veces, y son, por tanto, *el periodo.*

Podemos escribir:

$$2,\widehat{34} = 2,34343434\ldots = 2 + \frac{34}{10^2} + \frac{34}{10^4} + \frac{34}{10^6} + \frac{34}{10^8} + \cdots$$

Prescindiendo de la parte entera, las fraccciones sumandos del segundo miembro son partes de la progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{34}{10^2}$, y cuya razón es $\frac{1}{10^2}$.

La suma de todas estas fracciones es, pues:

$$S_\infty = \frac{\frac{34}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{34}{10^2 - 1}.$$

Sumando dos unidades a este último resultado, tenemos:

$$2,\overset{\frown}{34} = 2 + \frac{34}{10^2-1} = \frac{2\times 10^2+34-2}{10^2-1} = \frac{234-2}{10^2-1} = \frac{234-2}{99}.$$

Hemos obtenido así un caso particular del siguiente teorema —ya conocido por el alumno— y cuya demostración es esencialmente el cálculo que hemos hecho:

Teorema 3 *La fracción generatriz de un número periódico puro tiene como numerador la diferencia entre la parte entera y el periodo, y la parte entera; el denominador es el número formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo.*

B) *Números periódicos mixtos*

Sea, por ejemplo, el número $2{,}1\overset{\frown}{34} = 2,1343434\ldots$, cuya parte entera es 2, la cifra 1 situada después de la coma no se repite más, y es llamada *anteperiodo*; y las cifras 34 que se repiten indefinidamente, y forman *el periodo.*

Igual que en el caso anterior, tenemos:

$$2{,}1\overset{\frown}{34} = 2 + \frac{1}{10^1} + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \cdots$$

Prescindiendo de los dos primeros sumandos, los demás forman una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{34}{10^3}$ y cuya razón es $\frac{1}{10^2}$.

La suma de todas estas fracciones es:

$$S_\infty = \frac{\frac{34}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{34}{10^3-10}.$$

Añadiendo a este resultado los dos primeros sumandos, tenemos:

$$2{,}1\overset{\frown}{34} = 2 + \frac{1}{10^1} + \frac{34}{10^3-10} = \frac{2134-21}{10^3-10} = \frac{2113}{990}.$$

Hemos obtenido así un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 4 *La generatriz de un número periódico mixto es una fracción cuyo numerador es la diferencia entre el número formado por la parte entera, el anteperiodo y el periodo, y el que componen la parte entera y el anteperiodo; el denominador es el número formado por tantos nueves como cifras tiene el periodo, y tantos ceros como cifras posee el anteperiodo.*

Como consecuencia de los teoremas anteriores obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5 *Toda expresion decimal periódica procede de un número racional.*

0.4. Expresión decimal de un número irracional

Vamos a deducir la expresión decimal de un irracional; si fuera *finita*, el número sería *racional*. Así, si $\sqrt{2} = 1,4142$ (como erróneamente se escribe frecuentemente), tendríamos:

$$\sqrt{2} = 1,4142 = \frac{14142}{10{,}000}.$$

Por tanto, debe ser *infinita*; *pero no puede ser infinita periódica, porque, como hemos visto, entonces sería racional.* Luego *su expresión es infinita y no periódica:*

La expresión decimal de un número irracional es infinita y no periódica.

0.5. Expresión decimal de una fracción

¿Es posible conocer la clase de expresión decimal de una fracción sin hacer la división? La respuesta es afirmativa, y viene dada por el siguiente teorema cuya demostración omitimos:

Teorema 6 *Si el denominador de la forma irreducible de una fracción sólo tiene los factores primos 2 y 5, su expresión decimal es decimal exacta.*

Si tiene sólo factores primos que no son 2 ni 5, la expresión decimal es periódica pura.

Si tiene los factores 2 y 5 y otros, la expresión decimal es periódica mixta.

Ejemplos: Las fracciones $17/20$, $17/25$, $17/64$ dan expresiones decimales exactas, pues es:

$$20 = 2^2 \cdot 5,\ 25 = 5^2,\ 64 = 2^6.$$

Las fracciones $22/7$, $355/113$, $8/23$ dan periódicas puras, pues los denominadores son primos los tres, distintos de 2 y 5.

Las fracciones $1/6$, $9/35$, $1/170$ dan periódicas mixtas, pues es:

$$6 = 2 \cdot 3,\ 35 = 5 \cdot 7,\ 170 = 2 \cdot 5 \cdot 17.$$