Universidad de Cádiz

Escuela Superior de Ingeniería

TEMA VII: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática.

Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Definición

Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son ***semejantes*** *cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Definición

Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son ***semejantes*** *cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Nuestro objetivo ahora es, dada una matriz cuadrada A encontrar, si es posible, una matriz diagonal, D que sea semejante a la matriz A. Es lo que se conoce como el **problema de la diagonalización**

Definición

Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son ***semejantes*** *cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Definición

Se dice que una matriz A, matriz cuadrada de orden n es ***diagonalizable*** *si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, si existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que*

$$\boxed{A = P^{-1}DP}$$

Toda matriz diagonal, D, es diagonalizable basta con considerar $P = I$.

Definición

Se dice que una matriz A, matriz cuadrada de orden n es ***diagonalizable*** *si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, si existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que*

$$\boxed{A = P^{-1}DP}$$

Toda matriz diagonal, D, es diagonalizable basta con considerar $P = I$.

Definición

Se dice que un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ***es diagonalizable*** *si existe una base B_a de $\mathbb{R}^n$ respecto a la cual al matriz asociada a f , $\mathcal{M}(f; B_a; B_a)$, es una matriz diagonal.*

La preguntas que vamos a resolver en este tema son las siguentes:

- ¿Como saber si una matriz dada A es diagonalizable?
- ¿Como calcular las matrices P y D?

Definición de autovalor y autovector

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo sobe el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.:

1. *Se dice que el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un* ***valor propio o autovalor del endomorfismo*** *f si existe un vector (matiz columna) no nulo, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}}$$

2. *Dado un autovalor se dice que el vector $\vec{v}$ no nulo es un* ***autovector o vector propio del endomorfismo*** *f cuando existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}}$$

Definición de autovalor y autovector

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo sobe el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.:

1. *Se dice que el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio o autovalor del endomorfismo** f si existe un vector (matiz columna) no nulo, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}}$$

2. *Dado un autovalor se dice que el vector $\vec{v}$ no nulo es un **autovector o vector propio del endomorfismo** f cuando existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\boxed{f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}}$$

Si A es la matriz asociada a f respecto de alguna base B de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{v}$ es un autovector de f, también se dice que $\vec{v}$ es un autovector de A. Lo mismo ocurre con los autovectores.

Definición de autovalor y autovector

Ejemplo

Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ le hace corresponder el vector $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ dado por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Entonces 5 es un autovalor de f y ademas $\vec{v} = (1, -1)$ es un autovector asociado al autovalor 5, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

esto es $f(1, -1) = 5(1, -1)$

Propiedades de los autovalores y autovectores

Propiedades

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo:

- A todo autovector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, del endomorfismo f le corresponde un único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ que se llama el **autovalor asociado** a $\vec{v}$.
- El conjunto formado por todos los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se representa por $V(\lambda)$ y es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, que se llama el **subespacio propio asociado al autovalor λ.**

$$\boxed{V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}}$$

Definición de autovalor y autovector

Propiedades

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo:

- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ son autovalores del endomorfismo f distintos entre si y tomamos los autovectores

$$\vec{v}_1 \in V(\lambda_1), \vec{v}_2 \in V(\lambda_2), \ldots, \vec{v}_p \in V(\lambda_p)$$

  se verifica que los vectores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p)$ son linealmente independientes. Es decir, si juntamos autovectores asociados a autovalores distintos, obtenemos un conjunto de autovectores linealmente independientes.

Cálculo de autovalores: polinomio característico

Veamos en este apartado como calcular los autovalores y autovectores de un endomorfismo, partiendo de la matriz A asociada al endomorfismo:

Cálculo de Autovalores

Observar que si λ es un autovalor del endomorfismo f ocurre que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Si llamamos X a la matriz columna de las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base dada del endomorfismo y A a la matriz del endomorfismo en dicha base entonces podemos escribir que

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX = \lambda IX \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

Cálculo de autovalores: polinomio característico

Cálculo de Autovalores

Observar que si λ es un autovalor del endomorfismo f ocurre que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Si llamamos X a la matriz columna de las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base dada del endomorfismo y A a la matriz del endomorfismo en dicha base entonces podemos escribir que

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX = \lambda IX \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

por tanto λ es un autovalor si y sólo si es solución del sistema lineal homogéneo

$$\boxed{(A - \lambda I)X = 0}$$

distinta de la trivial ($X \neq 0$).

Cálculo de autovalores: polinomio característico

Cálculo de Autovalores

Observar que si λ es un autovalor del endomorfismo f ocurre que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Si llamamos X a la matriz columna de las coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base dada del endomorfismo y A a la matriz del endomorfismo en dicha base entonces podemos escribir que

$$AX = \lambda X \Rightarrow AX = \lambda IX \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

por tanto λ es un autovalor si y sólo si es solución del sistema lineal homogéneo

$$\boxed{(A - \lambda I)X = 0}$$

distinta de la trivial $(X \neq 0)$. Esto ocurre cuando el sistema de n ecuaciones con n incógnitas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es compatible indeterminado por tanto, según el teorema de Rouche-Frobenius tenemos

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

Cálculo de autovalores: polinomio característico

Definición (Polinomio Característico)

A la expresión

$$\boxed{p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I|}$$

se le llama ***polinomio o ecuación característico*** *de la matriz A. Los autovalores de f serán precisamente las raíces de dicho polinomio. En particular se tiene que el número máximo de autovalores de A es el orden de la matriz n*

Cálculo de autovalores: polinomio característico

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que tiene como matriz asociada respecto a la base canónica a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+1] = (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

Por tanto los autovalores de f serán: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Multiplicidad algebraica

Multiplicidad algebraica

Si λ_i es una raíz múltiple de la ecuación característica, con orden de multiplicidad k_i, se dice que λ_i es autovalor múltiple de f o de la matriz A y que su **multiplicidad algebraica,** m_λ es k_i. En el caso de que $k_i = 1$ diremos que el autovalor λ_i es simple.

Multiplicidad algebraica

Multiplicidad algebraica

Si λ_i es una raíz múltiple de la ecuación característica, con orden de multiplicidad k_i, se dice que λ_i es autovalor múltiple de f o de la matriz A y que su **multiplicidad algebraica,** m_λ es k_i. En el caso de que $k_i = 1$ diremos que el autovalor λ_i es simple.

Ejemplo

En el ejemplo anterior tenemos que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor simple, es decir de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 2$ es un autovalor de multiplicidad algebraica 2.

Multiplicidad algebraica

Multiplicidad algebraica

Si λ_i es una raíz múltiple de la ecuación característica, con orden de multiplicidad k_i, se dice que λ_i es autovalor múltiple de f o de la matriz A y que su **multiplicidad algebraica,** m_λ es k_i. En el caso de que $k_i = 1$ diremos que el autovalor λ_i es simple.

Teorema

Si A es una matriz cuadrada de orden n y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son sus autovalores, entonces:

1. $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$
2. $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Cálculo de autovectores

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la matriz asociada al endomorfismo f en una base dada, sea λ_i es un autovalor de f, y sea

$$V(\lambda_i) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,|\, f(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v}\}$$

el subespacio vectorial asociado formado por todos los autovectores asociados al autovalor λ_i

Cálculo de autovectores

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un autovector de λ_i y sea X la matriz columna de sus coordenadas en la basa dada, entonces $f(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v}$ y

$$AX = \lambda_i X \Rightarrow AX = \lambda_i IX \Rightarrow (A - \lambda_i I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de autovectores

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un autovector de λ_i y sea X la matriz columna de sus coordenadas en la basa dada, entonces $f(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v}$ y

$$AX = \lambda_i X \Rightarrow AX = \lambda_i IX \Rightarrow (A - \lambda_i I)X = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcc} (a_{11} - \lambda)x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + & (a_{22} - \lambda)x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

que son las ecuaciones implícitas de $V(\lambda_i)$

Cálculo de autovectores

Cálculo de Autovectores

Esto significa que las coordenadas del autovector $\vec{v}$ son solución del sistema homogéneo anterior de n ecuaciones con n incógnitas. Como $|A - \lambda I| = 0$, el sistema homogéneo admite soluciones distintas de la trivial y estas soluciones describen un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ que es precisamente V_λ, es decir, el subespacio propio correspondiente al valor propio λ.

$$\boxed{V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v}\}}$$

Cálculo de autovectores

Ejemplo

En el ejemplo anterior tendremos dos subespacios propios, V_1 y V_2, vamos a calcularlos:

$$x \in V_1 \Longleftrightarrow (A - I)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 0 \\ -1 & 3-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ y de ahí que V_1 sea de la forma

$$\boxed{V_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

o lo que es lo mismo el subespacio engendrado por $\{(1, 0, 1)\}$.

Cálculo de autovectores

Ejemplo

$$x \in V_2 \Longleftrightarrow (A - 2I)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 0 \\ -1 & 3-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son $x_1 = 2x_2$, $x_3 = x_2$ y de ahí que V_2 sea de la forma

$$\boxed{V_2 = \{(2\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

o lo que es lo mismo el subespacio engendrado por $\{(2, 1, 1)\}$.

Multiplicidad geométrica

Definición (Multiplicidad geométrica)

Si λ es un autovalor de una matriz A asociada al endomorfismo f, se llama ***multiplicidad geométrica*** *de λ, denotada por d_λ, a la dimensión del subespacio V_λ, es decir, la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ.*

$$\boxed{d_\lambda = \dim(V(\lambda)) = n - rg(A - \lambda I)}$$

Multiplicidad geométrica

Definición (Multiplicidad geométrica)

Si λ es un autovalor de una matriz A asociada al endomorfismo f, se llama ***multiplicidad geométrica*** *de λ, denotada por d_λ, a la dimensión del subespacio V_λ, es decir, la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio λ.*

$$\boxed{d_\lambda = \dim(V(\lambda)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)}$$

Teorema

Puede probarse que si λ es un autovalor de una matriz A asociada al endomorfismo f, se verifica que

$$1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$$

es decir, la multiplicidad geométrica es un número comprendido entre uno y la multiplicidad algebraica.

Cálculo de autovectores

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

su polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = (2 - \lambda)^3$$

luego A tiene un único autovalor, $\lambda_1 = 2$, de multiplicidad algebraica 3. Veamos cuál es su multiplicidad geométrica es

$$d_{\lambda_1} = n - rg(A - \lambda I) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Matriz diagonalizable

Definición

Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son ***semejantes*** *cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Matriz diagonalizable

Definición

*Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son **semejantes** cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Con ello, podemos afirma que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.

Matriz diagonalizable

Definición

Diremos que dos matrices A y B de orden n, es decir, cuadradas son ***semejantes*** *cuando existe una matriz P de orden n regular, es decir, $|P| \neq 0$, tal que*

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Con ello, podemos afirma que si dos matrices son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.

Definición

Se dice que una matriz A, matriz cuadrada de orden n es ***diagonalizable*** *si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, si existen una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que*

$$\boxed{A = P^{-1}DP}$$

Matriz diagonalizable

Caractericemos las matrices diagonalizables a través de sus autovalores y autovectores

Condiciones de Diagonalización

Caractericemos las matrices diagonalizables a través de sus autovalores y autovectores

Condiciones de Diagonalización

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces dicha matriz es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones:

- El polinomio característico $|A - \lambda I| = 0$ tenga todas sus raíces reales. Por tanto si todos los autovalores de A son tienen de multiplicidad $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \ldots, m_{\lambda_p}$ entonces

$$\boxed{m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \ldots + m_{\lambda_p} = n}$$

- La multiplicidad algebraica de cada autovalor λ, m_λ, coincide con la multiplicidad geométrica, d_λ, es decir

$$\boxed{m_{\lambda_i} = d_{\lambda_i} \ \forall i \in \mathbb{R}}$$

Matriz diagonalizable

Ejemplo

Sea $A \in M_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos que:

$$p_\lambda = |A - \lambda I| = (1-\lambda)(\lambda - 2)^2$$

1. $\lambda = 1, 2 \in \mathbb{R}$, es decir, los autovalores son todos reales.
2. $d_{\lambda_1} = n - rg(A - I) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

   $d_{\lambda_2} = n - rg(A - 2I) = 3 - rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$

Entonces la matriz A no es diagonalizable.

Cálculo de P y D

Una vez establecidos los criterios de diagonalización ya estamos en condiciones de determinar P y D para que poder diagonalizar a la matriz A.

Cálculo de P y D

Una vez establecidos los criterios de diagonalización ya estamos en condiciones de determinar P y D para que poder diagonalizar a la matriz A.
Sea A una matriz cuadrada de orden n y supongamos que es diagonalizable. Esto significa que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$, $|P| \neq 0$, tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal de orden n:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de P y D

Una vez establecidos los criterios de diagonalización ya estamos en condiciones de determinar P y D para que poder diagonalizar a la matriz A.
Sea A una matriz cuadrada de orden n y supongamos que es diagonalizable.
Esto significa que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$, $|P| \neq 0$, tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal de orden n:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

Cálculo de P y D

Sea A una matriz cuadrada de orden n y supongamos que es diagonalizable. Esto significa que existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n$, $|P| \neq 0$, tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal de orden n:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando las columnas de la matriz resultante del producto del primer miembro con las del producto del segundo miembro obtenemos que:

Cálculo de P y D

$$\text{primera columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

Cálculo de P y D

$$\text{primera columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\text{segunda columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}$$

Cálculo de P y D

$$\text{primera columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\text{segunda columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}$$

$$n-\text{esima columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

Cálculo de P y D

$$n - \text{esima columna}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

A partir de aquí se deduce que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son autovalores de la matriz A y que cada una de las columnas de la matriz P, $P_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$, es un autovector asociado al autovalor λ_j para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Cálculo de P y D

A partir de aquí se deduce que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son autovalores de la matriz A y que cada una de las columnas de la matriz P, $P_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$, es un autovector asociado al autovalor λ_j para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiar si A es diagonalizable. Y si lo es determinar las matrices P y D.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Algoritmo de diagonalización

El problema de la diagonalización queda entonces estructurado de la siguiente forma:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico $p(\lambda)$.

Paso 2: Descomponiendo el polinomio se calculan sus raíces. Si alguna de ellas es compleja, la matriz no será diagonalizable en $\mathbb{R}$. Tenemos de esta forma los autovalores y sus multiplicidades algebráicas.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas de los autovalores $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplican los criterios de diagonalizabilidad. Si para algún i se tiene que $k_i \neq d_i$ entonces la matriz no es diagonalizable, y en caso contrario la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores repetidos cada uno según su multiplicidad algebraica.

Paso 5: Obtenemos unas bases de los subespacios propios V_{λ_i}, con lo que se determinan los autovectores de cada uno de los autovalores.

Paso 6: Las columnas de la matriz de paso P son las coordenadas de estos vectores propios y se cumple que $P^{-1}AP = D$.

Autovalores y autovectores de una matriz simétrica real

Ahora una vez contestadas las dos preguntas iniciales, veamos en este apartado la importancia de trabajar con matrices ortogonales y abordaremos la diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal.

Autovalores y autovectores de una matriz simétrica real

Ahora una vez contestadas las dos preguntas iniciales, veamos en este apartado la importancia de trabajar con matrices ortogonales y abordaremos la diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal.

Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica cuadrada de orden n cuyos elementos son números reales. Se verifica que:

1. Todos los autovalores de A son números reales.
2. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos autovalores distintos de A, se cumple que los subespacios propios $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$ son ortogonales, es decir, si $\mathbf{v}_1$ es un autovector cualquiera asociado al autovalor λ_1 y $\mathbf{v}_2$ es un autovector cualquiera asociado al autovalor λ_2, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son perpendiculares, por tanto, su producto escalar vale cero.

Autovalores y autovectores de una matriz simétrica real

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz cuadrada cuyos elementos sean números reales ***se dice que es ortogonal*** *cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir*

$$\boxed{P \text{ es ortogonal} \Longleftrightarrow P^{-1} = P^t}$$

Autovalores y autovectores de una matriz simétrica real

Definición (Matriz ortogonal)

Una matriz cuadrada cuyos elementos sean números reales ***se dice que es ortogonal*** *cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir*

$$\boxed{P \text{ es ortogonal} \Longleftrightarrow P^{-1} = P^t}$$

Propiedades

1. Si una matriz es ortogonal, su determinante vale 1 o -1, ya que

$$P^{-1}P = P^tP = I_n \Longrightarrow |P^tP| = |I_n| = 1 \Longrightarrow |P|^2 = 1$$

2. Los vectores columna de una matriz ortogonal P son vectores unitarios y ortogonales. Análogamente para los vectores fila.

Semejanza ortogonal

Definición (Matriz Semejante ortogonal)

Una matriz A *se dice que* ***es semejante ortogonal*** *a una matriz* B, *cuando existe una matriz ortogonal* P *tal que*

$$P^t A P = B.$$

Como $P^t = P^{-1}$, *la semejanza ortogonal se puede expresar por*

$$P^{-1} A P = B$$

Semejanza ortogonal

Definición (Matriz Semejante ortogonal)

Una matriz A se dice que ***es semejante ortogonal*** *a una matriz B, cuando existe una matriz ortogonal P tal que*

$$\mathrm{P}^t\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{B}.$$

Como $\mathrm{P}^t = \mathrm{P}^{-1}$, la semejanza ortogonal se puede expresar por

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{B}$$

Ejemplo

Las matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ son ortogonalmente semejantes ya que existe $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ tal que $\mathrm{P}^t\mathrm{A}\mathrm{P} = \mathrm{B}$.

Diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal

Sea A una matriz simétrica real de orden n, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sus autovalores con multiplicidades algebraicas $m_1, m_2, \ldots, m_j$, siendo $m_1 + m_2 + \cdots + m_j = n$. Siempre se verifica que para cada autovalor coinciden sus multiplicidades algebraica y geométrica, es decir,

$$\boxed{\dim(V_{\lambda_i}) = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, j}$$

y por tanto, siempre va a ser diagonalizable. Siempre va a existir una matriz de paso P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal D cuyos elementos sean los autovalores de A.

Diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal

Sea A una matriz simétrica real de orden n, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sus autovalores con multiplicidades algebraicas $m_1, m_2, \ldots, m_j$, siendo $m_1 + m_2 + \cdots + m_j = n$. Siempre se verifica que para cada autovalor coinciden sus multiplicidades algebraica y geométrica, es decir,

$$\boxed{\dim(V_{\lambda_i}) = m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, j}$$

y por tanto, siempre va a ser diagonalizable. Siempre va a existir una matriz de paso P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal D cuyos elementos sean los autovalores de A.

Las columnas de la matriz de paso son los autovectores de A y siempre podemos conseguir que esta matriz de paso sea ortogonal, ya que podemos obtener bases de los subespacios propios V_{λ_i} y por el procedimiento de Gram-Schmidt obtener a partir de ella bases ortonormales de dichos subespacios propios. Las columnas de la matriz P serán los autovectores unitarios y perpendiculares ya obtenidos.

Diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal

Por tanto, podemos afirmar que:

Teorema

Toda matriz simétrica real, A, es semejante ortogonalmente a una matriz diagonal. Es decir, existe una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tales que

$$\boxed{D = P^t A P}$$

Diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal

Por tanto, podemos afirmar que:

Teorema

Toda matriz simétrica real, A, es semejante ortogonalmente a una matriz diagonal. Es decir, existe una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tales que

$$\boxed{D = P^t A P}$$

La diagonalización de una matriz real simétrica usando como matriz de paso una matriz ortogonal se denomina **diagonalización por semejanza ortogonal.**

Diagonalización de matrices simétricas por semejanza ortogonal

Por tanto, podemos afirmar que:

Teorema

Toda matriz simétrica real, A, es semejante ortogonalmente a una matriz diagonal. Es decir, existe una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal tales que

$$\boxed{D = P^t A P}$$

La diagonalización de una matriz real simétrica usando como matriz de paso una matriz ortogonal se denomina **diagonalización por semejanza ortogonal.**

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz ortogonal P y diagonal D tal que $D = P^t A P$.

Potencias de una matriz diagonalizable

Como aplicación de la diagonalización de una matriz vamos a calcular la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable A.

Potencias de una matriz diagonalizable

Como aplicación de la diagonalización de una matriz vamos a calcular la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable A. Si A es diagonalizable existe P inversible tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal. Multiplicando por P por la izquierda y por P^{-1} por la derecha , obtenemos

$$A = PDP^{-1}$$

luego,

$$A^m = A\,A\,\cdots A = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^mP^{-1}$$

Potencias de una matriz diagonalizable

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz A y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

se cumple que

$$A^m = P \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Potencias de una matriz diagonalizable

Ejemplo

Dada la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar A^n

Potencias de una matriz diagonalizable

Otra aplicación útil de la diagonalización es el cálculo de la matriz inversa. Ya que si A es una matriz diagonalizable entonces se verifica que

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$