Diseño y Análisis de Algoritmos. Problema 1: El Zoológico

Jesús Santos Capote y Kenny Villalobos Morales

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba

1. Definición del Problema

En un zoológico un poco especial, se separa a los animales en dos hábitats diferentes de manera general. El hábitat para la reproducción solo acepta animales de la misma especie, mientras que el hábitat para la maduración admite animales de distintas especies, pero no de géneros distintos. El zoológico está pasando por una remodelación, ya que va a recibir n especies distintas de animales, cada una con un número 'a' de hembras y 'b' de machos, que puede ser distinto entre cada especie. En la remodelación se está pensando en construir salas de exhibición de los animales. Cada una se construirá para ser un hábitat de reproducción o de maduración, y cada sala podrá soportar un máximo de k animales, lo cual es igual para todas las salas. Como el zoológico necesita ser rentable y cada sala se cobra por separado, se quiere construir el máximo número posible de salas que cumplan con los requerimientos planteados y que, además, estén llenas de animales para el disfrute de los visitantes. ¿Cuántas salas deberá construir el zoológico?

2. Modelación del Problema

Se tiene una matriz de dimensión $2 * n$, donde cada casilla contiene números enteros. El problema consiste en hallar la cantidad máxima de grupos de tamaño k que se pueden formar, donde cada elemento de un grupo es una unidad perteneciente a una casilla de la matriz. Además, todos los elementos de un grupo deben pertenecer a casillas de una misma fila o de una misma columna de la la matriz.

3. Primera Aproximación

Como primera solución se propone aplanar la matriz de entrada para obtener una lista de T elementos, siendo T la suma de todos los elementos de la matriz, donde en cada posición hay un animal. Los animales son modelados como una clase *Animal* que tiene dos atributos: *gender*, fila a la que pertenece en la matriz (género), y *specie*, columna a la que pertenece en la matriz (especie). Luego generar todas las permutaciones de la matriz aplanada y por cada una dividirla mediante índices en porciones de tamaño k, contar cuantas de estas porciones son grupos válidos y actualizar, de ser necesario, el máximo;

3.1. Optimalidad

Sea $S = [a_1, a_2, \ldots, a_T]$ una distribución de los animales de la matriz aplanada, tal que la cantidad de porciones de tamaño k que se pueden formar a partir de ella, que cumplen las restricciones del problema, sea máxima. Esta distribución S es una permutación de los elementos de la matriz aplanada. El algoritmo propuesto revisa todas las permutaciones de la matriz aplanada y calcula la cantidad de grupos factibles, por tanto, revisa a S. Luego el algoritmo encuentra la respuesta óptima.

3.2. Complejidad Temporal

Aplanar la matriz tiene costo $O(T)$ donde T es la cantidad de animales. Computar todas las permutaciones de una lista de tamaño T tiene un costo $O(T!)$. La comprobación de cuántos grupos factibles contiene una permutación de T elementos tiene complejidad $O(T)$ y esta comprobación se realiza para cada permutación. Luego por el teorema de la multiplicación contar cuantos grupos factibles tiene cada permutación tiene complejidad $O(T*T!)$. Luego el algoritmo tiene complejidad $O(T+T*T!+T)$ y por el teorema de la suma, la complejidad final es $O(T*T!)$.

4. Solución Greedy

Sea $M = \sum_{i=0}^{n} matriz[0,i]$, $F = \sum_{i=0}^{n} matriz[1,i]$ y $T = M + F$.

La cantidad máxima de grupos que se pueden formar es $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor$. Para toda posible entrada de datos del problema, la solución es mayor o igual que $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor - 1$. Demostremos esto:

Cumpliendo con las restricciones del problema, siempre es posible formar $\lfloor \frac{M}{k} \rfloor = p_1 + \lfloor \frac{F}{k} \rfloor = p_2$ grupos factibles, donde cada unidad de los grupos pertenece a una misma fila, quedando r_1 y r_2 elementos residuales en cada fila respectivamente. Luego:

$$M = p_1 * k + r_1, \quad r_1 < k$$

$$F = p_2 * k + r_2, \quad r_2 < k$$

$$T = M + F = p_1 * k + p_2 * k + r_1 + r_2$$

Como $r_1, r_2 < k$, entonces $r_1 + r_2 < 2k$. Luego, si $r_1 + r_2 < k$, tomando $r_3 = r_1 + r_2$, se cumple que:

$$T = (p_1 + p_2)k + r_3, \quad r_3 < k$$

Luego $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor = p_1 + p_2 = \lfloor \frac{M}{k} \rfloor + \lfloor \frac{F}{k} \rfloor$

Si $r_1 + r_2$ no es menor que k entonces $r_1 + r_2 \geq k$, entonces $r_1 + r_2 = r_3 + k$ con $r_3 < k$. Luego se cumple que:

$$T = (p_1 + p_2)k + k + r_3 = (p_1 + p_2 + 1)k + r_3$$

Luego $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor = p_1 + p_2 + 1$ entonces $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor - 1 = p_1 + p_2 = \lfloor \frac{M}{k} \rfloor + \lfloor \frac{F}{k} \rfloor$

Para el caso en que $r_1 + r_2 < k$, como $\lfloor \frac{T}{k} \rfloor = p_1 + p_2$ esta solución es factible y óptima.

Para el caso en que $r_1 + r_2 \geq k$, como $p_1 + p_2 = \lfloor \frac{T}{k} \rfloor - 1$, esta solución es factible pero no garantizamos que sea óptima.

Si existe