ÁLGEBRA

Departamento de Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA

CURSO 2015/2016

Boletín del Tema III: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Encuentra un sistema escalondao equivalente al

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+x_4-x_5=6 \\ x_1-2x_2+2x_3-2x_4=-5 \\ 6x_1+x_2+x_4+x_5=1 \end{cases}$$

2. Averigua si los siguientes sistemas de son de Cramer y, en caso positivo, resolverlos

$$(a)\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases},\quad (b)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases},\quad (c)\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ -2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0 \\ 5x_1-8x_2+11x_3-4x_4=0 \\ -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas:

$$(a)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+2x_5=6 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=3 \\ x_2+2x_3-2x_4+x_5=-5 \\ 2x_1-x_2-3x_4-x_5=2 \end{cases},\quad (b)\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+2x_5=6 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=3 \\ x_2+2x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1+x_3-x_4+x_5=5 \end{cases}$$

4. Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss

$$(a)\begin{cases} x+2z=1 \\ -x+2y+3z=0 \\ x=0 \end{cases},\quad (b)\begin{cases} y+2z=0 \\ -x+2y+3z=1 \\ x=0 \end{cases},\quad (c)\begin{cases} x+2z=0 \\ -x+2y+3z=0 \\ x=1 \end{cases}$$

5. Discutir y resolver, en los casos que sea posible, los siguientes sistemas

$$(a)\begin{cases} x+2y-z+t+u=0 \\ 3x-y+t-u=6 \\ 6x+y+t+u=1 \\ x-2y+2z-2t=-5 \end{cases},\quad (b)\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x+2y-2z=0 \\ -x+3y-z=2 \end{cases},\quad (c)\begin{cases} x-2y+z+2t=-2 \\ 2x+3y-z-5t=9 \\ 4x-y+z-t=5 \\ 5x-3y+2z+t=3 \end{cases}$$

6. Discutir, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, los siguientes sistemas y resolverlos en los casos que sean compatibles:

$$a)\begin{cases} 2x+3y-2z=4 \\ \alpha x-y+z=2 \\ 6x+5y-3z=5\alpha \end{cases},\quad (b)\begin{cases} \alpha x-y+2z=1+\alpha \\ x+\alpha y-z=-1 \\ 3x+y+z=\alpha \end{cases},\quad (c)\begin{cases} x+\alpha y+z=1+\alpha \\ (\alpha+1)x+y-\alpha z=0 \\ 2x+y-z=1-\alpha \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases},\quad (b)\begin{cases} (3-2\alpha)x+(2-\alpha)y+z=\alpha \\ x+(2-\alpha)y=1 \end{cases}$$

7. Discute, según los valores del parámetro λ los siguientes sistemas:

$$(a)\left\{\begin{aligned}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4&=\lambda\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4&=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4&=\lambda\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4&=\lambda\end{aligned}\right. ,\quad (b)\left\{\begin{aligned}2x_1-\lambda x_2+x_3&=2-\lambda\\ x_1+2x_2+x_3&=0\\ 3x_1+2x_3&=2-\lambda\\ (\lambda+2)x_1+2x_2+3x_3&=0\end{aligned}\right.$$

8. Discute, según los valores de los parámetros $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$ los siguientes sistemas

$$(a)\left\{\begin{aligned}\alpha x_1+\beta x_2+x_3&=1\\ x_1+\alpha\beta x_2+x_3&=\beta\\ x_1+\beta x_2+\alpha x_3&=1\end{aligned}\right. ,\quad (b)\left\{\begin{aligned}x+2y&=\alpha\\ 3x-y&=1\\ x+y&=\alpha-3\\ 2x-y&=\alpha+\beta\end{aligned}\right. ,\quad (c)\left\{\begin{aligned}\alpha x+y+z&=4\\ x+\beta y+z&=3\\ x+2\beta y+z&=4\end{aligned}\right.$$

9. Resolver el siguiente sistema homogéneo

$$\left\{\begin{aligned}x_1-x_2+2x_4&=0\\ 2x_1+x_2+3x_3-2x_4&=0\\ 4x_1-x_2+3x_3+2x_4&=0\\ x_1-3x_2-2x_3+3x_4&=0\end{aligned}\right.$$

10. Prueba que el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{aligned}-x_1+\beta x_2\gamma x_3+\delta x_4&=0\\ \alpha x_1-x_2+\gamma x_3+\delta x_4&=0\\ \alpha x_1+\beta x_2-x_3+\delta x_4&=0\\ \alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3-x_4&=0\end{aligned}\right.$$

tiene solución no trivial cuando se verifica

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}+\frac{\delta}{1+\delta}=1$$

siendo $\alpha\neq-1,\beta\neq-1,\gamma\neq-1,\delta\neq-1$

11. Dadas la matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\ 2&-3&4&0\\ -1&2&\alpha&\beta\\ 0&1&\beta-1&\beta\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ \gamma\end{pmatrix},$$

y $\beta=3$, determina α y γ para que el sistema $AX=B$, sea compatible indeterminado y resolverlo.

12. Determina los parámetros $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\beta\in\mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned}2x_1-3x_2+\alpha x_3&=0\\ x_1+x_2-3x_3&=\beta\\ 3x_1-7x_2+\beta x_3&=\alpha\end{aligned}\right.$$

sea compatible indeterminado.

13. Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + y - z &= 3 \\ 4y + z &= 2 \\ -x + y &= \alpha \end{aligned}\right.$$

Usar el método de Gauss, hallar los valores de α para que el sistema anterior sea compatible determinado. Resolver dicho sistema para estos valores.

14. Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{aligned} (8-\alpha)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 &= 0 \\ x_1 + (9-\alpha)x_2 + 4x_3 + \alpha x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + (10-\alpha)x_3 + \alpha x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Discútelo y resuélvelo según los valores de α.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ se pide:

   a) Discute para qué valores de α es la matriz A invertible.

   b) Discute y resuleve el sistema $AX = 0$

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

   a) Prueba que A es inversible

   b) Si llamamos X_k a la solución del sistema $AX = B_k$, calcula X_1 y X_2 siendo

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2 = B_1 + X_1$$

17. Dado el sistema

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \\ x + 3y + \alpha z &= 1 \\ x + 2y + z &= \beta \end{aligned}\right.$$

   a) Discute, según los valores de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$, dicho sistema.

   b) Resuelve en el caso que sea compatible indeterminado.

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve, cuando sea posible, el sistema $AX = B$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

19. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + (1+\alpha^2)z &= 2\alpha \\ x + (1-\alpha)z &= -\alpha \\ x + y + \alpha^2 z &= \alpha \end{cases}$$

a) Analizar para qué valores de α el sistema tiene solución.

b) Resolver el sistema para los valores de α encontrados en el apartado anterior.

20. Dado el sistema

$$\begin{cases} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \end{cases}$$

Discute, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, dicho sistema y resuelve en los casos que sea compatible indeterminado.

21. Dado el sistema

$$\begin{cases} x + \alpha\beta y - z &= 1 \\ x + \beta y + z &= 1 \\ (\alpha - 3)x + \beta y + z &= 1 \\ x + \beta y + \alpha z &= 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de los parámetros α y β.

b) Resolverlo para algún valor de α y β. que lo hagan compatible determinado.

22. Discute, según los valores de α y β, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x + y + \beta z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = -\beta \\ \alpha x + \alpha y - z = \beta^2 \end{cases}$$

23. Dadas la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \beta - 1 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Discute, según los valores de α y β, el sistema $AX = B$.

24. Considerese, dependiente del parametro real a, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + az = 5 \end{cases}$$

a) Estudiar, en funcion del parametro a, la compatibilidad del sistema. Cuando el sistema sea compatible determinado resolverlo utilizando el metodo de Gauss.

b) ¿Para que valores de a existe la inversa de la matriz de coeficientes? Encontrar la inversa de dicha matriz para $a = 3$.

25. Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = -4 \\ x - y + (\alpha + 2)z = -3\alpha - 5 \\ 4x + 2y + (\alpha + 6)z = -3\alpha^2 - 8 \end{cases}$$

Se pide:

a) Discute el sistema según los valores de α.

b) Resuelve el sistema para $\alpha = 1$