TEMA VI:
APLICACIONES LINEALES

ÁLGEBRA
Grado en Ingeniería Informática.
Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Definición de Aplicación lineal

Las aplicaciones lineales juegan en el estudio de los espacios vectoriales el mismo papel que las aplicaciones en el estudio de los conjuntos. Siendo los espacios vectoriales conjuntos dotados de una estructura (operaciones suma y producto por escalares) nos interesarán las aplicaciones que trasladen esta estructura de uno a otro espacio vectorial, es decir que se conservan las operaciones básicas e un espacio vectorial.

Definición de Aplicación lineal

Las aplicaciones lineales juegan en el estudio de los espacios vectoriales el mismo papel que las aplicaciones en el estudio de los conjuntos. Siendo los espacios vectoriales conjuntos dotados de una estructura (operaciones suma y producto por escalares) nos interesarán las aplicaciones que trasladen esta estructura de uno a otro espacio vectorial, es decir que se conservan las operaciones básicas e un espacio vectorial.

Definición

Sean los espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *y sea f una aplicación*

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

Se dice que f es ***una aplicación lineal entre los espacios vectoriales*** $\mathbb{R}^n$ ***y*** $\mathbb{R}^m$ *si se verifican las dos siguientes condiciones*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

Este tipo de aplicaciones recibe el nombre de transformaciones lineales u homomorfismos entre espacios vectoriales.

Definición de Aplicación lineal

Definición

Sean los espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea f una aplicación

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

Se dice que f es ***una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$*** *si se verifican las dos siguientes condiciones*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

Este tipo de aplicaciones recibe el nombre de transformaciones lineales u homomorfismos entre espacios vectoriales.

Ejemplo

1. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+3x_2)$ es una aplicación lineal.
2. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1 - x_2, 0)$ NO es una aplicación lineal.

Definición de Aplicación lineal

Definición

Sean los espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea f una aplicación

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

Se dice que f es ***una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$*** *si se verifican las dos siguientes condiciones*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$
2. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$

Este tipo de aplicaciones recibe el nombre de transformaciones lineales u homomorfismos entre espacios vectoriales.

Las dos propiedades anteriores de la definición de aplicación lineal pueden condensarse en una sola condición:

La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sea lineal es que

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha\beta \in \mathbb{R} \quad f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$$

Propiedades de las aplicaciones lineales

Propiedades

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, entonces se verifica:

1. La imagen del vector nulo del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es el vector nulo del espacio $\mathbb{R}^m$, es decir $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.
3. Si H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces $f(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$, siendo $f(H)$ el subespacio de $\mathbb{R}^m$ formado por todos aquellos vectores que son imagen de los vectores de H, es decir:

$$\vec{y} \in f(H) \;\Leftrightarrow\; \text{existe}\, \vec{x} \in H\, \text{tal que}\, f(\vec{x}) = \vec{y}$$

   Esto quiere decir que si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ es una base de H, se verifica que $\{f(\vec{v_1}), f(\vec{v_2}), \ldots, f(\vec{v_n})\}$ es un sistema generador de $f(H)$.
4. Si H'es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$y representamos por $f^{-1}(H')$ al conjunto de vectores dador por

$$f^{-1}(H') = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \in H'\}$$

   entonces $f^{-1}(H')$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Clasificación de las aplicaciones lineales

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Clasificaremos f según sus características en la forma siguiente:

- **Monomorfismo**: Cuando la aplicación lineal f es inyectiva.
- **Epimorfismo**: Cuando la aplicación lineal f es suprayectiva.
- **Isomorfismo**: Cuando la aplicación lineal f es biyectiva.
- **Endomorfismo**: Cuando la aplicación lineal f es de un espacio vectorial en si mismo ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$).

Teorema fundamental de las aplicaciones lineales

Teorema

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ *que sabemos que es de dimensión* n*, y sea* B *una base de* $\mathbb{R}^n$

$$B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$$

Si $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \dots, \vec{w_n}$ *son n vectores arbitrarios de* $\mathbb{R}^m$*, entonces existe una aplicación lineal única f de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *tal que*

$$f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \ \ \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Se define

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n \Rightarrow f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n) \Rightarrow$$

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \dots + x_n f(\vec{v}_n) = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \dots x_n\vec{w}_n$$

Se define

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n \Rightarrow f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n) \Rightarrow$$

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + x_n f(\vec{v}_n) = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \ldots x_n\vec{w}_n$$

Ejemplo

Para definir una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, tomamos tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$

$$\vec{w}_1 = (1, 1),\ \vec{w}_2 = (-1, 3),\ \vec{w}_3 = (0, 1)$$

y definimos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + x_3\vec{w}_3 = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + x_3)$$

y podemos comprobar que es una aplicación lineal.

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y sean $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_m\}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Obtendremos las ecuaciones matriciales de f en las bases B de $\mathbb{R}^n$ y B' de $\mathbb{R}^m$.

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y sean $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_m\}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Obtendremos las ecuaciones matriciales de f en las bases B de $\mathbb{R}^n$ y B' de $\mathbb{R}^m$. Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$, siendo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sus coordenadas en la base B, es decir

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$$

y aplicando f a ambos miembros de esta igualdad y sabiendo que la aplicación es lineal

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \dots + x_n f(\vec{v}_n)$$

Por otra parte, $f(\vec{x})$ tendrá unas coordenadas $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ en la base B', es decir

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \dots + y_m\vec{w}_m$$

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

Al ser B' una base de $\mathbb{R}^m$ las coordenadas de $f(v_i)$ en dicha base vendrán dada por

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} f(\vec{v_1}) & = & a_{11}\vec{w}_1 & + & a_{21}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\vec{w}_m \\ f(\vec{v_2}) & = & a_{12}\vec{w}_1 & + & a_{22}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\vec{w}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ f(\vec{v_n}) & = & a_{1n}\vec{w}_1 & + & a_{2n}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\vec{w}_m \end{array}\right.$$

y sustituyendo estas ecuaciones en la expresión de $f(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}) = x_1(a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m) + x_2(a_{12}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{w}_m) + \ldots$$

$$+ \ldots + x_n(a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{w}_1 +$$

$$+(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\vec{w}_2 + \ldots (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\vec{w}_m$$

y como las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas debe verificarse que:

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}\right.$$

que son las ecuaciones de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B'. Su forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boxed{Y = AX}$$

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

Su forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boxed{Y = AX}$$

De esta manera, la imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se obtiene mediante un producto de matrices. A la matiz A se le llama **matriz asociada a la aplicación lineal f** respecto a las bases B y B', y se denota por

$$\boxed{A = \mathcal{M}(f, B, B')}$$

y cada columna de A está formada por las coordenadas respecto de B' de las imágenes de los vectores de B. La matriz de una aplicación lineal queda perfectamente determinada cuando se conocen los transformados de los vectores de una base del primer espacio expresados en una base del segundo.

Matriz de una aplicación lineal. Ecuaciones

Su forma matricial sería:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boxed{Y = AX}$$

Ejemplo

Calcular la expresión matricial de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3)$$

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición (Imagen de una aplicación lineal)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se define el ***conjunto imagen y se representa por*** $\mathrm{Im}(f)$ ***o por*** $f(\mathbb{R}^n)$ *al conjunto formado por todos aquellos vectores de $\mathbb{R}^m$ que son imágenes de uno o más vectores de $\mathbb{R}^n$*

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}}$$

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Definición (Imagen de una aplicación lineal)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se define el ***conjunto imagen y se representa por*** $\mathrm{Im}(f)$ ***o por*** $f(\mathbb{R}^n)$ *al conjunto formado por todos aquellos vectores de $\mathbb{R}^m$ que son imágenes de uno o más vectores de $\mathbb{R}^n$*

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}}$$

Definición (Núcleo de una aplicación lineal)

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Se define el ***núcleo de una aplicación lineal y se representa por*** $\mathrm{Ker}(f)$ ***o por*** $\mathrm{Núc}(f)$ *al conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ cuya imagen es el vector cero de $\mathbb{R}^m$*

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = 0\}}$$

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación lineal, se verifica que*

1. *Im(f) es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^m$.
2. *Ker(f) es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$.

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, se verifica que

1. *Im(f) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$.*
2. *Ker(f) es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$, existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$, es decir

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + x_n f(\vec{v}_n)$$

con lo que podemos asegurar que

$$\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots f(\vec{v}_n)\}$$

es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, es decir, los vectores columna de la matriz de la aplicación lineal son un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$, existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \vec{y}$, es decir

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \ldots + x_n\vec{v}_n) = x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + x_n f(\vec{v}_n)$$

con lo que podemos asegurar que

$$\{f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \ldots f(\vec{v}_n)\}$$

es un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, es decir, los vectores columna de la matriz de la aplicación lineal son un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$.

Este resultado nos proporciona un primer método para calcular la imagen de una aplicación lineal. El núcleo de una aplicación lineal es fácil de calcula a partir de la definición. Posteriormente veremos con la ayuda de la matriz de una aplicación lineal, un método de cálculo más útil en la práctica.

Núcleo e Imagen de una aplicación lineal

Este resultado nos proporciona un primer método para calcular la imagen de una aplicación lineal. El núcleo de una aplicación lineal es fácil de calcula a partir de la definición. Posteriormente veremos con la ayuda de la matriz de una aplicación lineal, un método de cálculo más útil en la práctica.

Ejemplo

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 + 2x_2 + x_3),$$

calculemos su núcleo e imagen.

Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas

Recordemos que una **aplicación** $f : A \to B$ **es inyectiva** si a elementos distintos de A hace corresponder imágenes distintas en B esto es:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \forall x, y \in A, \text{ si } x \neq y \text{ entonces } f(x) \neq f(y)$$

o equivalentemente

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \forall x, y \in A, \text{ si } f(x) = f(y) \text{ entonces } x = y$$

La aplicación f **es sobreyectiva** si todo elemento del segundo conjunto es imagen de alguno del primero, esto es

$$f \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow \forall b \in B, \text{ existe } a \in A \text{ de forma que } f(a) = b$$

La aplicación f **es biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas

Recordemos que una **aplicación** $f : A \to B$ **es inyectiva** si a elementos distintos de A hace corresponder imágenes distintas en B esto es:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \forall x, y \in A, \text{ si } x \neq y \text{ entonces } f(x) \neq f(y)$$

o equivalentemente

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow \forall x, y \in A, \text{ si } f(x) = f(y) \text{ entonces } x = y$$

La aplicación f **es sobreyectiva** si todo elemento del segundo conjunto es imagen de alguno del primero, esto es

$$f \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow \forall b \in B, \text{ existe } a \in A \text{ de forma que } f(a) = b$$

La aplicación f **es biyectiva** si es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Para el caso que nos interesa, el de las aplicaciones lineales, el núcleo y la imagen nos proporc¡onan un cómodo método para determinar si una aplicación lineal es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas

Teorema

Dada una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, se verifica que:*

1. *f es inyectiva (monomorfismo)* $\Leftrightarrow \; \mathrm{Ker}(f) = 0$.
2. *f es sobreyectiva (epimorfismo)* $\Leftrightarrow \; \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$

Ecuaciones del núcleo y de la imagen

Veamos ahora como la matriz asociada a una aplicación lineal facilita el cálculo de su núcleo e imagen. Para ello ,sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ y sea la matriz A asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Denotemos por $rg(A) = r$.

Ecuaciones del núcleo y de la imagen

Veamos ahora como la matriz asociada a una aplicación lineal facilita el cálculo de su núcleo e imagen. Para ello ,sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ y sea la matriz A asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Denotemos por $rg(A) = r$.

Entonces las columnas de A son las coordenadas respecto de B' de un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$, y en particular $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$.

Ecuaciones del núcleo y de la imagen

Veamos ahora como la matriz asociada a una aplicación lineal facilita el cálculo de su núcleo e imagen. Para ello ,sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ y sea la matriz A asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Denotemos por $rg(A) = r$.

Entonces las columnas de A son las coordenadas respecto de B' de un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$, y en particular $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$.

Por otro parte un vector $x \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ está en el núcleo de f si y sólo si, $f(x) = 0$ o equivalentemente si, y sólo si $AX = 0$, y por tanto se obtienen unas cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ a partir del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A.

Ecuaciones del núcleo y de la imagen

Veamos ahora como la matriz asociada a una aplicación lineal facilita el cálculo de su núcleo e imagen. Para ello ,sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal con $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ y sea la matriz A asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Denotemos por $rg(A) = r$.

Entonces las columnas de A son las coordenadas respecto de B' de un sistema de generadores de $Im(f)$, y en particular $\dim(Im(f)) = r$.

Por otro parte un vector $x \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ está en el núcleo de f si y sólo si, $f(x) = 0$ o equivalentemente si, y sólo si $AX = 0$, y por tanto se obtienen unas cartesianas de $Ker(f)$ a partir del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A.

Teorema

Si f es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, se verifica que

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))}$$

Ecuaciones del núcleo y de la imagen

Teorema

Si f es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$, *se verifica que*

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Ejemplo

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3),$$

calculemos su núcleo e imagen.

Operaciones con aplicaciones lineales

Se representa por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En este conjunto podemos definir operaciones suma y producto por escalares de la siguiente forma:

Definición

Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *definimos la suma de f y g,* $f + g$*, como*

$$f + g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Operaciones con aplicaciones lineales

Se representa por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En este conjunto podemos definir operaciones suma y producto por escalares de la siguiente forma:

Definición

Si $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *definimos la suma de f y g,* $f+g$*, como*

$$f+g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Sean A_1 y A_2 las matrices de orden $m \times n$ asociadas a las aplicaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, respecto a las bases

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}, \text{ y } B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots \vec{w}_m\}$$

respectivamente. La matriz $A_1 + A_2$ es la matriz asociada a $f+g$, es decir

$$A_1 + A_2 = M(f+g, B, B')$$

Operaciones con aplicaciones lineales

Se representa por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En este conjunto podemos definir operaciones suma y producto por escalares de la siguiente forma:

Definición

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos el producto de λ por f, λf, como

$$\lambda f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda(f(\vec{x})) \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Operaciones con aplicaciones lineales

Se representa por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ al conjunto formado por todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. En este conjunto podemos definir operaciones suma y producto por escalares de la siguiente forma:

Definición

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *definimos el producto de* λ *por f,* λf*, como*

$$\lambda f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda(f(\vec{x})) \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Si $A = M(f, B, B')$, se verifica que

$$\lambda A = \lambda M(f, B, B') = M(\lambda f, B, B')$$

Operaciones con aplicaciones lineales

Si $A = M(f, B, B')$, se verifica que

$$\lambda A = \lambda M(f, B, B') = M(\lambda f, B, B')$$

Teorema

El conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de las aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ con la suma $(f, g) \to f + g$ y con la operación externa $(\lambda, f) \to \lambda f$ es un espacio vectorial real.

Introducción

Dada una aplicación lineal, f, entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ Y $\mathbb{R}^m$, construidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{R}$, estudiaremos en este apartado que efectos produce en la matriz de la aplicación lineal el cambio de base en uno de los dos espacios o en ambos a la vez.

Introducción

Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ dos espacios vectoriales de dimensiones n y m y sean

$$B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}, \text{ y } B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_m\}$$

bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y el vector $\vec{y}$ es su transformado mediante f, es decir, $y = f(x)$. Las matrices de sus coordenadas en las bases B_1 y B_2 son

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ e } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

respectivamente y sea A la matriz de la aplicación lineal en estas bases

$$A = \mathcal{M}(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boxed{Y_{B_2} = AX_{B_1}}$$

Cambio de base en el primer espacio

Sea $B_1' = \{\vec{v'}_1, \vec{v'}_2, \dots \vec{v'}_n\}$ una nueva base en $\mathbb{R}^n$ y sean

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \boxed{X_{B_1} = PX_{B_1'}}$$

las ecuaciones del cambio de base de B_1 a B_1'. Sustituyendo en la relación de la expresión matricial de la aplicación lineal obtendremos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

de donde llamando P a la matriz del cambio de base tenemos

$$Y = APX_{B_1'}, \quad \boxed{\mathcal{M}(f, B_1', B_2) = AP}$$

Cambio de base en el segundo espacio

Consideremos la base B_1 de $\mathbb{R}^n$ y una nueva base B_2' de $\mathbb{R}^m$ tal que las ecuaciones del cambio de base de la base B_2 a ella sean:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \qquad \boxed{Y_{B_2} = QY_{B_2'}}.$$

Sustituyendo en la relación de la expresión matricial de la aplicación lineal obtendremos

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

luego

Cambio de base en el segundo espacio

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y si llamamos Q a la matriz del cambio de base, la expresión de la aplicación lineal f será

$$Y' = Q^{-1}AX, \qquad \boxed{\mathcal{M}(f, B_1, B'_2) = Q^{-1}A}$$

Cambio de base en los dos espacios

Cambiamos ahora de base en los dos espacios, es decir, de B_1 a B_1' en $\mathbb{R}^n$ y de B_2 a B_2' en $\mathbb{R}^m$. Suponiendo las dos ecuaciones de los respectivos cambios de base, entonces sustituyendo n la ecuación matricial de la aplicación lineal tendremos:

$$QY' = APX'$$

multiplicando a la izquierda por la inversa de Q, se sigue que

$$Y' = Q^{-1}APX'$$

y la expresión de la aplicación lineal f será

$$\boxed{\mathcal{M}(f, B_1', B_2') = Q^{-1}AP}$$