Práctica V: APLICACIONES LINEALES. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

Aplicaciones lineales.

Sean los espacio vectorial R^n y R^m sobre el cuerpo R y sea f una aplicación $f : R^n \longrightarrow R^m$ Se dice que f es **una aplicación lineal entre los espacios vectoriales** R^n **y** R^m si se verifican las dos siguientes condiciones

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n, \quad f(\tilde{x}+\tilde{y}) = f(\tilde{x}) + f(\tilde{y})$
2. $\forall \vec{x} \in R^n, \quad \forall \alpha \in R \quad f(\alpha\tilde{x}) = \alpha f(\tilde{x})$

Su forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boxed{Y = AX}$$

De esta manera, la imagen de cualquier vector de R^n se obtiene mediante un producto de matrices. A la matiz A se le llama matriz asociada a la aplicación lineal f respecto a las bases B y B', y cada columna de A está formada por las coordenadas respecto de B' de las imágenes de los vectores de B.

También hemos definido la imagen y el núcleo de una aplicación. Sea $f : R^n \longrightarrow R^m$ una aplicación lineal. Se define el **conjunto imagen y se representa por** $Im(f)$ **o por** $f(R^n)$ al conjunto formado por todos aquellos vectores de R^m que son imágenes de uno o más vectores de R^n

$$Im(f) = \{\vec{y} \in R^m \,|\, \exists \tilde{x} \in R^n, f(\tilde{x}) = \tilde{y}\}$$

Se define el **núcleo de una aplicación lineal y se representa por** $Ker(f)$ **o por** $Nc(f)$ al conjunto de vectores de R^n cuya imagen es el vector cero de R^m

$$Ker(f) = \{\vec{x} \in R^n \,|\, f(\tilde{x}) = 0\}$$

Ejemplo 1
Sea f un endomorfismo de R^3 dado por $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z)$. Determina una base del $ker(f)$ e $Im(f)$ y $f(V)$ donde

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 : x+y+z = 0\}$$

Solución:

En primer lugar debemos de definir la aplicación lineal y definimos la matriz asociada a la aplicación lineal en función de la base canónica de R^3

(%i1) `f(x,y,z):=[x+y+z,x+y-z,z]`

(%o1) $f(x,y,z) := [z+y+x, -z+y+x, z]$

(%i2) `Af:transpose(matrix(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)))`

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para determinar el núcleo resolvamos el sistema $AX = 0$,

(%i3) `nucleo:%o2.[x,y,z]`

(%o3) $\begin{bmatrix} z+y+x \\ -z+y+x \\ z \end{bmatrix}$

(%i4)
```
/*ker(f)*/
eq1:nucleo[1,1]=0;
eq2:nucleo[2,1]=0;
eq3:nucleo[3,1]=0;
```

(%o4) $z+y+x=0 \quad -z+y+x=0 \quad z=0$

(%i5) `linsolve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z])`

(%o5) $[x = \%r1, y = -\%r1, z = 0]$

Y una base del núcleo podría venir dada por $B_{Ker(f)} = \{(1,-1,0)\}$. También podríamos haber utilizado la orden directa `nullspace(matriz)` que nos permite obtener una base de núcleo.

(%i6) `nullspace(Af)`

(%o6) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

La imagen de f viene dada por las imágenes de los vectores de la base, es decir

(%i7) `imagen:matrix(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1))`

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

La orden `triangularize(matriz)` nos da un sistema de generadores de la imagen ya escalonado, y quitando los vectores nulos tendremos una base de la imagen.

(%i8) `triangularize(imagen)`

(%o8) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La imagen viene generada por los vectores $\{(1,1,0),(0,1,1/2),\}$. Por último para calcular $f(V)$ tenemos primero que calcular una base de V.

(%i9) `linsolve(x+y+z=0,[x,y,z])`

(%o9) $[x = -\%r2 - \%r1, y = \%r2, z = \%r1]$

Una base viene dada por $\{(-1,1,0)(-1,0,1)\}$, por tanto

(%i10) `fV:matrix(f(-1,1,0),f(-1,0,1))`

(%o10) $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $f(V)$ viene generado or el vector $(0,-2,1)$.

Ejercicio 1. Considera la aplicación lineal $f : R^4 \longrightarrow R^3$, definida por

$$f(x,y,z,t) = (x - z, 0, y - 2z + t)$$

Hallar las bases del núcleo y de la imagen de f. Clasificar la aplicación lineal y hallar la matriz asociada a la aplicación respecto a las bases canónicas de R^4 y $B = \{(1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\}$ de R^3.

Cálculo de autovalores y autovectores

En esta parte de la práctica nos vamos a plantear que, dada una matriz cuadrada A encontrar, si es posible, una matriz diagonal, D que sea semejante a la matriz A. Es lo que se conoce como el **problema de la diagonalización**.

Diremos que una matriz A, matriz cuadrada de orden n es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, si existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que

$$A = P^{-1}DP$$

Para encontrar sendas matrices vamos a utilizar las herramientas de los autovalores y autovectores. Recordemos que los autovalores son las raíces del polinomio característico de la matriz A, dado por

$$\boxed{p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = |A - \lambda I|}$$

y que las coordenadas del autovector $\vec{v}$ son solución del sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = 0$, dados como el subespacio propio correspondiente al valor propio λ.

$$\boxed{V_\lambda = \{\vec{v} \in R^n \,|\, f(\tilde{v}) = \lambda_i \tilde{v}\}}$$

En *WxMaxima* el polinomio característico e una matriz se puede calcular con la orden `charpoly(matriz,variable)`. Con la orden `eigenvalues(matriz)` nos da una lisa con dos entradas, la primera formada por los autovalores y la segunda por sus respectivas multiplicidades algebraicas. Por último, la orden `eigenvectors(matriz)` da como resultado una lista de los autovectores correspondientes a cada uno de los autovalores.

Ejemplo 2

Determina los autovalores y autovectores de la matriz dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Solución:</u>

Vamos a introducir la matriz A y su polinomio característico

```
(%i11) A:matrix([2,2,1],[-1,-1,-1],[2,4,3])
```

$$(\%o11) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(%i12) charpoly(A,x)
```

$$(\%o12) \; -2\cdot(x-1)+(4+(-x-1)\cdot(3-x))\cdot(2-x)-2\cdot(-1-x)-4$$

```
(%i13) factor(%)
```

$$(\%o13) \; -(x-2)\cdot(x-1)^2$$

```
(%i14) eigenvalues(A)
```

$$(\%o14) \; [[2,1],[1,2]]$$

La matriz A tiene un autovalor $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y otro autovalor $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

```
(%i15) eigenvectors(A)
```

$$(\%o15) \; [[[2,1],[1,2]],[[[1,-1,2]],[[1,0,-1],[0,1,-2]]]]$$

Y los autovectores son $(1,-,1,2)$ para el autovalor $\lambda_1 = 2$ y $(1,0,1),(0,1,-2)$ para el autovalor $\lambda_2 = 1$.

Ejercicio 2. Sea las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar el polinomio característico y los autovalores y autovectores para cada una de las matrices.

Matriz diagonalizable.

Una vez analizados los autovalores y autovectores, podemos enunciar las condiciones que deben de cumplir una matriz para que sea diagonalizable. Dada una matriz A cuadrada de orden n. Entonces dicha matriz es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones:

- El polinomio característico $|A - \lambda I| = 0$ tenga todas sus raíces reales. Por tanto si todos los autovalores de A son tienen de multiplicidad $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \ldots, m_{\lambda_p}$ entonces

$$\boxed{m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \ldots + m_{\lambda_p} = n}$$

- La multiplicidad algebraica de cada autovalor λ, m_λ, coincide con la multiplicidad geométrica, d_λ, es decir

$$\boxed{m_{\lambda_i} = d_{\lambda_i} \ \forall i \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo 3

Determina si la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Tenemos que comprobar, una vez determinados los autovalores y autovectores, si la multiplicidad algebraica es igual a la multiplicidad geométrica, es decir, si $n - rg(A - \lambda I) = m_\lambda$.

```
(%i16) n:3;
       lambda:1;
       multialg:2;
```

(%o16) 3; 1; 2

```
(%i17) multigeom:n-rank(A-lambda.ident(n));
```

(%o17) 2

Por lo tanto como $m_{\lambda_1} = 1 = d_{\lambda_1}$ y hemos comprobado el otro autovalor, podemos asegurar que A es diferenciable. Una vez que determinemos si una matriz A es diagonalizable, podemos observar que las matriz diagonal$D$ esta formada por loa autovalores de la matriz A y que cada una de las columnas de la matriz P, $P_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$, es un autovector asociado al autovalor λ_j para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

En nuestro caso podemos comprobar la igualdad $P^{-1}DP$:

```
(%i18) P:transpose(matrix([1,-1,2],[1,0,-1],[0,1,-2]))
```

$$(\%o18) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
(%i19) D:matrix([2,0,0],[0,1,0],[0,0,1])
```

$$(\%o19) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(%i20) P.D.invert(P)
```

$$(\%o20) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos resumir el proceso de diagonalización mediante el siguiente algoritmo

1. Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$. Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebraicas.

2. Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

3. Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

4. Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores. Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Ejercicio 3. Comprueba si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si es diagonalizable, determina las matrices P y D.

Ejercicio 4. Comprueba si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si es diagonalizable, determina las matrices P y D.

Diagonalización por semejanza ortogonal

Veremos ahora una mejora del proceso de diagonalización. Ocurre cuando la matriz a diagonalizar es simétrica. Recordemos que para una matriz simétrica siempre es diagonalizable. Además podemos conseguir que la matriz de paso P sea ortogonal, es decir $P^t = P^{-1}$. Para ello bastará obtener bases ortonormales de los subespacios asociados a los autovalores (aplicando el método de Gram-Schidmt)

Ejemplo 4
Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliza ortogonalmente, si es posible, la matriz B.

Solución:

En primer lugar se trata de introducir la matriz A y determinar los autovalores y autovectores.

```
(%i21) B:matrix([3,1,1],[1,3,1],[1,1,3]);
```

$$(\%o21) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(%i22) eigenvalues(B)
```

$(\%o22)$ $[[5,2],[1,2]]$

(%i23) eigenvectors(B)

(%o23) $[[[5,2],[1,2]],[[[1,1,1]],[[1,0,-1],[0,1,-1]]]]$

(%i24) P:matrix([1,1,1],[1,0,-1],[0,1,-1])

(%o24) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i25) load(eigen);

(%o25)

$C:/Program\,Files\,(x86)/Maxima-sbcl-5{,}37{,}2/share/maxima/5{,}37{,}2/share/matrix/eigen.mac$

(%i26) y:gramschmidt(P);

(%o26) $[[1,1,1],[1,0,-1],[-1/2,1,-1/2]]$

Estos vectores son ortogonales pero no están normalizados, para ello tendríamos que dividir cada uno de ellos por su módulo

```
(%i27) v1:[1,1,1];
       v1:v1/sqrt(v1.v1);
```

(%o27) $[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$

```
(%i28) v2:[1,0,-1]
       v2:v2/sqrt(v2.v2);
```

(%o28) $[\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}]$

```
(%i29) v3:[-1/2,1,-1/2];
       v3:v3/sqrt(v3.v3);
```

(%o29) $[-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}]$

Por lo tanto la matriz P ortogonal vendrá dada por

(%i30) P:transpose(matrix(v1,v2,v3));

(%o30) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

Ejercicio 5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

encuentra dos matrices ortogonales P y Q tales que $P^{-1}AP$ y $Q^{-1}BQ$ sean matrices diagonales.

Cálculo de la potencia de una matriz

Como aplicación de la diagonalización de una matriz veamos como calcular la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable A. Si A es diagonalizable existe P inversible tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal. Multiplicando por P por la izquierda y por P^{-1} por la derecha , obtenemos

$$A = PDP^{-1}$$

luego,

$$A^m = A\,A \cdots A = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^mP^{-1}$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz A, se cumple que

$$A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ejemplo 5

Dada la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar A^n

Solución:

En primer lugar se trata de introducir la matriz A y determinar los autovalores y autovectores.

```
(%i31) B:matrix([0,-7,1],[0,4,0],[-2,1,3]);
```

(%o31) $\begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

```
(%i32) eigenvectors(B)
```

(%o32) $[[[1,2,4],[1,1,1]],[[[1,0,1]],[[1,0,2]],[[1,-1,-3]]]]$

```
(%i33) P:transpose(matrix([1,0,1],[1,0,2],[1,-1,-3]));
```

(%o33) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
(%i34) D:matrix([1,0,0],[0,2,0],[0,0,4]);
```

(%o34) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i35) P.D^n.invert(P);
```

(%o35) $$\begin{bmatrix} 2-2^n & -2^{2+n}-4^n+5 & 2^n-1 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 2-2^{1+n} & -2^{3+n}+3\cdot 4^n+5 & 2^{1+n}-1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcula su polinomio característico.
2. Determina todos sus autovalores.
3. Calcula los subespacios vectoriales asociados a cada autovalor.
4. Analiza si A es diagonalizable.

Ejercicio 7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diagonalizarla y comprueba que si $A = PDP^{-1}$ entonces $A^9 = PD^9P^{-1}$