Sea $t(n)$ el número promedio de intercambios en las condiciones descritas anteriormente.

$$t(n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathscr{P}(q=\alpha)\,t(q=\alpha)$$

Cuando $q = \alpha$ y $n > 1$, el número de intercambios viene dado por $t(\alpha-1) + t(n-\alpha) + \alpha$. Ya que la probabilidad es $\frac{1}{n}$, tenemos:

$$t(n) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{n}(t(\alpha-1) + t(n-\alpha) + \alpha)$$

La fórmula se completa con $t(0) = t(1) = 0$.

Podemos hacer desaparecer el sumatorio desplazando y restando convenientemente:

$$\begin{array}{rr} & nt(n) \\ - & (n-1)t(n-1) \\ \hline & t(n-1) + t(n-1) + n \end{array}$$

Pero, si $t(n)$ es válido para $n > 1$, entonces $t(n-1)$ es válido para $n > 2$ y su diferencia, también. Así, tenemos que:

$$nt(n) - (n-1)t(n-1) = 2t(n-1) + n, \quad n > 2$$

Que se simplifica a:

$$t(n) = \frac{n+1}{n}t(n-1) + 1, \quad n > 2$$

Cambiemos $t(n)$ por $(n+1)v(n)$ y, consecuentemente, $t(n-1)$ por $nv(n-1)$:

$$(n+1)v(n) = \frac{n+1}{n}(nv(n-1)) + 1, \quad n > 2$$

Así conseguimos una ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$v(n) = v(n-1) + \frac{1}{n+1}, \quad n > 2$$

Al ser de primer orden puede sumarse fácilmente:

$$v(n) = v(2) + \sum_{\beta=3}^{n} \frac{1}{\beta+1} = v(2) + H_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad n \geq 2$$

Ya que $v(2) = \frac{t(2)}{3}$, es importante calcular $t(2)$, que no conocemos. Aplicando la fórmula del tiempo promedio:

$$t(2) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{2}(t(\alpha-1) + t(2-\alpha) + \alpha) = \frac{1}{2}(t(0) + t(1) + 1 + t(1) + t(0) + 2) = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, $v(2) = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}$ y resulta:

$$v(n) = \frac{1}{2} + H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = H_n + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{3}, \quad n \geq 2$$

En conclusión:

$$t(n) = (n+1)\,v(n) = (n+1)H_n + 1 - \frac{4}{3}(n+1), \quad n > 1$$

Ya que $H_n \in \Theta(\log n)$, resulta inmediato comprobar que $t(n) \in \Theta(n \log n)$.