ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD I

SOLUCIONES EXAMEN JUNIO 2009

TEST

1.- En una clase hay 16 niños y 24 niñas, de los cuales la mitad de los niños y la mitad de las niñas tienen el pelo negro. ¿Cuál es la probabilidad de que, elegido uno al azar, "sea niño o tenga el pelo negro"?
a) 16/40
→b) 7/10
c) 36/40
d) Ninguna de las anteriores

2.- Sea $F(x)$ la función de distribución de una variable continua que toma valores en $(0,6)$. Entonces, $F(3) - F(1)$ es:
a) 2/6
b) La probabilidad de que X tome el valor 2
c) Una probabilidad que no puede interpretarse, ya que depende de la función de densidad
→d) La probabilidad de que X no tome valores menores que 1 ni mayores que 3.

3.- En un conjunto de datos ¿qué porcentaje de ellos se encuentra por encima del tercer cuartil?
a) Más del 50%
→b) El 25%
c) El 75%
d) Depende del número de datos

4.- Sean los sucesos A y B con $P(A) = 0.2, P(B) = 0.6$ y $P(\overline{A \cup B}) = 0,2$. Determinar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:
a) La probabilidad del suceso intersección entre A y B es igual a 0.8.
→b) Los sucesos A y B son incompatibles.
c) Los datos son incongruentes.
d) Los sucesos A y B son independientes.

5.- Si el coeficiente de correlación lineal entre X e Y es igual a $-0,99$ entonces:
a) Los cálculos están mal, porque el coeficiente de correlación lineal está siempre entre 0 y 1.
→b) Existe dependencia lineal inversa muy fuerte entre X e Y.
c) X e Y están equitativamente distribuidas.
d) Son variables independientes.

6.- Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P\left(A/B\right) = 0,5$ y $P\left(A \cap B\right) = 0,3$. Entonces:

→a) $P(B) = 0,6$
b) $P(B) = 0,15$
c) $P(B) = 0,2$
d) Es imposible que se den esas probabilidades

7.- Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $0, 1, 2$ y 3 con probabilidades respectivas $1/7, 2/7, 3/7$ y $1/7$ y sea $F(x)$ su función de distribución. Entonces, $F(2,5)$ es igual a:
a) 0
→b) 6/7
c) No existe
d) 1/7

8.- Sea una variable aleatoria $N(10, 2)$. Entonces, $P[X = 10,5]$ es (aproximadamente) igual a:
a) 0,25
b) 0,59
c) 0,41
→d) Ninguna de las anteriores (Nota: por ser una v.a. continua, se tiene que $P[X = 10,5] = 0$)

9.- Se lanzan al aire dos monedas y se considera la variable aleatoria "número de caras obtenidas". La varianza de dicha variable aleatoria es:
→a) 0,5
b) 1
c) 1,5
d) Esa variable no tiene varianza

10.- Se tira una moneda sucesivamente hasta que sale la primera cara. La variable que nos da el número de lanzamientos realizados sigue una distribución:
a) Bernoulli
b) Binomial
→c) Geométrica
d) Ninguna de las anteriores

11.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = kx$, $0 < x < 2$. Entonces,
→a) $k = 0,5$
b) $k = 0,25$
c) $k = 1$
d) Imposible, no puede ser una función de densidad.

12.- ¿Cuál de las siguientes variables aleatorias sigue una ley Binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0,3$
→a) "Número de figuras obtenidas cuando se extraen al azar y con reemplazamiento 100 cartas de una baraja"

b) “Cantidad de números pares que se obtienen cuando se lanza un dado 100 veces”
c) “Proporción de zurdos cuando se extraen al azar 30 personas de un grupo de 100”
d) Todas las anteriores son válidas.

13.- En un conjunto de 1000 datos, 999 datos son iguales a 1 y un dato es igual a 999. Entonces,
a) La media aritmética es 999
b) La mediana es 1,998
→c) El primer cuartil es 1
d) Ninguna de las anteriores

14.- En una distribución de datos agrupados en intervalos, el último intervalo está abierto por la derecha (es decir, es del tipo $[a, \infty)$). Además, se sabe que el 80% de los datos están fuera de dicho intervalo. Con tales hipótesis, ¿cuál de las siguientes características NO podrá calcularse?
→a) La media
b) La mediana
c) El percentil 70
d) El primer cuartil

15.- En una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 4)$ el percentil 25 es
→a) 1
b) 0,25
c) 3
d) No tiene

PROBLEMAS

1) El tiempo de reparación, en minutos, de una máquina se distribuye según la función de densidad:

$$f(x) = 0,05e^{-0,05x}, \;\; x > 0.$$

a) [1 punto] Hallar la probabilidad de que una avería tarde en repararse entre 15 **y** 20 **minutos.**

Solución: Una forma de resolverlo es mediante el cálculo directo

$$P\left[15 < X < 20\right] = \int_{15}^{20} 0,05e^{-0,05x}dx = \left[-e^{-0,05x}\right]_{x=15}^{x=20} = 0,1044$$

Otra forma es observando que X sigue una ley exponencial, $X \sim Exp\left(0,05\right)$. La función de distribución, conocida para esta variable, es

$$F(x) = 1 - e^{-0,05x} \text{ para } x > 0,$$

de donde

$$P\left[15 < X < 20\right] = F(20) - F(15) = 0,1044$$

b) [1 punto] Sabiendo que el 10% de las reparaciones tardan más de t **minutos en realizarse, hallar** t.

Solución: Una forma es despejar t de la siguiente ecuación

$$\int_0^t 0,05e^{-0,05x}dx = 0,9$$

Otra posibilidad es despejar t de la siguiente ecuación

$$\int_t^\infty 0,05e^{-0,05x}dx = 0,1$$

Una tercera es utilizar directamente la expresión de la función de distribución $F(x)$ y escribir:

$$F(t) = 1 - e^{-0,05t} = 0,9$$

En cualquier caso, despejamos t y se obtiene

$$-0,05t = 0,1$$

$$t = \frac{-\ln 0,1}{0,05} = 46,05$$

c) [0,5 puntos] Un técnico lleva 10 minutos reparando una máquina. Hallar la probabilidad de que, antes de que pasen otros 10 minutos, halla terminado la reparación.

Una forma es realizar el cálculo directo de:

$$P[10 < X < 20 \mid X > 10] = \frac{P[10 < X < 20]}{P[X > 10]}.$$

Otra forma es observando que la distribución exponencial tiene la propiedad de "falta de memoria", por lo que

$$P[10 < X < 20 \mid X > 10] = P[X < 10] = 1 - e^{-0,5}$$

2) [2,5 puntos] Un fabricante garantiza su producto por un período de un año. Si la duración de dicho producto sigue una ley normal con esperanza 410 días y desviación típica 50 días, y si en un determinado período de tiempo vende 25 unidades de su producto (que se suponen independientes), hallar la probabilidad de que no tenga que reponer más de 3 unidades.

Solución:

$X \sim N(410, 50)$.

Reponemos unidad i si $X_i < 365$, donde X_i representa la duración de la unidad i. La probabilidad de reponer una unidad es, por tanto,

$$P[X < 365] = 1 - P[Z < 0,9] = 0,1841$$

donde $Z \sim N(0,1)$.

Dado un lote de 25 unidades, cada una puede asemejarse a un experimento de Bernoulli, donde los posibles resultados son: "se reemplaza" (con probabilidad $0,1841$) y "no se reemplaza". Por tanto, el número de unidades reemplazadas se describe según una ley binomial $Y \sim Bi(25, 0.1841)$. Así, la probabilidad de que no tenga que reponer más de 3 unidades será

$$P[Y \leq 3] = P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3]$$

donde

$$P[Y = k] = \binom{25}{k} 0,1841^k \cdot 0,8159^{25-k}$$