Cálculo

RESPUESTAS AL EXAMEN DE FEBRERO DE 11–II–2011

1. Calcular las constantes *reales* b y c para que la ecuación:

$$2x^2 + bx + c = 0,$$

tenga el complejo $2+3i$ como raíz. Una vez calculadas, resolver la ecuación y factorizar el polinomio del primer miembro.

Respuesta: Raíz de un polinomio es un número tal que, al sustituir la x por él, se obtiene cero. Por tanto será:

$$2(2+3i)^2 + b(2+3i) + c = 0.$$

Al ser:

$$(2+3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i,$$

tenemos:

$$2(-5+12i) + b(2+3i) + c = 0.$$

Dado que las constantes b y c son reales, tenemos:

$$(-10 + 2b + c) + i(24 + 3b) = 0.$$

Para que dicho complejo sea cero, deberán ser nulas la parte real y la imaginaria:

$$-10 + 2b + c = 0 \quad \text{y} \quad 24 + 3b = 0.$$

De la segunda sale: $b = -8$ y sustituyendo en la primera: $c = 26$.
La ecuación es: $2x^2 - 8x + 26 = 0$. Para resolverla dividimos por 2, y nos queda:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Aplicando la fórmula del coeficiente par, se obtiene:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 13}.$$

Luego las raíces son: $\alpha = 2 + 3i$ y $\beta = 2 - 3i$.

La factorización de un polinomio cualquiera es:

$$a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n),$$

siendo a_n **el coeficiente del término de mayor grado**, y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ las n raíces del polinomio, las cuales pueden ser reales o complejas, iguales o distintas.

En nuestro caso es:

$$2(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i).$$

2. Explicar la expresión decimal de un número irracional. Por reducción al absurdo, probar que $\sqrt[3]{3}$ es irracional.

Respuesta: La expresión decimal de un número irracional es infinita y no periódica.

Como $1^3 = 1 < 3$ y $2^3 = 8 > 3$, se tiene:

$$1 < \sqrt[3]{3} < 2.$$

$\sqrt[3]{3}$ no es entero: probemos que no es racional.

Si es $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{3}$, elevando al cubo, tenemos: $\frac{a^3}{b^3} = 3$; de aquí:

$$a^3 = 3b^3.$$

Si descomponemos a en factores primos, se obtiene:

$$a = 3^{\alpha} \ldots$$

donde los puntos suspensivos son los factores primos que son distintos de 3. Se objetará que a no tiene que tener el factor primo 3: en ese caso α es cero. Elevando al cubo a resulta:

$$a^3 = 3^{3\alpha} \ldots$$

Asegura tu aprobado con nuestros cursos de cálculo

CEUS es una empresa con mas de 50 años de experiencia en el sector de la educación y la formación lo que la hacen la opción ideal para recibir los cursos que está buscando en multitud de ámbitos.

Si está buscando algun tipo de curso en Cádiz, no dude en contactar con nosotros. Nuestro conocimiento del sector le ayudará a encontrar siempre la mejor opción gracias al asesoramiento que nuestra experiencia puede brindarle.

www.ceusformacion.com

99%
satisfacción

CEUS
ONLINE

Luego: *en la descomposición en factores primos de* a^3 *el factor primo 3 está elevado a un exponente múltiplo de 3.*

Esta afirmación es cierta incluso cuando $\alpha = 0$ porque cero es múltiplo de 3.

Estudiemos ahora el segundo miembro: $3b^3$. Descomponiendo el número b en factores primos, tenemos:

$$b = 3^{\beta} \dots$$

Elevando al cubo tenemos: $b^3 = 3^{3\beta} \dots$, y multiplicando por 3 resulta:

$$3b^3 = 3^{3\beta+1} \dots$$

Luego: *en el segundo miembro de la igualdad el factor primo 3 está elevado a un exponente que no es múltiplo de 3*, pues al dividirlo por 3 tiene resto 1.

Un conocido teorema de Aritmética afirma: *La descomposición en factores primos de un número es única.* Por ser iguales los números a^3 y $3b^3$ su descomposición en factores primos será la misma. Pero eso es imposible porque en el primer miembro 3 está elevado a un exponente múltiplo de 3, mientras que en el segundo miembro el exponente no es múltiplo de tres.

Otra forma de verlo es la siguiente; si fuera:

$$3\alpha = 3\beta + 1$$

sería: $3(\alpha - \beta) = 1$. Y ésto es imposible porque 1 no es múltiplo de 3.

3. Calcular los límites:

$$a) \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n+6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n+4}}; \qquad b) \lim_{n\to\infty} \frac{13 + 19 + 25 + \cdots + (6n+7)}{n^2};$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+5} \right)^{4n+1}.$$

Respuestas: a) Cuando $n \to \infty$ los ángulos $\frac{\pi}{3n+6}$ y $\frac{\pi}{2n+4}$ tienden a cero; y sabemos que cuando $x \to 0$ tenemos las equivalencias: $\operatorname{sen} x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x$. Por tanto:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n+6} \sim \frac{\pi}{3n+6},$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n+4} \sim \frac{\pi}{2n+4}.$$

Al tratarse de un cociente podemos sustituir ambos infinitésimos por sus equivalentes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3n+6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{3n+6}}{\frac{\pi}{2n+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n+6} = \frac{2}{3}.$$

Para calcular este último límite se ha aplicado el teorema: *El cociente de dos polinomios del mismo grado es el cociente de los coeficientes de mayor grado.*

b) A medida que n aumenta va aumentando el número de sumandos en el límite de b). Por tanto, la única forma de resolverlo es aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}},$$

con la única condición de que B_n *es monótono creciente y divergente.*

En nuestro caso: $B_n = n^2$; al ser: $n^2 < (n+1)^2, n^2 \to +\infty$ podemos aplicarlo. Es:

$$B_n - B_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1.$$

El numerador es:

$$A_n = 13 + 19 + 25 + \cdots + (6n+1) + (6n+7).$$

El término anterior es:

$$A_{n-1} = 13 + 19 + 25 + \cdots + (6n+1).$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$A_n - A_{n-1} = 6n + 7.$$

Aplicando el criterio, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13 + 19 + 25 + \cdots + (6n+7)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+7}{2n-1} = \frac{6}{2} = 3.$$

En la suma A_n el sumando que ocupa el lugar $n-1$, $6n+1$ puede obtenerse de dos maneras. Primera: poniendo $n-1$ en lugar de n en $6n+7$:

$$6(n-1)+7=6n-6+7=6n+1.$$

Segunda: observando que los sumandos de A_n están en progresión aritmética de razón 6, restando este número de $6n+7$:

$$6n+7-6=6n+1.$$

c) Si $n \to \infty$ la base de la potencia tiende a:

$$\frac{3n+2}{3n+5} \to 3/3=1.$$

Y el exponente: $4n+1 \to +\infty$. Se trata, pues, de un límite de la forma 1^∞. Aplicando la fórmula de este tipo de límites:

$$(1^\infty) \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n},$$

resulta:

$$\frac{3n+2}{3n+5}-1=\frac{3n+2-3n-5}{3n+5}=\frac{-3}{3n+5},$$

$$\frac{-3}{3n+5}(4n+1)=\frac{-12n-3}{3n+5},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+5}\right)^{4n+1}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-12n-3}{3n+5}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

4. Dada la serie geométrica:

$$\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+\frac{35}{10^6}+\cdots$$

hallar: a) la suma parcial enésima; b) la suma de la serie; c) ¿cuál es la generatriz del número $2,35$?

Respuestas: a) A simple vista se ve que el término general de la serie geométrica es: $a_n=\frac{35}{10^{2n}}$. Pero puede obtenerse por la fórmula del término general: $a_n=a_1r^{n-1}$:

$$a_1 = \frac{35}{10^2}, \quad r = \frac{1}{10^2}, \quad a_n = \frac{35}{10^2} \cdot \frac{1}{10^{2(n-1)}} = \frac{35}{10^{2n}}.$$

La suma parcial enésima está dada por la fórmula: $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$:

$$S_n = \frac{\frac{35}{10^{2n}} \cdot \frac{1}{10^2} - \frac{35}{10^2}}{\frac{1}{10^2} - 1}.$$

Multiplicando por $1/10^2$ numerador y denominador,resulta:

$$S_n = \frac{\frac{35}{10^{2n}} - 35}{1 - 10^2} = \frac{35}{99}(1 - 10^{-2n}).$$

b)La suma de la serie es el límite de las sumas parciales cuando $n \to \infty$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{35}{99}(1 - 10^{-2n}) = \frac{35}{99},$$

puesto que $10^{-2n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

c) El número $2,\widehat{35}$ se puede escribir así:

$$2,\widehat{35} = 2 + \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \frac{35}{10^6} + \cdots$$

Como la suma de serie es: $\frac{35}{99}$, tenemos:

$$2,\widehat{35} = 2 + \frac{35}{99} = \frac{2 \cdot 99 + 35}{99} = \frac{233}{99}.$$

5. Calcular los límites:

$$a) \lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4x^2+1}; \quad b) \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+6x+7} - \sqrt{x^2+2x+3}\right];$$

$$c) \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} 3x \operatorname{tg} 3x}{\ln(1+2x)(1-\cos 4x)}.$$

Respuestas: a) Cuando $x \to +\infty$ el ángulo $\frac{\pi}{4x^2+1} \to 0$. Aplicando la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim x$ por tratarse de un producto, tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Este límite es del tipo $\infty - \infty$, y para resolverlo aplicamos la identidad elemental:

$$A - B = \frac{A^2 - B^2}{A + B}:$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+6x+7} - \sqrt{x^2+2x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+7-x^2-2x-3}{\sqrt{x^2+6x+7}+\sqrt{x^2+2x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+4}{\sqrt{x^2+6x+7}+\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \frac{4}{1+1} = 2.$$

Para pasar del tercer límite al cuarto hemos dividido por x numerador y denominador; en los radicales x entra elevada al cuadrado:

$$\frac{\sqrt{x^2+6x+7}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+6x+7}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+6x+7}{x^2}} = \sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}}.$$

c) Este límite solamente tiene producto y cociente como operaciones, podemos aplicar equivalencias de infinitésimos.

Cuando $x \to 0$ los ángulos $3x$ y $4x$ tienden a cero, por lo cual tenemos las equivalencias:

$$\operatorname{sen} 3x \sim 3x, \qquad \operatorname{tg} 3x \sim 3x, \qquad 1 - \cos 4x \sim \frac{1}{2}(4x)^2 = 8x^2.$$

Si $x \to 0, 1 + 2x \to 1$, y tenemos la equivalencia:

$$\ln(1+2x) \sim 1 + 2x - 1 = 2x.$$

Aplicando las cuatro equivalencias indicadas, resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x \operatorname{sen} 3x \operatorname{tg} 3x}{\ln(1+2x)(1-\cos 4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3x\cdot 3x}{2x\cdot 8x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9x^3}{16x^3} = \frac{9}{16}.$$

Para obtener el resultado final se ha dividido numerador y denominador por x^3: al ser $x \neq 0$ (entorno reducido) ello es posible.

6. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = x - \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-x},$$

y clasificar sus discontinuidades si las hubiere.

Calcular su función derivada.

Respuestas: Viendo los tres sumandos que forman $f(x)$, resulta que el primero x es continuo para todo valor de x; el segundo, $\frac{1}{x-2}$ es continuo para todo valor de x, excepto para $x = 2$; el tercero es el más complejo: es el cociente de dos polinomios,x y $x^2 - x$, que son continuos para todo valor de x, por lo que las discontinuidades serán los valores que anulen el denominador.

Resolviendo la ecuación $x^2 - x = 0$, que se escribe: $x(x-1) = 0$, resultan las raíces $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Tenemos, pues, tres posibles discontinuidades, para los valores de $x, 0, 1$ y 2.

Empecemos por el valor $x = 0$. Los dos primeros sumandos son continuos en él, pero el tercero tiene la forma $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación. Calculemos el límite del tercer sumando para $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1.$$

Para pasar de la segunda fracción a la tercera se ha dividido por x, y ello ha sido posible por estar en un entorno reducido de cero; o sea, $x \neq 0$. Recuérdese que el límite de una función en un punto se calcula con los valores alrededor de ese punto, excluido el mismo punto (entorno reducido).

En conclusión, en $x = 0$ el tercer sumando tiene una discontinuidad evitable, dándole el valor -1. El valor de la función en $x = 0$ será:

$$f(0) = 0 - (-\frac{1}{2}) - (-1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

En $x = 0$ tenemos *una discontinuidad evitable.*

Veamos qué pasa en $x = 1$: para ese valor son continuos el primer sumando y el segundo, pero el tercero tiende a ∞, porque el numerador x no se anula, y sí el denominador. Se tiene:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Se obtiene $+\infty$ porque al ser $x > 1$, es $x - 1 > 0$.

Análogamente:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Como el primer sumando y el segundo se mantienen finitos en un entorno de 1, se tiene:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Luego *en $x = 1$ se tiene una discontinuidad de primera especie:existen los límites laterales pero son distintos.*

En $x = 2$, ocurre ésto:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Como el primer sumando y el tercero se mantienen finitos en un entorno de 2, se tiene:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Luego *en $x = 2$ se tiene una discontinuidad de primera especie:existen los límites laterales pero son distintos.*

Calculemos la función derivada. Aplicando la regla de la derivada del cociente al tercer sumando, resulta:

$$\left(\frac{x}{x^2-x}\right)' = \frac{x^2-x-x(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{x^2-x-2x^2+x}{(x^2-x)^2} = -\frac{x^2}{(x^2-x)}.$$

La derivada es pues:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x^2}{(x^2-x)^2}.$$

Podría hacerse la suma de las fracciones, pero el resultado es más complicado.

7. a) Enunciar el teorema de Rolle, y explicar su interpretación geométrica.

b) Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Consideremos la función:

$$F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b-a)f(x).$$

Probar que $F(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle, y hallar el punto donde la tesis del teorema es cumplida. ¿Qué teorema se deduce? Enunciarlo.

Respuestas: a) El teorema de Rolle es el siguiente:

Teorema 1 (Teorema de Rolle) *Si la función $f(x)$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y es $f(a) = f(b)$, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:*

$$f'(x_0) = 0.$$

La interpretación geométrica es la siguiente: existe un punto (x_0 es su abcisa) en el intervalo abierto (a, b) que tiene tangente horizontal.

b) El primer sumando de $F(x)$: $[f(b)-f(a)]x$ es continuo y derivable para todo valor de x; como $f(x)$ es continua en el cerrado y derivable en el abierto, también $F(x)$ cumple esas condiciones. Para aplicar el teorema de Rolle basta ver que $F(a) = F(b)$. Calculemos ambos valores:

$$F(a) = [f(b) - f(a)]a - (b - a)f(a) = af(b) - af(a) - bf(a) + af(a) = af(b) - bf(a);$$

$$F(b) = [f(b) - f(a)]b - (b - a)f(b) = bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b) = af(b) - bf(b).$$

Luego es $F(a) = F(b)$, y $F(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle.

Aplicándolo, resulta que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$F'(x_0) = 0 = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(x_0).$$

Despejando $f'(x_0)$ tenemos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Y acabamos de obtener el teorema del valor intermedio o de LAGRANGE aplicado a la función $f(x)$:

Teorema 2 (Teorema de Lagrange) *Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Obsérvese que en la clase pasamos del teorema de Cauchy al de Lagrange, y aquí hemos pasado del teorema de Rolle directamente al de Lagrange;el ejercicio consiste en hacer la demostración del teorema de Cauchy, en el caso particular de $g(x) = x$.

8. Por inducción completa, demostrar que la derivada enésima de $y = \cos x$ es:

$$y^{n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Indicación: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$.

Respuesta: La derivada primera de $y = \cos x$ es: $y' = -\operatorname{sen} x$. Por la indicación, sabemos que:

$$y' = -\operatorname{sen} x = \cos(x + 1\frac{\pi}{2}).$$

Luego la propiedad se verifica para $n = 1$.

Supongamos que la propiedad se verifica para $n = h$. Para obtener la derivada de orden $h+1$ debemos derivar la de orden h; si esta es:

$$y^{h)} = \cos\left(x + h\frac{\pi}{2}\right),$$

derivando obtenemos:

$$y^{h+1)} = -\operatorname{sen}\left(x + h\pi/2\right).$$

Aplicando de nuevo la indicación, resulta:

$$y^{h+1)} = \cos\left(x + h\pi/2 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (h+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Y queda demostrada la propiedad pedida.