

Formulario Para Cálculo

▼ ÁLGEBRA

Conjuntos de Números:

Números Naturales	\mathbb{N}
Números Enteros	\mathbb{Z}
Números Racionales	\mathbb{Q}
Números Reales	\mathbb{R}
Números Complejos	\mathbb{C}

Simbología Lógica

\forall Para todo	\because Porque
\exists Existe	\Rightarrow Implica
$\exists!$ Existe un único	\Leftrightarrow Si y sólo si
\therefore Por lo tanto	tal que

Comparadores:

Igual	$=$	Más o menos igual	\approx
Desigual	\neq	Equivalente (<i>semejante</i>)	\sim
Mayor que	$>$	Mayor o igual que	\geq
Menor que	$<$	Menor o igual que	\leq

Propiedades Aritméticas

Asociativa	$x(yz) = z(xy)$
Conmutativa	$x + y = y + x$; $xy = yx$
Distributiva	$x(y + z) = xy + xz$

Leyes de los Radicales

$\sqrt[n]{x} = y \leftrightarrow x = y^n$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y}$
$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[n]{\frac{x^a}{y^b}} = \frac{\sqrt[n]{x^a}}{\sqrt[n]{y^b}}$
$\sqrt[n]{x^n} = x$, si n es impar	$\sqrt[n]{x^n} = x $, si n es par

Leyes de los Exponentes

Se sabe que...	$x^n = \underbrace{x * x * x \dots * x}_{n \text{ veces}}$
$x^0 = 1$, $x \neq 0$	$x^m * x^n = x^{m+n}$
$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
$(x^m)^n = (x^n)^m = x^{nm}$	$\frac{x^m}{x^n} = \sqrt[n]{x^m}$
$\left(\frac{x^m}{y^n}\right)^z = \frac{y^{mz}}{y^{nz}}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m$
$(x^m * y^n * z^a)^b = x^{mb} * y^{nd} * z^{ab}$	

Valor Absoluto

$ x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$ x = -x $
$x \leq x $; $-x \leq x $	$ xy = x y $
$ x + y \leq x + y $	$ x \geq 0$

Productos Notables

Cuadrado de un binomio:	
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	

Cuadrado de un trinomio:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Binomio conjugado:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Binomio con término común:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$$

Cubo de un binomio:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomio de la forma:

$$(mx + a)(nx + b) = mnx^2 + anx + bmx + ab$$

Binomio de Newton

Binomio elevado a n $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Dicho de otra forma:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} * b^i$$

En donde:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \rightarrow \text{Interpretación de un N. Combinatorio}$$

Factorización

Factor común:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Diferencia de Cuadrados:

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP):

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Trinomio de la forma:

$$acx^2 + x(ad + bc) + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Trinomio de la forma:

$$x^2 + x(a + b) + ab = (x + a)(x + b)$$

Suma o diferencia de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ecuaciones de Segundo Grado

Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde

$a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Discriminante: $I = b^2 - 4ac$

Si $I > 0$, las raíces son reales y diferentes

Si $I = 0$, las raíces $\in \mathbb{R}$ y son iguales

Si $I < 0$, ambas raíces $\in \mathbb{C}$

Propiedades de los Números Complejos

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

$$\sqrt{-x} = i\sqrt{x}, \quad x \geq 0 \quad (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

Formulario Para Cálculo

Media Armónica	≤	Media Geométrica
$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$		$\sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$
Media Geométrica	≤	Media Aritmética
$\sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n}$		$\frac{x_1 * x_2 * \dots * x_n}{n}$
Media Aritmética	≤	Media Cuadrática
$\frac{x_1 * x_2 * \dots * x_n}{n}$		$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$

▼ GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Funciones Trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{\text{Cat. Op a } \theta}{\text{Hip}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Cat. Ady a } \theta}{\text{Hip}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Cat. Op a } \theta}{\text{Cat. Ady a } \theta} = \frac{a}{b}$$

Razones Trigonométricas de ∠'s Notables				
Sxg	Rad	sin θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	π/6	1/2	√3/2	√3/3
45°	π/4	√2/2	√2/2	1
60°	π/3	√3/2	1/2	√3
90°	π/2	1	0	*

Círculo Trigonométrico

Se tiene una circunferencia con $r = 1$ y su centro en el origen

$$x^2 + y^2 = 1$$

Círculo trazado en el plano cartesiano y los signos de las funciones trigonométricas explicado

Cuadrante °	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I (0° – 90°)	+	+	+	+	+	+
II (90° – 180°)	+	–	–	–	–	+
III (180° – 270°)	–	–	+	+	–	–
IV (270° – 360°)	–	+	–	–	+	–

Identidades Trigonométricas

Recíprocas:

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \quad \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

De cociente:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

Pitagóricas:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

Ángulos Dobles:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \tan 2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

Ángulos Medios:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

Otras identidades:

$$\sin -\theta = -\sin \theta \quad \cos -\theta = \cos \theta$$

$$\tan -\theta = -\tan \theta \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta \quad \tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

$$\sin \theta = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad \cos \theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

Propiedades de los Logaritmos

$$\log_b 1 = 0 \quad \log_b b = 1$$

$$\log_b M^n = n * \log_b M$$

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} * \log_b M$$

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M = \frac{1}{\log_M b}$$

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

$$\log_e M = \ln M \quad \ln \alpha = \text{Logaritmo Neperiano}$$

Ángulos (Sistema Circular)

1 radián (1 rad) = 57.29°

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Radianes a Grados:

$$\frac{\text{Radianes} * 180}{\pi} = \text{Grados}$$

Grados a Radianes:

$$\frac{\text{Grados} * \pi}{180} = \text{Radianes}$$

Formulario Para Cálculo

▼ GEOMETRÍA ANALÍTICA

Línea Recta

Ecuación de una recta:

$Ax + By + C = 0$

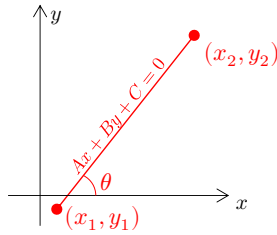
Pendiente de una recta que

pasa por dos puntos:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ángulo de la recta respecto a x

$\theta = \tan^{-1} m$



Distancia Entre Dos Puntos

A partir de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Condición de Paralelismo

Se tienen 2 líneas, ambas poseen la misma pendiente

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

Condición de Perpendicularidad

Líneas que cortan formando ángulos de 90°

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1 * m_2 = -1$

Parábola Vertical (Ecuación de 2º grado)

Teniendo una ecuación de segundo grado de la forma

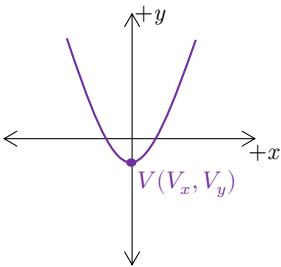
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Para hallar el punto del vértice:

$V = (V_x, V_y) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Cuando $a > 0$

Gráfica general:

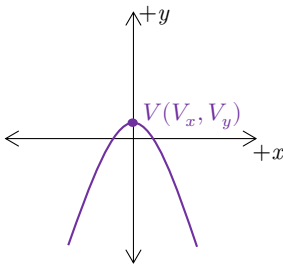


$D_f = x \in \mathbb{R}$

$R_f = x \in [V_y, +\infty)$

Cuando $a < 0$

Gráfica general:



$D_f = x \in \mathbb{R}$

$R_f = x \in (-\infty, V_y]$

NOTA: Las gráficas ilustradas son meramente orientativas. Las coordenadas del vértice, así como las soluciones de la ecuación pueden ser distintas a la de la gráfica para la mayoría de los casos.

▼ CÁLCULO DIFERENCIAL

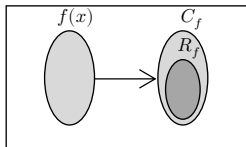
Rango, Contra dominio y Rango de 'f'

Dada una función 'f', se dice:

Dominio: (D_f)

Contra dominio: (C_f)

Rango: (R_f)

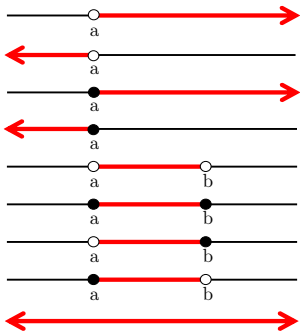


NOTA: El contra dominio y el rango son dos conceptos distintos. El conjunto de números que pertenecen al contra dominio siempre será mayor o igual en comparación al conjunto del rango $C_f \geq R_f$

Tabla de Intervalos

Desigualdad	Intervalo
$x > a$	(a, ∞)
$x < a$	$(-\infty, a)$
$x \geq a$	$[a, \infty)$
$x \leq a$	$(-\infty, a]$
$a < x < b$	(a, b)
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a < x \leq b$	$(a, b]$
$a \leq x < b$	$[a, b)$
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

Gráfica



Operaciones Con Funciones

Cualquier operación básica entre dos funciones implica la intersección de sus dominios:

Suma $f(x) + g(x) = (f + g)(x), D_f \cap D_g$

Resta $f(x) - g(x) = (f - g)(x), D_f \cap D_g$

Producto $f(x) * g(x) = (f * g)(x), D_f \cap D_g$

División $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x), D_f \cap D_g$

Función Composición ('f' de Funciones)

Una función compuesta por otra función:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

Teoremas de Límites

$\lim_{x \rightarrow a} (c) = c$

$\lim_{x \rightarrow a} (x) = a$

$\lim_{x \rightarrow a} (c * f(x)) = c * \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) * \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ si } g(x) \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right]^n$

Cuando x tiende a infinito con el siguiente formato:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$

En donde:

c es una constante

f(x), g(x) son funciones distintas

a valor numérico al cual tiende ese límite

Continuidad

Una función f(x) es continua en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si cumple con las siguientes condiciones

1. $f(x_0)$ está definida
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Formulario Para Cálculo

Regla de L'Hôpital

Si $f(x), g(x)$ son 2 funciones continuas tal que:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ g'(x) \neq 0 \end{cases} \leftarrow \text{Derivada de } g(x), \text{ ya que es la función denominadora}$$

La regla de L'Hôpital nos dice que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla aplica para los límites de la forma $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, con alguna de las siguientes indeterminaciones:

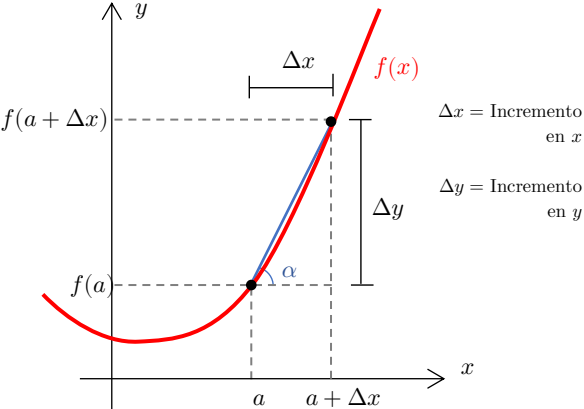
$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

Derivada Por Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada:



Derivadas de Funciones Básicas y Vareadas

- $\frac{d}{dx}[c] = 0$
- $\frac{d}{dx}[x] = 1$
- $\frac{d}{dx}[c * v] = c * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[u \pm v \pm w] = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[x^n] = n * x^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}[v^n] = v^{n-1} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\sqrt[n]{v}] = \frac{1}{n * \sqrt[n]{v^{n-1}}} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\sqrt{v}] = \frac{\frac{dv}{dx}}{2\sqrt{v}}$
- $\frac{d}{dx}[u * v] = u * \frac{dv}{dx} + v * \frac{du}{dx}$

- $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v * \frac{du}{dx} - u * \frac{dv}{dx}}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{c}{v}\right] = -\frac{c * \frac{dv}{dx}}{v^2}$
- $\frac{d}{dx}\left[\frac{v}{c}\right] = \frac{\frac{dv}{dx}}{c}$
- $\frac{d}{dx}[\sin(v)] = \cos(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\cos(v)] = -\sin(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\tan(v)] = \sec^2(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\cot(v)] = -\csc^2(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\sec(v)] = \sec(v) * \tan(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\csc(v)] = -\csc(v) * \cot(v) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\arcsin(v)] = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\arccos(v)] = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\arctan(v)] = \frac{1}{1+v^2} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\text{arccot}(v)] = -\frac{1}{1+v^2} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\text{arcsec}(v)] = \frac{1}{v * \sqrt{v^2-1}} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\text{arccsc}(v)] = -\frac{1}{v * \sqrt{v^2-1}} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[\ln(v)] = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$
- $\frac{d}{dx}[\log_b(v)] = \frac{\log_b(e)}{v} * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[e^v] = e^v * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[a^v] = a * \ln(a) * \frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[u^v] = v * u^{v-1} * \frac{du}{dx} + \ln(u) * u^v * \frac{dv}{dx}$

NOTAS:

Formulario Para Cálculo

08-03-2023: Agregar ciertos teoremas
introducidos por Mandrake durante las clases de
Cálculo

11-03-2023: Agregar temas de límites,
derivadas, derivadas implícitas, optimización,
integrales definidas e indefinidas. Agregando
álgebras de matrices