¿Cómo resolver ecuaciones de recurrencia homogéneas y no homogéneas paso a paso?

Jesús Rodríguez Heras

15 de febrero de 2017

Índice

Parte I
Homogéneas

Utilizaremos el ejemplo siguiente (sacado de los apuntes) para ver los pasos de la resolución de una ecuación de recurrencia homogénea:

Resolver la ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=0, n\geq 1$$

con las condiciones iniciales, $a_1=0$ **y** $a_2=-12$**.**

1. Escribimos la ecuación dada en su forma general:

$$a_1=0$$
$$a_2=-12$$
$$a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=0$$

2. Obtenemos la ecuación característica de la ecuación dada:

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

Resolviendo dicha ecuación característica obtenemos:

$$\lambda=1 \text{ o } \lambda=-3$$

3. La solución general de la ecuación característica es la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n=n^q\cdot\lambda^n, 0\leq q\leq m-1$$

Por lo tanto, siguiendo el ejemplo, nuestro a_n será: $a_n=\alpha_1+\alpha_2\cdot(-3)^n$, $n\leq 1$ y $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

4. Obtenemos la solución única de la ecuación propuesta mediante las condiciones iniciales dadas:

$a_1=0\Rightarrow\alpha_1-3\alpha_2=0\Rightarrow-\alpha_1+3\alpha_2=0$
$a_2=-12\Rightarrow\alpha_1+9\alpha_2=-12\Rightarrow\alpha_1+9\alpha_2=-12$
Despejando α_1 tenemos: $\alpha_2=-1$.
Sustituyendo y despejando tenemos: $\alpha_1=-3$.

5. Por lo tanto, la solución única a la ecuación propuesta es la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n = -3 - 1(-3)^n, \, n \geq 1$$

Parte II
No homogéneas

Utilizaremos el ejemplo siguiente (sacado de los apuntes) para ver los pasos de la resolución de una ecuación de recurrencia no homogénea:

Resolver la ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1, n \geq 1$$

con las condiciones iniciales, $a_1 = 1$ **y** $a_2 = 0$**.**

1. Escribimos la ecuación dada en su forma general:

$$\begin{gathered} a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1 \end{gathered}$$

2. Obtenemos la ecuación homogénea asociada a la ecuación propuesta:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$$

3. Obtenemos la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Resolviendo dicha ecuación característica obtenemos:

$$\lambda = 1 \text{ o } \lambda = 1$$

Es decir, $\lambda = 1$ com multiplicidad $m = 2$.

4. La solución general de la ecuación homogénea asociada será la sucesión $\{a_n^{(h)}\}$, tal que:

$$a_n^{(h)} = n^q \cdot \lambda^n,\ 0 \leq q \leq m - 1$$

Por lo tanto, siguiendo el ejemplo, nuestro $a_n^{(h)}$ será: $a_n^{(h)} = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot n$, $n \leq 1$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

5. Obtenemos la solución particular de la ecuación propuesta usando el método de los coeficientes indeterminados:

Usando el término $h(n)$ de la ecuación dada, tenemos:

$$h(n) = r^n \cdot p_0$$
$$h(n) = 1 \Rightarrow h(n) = 1^n \cdot 1$$

Luego, $r = 1$.

Llegados a este punto se nos presentan dos casos:

5.1. r no es raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada:

Si se da este caso, ontinuaremos de la siguiente forma:
$a_n^{(p)} = r^n(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + ... + A_t n^t)$
Este caso no se da en este ejemplo pero se continuaría igual con el punto 6 en adelante.

5.2. r sí es raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada:

Si se da este caso, ontinuaremos de la siguiente forma:
$a_n^{(p)} = n^m \cdot r^n(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + A_3 n^3 + ... + A_t n^t)$, siendo m la multiplicidad.
Este es el caso que nos plantea este ejercicio ya que $r = \lambda$, por lo tanto:

$$a_n^{(p)} = n^2 \cdot 1^n(A_0) \Rightarrow a_n^{(p)} = n^2 \cdot A_0$$

6. Sustituyendo en la ecuación dada obtendremos su solución particular:

$$a_{n+2}^{(p)} - 2a_{n+1}^{(p)} + a_n^{(p)} = 1 \Rightarrow (n+2)^2 A_0 - 2(n+1)^2 A_0 + n^2 A_0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (n^2 + 4n + 4)A_0 - 2(n^2 + 2n + 1)A_0 + n^2 A - 0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2 A_0 + 4nA_0 + 4A_0 - 2n^2 A_0 - 4nA_0 - 2A_0 - n^2 A_0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2A_0 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{2}$$

7. La solución particular de la ecuación propuesta es la sucesión$\{a_n^{(p)}\}$, tal que:

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot n^2,\ n \geq 1$$

8. La solución general de la ecuación propuesta es la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \Longrightarrow a_n = \alpha_1 + \alpha_2 n + \frac{1}{2}n^2,\ n \geq 1$$

9. Obtendremos la solución única de la ecuación propuesta mediante las condiciones iniciales dadas:

$a_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2} = 1$
$a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2 = 0$
Despejando α_1 tenemos: $\alpha_2 = -\frac{5}{2}$.
Sustituyendo y despejando tenemos: $\alpha_1 = 3$.

10. Por lo tanto, la solución única a la ecuación propuesta es la sucesión $\{a_n\}$, tal que:

$$a_n = 3 - \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2,\ n \geq 1$$