

ÁLGEBRA

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

Contenido

- 1 Introducción. Definición de forma cuadrática
- 2 Diagonalización de una forma cuadrática
- 3 Rango y signatura de una forma cuadrática
- 4 Formas cuadráticas restringidas

Definición de Forma cuadrática

Definición

Una forma cuadrática sobre \mathbb{R} es una aplicación $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un número real dado por:

$$a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ y que corresponde a un polinomio homogéneo de segundo grado en las n variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Definición de Forma cuadrática

Definición

Una forma cuadrática sobre \mathbb{R} es una aplicación $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un número real dado por:

$$a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ y que corresponde a un polinomio homogéneo de segundo grado en las n variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Ejemplo

- ① En \mathbb{R} una forma cuadrática tiene la forma

$$Q(x) = ax^2, \quad (x \in \mathbb{R})$$

para $a \in \mathbb{R}$.

- ② La aplicación P dada por

$$P(x, y, z) = x^2 + 2xy + 6y^2 + 4yz + z^2, \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

Expresión matricial

Dada una forma cuadrática $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n y una base B de \mathbb{R}^n siempre podemos escribir dicha forma cuadrática como

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x^t A x$$

que es la expresión matricial de una forma cuadrática. Donde la matriz A asociada a la forma cuadrática, es una matriz simétrica de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son los coeficientes de los términos cuadráticos de la expresión polinómica, y los restantes elementos de la matriz son la mitad de los coeficientes de los términos no cuadráticos de dicha expresión.

Expresión matricial

Dada una forma cuadrática $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en \mathbb{R}^n y una base B de \mathbb{R}^n siempre podemos escribir dicha forma cuadrática como

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x^t A x$$

que es la expresión matricial de una forma cuadrática. Donde la matriz A asociada a la forma cuadrática, es una matriz simétrica de orden n cuyos elementos de la diagonal principal son los coeficientes de los términos cuadráticos de la expresión polinómica, y los restantes elementos de la matriz son la mitad de los coeficientes de los términos no cuadráticos de dicha expresión.

Teorema

Toda forma cuadrática q sobre \mathbb{R}^n , se puede expresar matricialmente como

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$$

donde A es una matriz simétrica

Expresión matricial

Teorema

Toda forma cuadrática q sobre \mathbb{R}^n , se puede expresar matricialmente como

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}$$

donde A es una matriz simétrica

Ejemplo

Para la forma cuadrática

$$Q(\vec{x}) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 3yz + 5z^2$$

su expresión matricial será:

$$Q(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{x}^t A \vec{x}$$

y la matriz simétrica A es la matriz de Q en una base B .

Clasificación de las formas cuadráticas

Teorema

Dada una forma cuadrática Q en \mathbb{R}^n , existe una única matriz simétrica A de orden n tal que

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Diremos que A es la matriz asociada a la forma cuadrática Q .

Clasificación de las formas cuadráticas

Clasificación de formas cuadráticas

Se dice que una forma cuadrática Q es:

- 1 **Nula** si $Q(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- 2 **Definida positiva** si $Q(\vec{x}) > 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo.
- 3 **Semidefinida positiva** si $Q(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y Q no es nula ni definida positiva.
- 4 **Definida negativa** si $Q(\vec{x}) < 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo.
- 5 **Semidefinida negativa** si $Q(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y Q no es nula ni definida negativa.
- 6 **Indefinida** si $Q(\vec{x})$ si existen vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(\vec{x}) < 0$ y $Q(\vec{y}) > 0$.

Clasificación de las formas cuadráticas

Ejemplo

- 1 La forma cuadrática

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

es definida positiva pues al ser una suma de cuadrados será positiva salvo para el vector nulo.

- 2 La forma cuadrática

$$Q(x, y) = (x - y)^2$$

es semidefinida positiva pues $Q(x, y) \geq 0 \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ y $Q(x, y) = 0$.

- 3 La forma cuadrática $Q(x, y) = x^2 - y^2$ es indefinida pues $Q(1; 2) = -3$ y $Q(2; 1) = 3$.

Diagonalización de una forma cuadrática

Vamos a estudiar unas caracterizaciones del signo de una forma cuadrática que vienen dadas por los autovalores de su matriz asociada. Además la matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica, y una matriz simétrica es diagonalizable ortogonalmente, luego siempre podemos obtener una matriz que sea diagonal.

Diagonalización de una forma cuadrática

Teorema

Sean B y B' dos bases de \mathbb{R}^n , P la matriz del cambio de base de B' a B y A la matriz simétrica de una forma cuadrática Q en la base B . Entonces, la matriz de Q en la base B' , A' , se obtiene de

$$A' = P^t A P$$

Diagonalización de una forma cuadrática

Teorema

Sean B y B' dos bases de \mathbb{R}^n , P la matriz del cambio de base de B' a B y A la matriz simétrica de una forma cuadrática Q en la base B . Entonces, la matriz de Q en la base B' , A' , se obtiene de

$$A' = P^t A P$$

Definición

Dos matrices simétricas se dice que son **congruentes** cuando son matrices asociadas a la misma forma cuadrática en distintas bases. Es decir, A y A' simétricas son congruentes, si existe P inversible tal que $A' = P^t A P$.

Diagonalización de una forma cuadrática

Sea B una base de \mathbb{R}^n y sea $Q(\vec{x}) = \vec{x}_B^t A \vec{x}_B$ la expresión matricial de una forma cuadrática sobre \mathbb{R}^n . Puesto que la matriz A es simétrica, existe una base B' tal que la matriz P de cambio de base de B' a B es ortogonal y

$$D = P^{-1}AP = P^tAP,$$

con D diagonal, es decir, que D y A son congruentes (además de semejantes). Luego en B' , se tiene que

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}_B^t P^t A P \vec{x}_B = [\vec{x}_B^t D P \vec{x}_B = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

es decir, la forma cuadrática se expresaría como una suma de cuadrados y λ_i son los autovalores de A .

Diagonalización de una forma cuadrática

Sea B una base de \mathbb{R}^n y sea $Q(\vec{x}) = \vec{x}_B^t A \vec{x}_B$ la expresión matricial de una forma cuadrática sobre \mathbb{R}^n . Puesto que la matriz A es simétrica, existe una base B' tal que la matriz P de cambio de base de B' a B es ortogonal y

$$D = P^{-1}AP = P^tAP,$$

con D diagonal, es decir, que D y A son congruentes (además de semejantes). Luego en B' , se tiene que

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}_B^t P^t A P \vec{x}_B = [\vec{x}_B^t D P \vec{x}_B = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

es decir, la forma cuadrática se expresaría como una suma de cuadrados y los autovalores de A .

Ejemplo

Reducir a suma de cuadrados la forma cuadrática

$$Q(\vec{x}) = xy + yz$$

Diagonalización de una forma cuadrática

Con ello, podemos llegar a la conclusión de que la clasificación de una forma cuadrática está determinada por los signos de los autovalores de la matriz simétrica que la define, por tanto:

Diagonalización de una forma cuadrática

Con ello, podemos llegar a la conclusión de que la clasificación de una forma cuadrática está determinada por los signos de los autovalores de la matriz simétrica que la define, por tanto:

Clasificación según autovalores

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los autovalores de su matriz asociada. Se verifica:

- $q(\vec{x})$ es definida positiva si y sólo si los autovalores de A son todos positivos.
- $q(\vec{x})$ es definida negativa si y sólo si los autovalores de A son todos negativos.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida positiva si y sólo si los autovalores de A son positivos y nulos.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida negativa si y sólo si los autovalores de A son negativos y nulos.
- $q(\vec{x})$ es indefinida si y sólo si los autovalores de A son positivos y negativos.

Clasificación en función de los menores principales

Clasificación en función de los menores principales

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, sea A su matriz asociada, Δ_i , $1 \leq i \leq n$, los menores principales de A y $\text{rg}(A) = r$, se verifica:

- $|A| \neq 0$ ($r = n$)
 - Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ entonces q es definida positiva.
 - Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ entonces q es definida negativa.
 - Indefinida en cualquier otro caso.
- $|A| = 0$ ($r < n$)
 - Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_r > 0$ entonces q es semidefinida positiva.
 - Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^r \Delta_r > 0$ entonces q es semidefinida negativa.
 - Indefinida en cualquier otro caso.

Si $\Delta_i = 0$, este criterio no se puede aplicar.

Clasificación en función de los menores principales

Clasificación en función de los menores principales

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, sea A su matriz asociada, Δ_i , $1 \leq i \leq n$, los menores principales de A y $\text{rg}(A) = r$, se verifica:

- $|A| \neq 0$ ($r = n$)
 - Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ entonces q es definida positiva.
 - Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ entonces q es definida negativa.
 - Indefinida en cualquier otro caso.
- $|A| = 0$ ($r < n$)
 - Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_r > 0$ entonces q es semidefinida positiva.
 - Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, (-1)^r \Delta_r > 0$ entonces q es semidefinida negativa.
 - Indefinida en cualquier otro caso.

Si $\Delta_i = 0$, este criterio no se puede aplicar.

Ejemplo

Clasificar la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = -3x^2 + 2xy - y^2 + z^2$$

por el método de los menores principales.

Expresión diagonal de Jacobi

Teorema

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, sea A su matriz asociada, Δ_i , $1 \leq i \leq n$, los menores principales de A y $\text{rg}(A) = r \leq n$. La **expresión diagonal de Jacobi** de la forma cuadrática q viene dada por:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x_r^2$$

siempre que $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, \dots , $\Delta_r \neq 0$

Expresión diagonal de Jacobi

Teorema

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, sea A su matriz asociada, Δ_i , $1 \leq i \leq n$, los menores principales de A y $\text{rg}(A) = r \leq n$. La **expresión diagonal de Jacobi** de la forma cuadrática q viene dada por:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta_1 x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} x_r^2$$

siempre que $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, \dots , $\Delta_r \neq 0$

Ejemplo

Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xy$$

Determinar su expresión diagonal de Jacobi.

Rango y signatura de una forma cuadrática

Hemos visto un método para encontrar matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática, pero sabemos que existirán también distintas matrices diagonales. Sin embargo, todas ellas tienen algunas cosas en común: tienen el mismo número de elementos distintos de cero en la diagonal (**el mismo rango**) y tienen el mismo número de elementos positivos y de elementos negativos en la diagonal (**la misma signatura**).

Ahora veremos como estos valores permanecen invariantes para cualquier diagonalización que hagamos, lo que también nos permitirá dar una nueva clasificación de las formas cuadráticas

Rango y signatura de una forma cuadrática

Hemos visto un método para encontrar matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática, pero sabemos que existirán también distintas matrices diagonales. Sin embargo, todas ellas tienen algunas cosas en común: tienen el mismo número de elementos distintos de cero en la diagonal (**el mismo rango**) y tienen el mismo número de elementos positivos y de elementos negativos en la diagonal (**la misma signatura**).

Ahora veremos como estos valores permanecen invariantes para cualquier diagonalización que hagamos, lo que también nos permitirá dar una nueva clasificación de las formas cuadráticas

Definición

Llamaremos **rango de una forma cuadrática**, al rango de cualquier matriz simétrica asociada a la forma cuadrática en alguna base.

Rango y signatura de una forma cuadrática

Definición

Llamaremos **rango de una forma cuadrática**, al rango de cualquier matriz simétrica asociada a la forma cuadrática en alguna base.

Se deduce entonces que dos cualesquiera matrices diagonales asociadas a la misma forma cuadrática tienen el mismo número de elementos en la diagonal distintos de cero, (pues este número es el rango de la matriz diagonal.)

Rango y signatura de una forma cuadrática

Definición

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y D una matriz diagonal asociada a q . Se define como **signatura de q** al par

$$\text{Sig}(q) = (p; t)$$

donde p es el número de elementos positivos en la diagonal de D y t es el número de elementos negativos de la misma.

Rango y signatura de una forma cuadrática

Clasificación en función la signatura

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un espacio vectorial \mathbb{R}^n , se verifica:

- $q(\vec{x})$ es definida positiva si y solo si $\text{Sig}(q) = (n, 0)$.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida positiva si y solo si $\text{Sig}(q) = (p, 0)$, con $0 < p < n$
- $q(\vec{x})$ es definida negativa si y solo si $\text{Sig}(q) = (0, n)$.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida negativa si y solo si $\text{Sig}(q) = (0, t)$, con $0 < t < n$
- $q(\vec{x})$ es indefinida si y solo si $\text{Sig}(q) = (p, t)$, con $0 < p, t$

Rango y signatura de una forma cuadrática

Clasificación en función la signatura

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en un espacio vectorial \mathbb{R}^n , se verifica:

- $q(\vec{x})$ es definida positiva si y solo si $\text{Sig}(q) = (n, 0)$.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida positiva si y solo si $\text{Sig}(q) = (p, 0)$, con $0 < p < n$
- $q(\vec{x})$ es definida negativa si y solo si $\text{Sig}(q) = (0, n)$.
- $q(\vec{x})$ es semidefinida negativa si y solo si $\text{Sig}(q) = (0, t)$, con $0 < t < n$
- $q(\vec{x})$ es indefinida si y solo si $\text{Sig}(q) = (p, t)$, con $0 < p, t$

Ejemplo

Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2yz + 3z^2$$

Clasificarla por su signatura.

Formas cuadráticas restringidas

En el estudio del signo de una forma cuadrática real de n variables es frecuente que éstas tengan que satisfacer un conjunto de restricciones, o lo que es lo mismo, que el vector \vec{x} pertenezca a algún subespacio de \mathbb{R}^n . Por tanto, interesa clasificar la forma cuadrática en el subespacio en el que están restringidas las variables.

Formas cuadráticas restringidas

En el estudio del signo de una forma cuadrática real de n variables es frecuente que éstas tengan que satisfacer un conjunto de restricciones, o lo que es lo mismo, que el vector \vec{x} pertenezca a algún subespacio de \mathbb{R}^n . Por tanto, interesa clasificar la forma cuadrática en el subespacio en el que están restringidas las variables.

Sea $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y S un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n

- $q(\vec{x})$ restringida a S es definida positiva si $q(\vec{x}) > 0$, para todo $\vec{x} \in S$ no nulo.
- $q(\vec{x})$ restringida a S es definida negativa si $q(\vec{x}) < 0$, para todo $\vec{x} \in S$ no nulo.
- $q(\vec{x})$ restringida a S es semidefinida positiva si $q(\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in S$ y existe un $\vec{u} \in S$, $\vec{u} \neq 0$ tal que $q(\vec{u}) = 0$.
- $q(\vec{x})$ restringida a S es semidefinida negativa si $q(\vec{x}) \leq 0$, para todo $\vec{x} \in S$ y existe un $\vec{u} \in S$, $\vec{u} \neq 0$ tal que $q(\vec{u}) = 0$.
- $q(\vec{x})$ restringida a S es indefinida si existen $\vec{u}, \vec{v} \in S$ ta que $q(\vec{u}) > 0$ y $q(\vec{v}) < 0$.

Clasificación de una forma cuadrática restringida a un subespacio S

- Se obtienen las ecuaciones paramétricas del subespacio.
- Se sustituyen las ecuaciones paramétricas en la expresión analítica de la forma cuadrática.
- Se clasifica la forma cuadrática restringida a S , $q|_S$

Clasificación de una forma cuadrática restringida a un subespacio S

- Se obtienen las ecuaciones paramétricas del subespacio.
- Se sustituyen las ecuaciones paramétricas en la expresión analítica de la forma cuadrática.
- Se clasifica la forma cuadrática restringida a S , $q|_S$

Ejemplo

Clasificar la siguiente forma cuadrática

$$q(x, y) = -x^2 + 2xy$$

restringidas a los subespacios:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}, \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 5y = 0\}$$