

## 3.7 EJEMPLOS

### 3.7.1 EJERCICIOS RESUELTOS

**Ejercicio 1** *Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:*

1. *Lanzar una moneda.*
2. *Lanzar un dado.*
3. *Lanzar una moneda y un dado simultaneamente.*
4. *Lanzar tres monedas.*
5. *Sexo de los tres hijos de una familia.*

#### Solución.-

1. Si llamamos  $C$  a la posibilidad “salir cara” y llamamos  $X$  a “salir cruz” entonces el espacio muestral será:

$$\Omega = \{C, X\}$$

2. En este caso cada uno de los posibles resultados al lanzar un dado serían: Salir 1, salir 2, ..., salir 6. Resultando:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3. En esta situación tendremos que describir los sucesos elementales de modo bidimensional, donde la primera componente indicará el posible resultado de la moneda y la segunda componente el posible resultado del dado. El espacio muestral será el siguiente:

$$\Omega = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (X, 1), (X, 2), (X, 3), (X, 4), (X, 5), (X, 6), \}$$

4. Con las consideraciones anteriores:

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, X), (C, X, C), (X, C, C), (C, X, X), (X, C, X), (X, X, C), (X, X, X)\}$$

5. Llamando  $V$  a ser varón y  $H$  a ser hembra tenemos que:

$$\Omega = \{(V, V, V), (V, V, H), (V, H, V), (H, V, V), (V, H, H), (H, V, H), (H, H, V), (H, H, H)\}$$

**Ejercicio 2** *Consideremos el experimento aleatorio lanzar un dado dos veces seguidas, y llamemos  $A$  al suceso salir par en el primer lanzamiento e impar en el segundo, asimismo llamemos  $B$  al suceso salir número primo en los dos lanzamientos. En esta situación:*

1. *Describe el espacio muestral, el suceso  $A$  y el suceso  $B$ .*
2. *Describe los conjuntos:*

(a)  $A \cup B$

(b)  $A \cap B$

(c)  $A'$

(d)  $A' \cup B$

(e)  $A - B$

3. Calcula las probabilidades de los sucesos anteriores.

### Solución.-

1. El espacio muestral  $\Omega$  estará constituido por 36 sucesos elementales:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

donde la primera componente de cada suceso elemental representa el posible resultado del primer lanzamiento y la segunda componente el valor obtenido en el segundo lanzamiento del dado.

A continuación describamos los sucesos  $A$  y  $B$ .

$$A = \{ (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5) \}$$

$$B = \{ (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5) \}$$

(a) Sucede  $A \cup B$  cuando ocurre  $A$  o bien sucede  $B$ .

$$A \cup B = \left\{ (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5) \right\}$$

(b) El suceso  $A \cap B$  estará formado por todos los sucesos elementales comunes de  $A$  y  $B$ .

$$A \cap B = \{(2, 3), (2, 5)\}$$

(c)  $A'$  se define como  $\Omega - A$ , por tanto estará formado por todos los elementos del espacio muestral que no son elementos de  $A$ .

$$A' = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ & (2, 2) & & (2, 4) & & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ & (4, 2) & & (4, 4) & & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ & (6, 2) & & (6, 4) & & (6, 6) \end{array} \right\}$$

(d)

$$A' \cup B = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\ & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\ & (4, 2) & & (4, 4) & & (4, 6) \\ (5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\ & (6, 2) & & (6, 4) & & (6, 6) \end{array} \right\}$$

- (e) Se define  $A - B$  como el suceso formado por todos los sucesos elementales de  $A$  menos los sucesos elementales de  $A \cap B$ .

$$A - B = \{ (2, 1), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5) \}$$

2. Para calcular las probabilidades utilizaremos la regla de Laplace.

$$(a) \quad p(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{16}{36}$$

$$(b) \quad p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{36}$$

$$(c) \quad p(A') = \frac{\text{Card}(A')}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{27}{36}$$

$$(d) \quad p(A' \cup B) = \frac{\text{Card}(A' \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{29}{36}$$

$$(e) \quad p(A - B) = \frac{\text{Card}(A - B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{7}{36}$$

**Ejercicio 3** Tenemos una urna con diez bolas numeradas del 1 al 10. Realizando extracciones con reemplazamiento, consideramos los siguientes sucesos:

$$A = \{\text{salir un número primo}\} \quad \text{y} \quad B = \{\text{Salir un cuadrado perfecto}\}$$

Verifica las leyes de Morgan para los sucesos  $A$  y  $B$ .

$$(A \cup B)' = (A' \cap B') \quad (3.1)$$

$$(A \cap B)' = (A' \cup B') \quad (3.2)$$

### Solución.-

Describamos los siguientes sucesos:

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 4, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{6, 8, 10\}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap B)' = \Omega$$

$$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$B' = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$A' \cap B' = \{6, 8, 10\}$$

$$A' \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \Omega$$

se verifica trivialmente que:

$$(A \cup B)' = (A' \cap B') \quad \text{y} \quad (A \cap B)' = (A' \cup B')$$

**Ejercicio 4** La probabilidad de un suceso  $A$  es  $\frac{1}{3}$ , la de  $B$  es  $\frac{2}{4}$  y la de la intersección  $\frac{2}{8}$ . Calcule:

1. La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
2. La probabilidad de que no suceda  $A$ .
3. La probabilidad de que no ocurra ni  $A$  ni  $B$ .
4. La probabilidad de que no ocurra  $A$  o bien no ocurra  $B$ .

**Solución.-**

1. La probabilidad de que ocurra el suceso  $A$  o bien ocurra el suceso  $B$  viene dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad (3.3)$$

resultando,

$$p(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

2. La probabilidad del contrario de  $A$  sería  $1 - p(A)$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} p(A') &= 1 - p(A) \\ p(A') &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3. Se nos está pidiendo que calculemos  $p(A' \cap B')$ , utilizando las leyes de Morgan será equivalente calcular  $p((A \cup B)')$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} p(A' \cap B') &= p((A \cup B)') = 1 - p(A \cup B) \\ p(A' \cap B') &= 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

4. Teniendo en cuenta que  $A' \cup B' =$  “No ocurrir  $A$ , o no suceder  $B$ ”, aplicando las Leyes de Morgan y calculando la probabilidad del suceso contrario tenemos:

$$p(A' \cup B') = p((A \cap B)') = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{2}{8} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

**Ejercicio 5** Lanzamos una moneda tres veces consecutivas. En cada uno de los lanzamientos denominamos  $C$  al suceso “obtener cara” y  $X$  al suceso “obtener cruz”. Sea:

$$\begin{aligned} A &= \{(CCC), (CCX), (CXX), (XXX)\} \\ B &= \{(CCC), (CXC), (XCX), (XXX)\} \\ C &= \{(CCC), (XCC), (XXC), (XXX)\} \end{aligned}$$

1. ¿Son Independientes  $A, B$  y  $C$ ?
2. Calcule  $p(A \cup B \cup C)$

**Solución.-**

1. Obsérvese que :

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(CCC), (XXX)\}$$

Al ser

$$p(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son Independientes}$$

$$p(A \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = p(A) \cdot p(C) \Rightarrow A \text{ y } C \text{ son Independientes}$$

$$p(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = p(B) \cdot p(C) \Rightarrow B \text{ y } C \text{ son Independientes}$$

Sin embargo

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{2}{8} \neq \frac{1}{8} = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \Rightarrow A, B, C \text{ no son Independientes}$$

En este ejercicio podemos observar como tres sucesos que son independientes dos a dos no lo son los tres a la vez.

2. La expresión que nos permite calcular  $p(A \cup B \cup C)$  es la extensión natural de la fórmula tradicional de la probabilidad de la unión de dos conjuntos no disjuntos, calculemosla.

Aplicando la propiedad Asociativa de conjuntos tenemos

$$p(A \cup B \cup C) = p(A \cup (B \cup C))$$

Utilizando la expresión 3.3 tenemos:

$$p(A \cup (B \cup C)) = p(A) + p(B \cup C) - p(A \cap (B \cup C))$$

aplicando la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión de sucesos resulta

$$p(A \cup (B \cup C)) = p(A) + p(B \cup C) - p((A \cap B) \cup (A \cap C)) \quad (3.5)$$

bastará, utilizando la fórmula 3.3, desarrollar las expresiones:  $p(B \cup C)$  y  $p((A \cap B) \cup (A \cap C))$

$$\begin{aligned} p(B \cup C) &= p(B) + p(C) - p(B \cap C) \\ p((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Sustituimos ambas expresiones en 3.5 y obtenemos finalmente:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) + p(A \cap B \cap C) \quad (3.6)$$

Por tanto, basándonos en esta última expresión tenemos:

$$p(A \cup B \cup C) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} - \frac{2}{8} - \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = 1$$

como cabía esperar puesto que  $A \cup B \cup C = \Omega$ .

**Ejercicio 6** En una urna hay tres bolas blancas, dos rojas y una negra. Construya el espacio muestral del experimento “extraer una bola”, y calcule la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

**Solución.-**

El espacio muestral sería  $\Omega = \{B, N, R\}$  donde cada uno de los sucesos elementales corresponden a sacar una bola blanca, una bola roja y una bola negra. Utilizando la regla de Laplace:

$$p(B) = \frac{3}{6} \quad p(R) = \frac{2}{6} \quad p(N) = \frac{1}{6}$$

**Ejercicio 7** Calcular la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar 4 veces un dado.

**Solución.-**

Sea  $A$  el suceso “obtener al menos un seis al lanzar 4 veces un dado”, se verifica que:  
 $p(A) = 1 - P(A')$ , siendo  $A'$  el suceso contrario de  $A$ , es decir,  $A'$  representaría “no sacar ningún seis en los cuatro lanzamientos”. Por tanto:

$$p(A) = 1 - p(A')$$

siendo

$$\begin{aligned} p(A') &= p\{\text{no salir 6 en los cuatro lanzamientos}\} \\ &= p(\{\text{no salir 6 en 1}^\circ \text{ lan}\} \cap \{\text{no salir 6 en 2}^\circ \text{ lan}\} \cap \{\text{no salir 6 en 3}^\circ \text{ lan}\} \cap \{\text{no salir 6 en 4}^\circ \text{ lan}\}) \end{aligned}$$

al ser independientes entre sí los distintos lanzamientos del dado, la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades,

$$p(A') = p(\{\text{no salir 6 en 1}^\circ \text{ lan}\}) \cdot p(\{\text{no salir 6 en 2}^\circ \text{ lan}\}) \cdot p(\{\text{no salir 6 en 3}^\circ \text{ lan}\}) \cdot p(\{\text{no salir 6 en 4}^\circ \text{ lan}\})$$

$$p(A') = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Por tanto, la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar cuatro veces un dado sería:  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

**Ejercicio 8** Dados dos sucesos  $A$  y  $B$ , tales que  $p(A) = 0.6$ ,  $p(A \cap B) = 0.3$  y  $p(A' \cap B') = 0.2$ ,

1. Calcula la probabilidad de que ocurra  $B$ .
2. ¿Son  $A$  y  $B$  independientes?

**Solución.-**

1. Utilizando la expresión  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ , tenemos que :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(A \cup B) - p(A)$$

utilizando la probabilidad del suceso contrario de  $A \cup B$ , resulta:

$$p(B) = p(A \cap B) + 1 - p((A \cup B)') - p(A)$$

y aplicando las leyes de Morgan :

$$p(B) = p(A \cap B) + 1 - p(A' \cap B') - p(A)$$

resultando

$$p(B) = 0.3 + 1 - 0.2 - 0.6 = 0.5$$

2. Para comprobar si  $A$  y  $B$  son independientes bastará verificar la igualdad:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= 0.3 \\ p(A) \cdot p(B) &= 0.6 \cdot 0.5 = 0.3 \end{aligned}$$

Concluimos diciendo que los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

**Ejercicio 9** *Un comerciante recibe mensualmente artículos de dos empresas distribuidoras  $A$  y  $B$ , de acuerdo con la siguiente tabla:*

	Defectuoso	No defectuoso
$A$	20	130
$B$	10	110

*Si elegimos un artículo al azar, obténgase:*

1. La probabilidad de que dicho artículo provenga de la empresa  $A$ .
2. La probabilidad de que sea defectuoso.
3. La probabilidad de que resulte defectuoso y sea de la empresa  $B$ .
4. La probabilidad de ser defectuoso si sabemos que es de la empresa  $B$ .
5. La probabilidad de ser de  $A$  supuesto que es defectuoso.
6. La probabilidad de ser de  $A$  o bien ser de  $B$ .
7. La probabilidad de ser de  $B$  o ser no defectuoso.

### Solución.-

Describamos la tabla de contingencia con sus correspondientes distribuciones marginales:

	Def.	No def.	TOTAL
$A$	20	130	150
$B$	10	110	120
TOTAL	30	240	270

y definamos los siguientes sucesos:

- $E$  : Elegir artículo no defectuoso  
 $F$  : Elegir artículo defectuoso  
 $A$  : Artículo de la empresa  $A$   
 $B$  : Artículo de la empresa  $B$

1. Utilizando la Regla de Laplace

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} \\ p(A) &= \frac{150}{270} \end{aligned} \tag{3.7}$$

2.

$$p(F) = \frac{30}{270}$$

3.

$$p(F \cap B) = \frac{10}{270}$$

4.

$$p(F/B) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{10}{270}}{\frac{120}{270}} = \frac{10}{120}$$

Esta probabilidad condicionada podría haberse calculado directamente a partir de la tabla de contingencia con el siguiente razonamiento: Si sabemos que el artículo es de B, habrá como máximo 120 casos posibles, por tanto únicamente podremos considerar como casos favorables los 10 elementos defectuosos que envía la empresa B.

5. Al igual que en el apartado anterior,

$$p(A/F) = \frac{20}{30}$$

6. Trivialmente la probabilidad es 1, puesto que cualquier artículo es de A o bien de B

7. Podremos realizar este cálculo de dos formas:

$$(a) \quad p(B \cup E) = \frac{\text{Casos Fav.}}{\text{Casos Pos.}} = \frac{120+130}{270} = \frac{250}{270}$$

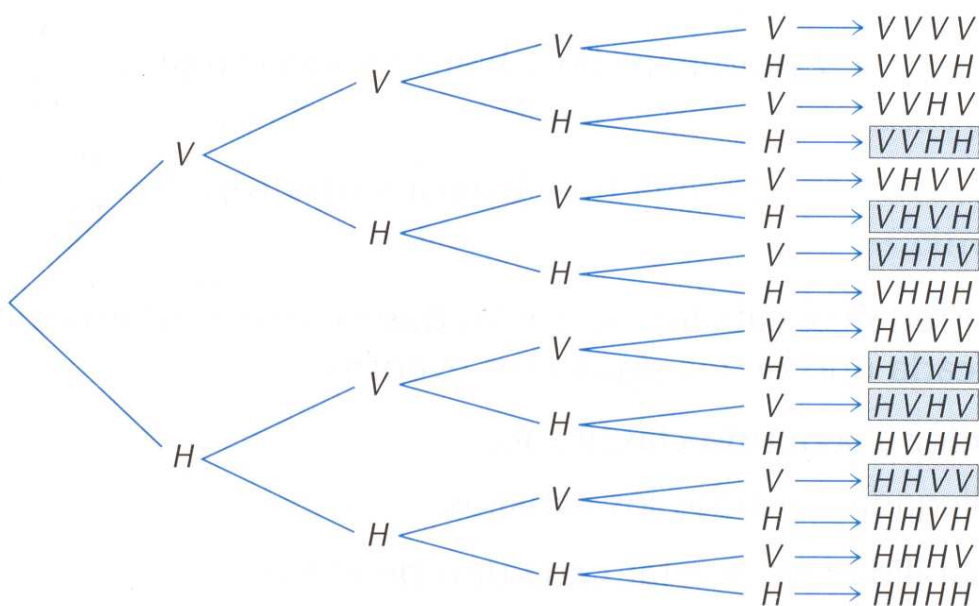
$$(b) \quad p(B \cup E) = p(B) + p(E) - p(B \cap E) = \frac{120}{270} + \frac{240}{270} - \frac{110}{270} = \frac{250}{270}$$

**Ejercicio 10** En una familia de cuatro hermanos parece más probable que haya tres hermanos del mismo sexo a que haya dos varones y dos hembras, pero ¿realmente es así?. Responda a esta cuestión.

### Solución.-

Para resolver el problema podríamos dibujar un diagrama de árbol o bien representar un diagrama cartesiano.

### Diagrama de Árbol





**Diagrama Cartesiano**

	<i>VV</i>	<i>HV</i>	<i>VH</i>	<i>HH</i>
<i>VV</i>	VVVV	VVHV	VVVH	<b>VVHH</b>
<i>HV</i>	HVVV	<b>HVHV</b>	<b>HVVH</b>	HVHH
<i>VH</i>	VHVV	<b>VHHV</b>	<b>VHVV</b>	VHHH
<i>HH</i>	<b>HHVV</b>	HHHV	HHVH	HHHH

La probabilidad de que haya dos varones y dos hembras en una familia de cuatro hermanos sería:  $\frac{6}{16}$  mientras que la probabilidad de que haya tres individuos del mismo sexo sería:  $\frac{8}{16}$ . Por tanto concluiremos diciendo que la afirmación es correcta.

**Ejercicio 11** (*MODELOS DE URNAS*) Consideremos una urna  $U$  que contiene  $n$  bolas y de la cual se realizan  $m$  extracciones. Poner un ejemplo práctico en cada una de estas situaciones y obtener el cardinal de  $\Omega$ .

1. Sin reemplazamiento, es decir, una vez que se extrae una bola de la urna, ésta se queda fuera de la misma.
  - (a) Muestra ordenada, importará el orden de extracción de las bolas.
  - (b) Muestra no ordenada, no importará el orden de extracción de las bolas.
2. Con reemplazamiento, es decir, una vez que se extrae una bola de la urna, ésta se devuelve a la urna. En cada extracción siempre habrá  $n$  bolas.
  - (a) Muestra ordenada.
  - (b) Muestra no ordenada.

**Solución.-**

- 1.a.** Realizamos  $m$  extracciones sin reemplazamiento teniendo presente que importa el orden de extracción de las bolas. En este caso:

$$\text{Card}(\Omega) = V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (3.8)$$

**Ejemplo 1** Se pretende conocer el número total de podiums que pueden darse en una carrera de 8 caballos.

**Solución.-**

Nuestra urna ficticia estará formada por 8 bolas numeradas, una bola por cada caballo, si realizamos 3 extracciones sin reemplazamiento tendremos un posible podium de la carrera.

El número total de casos vendrá dado por:

$$\text{Card}(\Omega) = V_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 336 \text{ podiums posibles.}$$

Por tanto la probabilidad de que acertásemos los tres primeros puestos en una carrera de 8 caballos sería:  $\frac{1}{336}$

- 1.b.** Si no importase el orden de extracción de las bolas el número de casos posibles vendrá dado por la combinación de  $n$  elementos tomados en grupos de  $m$ , es decir:

$$Card(\Omega) = C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad (3.9)$$

**Ejemplo 2** Calcular el número de posibles resultados que se pueden generar en el sorteo de la lotería primitiva.

**Solución.-**

Como todos sabemos la lotería primitiva, es un juego de azar consistente en acertar los 6 números extraídos al azar de una urna con 49 bolas numeradas del 1 al 49, dicha extracción se realiza sin reemplazamiento y obviamente no importa el orden de extracción.

El número de casos vendrá dado por las distintas formas en que podamos combinar estos 49 números en grupos de 6.

$$Card(\Omega) = C_{49,6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = 13\,983\,816 \text{ casos posibles}$$

Si realizásemos una apuesta en este juego de azar, acertaríamos con una probabilidad de  $\frac{1}{13\,983\,816}$

- 2.a.** En las extracciones con reemplazamiento es importante tener en cuenta que se pueden repetir las bolas o elementos que extremos de la urna; por tanto, sí tiene importancia el orden, y el cardinal de  $\Omega$  vendrá dado por:

$$Card(\Omega) = VR_{n,m} = n^m \quad (3.10)$$

**Ejemplo 3** Calcular todos los posibles resultados en una quiniela de fútbol.

**Solución.-**

En este caso tendremos una urna con tres bolas  $U = \{1, X, 2\}$ , y realizaremos 15 extracciones con reemplazamiento, por supuesto consideraremos la muestra ordenada, ya que no sería lo mismo el suceso elemental  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, X)$  que  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, X, 2)$ . Por tanto:

$$Card(\Omega) = VR_{3,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$$

Si realizamos una apuesta, la probabilidad de acertar los quince resultados de la quiniela de la semana sería:  $\frac{1}{14\,348\,907}$ .

- 2.b.** En este caso, puesto que se pueden repetir los elementos y no importa el orden de extracción, tendremos que:

$$Card(\Omega) = CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m} \quad (3.11)$$

**Ejemplo 4** Calcular el número de sucesos elementales en el experimento aleatorio “elegir al azar una pieza del dominó”.

**Solución.-**

En este caso tendremos una urna con siete bolas numeradas  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , el suceso elemental resultante al realizar dos extracciones con reemplazamiento y sin importar el orden de la extracción sería una pieza de dominó. Por tanto:

$$Card(\Omega) = CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = 28 \text{ casos posibles}$$

que como todos sabemos coincide con el número de piezas de un juego de dominó.

**Ejercicio 12** De un bombo con 10 bolas numeradas del 0 al 9 se realizan 4 extracciones con reposición, formando un número de 4 dígitos (que puede comenzar por cero).

1. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número con cuatro cifras repetidas?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número con tres cifras repetidas y una distinta?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea capicúa?

### Solución.-

1. En virtud del ejercicio anterior y a partir de la expresión 3.10, tenemos que:

$$Card(\Omega) = VR_{10,4} = 10^4 = 10000$$

Los casos favorables de este suceso serán 10, es decir:

$$(0000), (1111), (2222), \dots, (9999)$$

Por tanto, la probabilidad de que salga un número con cuatro cifras iguales será:

$$p = \frac{\text{Casos Fav.}}{\text{Casos Pos.}} = \frac{10}{10000} = 0.001$$

2. Para calcular los casos favorables tendremos en cuenta que la cifra que se repite tres veces puede ser cualquiera de las diez, y una vez elegida ésta se pueden seleccionar otras nueve para combinarlas entre las tres cifras iguales (habiendo 4 posibles posiciones), por ejemplo:

$$(a, a, a, \_), (a, a, \_, a), (a, \_, a, a), (\_, a, a, a)$$

por ello el número de casos favorables será:  $10 \cdot 9 \cdot 4$ . Siendo la probabilidad pedida:

$$p = \frac{\text{Casos Fav.}}{\text{Casos Pos.}} = \frac{360}{10000}$$

3. Para calcular los casos favorables, tendremos en cuenta que la primera y cuarta cifra serán siempre iguales y las dos restantes serán iguales entre sí, siendo la situación similar a ésta:

$$(a, b, b, a)$$

por tanto el número de casos favorables será:  $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$ . La probabilidad de obtener un número capicúa es:

$$p = \frac{100}{10000} = 0.01$$

**Ejercicio 13** Calcular la probabilidad de extraer tres figuras en una baraja de cartas española

### Solución.-

**CASO1.-** Consideremos las extracciones con reemplazamiento.

En tal caso sean los sucesos:

$A_i$  : Obtener figura en la  $i$ -ésima extracción

al ser las extracciones con reemplazamiento, éstas son independientes unas de otras, por tanto:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \left(\frac{12}{40}\right)^3$$

**CASO2.-** Consideremos las extracciones sin reemplazamiento.

En tal caso las extracciones no son independientes unas de otras, utilizando uno de los criterios de la probabilidad de la intersección en el tema de probabilidad condicionada, tenemos:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} \cdot \frac{10}{38}$$

**Ejercicio 14** *En el juego del mus, que se juega con baraja española, hay ocho cartas que valen como reyes (los cuatro tres y los cuatro reyes) y otras ocho cartas que valen como unos (los cuatro doses y los cuatro ases). Calcule la probabilidad de que al repartir 4 cartas:*

1. *Se tenga plena certeza de ganar o empatar un órdago a la grande, es decir, recibir cuatro reyes.*
2. *Obtener tres Reyes y un uno. (Tener treinta y una)*

### Solución.-

El número de casos posibles al extraer 4 cartas de una baraja de 40 serían:  $V_{40,4} = 2193360$

1. Los casos favorables vendrían dados por  $V_{8,4} = 1680$ , habría 1680 formas de repartir esas 8 cartas en grupos de 4. La probabilidad pedida sería:

$$p = \frac{V_{8,4}}{V_{40,4}} = 0.0008$$

2. Teniendo en cuenta que al repartir nos podemos encontrar con alguna de estas situaciones:

$$(R, R, R, 1), (R, R, 1, R), (R, 1, R, R), (1, R, R, R)$$

el número de casos posibles sería:  $4 \cdot V_{8,3} \cdot V_{8,1}$ .

Cuatro son las disposiciones posibles entre reyes y unos, a su vez los reyes pueden ser repartidos de  $V_{8,3}$  formas y los unos de  $V_{8,1}$  formas. Por tanto la probabilidad pedida es:

$$\frac{4 \cdot V_{8,3} \cdot V_{8,1}}{V_{40,4}} = \frac{10752}{2193360}$$

**Ejercicio 15** *¿Cuál es la probabilidad de elegir un número al azar del intervalo  $[0, 10]$  menor que 6?*

**Solución.-**

Para calcular esta probabilidad nos encontramos con un pequeño problema, el espacio muestral es continuo, por ello utilizaremos la regla de Laplace con matices, es decir: Consideraremos como casos posibles cualquier número del segmento  $[0,10]$ , osea la longitud del segmento, y como caso favorable cualquier número del segmento  $[0,6]$  es decir la longitud de dicho segmento. Por tanto:

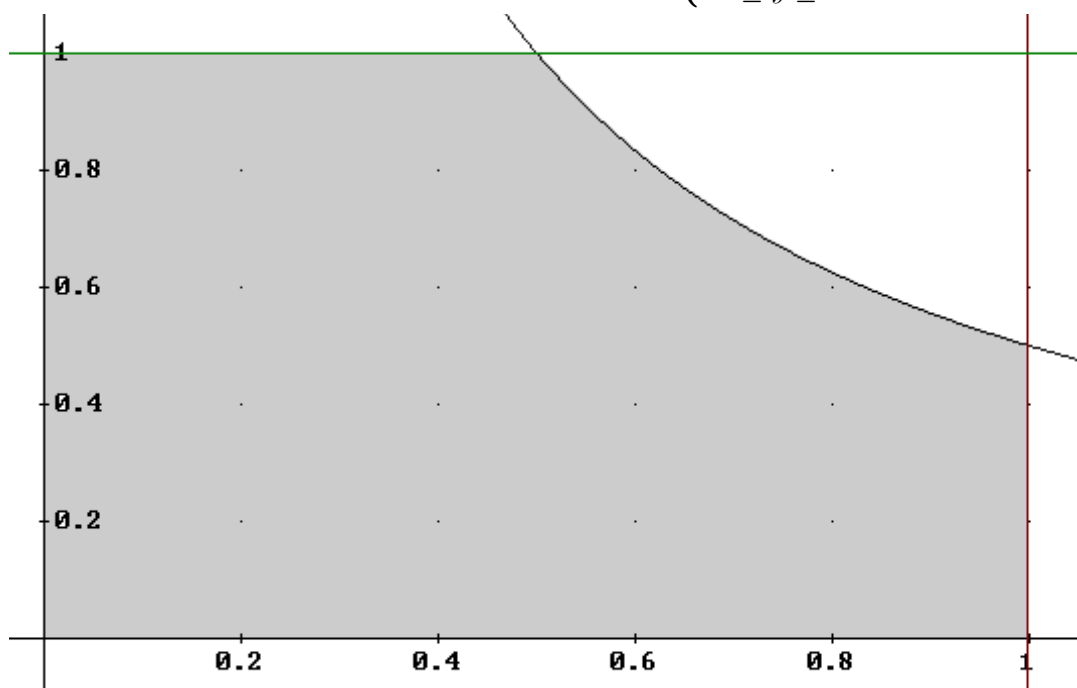
$$p(\text{elegir un número al azar del intervalo } [0,10] \text{ menor que } 6) = \frac{\text{Casos Fav.}}{\text{Casos Pos.}} = \frac{l([0,6])}{l([0,10])} = \frac{6}{10}$$

**Ejercicio 16** Si elegimos al azar dos números reales comprendidos entre 0 y 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea menor que  $\frac{1}{2}$ ?

**Solución.-**

El planteamiento es similar al del ejercicio anterior, pero en dos dimensiones. Es decir los casos posibles vendrán dados por el área del rectángulo  $[0,1] \times [0,1]$ , ya que en dicho rectángulo se encuentran todas las elecciones posibles de pares de puntos comprendidos entre 0 y 1.

El conjunto de puntos de dicho rectángulo que verifican que  $\begin{cases} x \cdot y \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$  son:

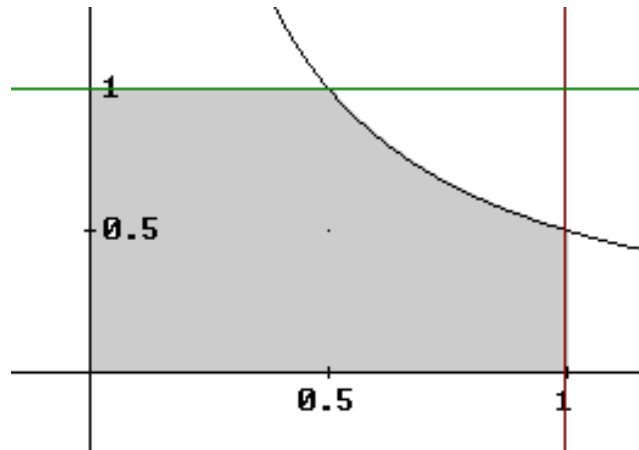


Cuya área representará los casos favorables.

Por tanto la probabilidad de que el producto de dos números comprendidos entre 0 y 1 sea menor que  $1/2$  será:

$$p = \frac{\text{Casos Fav.}}{\text{Casos Pos.}} = \frac{\text{Área coloreada}}{\text{Área}([0,1] \times [0,1])}$$

Observando los puntos de corte de las curvas:



tenemos:

$$p = \frac{\int_0^{0.5} dx + \int_{0.5}^1 \frac{1}{2x} dx}{1} = 0.84657$$

**Ejercicio 17** Sean dos urnas  $U_1$  y  $U_2$ , la primera contiene tres bolas blancas, dos rojas y una negra y la segunda dos bolas blancas y tres negras. Consideremos el experimento aleatorio siguiente. "Lanzamos una moneda, si sale cara extraemos una bola de  $U_1$  y si sale cruz lo hacemos de  $U_2$ "

1. Calcular la probabilidad de extraer una bola blanca.
2. Supuesto que se ha extraído una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna  $U_2$ ?

### Solución.-

1. Estamos ante el ejemplo típico de aplicación del teorema de la probabilidad total, definamos los siguientes sucesos:

$C$  : Salir cara al lanzar la moneda.  
 $X$  : Salir cruz al lanzar la moneda.  
 $B$  : Extraer una bola blanca de la urna.  
 $N$  : Extraer una bola negra de la urna.

Entonces, aplicando el Teorema de la Probabilidad Total,

$$p(B) = p(C) \cdot p(B/C) + p(X) \cdot p(B/X)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 p(C) &= p(X) = \frac{1}{2} \\
 p(B/C) &= p(\text{Extraer Bola blanca de } U_1) = \frac{3}{6} \\
 p(B/X) &= p(\text{Extraer Bola blanca de } U_2) = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Resultando:

$$p(B) = \frac{1}{2} * \frac{3}{6} + \frac{1}{2} * \frac{2}{5} = \frac{9}{20}$$

2. En este apartado, se nos pide el cálculo de una probabilidad a priori, a partir del conocimiento de una probabilidad a posteriori; es decir, supuesto conocido el hecho de que sale bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la extracción se haya realizado de la urna  $U_2$ ?

Apliquemos el Teorema de Bayes:

$$p(B/X) = \frac{p(X) \cdot p(B/X)}{p(C) \cdot p(B/C) + p(X) \cdot p(B/X)} = \frac{\frac{1}{2} * \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} * \frac{3}{6} + \frac{1}{2} * \frac{2}{5}} = \frac{4}{9}$$

**Ejercicio 18** *El 35 % de los estudiantes de un centro docente practican "Zapping". El 25 % de los que practican "Zapping" estudia Matemáticas, así como el 70 % de los que no practican "Zapping". Calcule la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante de ese centro:*

1. *Estudie Matemáticas.*
2. *Practique "Zapping", sabiendo que no estudia Matemáticas.*

### Solución.-

1. Consideremos los siguientes sucesos:

$Z$  : Elegir un estudiante que practica "Zapping"  
 $M$  : Elegir un estudiante que estudie Matemáticas.

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total tenemos que:

$$p(M) = p(Z) \cdot p(M/Z) + p(Z') \cdot p(M/Z')$$

donde

$$\begin{aligned} p(Z) &= 0.35 \\ p(Z') &= 1 - p(Z) = 0.65 \\ p(M/Z) &= 0.25 \\ p(M/Z') &= 0.7 \end{aligned}$$

resultando

$$p(M) = 0.35 * 0.25 + 0.65 * 0.7 = 0.5425$$

2. Para calcular  $p(Z/M')$ , actuaremos del siguiente modo:

$$p(Z/M') = \frac{p(Z \cap M')}{p(M')} = \frac{p(Z) \cdot p(M'/Z)}{p(M')} = \frac{p(Z) \cdot (1 - p(M/Z))}{1 - p(M)}$$

Sustituyendo,

$$p(Z/M') = \frac{p(Z) \cdot (1 - p(M/Z))}{1 - p(M)} = \frac{0.35 * (1 - 0.25)}{(1 - 0.54)} = 0.57065$$

**Ejercicio 19** *En una oficina trabajan 4 secretarias que archivan documentos. Cada una de ellas archiva el 40%, 10%, 30% y 20% de los documentos. La probabilidad que cada una de ellas tiene de equivocarse es 0.01 , 0.04 , 0.6 , 0.10 respectivamente.*

1. ¿Cual es la probabilidad de que un documento esté mal archivado?
2. Si se ha encontrado un documento mal archivado, ¿cuál es la probabilidad de que sea debido a la tercera secretaria?

**Solución.-**

Consideremos los siguientes sucesos:

$E_i$  : Documento archivado por la i-ésima secretaria .  
 $M$  : documento mal archivado.

1. Para calcular la probabilidad de que un documento esté mal archivado utilizaremos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p(M) = p(E_1) \cdot p(M/E_1) + p(E_2) \cdot p(M/E_2) + p(E_3) \cdot p(M/E_3) + p(E_4) \cdot p(M/E_4)$$

siendo

$$p(M) = 0.4 * 0.01 + 0.1 * 0.04 + 0.3 * 0.6 + 0.2 * 0.1 = 0.208$$

2. Nuevamente estamos ante una situación en la que a partir del conocimiento de un suceso a posteriori, debemos calcular una probabilidad a priori. Apliquemos el Teorema de Bayes:

$$p(E_3/M) = \frac{p(E_3) \cdot p(M/E_3)}{p(E_1) \cdot p(M/E_1) + p(E_2) \cdot p(M/E_2) + p(E_3) \cdot p(M/E_3) + p(E_4) \cdot p(M/E_4)}$$

$$p(E_3/M) = \frac{0.3 * 0.6}{0.208} = 0.8653$$



### 3.7.2 EJERCICIOS PROPUESTOS

**Ejercicio 20** *El gran concierto de "Division Triunfo" (Propuesto en la XIX Olimpiada Matemática Thales 2003)*

Los cantantes David Decimal y Javi Ca Entero van a sortear quién actuará en primer lugar en este concierto. David cantará su conocida "Suma María" y Javi nos ofrecerá su extraordinario éxito "Y cuanto más multiplico..." El sorteo se realizará de la siguiente forma:

David tirará a la ruleta. ¿Qué estás pensando?, ¿que va a coger una ruleta con las dos manos y a lanzarla con todas sus fuerzas? No seas bestia, hará girar la ruleta y dejará caer sobre ella una bolita.

Javi lanzará un dado. Después con una calculadora (musical claro) dividirán el resultado de la ruleta por el obtenido al lanzar el dado.

Haciendo honor a sus apellidos, David apuesta a que el resultado saldrá decimal mientras que Javi apuesta a que no tendrá decimales. ¿Quién crees que tiene más posibilidades de acertar y conseguir así cantar en primer lugar?

*Aclaración: Es del dominio público que las ruletas tienen sus casillas numeradas del 0 al 36 y que los resultados que pueden salir en el dado son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. El dominio público también sabe que conviene razonar al máximo todos los problemas y que incluso se debe decir cuántas posibilidades tiene cada uno.*

**Ejercicio 21** *En una partida de poker a una sola mano (sin descartarse) con una baraja española sin comodines, calcula la probabilidad de:*

1. *Obtener una pareja.*
2. *Obtener doble pareja.*
3. *Obtener Full.*
4. *Obtener Poker.*

**Ejercicio 22** *Un examen contiene 15 preguntas tipo test con cuatro posibles opciones de respuesta, habiendo una única respuesta correcta. El examen se aprueba contestando correctamente al menos 8 preguntas. Si un alumno responde al azar y de modo independiente las preguntas entre sí. Calcular la probabilidad de aprobar.*

**Ejercicio 23** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A) = \frac{1}{2}$ ,  $p(B) = \frac{1}{3}$  y  $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Calcule:

- 1.

$$p(A^c \cap B) \text{ y } p(A^c \cap B^c)$$

**Ejercicio 24** *Supongamos que tenemos tres urnas:*

$$U_1 = \{3B, 3N\}$$

$$U_2 = \{4B, 5N\}$$

$$U_3 = \{2B, 2N\}$$

1. *Si extraemos una única bola de cada urna, calcular la probabilidad de extraer 2 bolas negras y una blanca.*
2. *Supongamos que elegimos una urna al azar y sacamos una bola blanca. Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea  $U_2$ .*
3. *Si extraemos dos bolas sin reemplazamiento de la primera urna y una de las restantes. Calcular la probabilidad de obtener 4 bolas blancas.*

**Ejercicio 25** Tenemos 15 lámparas de las cuales 7 son defectuosas. Se escogen al azar cinco, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 1 sea defectuosa ?

**Ejercicio 26** Tenemos dos urnas, la urna  $U_1$  contiene 3 bolas rojas y 2 blancas, y la urna  $U_2$  2 rojas y 5 blancas. Se selecciona al azar una urna; se extrae una bola y se coloca en la otra urna, por último se saca una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

**Ejercicio 27** Se escoge al azar un punto interior a un triángulo equilátero de lado 3. Hallar la probabilidad de que su distancia a los vértices sea mayor que 1.

**Ejercicio 28** Un empleado de correos tiene cuatro sellos de precios distintos para cuatro cartas también distintas. Si asigna al azar un sello a cada carta.

1. Encontrar la probabilidad de que las cuatro cartas tuviesen cada una su sello correspondiente.
2. Encontrar la probabilidad de que al menos una de las cartas tenga el sello que le corresponda.
3. ¿Cuál sería la probabilidad de que ninguna carta llevase el sello correcto?

**Ejercicio 29** Un consumidor clasificó cierto tipo de producto según el proveedor ( $A, B, C, D$ ) y según el número de defectos que encontró y construyó la siguiente tabla de proporciones:

Proveedor/defectos	Ninguno	Uno	Más de uno
$A$	0.08	0.10	0.04
$B$	0.04	0.10	0.04
$C$	0.04	0.20	0.09
$D$	0.02	0.15	0.10

1. Si se selecciona al azar un producto del proveedor  $B$ , ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ningún defecto? Y si se selecciona al azar un artículo de los que tienen un defecto, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del proveedor  $A$ ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un producto tenga un defecto?
3. Si un producto tiene más de un defecto, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al productor  $D$ ?
4. Si construimos la variable cuantitativa  $X$ , a partir de la variable defectos, asignando a Ninguno el valor 0, a Uno el valor 1 y a Más de Uno el valor 2, ¿qué proveedor es mejor en promedio?

**Ejercicio 30** La probabilidad de hacer blanco con cada una de las tres armas  $A, B$  y  $C$  con que se cuenta es: 0.1 , 0.2 y 0.3 respectivamente .Calcular la probabilidad de hacer:

1. Al menos un blanco.
2. Hacer tres blancos.

**Ejercicio 31** Supongamos que tenemos dos urnas:

$$U_1 = \{6B, 4N\}$$

$$U_2 = \{2B, 4N\}$$

1. Si extraemos una única bola de cada urna , calcular la probabilidad de extraer 2 bolas blancas.
2. Supongamos que elegimos una urna al azar y sacamos una bola negra. Calcular la probabilidad de que la urna elegida sea  $U_2$ .

3. De la urna  $U_1$  se seleccionan al azar dos bolas, sin reemplazamiento.

(a) Calcular la probabilidad de que ninguna sea negra.

(b) Calcular la probabilidad de que la segunda bola sea blanca.

**Ejercicio 32** Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A) = \frac{1}{2}$ ,  $p(B) = \frac{1}{3}$  y  $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Calcule:

1.  $p(A/B)$

2.  $p(A \cup B)$

3.  $p(A^c \cap B)$

4.  $p(A^c \cap B^c)$

**Ejercicio 33** Dos urnas  $A$  y  $B$ , que contienen bolas de colores, tienen la siguiente composición:

$A$  : 5 blancas, 3 negras y 2 rojas.

$B$  : 4 blancas y 6 negras

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra  $A$  y las otras dos con la letra  $B$ . Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

3. La bola extraída ha resultado ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna  $B$ ?

**Ejercicio 34** En un cineclub hay 80 películas; 60 son de “acción” y 20 de “terror”. Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

**Ejercicio 35** Un temario está compuesto por 100 temas. El examen consiste en la exposición al azar de 2 temas. Para aprobar necesita responder correctamente los dos temas. ¿Cuál es el número mínimo de temas que ha de estudiar el opositor para que la probabilidad de aprobar sea superior que la probabilidad de suspender?

**Ejercicio 36** Calcula la probabilidad de que la suma de dos números elegidos aleatoriamente del intervalo  $(0, L)$  exceda de  $L$ , y que su producto sea menor o igual que  $\frac{L^2}{4}$ .

**Ejercicio 37** Una población de 20 animales insectívoros se introduce en una zona donde el 14% de los insectos que les sirven de alimentos son venenosos. Cada animal devora al día 5 insectos.

1. Calcular la probabilidad de que un individuo sobreviva una semana.

2. ¿Cuál sería la probabilidad de que no sobrevivan más de 3 individuos?

**Ejercicio 38** Se extraen al azar tres cartas, con reemplazamiento, de una baraja de 40 cartas.

1. Calcular la probabilidad de haber extraído únicamente dos ases.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo palo?

**Ejercicio 39** Dos barcos llegan a un puerto en el mismo día, siendo los instantes de llegada igualmente probables a lo largo de las 24 horas del día, e independientes el uno del otro. Determina la probabilidad de que el tiempo de llegada del primer barco (contando desde las 0 horas de ese día) sea superior al tiempo que transcurre entre la llegada de ambos barcos.