Dpto. de Lenguajes y Sistemas Informáticos
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

$\boxed{\text{Tema R2}}$

Repaso de las Ecuaciones de Recurrencia

Francisco Palomo Lozano
Inmaculada Medina Bulo
Análisis y Diseño de Algoritmos. 2002–03.

Ecuaciones de recurrencia

Definición 1. Una *ecuación de recurrencia* (ER) de orden k es una ecuación funcional

$$F(n, f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-k}) = 0$$

con $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $n \geq k$.

La incógnita, f_n, es una función; o mejor dicho una *familia de funciones* (como con las EDO).

Ejemplos.

$$
\begin{aligned}
f_n - n f_{n-1} &= 0 && (n \geq 1) \\
f_n f_{n-1} &= 2^n && (n \geq 1) \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} && (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

Resolver una ER es, en general, imposible. Normalmente estaremos interesados en versiones más simples. Restringiremos la ecuación general para obtener otras más sencillas.

Las ER generalizan a los *sumatorios*:

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} h(i) \qquad (n \geq 0)$$

$$f_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} h(i) \qquad (n \geq 1)$$

$$f_n - f_{n-1} = h(n) \qquad (n \geq 1)$$

y también al *cálculo de productorios*:

$$f_n = \prod_{i=0}^{n} h(i) \qquad (n \geq 0)$$

$$f_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-1} h(i) \qquad (n \geq 1)$$

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = h(n) \qquad (n \geq 1)$$

Ambas ER se completan con $f_0 = h(0)$.

Clasificación

Definición 2. Una ER es *lineal* (ERL) si tiene la siguiente forma:

$$f_n + g_1(n)f_{n-1} + \cdots + g_k(n)f_{n-k} = h(n)$$

Definición 3. Una ERL es *homogénea* (ERLH) si $h(n) = 0$.

Definición 4. Una ERL es *de coeficientes constantes* si $g_i(n) = a_i \in \mathbb{C}$.

Tipos más importantes de ER:

- ERLH de coeficientes constantes
- ERL de coeficientes constantes
- ERL de coeficientes no constantes

ERLH de coeficientes constantes

$$f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = 0$$

Propiedades:

- Siempre tienen una *solución trivial*, que es la función $\theta_n = 0$:

$$\theta_n = 0 \implies \ldots \implies \theta_{n-k} = 0$$
$$\forall n \geq k \, (0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0)$$

- $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. θ_n es su elemento neutro.

Para resolver la ecuación hay que caracterizar el conjunto de funciones solución.

Teorema 1. *El conjunto de soluciones de una ERLH de coeficientes constantes es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.*

Demostración. El conjunto de soluciones no está vacío ya que siempre contiene a la solución trivial θ_n. Por lo tanto, la basta comprobar que dadas dos soluciones, cualquier combinación lineal es también solución. □

Nota. Conque sólo existiera una solución particular no trivial, la solución general estaría formada por un número infinito de funciones (una familia de funciones).

Proposición 1. *Una función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *solución de una ERLH de coeficientes constantes y orden* k *está determinada de forma única por los* k *valores* $f_0, \ldots, f_{k-1}$*.*

Demostración. Despejando el término de mayor orden:

$$\begin{aligned} f_n &= -a_1 f_{n-1} + \cdots - a_k f_{n-k} \\ f_{n-1} &= -a_1 f_{n-2} + \cdots - a_k f_{n-k-1} \\ &\ldots \\ f_{k+1} &= -a_1 f_k + \cdots - a_k f_1 \\ f_k &= -a_1 f_{k-1} + \cdots - a_k f_0 \end{aligned}$$

y por lo tanto f_n queda determinado por los valores $f_0, \ldots, f_{k-1}$ para todo $n \geq k$. $\square$

Teorema 2. *La dimensión del conjunto de soluciones de una ERLH de coeficientes constantes y orden k es, precisamente, k.*

Demostración. Consideremos el conjunto de soluciones $B = \{b_0(n), \ldots, b_{k-1}(n)\}$ en el que los $b_i(n)$ vienen dados por:

$$\forall n < k \; b_i(n) = \delta_{in} \quad (\delta \text{ de Kronecker})$$

Por la proposición 1, esto determina de manera única a los $b_i(n)$ como soluciones.

Pero B es una base del conjunto de soluciones: basta comprobar que forma un sistema de generadores linealmente independiente.

Hemos encontrado una base de k elementos, por lo tanto la dimensión del subespacio es k.

$\square$

Empleando este teorema, el problema se reduce a encontrar k soluciones particulares linealmente independientes distintas de la trivial.

Así se obtiene una base del conjunto de soluciones y con ella la solución general.

Existen distintas técnicas de resolución, las principales son:

- **Método de la ecuación característica**
- Método matricial
- Método de la función generatriz

Método de la ecuación característica

Por la forma de la ecuación, $f_n = x^n$ podría ser una solución particular. Veamos:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$
$$x^{n-k}(x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k) = 0$$

Esta ecuación polinómica equivale al sistema:

$$\begin{cases} x^{n-k} = 0 \\ x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \end{cases}$$

La 1ª no nos interesa (sólo genera la solución trivial). La 2ª se llama *ecuación característica*.

Definición 5. Se denomina *polinomio característico* a:

$$c(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{C}$ las k raíces de $c(x)$:

$$c(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k)$$

Nota. Por el *Teorema fundamental del Álgebra* todo polinomio de grado k tiene exactamente k raíces.

En general, puede haber raíces repetidas. Sean $r_1, \ldots, r_l$ las l raíces *distintas* de $c(x)$ con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_l$:

$$c(x) = (x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_l)^{m_l}$$

donde $m_1 + \cdots + m_l = k$.

Distinguiremos dos casos según todas las raíces sean o no simples.

Raíces simples

$B = \{r_1^n, r_2^n, \dots, r_k^n\}$ es una base del conjunto de soluciones.

Basta ver que forman un sistema de generadores, o que son linealmente independientes, ya que la dimensión del conjunto de soluciones y card(B) coinciden.

Una forma de comprobar que, por ejemplo, forman un sistema de generadores consiste en plantear un sistema infinito de ecuaciones que por la proposición 1 puede reducirse a:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = f_0 \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \cdots + r_k\lambda_k = f_1 \\ \dots \\ r_1^{k-1}\lambda_1 + r_2^{k-1}\lambda_2 + \cdots + r_k^{k-1}\lambda_k = f_{k-1} \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

que es un *determinante de Vandermonde* o *vandermondiano*; ya que los r_i son todos distintos, el determinante no es nulo.

Por lo tanto, las soluciones particulares forman una base y toda combinación lineal de ellas será solución. La solución general será pues:

$$f_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i^n$$

Definición 6. Los valores $f_0, \ldots, f_{k-1}$ se denominan *condiciones iniciales*.

Las dadas por

$$f_0 = \cdots = f_{k-1} = 0$$

se denominan *condiciones iniciales nulas*.

Nota. Una vez fijados los valores de las condiciones iniciales, estos determinan los parámetros libres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ y por consiguiente una solución particular.

Nota. La solución de una ERLH bajo condiciones iniciales nulas es la solución trivial.

Ejemplo. Se desea la solución general de:

$$t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2}$$

y la particular asociada a $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

$$c(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

luego $B = \{2^n, 3^n\}$ y la solución general es:

$$t_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n$$

Cuando $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto la solución particular buscada es:

$$t_n = 3^n - 2^n$$

Raíces múltiples

Se demuestra que:

$$
\begin{aligned}
B = \{ & r_1^n, \ldots, n^{m_1 - 1} r_1^n, \\
& \ldots \\
& r_l^n, \ldots, n^{m_l - 1} r_l^n \}
\end{aligned}
$$

es una base del conjunto de soluciones.

Al igual que antes, basta ver que forman un sistema de generadores, o que son linealmente independientes, ya que $\mathrm{card}(B) = k$.

La solución general es:

$$f_n = \sum_{i=1}^{l} p_i(n) r_i^n$$

$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{m_i - 1} \lambda_{ij} n^j$$

Ejemplo. Se desea la solución general de:

$$t_n = 2t_{n-1} - t_{n-2}$$

y la particular asociada a $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

$$c(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

luego $B = \{1, n\}$ y la solución general es:

$$t_n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Cuando $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$ se obtiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto la solución particular buscada es:

$$t_n = n$$

ERL de coeficientes constantes

$$f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = h(n)$$

Definición 7. Dada una ecuación de este tipo, llamamos *ecuación homogénea asociada* a:

$$g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k} = 0$$

Teorema 3. *Si f_n es una solución particular de la ecuación original y g_n es la solución general de la homogénea asociada, entonces $f_n + g_n$ es la solución general de la primera.*

El problema está en hallar la solución particular. Esto depende de cómo sea $h(n)$.

En ocasiones, tiene una forma similar a la de $h(n)$ y se puede emplear el *método de los coeficientes indeterminados*.

Un caso bastante general y útil en el estudio de algoritmos es:

$$h(n) = \sum_{i=1}^{j} q_i(n) s_i^n$$

donde los $q_i(n)$ son polinomios de grado m_i y los s_i son todos distintos.

En tal caso, podemos formar un polinomio característico ficticio con el polinomio característico de la homogénea asociada y otro polinomio «aportado» por la solución particular:

$$c(x) = c_1(x)c_2(x)$$

Donde:

$$c_1(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$
$$c_2(x) = (x - s_1)^{m_1+1} \cdots (x - s_j)^{m_j+1}$$

Sin embargo, la función resultante de este polinomio característico ficticio *no* es la solución general.

Los j parámetros de la solución general aportados por $c_2(x)$ *no son libres*, ya que han de determinar una solución particular.

Estos parámetros pueden calcularse de dos formas:

- Sustituyendo la función obtenida en la ecuación original
- Calculando mediante las condiciones iniciales j valores que deba cumplir la solución particular y completando con ellos el sistema de ecuaciones

Ejemplo. Se desea la solución general de:

$$t_n = t_{n-1} + 2$$

Se tiene que:

$$c_1(x) = x - 1$$
$$c_2(x) = x - 1$$
$$c(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$$

luego:

$$t_n = \lambda_1 + \lambda_2 n$$

Pero λ_2 no es libre, sustituyendo:

$$\lambda_2 n = \lambda_2(n-1) + 2$$

se obtiene $\lambda_2 = 2$, con lo que la solución general es:

$$t_n = 2n + \lambda_1$$

ERL de coeficientes no constantes

No hay un método general de resolución, pero si es de primer orden se puede reducir a una equivalente de coeficientes constantes.

Sea:

$$f_n + g_1(n)f_{n-1} = h(n)$$

aplicamos el siguiente cambio de variable:

$$f_n = G(n)u_n \qquad G(n) = \prod_{i=0}^{n} g_1(i)$$

de esta forma obtenemos:

$$G(n)u_n + g_1(n)G(n-1)u_{n-1} = h(n)$$

pero:

$$g_1(n)G(n-1) = G(n)$$

luego:

$$G(n)u_n + G(n)u_{n-1} = h(n)$$
$$u_n + u_{n-1} = \frac{h(n)}{G(n)}$$

que ya tiene coeficientes constantes.

Nota. Debe ser $G(n) \neq 0$, si no, basta eliminar los factores conflictivos en $G(n)$. También conviene prescindir de los factores negativos para que el cambio sea sencillo.

Es decir, en general, el cambio empleado será:

$$G(n) = \prod_{\substack{i=0 \\ g_1(i)>0}}^{n} g_1(i)$$

Ejemplo.

$$f_n = n f_{n-1} \qquad\qquad (n \geq 1)$$
$$f_0 = 1$$

Aquí $g_1(n) = -n$. Podemos invertir el signo y prescindir del primer valor, que es cero:

$$G(n) = \prod_{\substack{i=0 \\ -g_1(i)>0}}^{n} [-g_1(i)] = \prod_{i>0}^{n} i = n!$$

El cambio de variable es:

$$f_n = n! u_n$$

y la ecuación queda:

$$u_n = u_{n-1} \qquad\qquad (n \geq 1)$$
$$u_0 = 1$$

con lo que $u_n = 1$ y $f_n = n!$