RESPUESTAS DEL EXAMEN DE 6—II—2014

1. Deducir $(A-B)^3$ a partir de $(A-B)^2$. Utilizar lo obtenido para probar que el número $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ es irracional, por reducción al absurdo. Explicar en qué consiste este método.

Respuestas: Sabemos que:$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$. Además:

$$(A-B)^3 = (A-B)^2 \cdot (A-B).$$

Haciendo la multiplicación, tenemos:

$$(A-B)^3 = (A^2-2AB+B^2)(A-B) = A^3-A^2B-2A^2B+2AB^2+B^2A-B^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3.$$

Se han reducido términos semejantes, y se ha ordenado el polinomio según las potencias de A, como se debe hacer al presentar un resultado polinomial: *No se puede presentar un polinomio sin ordenar sus términos con respecto a las potencias de una variable, y, sobre todo, se deben reducir términos semejantes.*

2. Hallar todos los complejos que son iguales a sus potencias quintas.

Respuestas: Primera solución. Sea z uno de los complejos solución; debe ser:

$$z = z^5.$$

Llegamos así a la ecuación: $z^5 - z = 0$. Sacando factor común $z : z(z^4-1) = 0$. Para que el producto de dos complejos sea nulo, debe serlo uno de ellos. Entonces: o es $z = 0$, y obtenemos la primera solución: $z_1 = 0$; o es: $z^4 - 1 = 0$. De aquí, deducimos:

$$z=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0^\circ+i\operatorname{sen}0^\circ)}=\cos\frac{0^\circ+360^\circ k}{4}+i\operatorname{sen}\frac{0^\circ+360^\circ k}{4}=\cos(90^\circ k)+i\operatorname{sen}(90^\circ k),$$

para $k=0,1,2,3$.

Si $k=0$, sale $z_2=\cos 0^\circ+i\operatorname{sen}0^\circ=1$; si $k=1$, $z_3=\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ=i$; si $k=2$,$z_4=\cos 180^\circ+i\operatorname{sen}180^\circ=-1$; si $k=3$, $z_5=\cos 270^\circ+i\operatorname{sen}270^\circ=-i$.

Luego las cinco soluciones del problema (un polinomio de grado quinto tiene cinco raíces) son:

$$0,\quad 1,\quad i,\quad -1,\quad -i.$$

Segunda solución. (Planteo hecho por muchos alumnos y no resuelto por ninguno, excepto uno del llamamiento especial). Sea $z=m(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$ una de las soluciones del problema. Tiene que ser:

$$m(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)=m^5(\cos 5\alpha+i\operatorname{sen}5\alpha).$$

Los módulos de ambos complejos deben ser iguales: $m^5=m$. Sacando factor común m sale: $m(m^4-1)=0$. De aquí: $m=0$ o $m=1$. Complejos de módulo cero sólo hay uno: $z_1=0$; las demás soluciones tienen módulo unidad.

Pasemos a los argumentos; debe ser:

$$\cos 5\alpha=\cos\alpha,\qquad \operatorname{sen}5\alpha=\operatorname{sen}\alpha.$$

Si dos ángulos tienen el seno y el coseno iguales, también son iguales la tangente, la cotangente y las demás razones; según un conocido teorema de Trigonometría, deben diferenciarse en un número exacto de circunferencias:

$$5\alpha=\alpha+360^\circ k.$$

Despejando α, tenemos: $\alpha=90^\circ k$.

Si $k=0$, sale $z_2=1$. Si $k=1$, $z_3=i$. Si $k=2$, $z_4=-1$. Si $k=3$, $z_5=-i$.

Si le damos a k el valor 4, obtenemos de nuevo 1; y lo mismo pasa con cualquier otro valor entero: se vuelven a obtener las soluciones ya obtenidas.

Asegura tu aprobado con nuestros cursos de cálculo

CEUS es una empresa con mas de 50 años de experiencia en el sector de la educación y la formación lo que la hacen la opción ideal para recibir los cursos que está buscando en multitud de ámbitos.

Si está buscando algun tipo de curso en Cádiz, no dude en contactar con nosotros. Nuestro conocimiento del sector le ayudará a encontrar siempre la mejor opción gracias al asesoramiento que nuestra experiencia puede brindarle.

www.ceusformacion.com

99%
satisfacción

CEUS ONLINE

3. Calcular los límites:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{7n+3}{7n+1}\right); \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{6^2+11^2+16^2+\cdots+(5n+1)^2}{n^3}; \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+6}\right)^{2n+5}.$$

Respuestas: a) Cuando $n\to\infty$, la fracción $x=\frac{7n+3}{7n+1}\to 7/7=1$. Sabemos que si $x\to 1, \ln x \sim x-1$. Por tanto:

$$\ln\left(\frac{7n+3}{7n+1}\right)\sim\frac{7n+3}{7n+1}-1=\frac{2}{7n+1}.$$

En consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{7n+3}{7n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{7n+1}=2/7.$$

b) Este límite es el típico caso de suma variable en el numerador, que sólo se resuelve con el criterio de Stolz. Recordémoslo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{B_n-B_{n-1}}.$$

En este caso:

$$A_n=6^2+11^2+16^2+\cdots+(5n-4)^2+(5n+1)^2, \qquad A_{n-1}=6^2+11^2+16^2+\cdots+(5n-4)^2.$$

Entonces: $A_n-A_{n-1}=(5n+1)^2=25n^2+20n+1$.

Pasemos al denominador: $B_n=n^3,\ B_{n-1}=(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$. Luego:

$$B_n-B_{n-1}=n^3-(n^3-3n^2+3n-1)=n^3-n^3+3n^2-3n+1=3n^2-3n+1.$$

Aplicando ésto al límite, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^2+11^2+16^2+\cdots+(5n+1)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{25n^2+20n+1}{3n^2-3n+1}=25/3.$$

c) Cuando $n\to\infty$, $\frac{\pi}{3n+6}\to 0, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+6}\to\operatorname{tg}0=0$; luego la base tiende a 1, y el exponente a infinito; luego es un límite del tipo 1^∞.

Aplicando la fórmula para límites de este tipo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}, (1^\infty),$$

tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+6}\right)^{2n+5} = e^{\lim_{n\to\infty}(2n+5)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+6}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)\pi}{3n+6}} = e^{\frac{2\pi}{3}}.$$

En el límite del exponente se ha aplicado la equivalencia de infinitésimos:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n+6} \sim \frac{\pi}{3n+6}.$$

4. Definir el concepto de límite indeterminado. ¿Por qué no son indeterminados los límites de las formas $0^{+\infty}$ y $0^{-\infty}$?. Aplicarlo a los casos: $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1})^{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1})^{4-n}$.

Respuestas: *Límites indeterminados son aquéllos en que no basta conocer los límites de cada una de las sucesiones o funciones que los forman; para resolverlos es necesario conocer cada una de ellas en concreto.*

Así, sabiendo sólo que $a_n \to \infty$ y que $b_n \to \infty$ no puedo predecir nada sobre a_n/b_n: puede haber límite finito, infinito y carencia de límite. Es necesario conocer los casos concretos a_n y b_n.

En cambio, sabiendo sólo que $a_n \to 2$ y $b_n \to 5$, por poner un ejemplo, puedo afirmar que:

$$a_n/b_n \to 2/5.$$

Los casos citados no son indeterminados porque, como vamos a ver:

$$0^{+\infty} = 0, \qquad \text{y} \qquad 0^{-\infty} = +\infty.$$

Supongamos que $a_n \to 0$ y $b_n \to +\infty$, y sea $p_n = a_n^{b_n}$. Tomando logaritmos neperianos en esta potencia, resulta: $\ln p_n = b_n \ln a_n$. Pero:

$$b_n \to +\infty, \qquad \ln a_n \to -\infty,$$

pues $a_n \to 0$. Recuérdese que si $x \to 0, \ln x \to -\infty$. Por tanto:

$$\ln p_n = b_n \ln a_n \to -\infty \text{ y } p_n \to 0,$$

independientemente de lo que valgan a_n y b_n: luego no es indeterminado.

Probemos que si $\alpha_n \to +\infty$ y $\beta_n \to -\infty$ entonces $\alpha_n\beta_n \to -\infty$.

Sea $A > 0$; también $\sqrt{A} > 0$ y se puede usar en la definición de límite infinito. A partir de cierto término será: $\alpha_n > \sqrt{A}$; análogamente: $\beta_n < -\sqrt{A}$, a partir de cierto término. Multiplicando ambas desigualdades, resulta: $\alpha_n\beta_n < -A$, y queda demostrado el resultado anterior.

Análogamente se razona en el otro caso: hágalo el alumno como ejercicio.

5. Averiguar si existen dos naturales x e y tales que:

$$\sqrt{18 + \sqrt{308}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Definir el concepto de raíz enésima de un número.

Respuestas: Si existen tales números, por definición de raíz cuadrada, será:

$$18 + \sqrt{308} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Desarrollando el segundo miembro, resulta:

$$18 + \sqrt{308} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Igualando las partes sin radicales y las otras, llegamos al sistema:

$$x + y = 18, 2\sqrt{xy} = \sqrt{308}.$$

Elevando al cuadrado la segunda ecuación para quitar los radicales, obtenemos:

$$4xy = 308.$$

Luego: $xy = \frac{308}{4} = 77$.

En conclusión: $x + y = 18, \qquad xy = 77$. Sabemos que si conocemos la suma de dos números S, y su producto P, dichos números son las raíces de la ecuación:

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

En nuestro caso, resulta: $z^2 - 18z + 77 = 0$. Resolviendóla, obtenemos:

$$z = 9 \pm \sqrt{9^2 - 77} = 9 \pm 2, \text{luego: } x = 11 \text{ y } y = 7 \ldots \text{o al contrario.}$$

En conclusión:

$$\sqrt{18 + \sqrt{308}} = \sqrt{11} + \sqrt{7}.$$

Existen, pues, tales naturales.

El sistema se puede resolver sin saber nada de las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado (asunto tratado en las clases prácticas): se despeja y en la primera ecuación: $y = 18 - x$, y sustituye en la segunda, y se obtiene la ecuación escrita con z.

La definición de raíz enésima de un número es ésta:

Definición.—Raíz enésima del número A es otro número r tal que: $r^n = A$:

$$r = \sqrt[n]{A} \Longleftrightarrow r^n = A.$$

6. Calcular los límites:

$$\text{a)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(8-7x)\,\mathrm{sen}(x-1)}{1-\cos(3x-3)}; \quad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\frac{3x^2+5x+9}{3x^2+5x+2}\right); \quad \text{c)} \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+9x+2} - \sqrt{x^2+x+1}).$$

Respuestas: a) Sea $y = 8 - 7x$: cuando $x \to 1, y \to 1$. Sabemos que si $y \to 1, \ln y \sim y - 1$. Por tanto:

$$\ln(8-7x) \sim (8-7x) - 1 = 7 - 7x = -7(x-1).$$

Para $\mathrm{sen}(x-1)$ es claro que: $\mathrm{sen}(x-1) \sim (x-1)$.

Y, si $z = 3x - 3$, cuando $x \to 1, z \to 0$. Sabemos que si $z \to 0, 1 - \cos z \sim \frac{1}{2}z^2$. Por tanto:

$$1-\cos(3x-3)\sim\frac{1}{2}(3x-3)^2=\frac{1}{2}9(x-1)^2.$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(8-7x)\,\mathrm{sen}(x-1)}{1-\cos(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-7(x-1)(x-1)}{\frac{9}{2}(x-1)^2}=-\frac{14}{9}.$$

En este cálculo final, se ha simplificado el $(x-1)^2$ del numerador con el correspondiente del denominador, por ser $x-1\neq 0$.

b) Si $x\to+\infty$, $\frac{3x^2+5x+9}{3x^2+5x+2}\to 3/3=1$. Aplicando la equivalencia de infinitésimos del logaritmo neperiano, ya citada, tenemos:

$$\ln\frac{3x^2+5x+9}{3x^2+5x+2}\sim\frac{3x^2+5x+9}{3x^2+5x+2}-1=\frac{7}{3x^2+5x+2}.$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\frac{3x^2+5x+9}{3x^2+5x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2}{3x^2+5x+2}=7/3.$$

c) Este límite elemental se resuelve por la identidad: $A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}$ siendo $A=\sqrt{x^2+9x+2}$ y $B=\sqrt{x^2+x+1}$.Aplicándola tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+9x+2}-\sqrt{x^2+x+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+9x+2)-(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+9x+2}+\sqrt{x^2+x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+1}{\sqrt{x^2+9x+2}+\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{8}{1+1}=8/2=4.$$

En el cálculo final se ha dividido numerador y denominador por x, variable que entra en los radicales elevada al cuadrado; así:

$$\sqrt{x^2+9x+2}/x=\sqrt{x^2+9x+2}/\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{x^2+9x+2}{x^2}}=\sqrt{1+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Las fracciones que aparecen en el último denominador tienden todas a cero: $\frac{9}{x}\to 0$, $\frac{2}{x^2}\to 0$, y lo mismo ocurre con la del numerador.

7. Sea A_n la suma parcial enésima de la serie armónica: $A_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

a)Probar por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}$, es: $A_n \leq n$.

b) Sea la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_n}$. Deducir su carácter usando el apartado anterior, enunciando el criterio empleado. ¿Cumple esta serie la condición necesaria de convergencia? Enunciarla después.

a)Sea A_n la suma parcial enésima de la serie armónica:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

y vamos a demostrar que $A_n \leq n$.

Para $n = 1$ tenemos: $A_1 = 1, n = 1$, luego se cumple la desigualdad.

Debemos probar ahora que si $A_h \leq h$, también $A_{h+1} \leq h + 1$.

¿Cuál es la diferencia entre A_h y A_{h+1}? Pues que tiene un sumando más: $\frac{1}{h+1}$.

Obsérvese que para $h \geq 1$ es:$\frac{1}{h+1} < 1$. Sumando miembro a miembro esta desigualdad a la dada $A_h < h$, resulta: $A_{h+1} \leq h + 1$, que es lo que se quería probar.

b) Por ser: $A_n \leq n$, resulta:

$$\frac{1}{A_n} \geq \frac{1}{n}.$$

Sabemos que la serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ es divergente; y la nuestra, tiene los términos mayores o iguales que una divergente: *luego la serie dada es divergente.*

Nos basamos en el primer criterio de comparación de series:

Primer Criterio de Comparación de Series: *Si los términos de una serie son menores o iguales que los de una serie convergente, la serie dada es convergente; si son mayores o iguales que los de una divergente, la dada diverge.*

La serie $\frac{1}{A_n}$ cumple la condición necesaria de convergencia, pues, dado que:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty \text{ (divergencia de la serie armónica)}$$

resulta: $\frac{1}{A_n} \to 0$.

La condición necesaria de convergencia es la siguiente:

Condición Necesaria de Convergencia: *Para que una serie converja, es necesario que el término general tienda a cero:*

$$a_n \to 0.$$

8. Hallar los caracteres de las siguientes series:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{10\cdot 13\cdot 16\cdots(3n+7)}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{n^2}; \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{(4n+1)^2}.$$

Respuestas: a) Como el término general tiene forma de cociente, aplicamos el criterio del mismo nombre. Tenemos entonces:

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3(n-1)\cdot(3n)}{10\cdot 13\cdot 16\cdots(3n+4)(3n+7)}, \qquad a_{n-1} = \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3(n-1)}{10\cdot 13\cdot 16\cdots(3n+4)}.$$

Fácilmente se ve que:$a_n = a_{n-1} \times \frac{3n}{3n+7}$. Por tanto:

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n+7} = 1.$$

Por ser $\frac{3n}{3n+7} < 1$, *estamos en el caso dudoso del criterio del cociente.*

Para resolver la cuestión, aplicamos el criterio de Raabe:

$$A = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{3n}{3n+7}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{3n+7} = 7/3 > 1.$$

Luego *la serie es convergente.*

NOTAS. 1) El término general es toda la fracción dada, y no la parte que más nos guste, como hacen algunos alumnos.

2) El criterio de Raabe funciona al contrario que el del cociente: cuando A es mayor que 1, converge, y cuando menor que 1, diverge.

3) Para calcular el cociente a_n/a_{n-1} *se deben escribir con todo detalle ambos.* Obsérvese que $3n+4 = (3n+7)-3 = 3(n-1)+7$.

b) Al tener forma de potencia el término general:$\left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{n^2}$, aplicamos el criterio de la raíz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1}} = e^{5/2} > e^0 = 1.$$

Luego *la serie diverge.*

Se ha aplicado la fórmula $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$; y también la fórmula, vista en el apartado c) del problema **3**, de los límites del tipo 1^∞.

Sin aplicar criterio alguno, podemos también deducir que esta serie diverge. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n+1}\right)^{n^2}=+\infty.$$

Luego *no cumple la condición necesaria de convergencia; y, al no poder ser oscilante —NO EXISTEN SERIES OSCILANTES DE TÉRMINOS POSITIVOS— es divergente.*

El límite anterior se calcula por la fórmula del tipo 1^∞; hágalo el alumno como ejercicio.

c) La observación del término general $a_n = \operatorname{tg}\frac{a\pi}{(4n+1)^2}$, proporciona la equivalencia de infinitésimos:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{(4n+1)^2}\sim\frac{\pi}{(4n+1)^2}.$$

Aplicando el criterio de Pringsheim con $\alpha=2$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{(4n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\, n^2}{(4n+1)^2}=\frac{\pi}{16}.$$

Luego *la serie es convergente*, por ser $\alpha=2>1$.

9. Definir el concepto de logaritmo en base b; mediante ella, expresar $\log_b x$ en función del logaritmo neperiano. Hallar para $x\to 1$ un infinitésimo equivalente a $\log_b x$; aplicarlo al límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_5 x}{3x^2+2x-5}.$$

Respuestas: La definición de logaritmo en base b es la siguiente:

Definición: Se llama logaritmo en base b de un número al exponente al que hay que elevar b para obtenerlo; así, dado $x>0$, es:

$$b^{\log_b x}=x.$$

En particular, es:

$$e^{\ln x}=x.$$

Tomando logaritmos en base b, en esta última igualdad, resulta:

$$\log_b x = \ln x \log_b e.$$

Ya está expresado $\log_b x$ en función del logaritmo neperiano. Se ha aplicado la propiedad:

$$\log_b(A^m) = m \log_b A.$$

Teniendo en cuenta que, para $x \to 1$, $\ln x \sim x - 1$, resulta:

$$\log_b x \sim \log_b e(x-1).$$

Vamos a comprobarlo, haciendo el límite que define la equivalencia:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log_b x}{\log_b e(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\log_b e \ln x}{\log_b e(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Como $\log_b e = \frac{1}{\ln b}$, como se deducirá seguidamente,la equivalencia puede escribirse también así:

$$\log_b x \sim \frac{(x-1)}{\ln b}.$$

Tomando logaritmos neperianos en la igualdad:

$$b^{\log_b e} = e,$$

se obtiene: $\ln b \cdot \log_b e = 1$. Despejando $\log_b e$ sale la igualdad anterior.

Pasemos al límite: Es de la forma $\frac{0}{0}$, ya que numerador y denominador se anulan para $x = 1$.Por anularse el polinomio denominador para $x = 1$, es divisible por $x - 1$, división que se hace por la regla de Ruffini:

$$3x^2 + 2x - 5 = (x-1)(3x+5).$$

Aplicando todo ésto al límite, tenemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log_5 x}{3x^2 + 2x - 5} = \lim_{x\to 1} \frac{\log_5 e(x-1)}{(x-1)(3x+5)} = \lim_{x\to 1} \frac{\log_5 e}{3x+5} = \frac{\log_5 e}{8} = \frac{1}{8 \ln 5} = \frac{1}{\ln(5^8)}.$$

Por ser $x \not 1$ la diferencia $x - 1$ no es cero, y podemos dividir numerador y denominador por ella.

El resultado del límite se ha expresado en las dos formas posibles: con $\log_5 e$ y $\ln 5$: el alumno, lógicamente, sólo usaría una de las formas posibles.

Uno de los corolarios del Teorema del Resto:

Teorema del Resto.—El resto de la división de un polinomio por $x - a$ es su valor numérico para $x = a$, es:

Corolario.—Si un polinomio se anula para $x = a$ es divisible por $x - a$ se ha aplicado en el denominador.