UCA Universidad de Cádiz

ESI Escuela Superior de Ingeniería

TEMA V: ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

ÁLGEBRA
Grado en Ingeniería Informática.
Escuela Superior de Ingeniería

Alejandro Pérez Peña
Departamento de Matemáticas

Curso 2015-2016

Contenido

Definición (Producto Escalar)

Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. *Se llama* ***producto escalar definido sobre*** $\mathbb{R}^n$ *a cualquier aplicación*

$$\boxed{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}}$$

tal que a cada par de vectores $(\vec{x}, \vec{y})$ *le hace corresponder un número real, representado por una de las siguientes formas:*

$$\boxed{\vec{x} \bullet \vec{y}, \quad < \vec{x}, \vec{y} >}$$

y que satisface las siguientes condiciones:

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$
2. $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \bullet \vec{y}) + (\vec{x} \bullet \vec{z})$
3. $\forall \vec{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda\vec{x}) \bullet \vec{y} = \vec{x} \bullet (\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x} \bullet \vec{y})$
4. *Si* $\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{x} \bullet \vec{x} > 0$

A la expresión $\vec{x} \bullet \vec{y}$ *se le denomina producto escalar de* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$.

Ejemplo

1. En el espacio $\mathbb{R}^n$ se define
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$
siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. A este producto escalar se le llama producto escalar usual.
2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$
Es sencillo probar que se cumplen las primeras condiciones de la definición de producto escalar, para probar que $\vec{x} \bullet \vec{x} > 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$, podemos poner
$$\vec{x} \bullet \vec{x} = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = \alpha(x_1 + \frac{x_2}{\alpha})^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}x_2^2 + x_3^2$$
por tanto, debe ser: $\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & > & 0 \\ \frac{\alpha^2-1}{\alpha} & > & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha > 1$

Definición (Espacio Vectorial Euclídeo)

Al par formado por el espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *y un producto escalar definido sobre* $\mathbb{R}^n$ *se le llama* ***Espacio Vectorial Euclídeo****. Se representa por*

$$\boxed{(\mathbb{R}^n, \bullet), \quad (\mathbb{R}^n, <>)}$$

según la notación que utilicemos.

Expresión matricial de un producto escalar

Sea $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ un espacio vectorial euclídeo y sea B una base de $\mathbb{R}^n$,

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\},$$

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n, \quad \vec{y} = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \cdots + y_n\vec{u}_n$$

siendo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ las coordenadas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en la base B, respectivamente. Entonces el producto escalar $\vec{x} \bullet \vec{y}$, vendrá dado por

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n) \bullet (y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \cdots + y_n\vec{u}_n) =$$

$$= x_1y_1(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) + x_1y_2(\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2) + \cdots + x_ny_n(\vec{u}_n \bullet \vec{u}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u}_n \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_n \bullet \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \bullet \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^tGY$$

Expresión matricial de un producto escalar

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_1 \bullet \vec{u}_n \\ \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_2 \bullet \vec{u}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{u}_n \bullet \vec{u}_1 & \vec{u}_n \bullet \vec{u}_2 & \dots & \vec{u}_n \bullet \vec{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t G Y}$$

siendo X la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{x}$, Y la matriz columna formada por las coordenadas del vector $\vec{y}$ y G la llamada **matriz métrica del producto escalar o matriz de Gram** respecto a la base B.

Se observa que dicha matriz sólo depende de la base de $\mathbb{R}^n$ utilizada y cuyos elementos son los productos escalares de los vectores de la base

$$a_{ij} = \vec{u}_i \bullet \vec{u}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Expresión matricial de un producto escalar

Observación

Por la definición de producto escalar es $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = \vec{u}_j \bullet \vec{u}_i \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

que nos indica que **la matriz del producto escalar es una matriz simétrica**. Además, por la definición de producto escalar se debe verificar que

$$a_{ii} = \vec{u}_i \bullet \vec{u}_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Estas condiciones no son suficientes para que una matriz A sea la matriz de un producto escalar.

Expresión matricial de un producto escalar

Ejemplo

Si en $\mathbb{R}^3$ definimos

$$(\vec{x} \bullet \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

observamos que es una mariz simétrica pero no es un roducto escalar, ya que si, por ejemplo, $\vec{x} = (-3, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, se verifica que

$$\vec{x} \bullet \vec{x} = -8 < 0$$

que no es posible.

Caracterización de la matriz de un producto escalar

Veamos que condición debe cumplir la matriz para que se verifique la condición:

$$\boxed{\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{x} \bullet \vec{x} > 0}$$

Caracterización de la matriz de un producto escalar

Veamos que condición debe cumplir la matriz para que se verifique la condición:

$$\boxed{\vec{x} \neq \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{x} \bullet \vec{x} > 0}$$

Definición (Menor Principal de orden r)

Sea A una matriz perteneciente a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*llamamos **menor principal de orden r**, Δ_r, al determinante de la submatriz de A formada por las r primeras filas y las r primeras columnas.*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Caracterización de la matriz de un producto escalar

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*. La matriz A es la matriz de un producto escalar definido en el espacio vectorial n-dimensional* $\mathbb{R}^n$ *respecto a una base B si y sólo si* $A = A^t$ *y además los menores principales de A son todos mayores que cero.*

Caracterización de la matriz de un producto escalar

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. La matriz A es la matriz de un producto escalar definido en el espacio vectorial n-dimensional $\mathbb{R}^n$ respecto a una base B si y sólo si $A = A^t$ y además los menores principales de A son todos mayores que cero.

Ejercicio 5.1: Calcular la matriz del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{(1,1,2),(3,1,1),(-2,-1,2)\}$

Módulo de un vector

Definición (Módulo de un vector)

Si $\vec{x}$ es un vector no nulo del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$, se llama ***longitud, norma o módulo de*** $\vec{x}$ *y se representa por $\|\vec{x}\|$, al número real positivo definido por la raíz cuadrada no negativa del producto escalar de $\vec{x}$ por si mismo.*

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}}$$

Módulo de un vector

Definición (Módulo de un vector)

*Si $\vec{x}$ es un vector no nulo del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$, se llama **longitud, norma o módulo de** $\vec{x}$ y se representa por $\|\vec{x}\|$, al número real positivo definido por la raíz cuadrada no negativa del producto escalar de $\vec{x}$ por si mismo.*

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}}$$

Se verifica lo siguiente:

$$\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Si $\|\vec{x}\| = 1$, diremos que el vector $\vec{x}$ es unitario.

Módulo de un vector

Definición (Módulo de un vector)

Si $\vec{x}$ es un vector no nulo del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$, se llama ***longitud, norma o módulo de*** $\vec{x}$ *y se representa por $\|\vec{x}\|$, al número real positivo definido por la raíz cuadrada no negativa del producto escalar de $\vec{x}$ por si mismo.*

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}}$$

Se verifica lo siguiente:

$$\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

Si $\|\vec{x}\| = 1$, diremos que el vector $\vec{x}$ es unitario.

Ejercicio 5.2: Calcular la norma del vector $(2, -1)$ respecto al producto escalar usual y al producto escalar en $\mathbb{R}^2$ dado por la expresión

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

Propiedades

Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$
2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz:
   El valor absoluto del producto escalar de dos vectores es menor o igual que el producto de las normas de ambos vectores.
   $$\boxed{|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n}$$
3. Desigualdad triangular o de Minkowski
   $$\boxed{\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n}$$

Esta última desigualdad recibe el nombre de triangular porque es una generalización del hecho de que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Ángulo que forman dos vectores

Definición (Ángulo entre dos vectores)

Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores no nulos del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$. El ***ángulo que forman esos dos vectores****, áng$(\vec{x}, \vec{y})$, queda caracterizado por su coseno*

$$\boxed{\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}}$$

Podemos escribir

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$

Ángulo que forman dos vectores

Definición (Ángulo entre dos vectores)

Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores no nulos del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$. El ***ángulo que forman esos dos vectores****, ång$(\vec{x}, \vec{y})$, queda caracterizado por su coseno*

$$\boxed{\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|}}$$

Podemos escribir

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y})$$

Ejercicio 5.3: Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el producto escalar dado por

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 3x_1y_1 + x_2y_2$$

Determina el ángulo entre los vectores $(1, 1)$ y $(1, 0)$

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Vectores ortogonales)

Dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$ se dice que son ***ortogonales o perpendiculares****, y se representa por $\vec{x} \perp \vec{y}$ cuando su producto escalar vale cero, es decir*

$$\boxed{\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} \bullet \vec{y} = 0}$$

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Vectores ortogonales)

*Dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^n$ se dice que son **ortogonales o perpendiculares**, y se representa por $\vec{x} \perp \vec{y}$ cuando su producto escalar vale cero, es decir*

$$\boxed{\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} \bullet \vec{y} = 0}$$

Teorema (Teorema de Pitagoras)

En un espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$, la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean ortogonales es que el cuadrado de la norma de su suma sea igual a la suma de los cuadrados de sus normas, es decir,

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema (Teorema de Pitagoras)

En un espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$*, la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean ortogonales es que el cuadrado de la norma de su suma sea igual a la suma de los cuadrados de sus normas, es decir,*

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Demostración.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \bullet (\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x} \bullet \vec{x} + 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) + \vec{y} \bullet \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

Si

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Longrightarrow \vec{x} \bullet \vec{y} = 0 \Longrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Si

$$|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Longrightarrow 2(\vec{x} \bullet \vec{y}) = 0 \Longrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$$

$\square$

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Base ortogonal)

Una base de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ *se dice que es una* ***base ortogonal*** *cuando los vectores que la forman son ortogonales dos a dos.*

$$\boxed{B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\} \text{ es ortogonal} \Longleftrightarrow \vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0, \quad i \neq j}$$

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Base ortogonal)

*Una base de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ se dice que es una **base ortogonal** cuando los vectores que la forman son ortogonales dos a dos.*

$$\boxed{B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \textit{ es ortogonal} \Longleftrightarrow \vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0, \quad i \neq j}$$

Definición (Base ortonormal)

*Una base de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ se dice que es una **base ortonormal** cuando los vectores que la forman son unitarios y ortogonales.*

$$\boxed{B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \textit{es ortonormal} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0, & i \neq j \\ \|\vec{u}_i\| = 1 & \forall i \end{cases}}$$

Bases ortogonales y ortonormales

Ejercicio 5.4: En el espacio $\mathbb{R}^3$ se define

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

1. ¿Para qué valores de α es $\bullet$ un producto escalar?
2. Para $\alpha = 1$, encuentra todos los vectores que son ortogonales al $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$

Matriz de un producto escalar en una base ortonormal

Teorema

Sea $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ *un espacio vectorial euclídeo y sea B una base de* $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. *Denotaremos por* G *a la matriz métrica del producto escalar respecto de la base* B. *Entonces*

- *La base* B *es ortogonal si y sólo si* G *es una matriz diagonal.*
- *La base* B *es ortonormal si y sólo si la matriz* G *es la matriz identidad.*

Matriz de un producto escalar en una base ortonormal

Teorema

Sea $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ *un espacio vectorial euclídeo y sea B una base de* $\mathbb{R}^n$, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$. *Denotaremos por* G *a la matriz métrica del producto escalar respecto de la base* B. *Entonces*

- *La base* B *es ortogonal si y sólo si* G *es una matriz diagonal.*
- *La base* B *es ortonormal si y sólo si la matriz* G *es la matriz identidad.*

Las bases ortonormales son particularmente cómodas a la hora de efectuar cálculos puesto que al ser la matriz métrica la identidad, se obtiene la expresión matricial del producto escalar

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Asimismo, la norma de un vector $\vec{x}$ vendrá dada por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Nuestra meta será siempre que tengamos un producto escalar, conseguir que esté referido a una base ortonormal.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Teorema (Gram-Schmidt)

Todo espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \bullet)$ *admite una base ortonormal.*

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Más aún, dada una base

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$$

existe una base ortonormal

$$B' = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_n)$$

obtenida a partir de ella cuyos vectores se calculan de la manera siguiente: Calcularemos en primer lugar una base ortogonal

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$$

y luego la haremos ortonormal dividiendo cada vector por su módulo para hacerlos unitarios.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Tomamos, en primer lugar

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

Para obtener el segundo vector, hacemos

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1$$

vamos a calcular cuanto tiene que valer λ para que $\vec{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ sean perpendiculares, es decir que su producto escalar sea cero

$$0 = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \bullet (\vec{u}_2 + \lambda\vec{v}_1) = \vec{v}_1 \bullet \vec{u}_2 + \vec{v}_1 \bullet (\lambda\vec{v}_1)$$

con lo que debe ser

$$\lambda = -\frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}$$

en definitiva,

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\vec{v}_1$$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Para construir el tercer vector, formamos

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$$

vamos a calcular los valores de α y β para que $\vec{v}_3$ sea ortogonal a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_3 \\ \\ 0 = \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = \vec{v}_1 \bullet (\vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \\ \\ 0 = \vec{v}_2 \bullet (\vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1 + \beta\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \\ \\ 0 = \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2 \end{array}\right\}$$

Como

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1 = 0$$

nos queda

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3 + \alpha\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1 \\ \\ 0 = \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3 + \beta\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1} \\ \\ \beta = -\frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2} \end{array}\right\}$$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3 + \alpha \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1 \\ \\ 0 = \vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3 + \beta \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1} \\ \\ \beta = -\frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2} \end{array}\right\}$$

en definitiva,

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_3}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2}\vec{v}_2$$

Procederíamos igualmente para los próximos vectores, siendo en general

$$\vec{v}_{r+1} = \vec{u}_{r+1} - \lambda_1 \vec{v}_1 - \lambda_2 \vec{v}_2 - \cdots - \lambda_r \vec{v}_r = \vec{u}_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \vec{v}_j$$

siendo $\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, r$, números reales tales que el vector $\vec{v}_{r+1}$ sea ortogonal a los vectores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r)$.

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Resumen del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

En resumen, el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, nos permite dada una base cualquiera

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$$

obtener, a partir de ella, una base ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_2}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\,\vec{v}_1 \\
\vec{v}_n &= \vec{u}_n - \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1}\,\vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2}\,\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\vec{v}_{n-1} \bullet \vec{u}_n}{\vec{v}_{n-1} \bullet \vec{v}_{n-1}}\,\vec{v}_{n-1}
\end{aligned}$$

y posteriormente, haciendo los vectores unitarios

$$B' = \left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \ldots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\}$$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

siendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.
Encuentra una base ortonormal para dicho producto escalar a partir de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= (1,0,0) \\
\vec{v}_2 &= (0,1,0) - \frac{(1,0,0)\bullet(0,1,0)}{(1,0,0)\bullet(1,0,0)}(1,0,0) = (0,1,0) - \frac{1}{1}(1,0,0) = (-1,1,0) \\
\vec{v}_3 &= (0,0,1) - \frac{(1,0,0)\bullet(0,0,1)}{(1,0,0)\bullet(1,0,0)}(1,0,0) - \frac{(-1,1,0)\bullet(0,0,1)}{(-1,1,0)\bullet(-1,1,0)}(-1,1,0) = \\
&= (0,0,1) - \frac{0}{1}(1,0,0) - \frac{-1}{1}(-1,1,0) = (-1,1,1)
\end{aligned}$$

para hacer estos 3 vectores unitarios calculamos su módulo y dividimos por el

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{(1,0,0)\bullet(1,0,0)} = 1, \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{(-1,1,0)\bullet(-1,1,0)} = 1$$

$$|\vec{v}_3| = \sqrt{(-1,1,1)\bullet(-1,1,1)} = \sqrt{1} = 1$$

con lo que la base ortonormal para dicho producto escalar sería

$$\vec{w}_1 = (1,0,0), \vec{w}_2 = (-1,1,0), \vec{w}_3 = (-1,1,1)$$