Boletín del Tema VIII: FORMAS CUADRÁTICAS

1. Clasifique las siguientes formas cuadráticas , según los valores de los parámetros:

   a) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 2\alpha xy - 2xz + 4yz$

   b) $Q(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2) + z^2 + 4xy + 2yz$

   c) $Q(x, y, z) = x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 + 2xy$

2. Clasifique, utilizando el signo de los autovalores, la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$$

   ¿Cambia su clasificación si es restringida a $x + y = 0$?

3. Calcular el valor del parámetro a para que la forma cuadrática

$$q(x, y, z)) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 2axz + 3z^2$$

   sea semidefinida positiva.

4. Clasifique la forma cuadrática $q(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x}$ restringida a $x_1 + 2x_2 = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Clasifique las siguientes formas cuadráticas con restricciones:

   a) $Q(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2$, restringida a $S = \{(x, y) \in R^2 : x - \sqrt{2}y = 0\}$.

   b) $Q(x, y, z) = -x^2 - 5y^2 - 6z^2 + 2xy + 4xz$, restringida a $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 2z = 0,\ 2y + z = 0\}$.

6. Dada la forma cuadrática

$$Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2ayt + 2axz$$

   Se pide:

   a) Clasifique $Q|_S$ donde $S = \{(x, y, z, t) \in R : y - z = 0,\ t = 0\}$ y $a \in R$.

   b) Clasifique QQ para $a = 3$.

7. Sea una forma cuadrática $Q : R^3 \to R$ definida por

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_3$$

   a) Clasifique Q en función de los valores de $a \in R$.

b) Para $a = -1$, encuentre un conjunto S_1 tal que la forma cuadrática restringida, $Q|_{S_1}$ sea definida positiva.

8. Clasificar las siguientes formas cuadráticas restringidas a los subespacios:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x - y + z = 0\}, \quad S_2 =< (0, 1, 1) >$$

a) $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$

b) $q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 3y^2$

9. Se considera la familia de formas cuadráticas $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a+c & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

Utilizando dos métodos diferentes, expresar Q como suma de cuadrados.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a y de b es $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x} > 0$, $\forall x \neq 0$?

b) Si $a = -1$ y $\forall b$, reducir Q a suma de cuadrados.

c) Si $a = -1$, ¿para qué valores de b es $Q(\vec{x}) < 0$, $\forall x \neq 0$?