Proyecto: Sistema Urinario

Marla Espinoza Bedoya (21212152); Abraham Gómez Aguilar(21212158);
Jesus Zamora Cervantes (21212185)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 13, 2024

Palabras clave: Uretra, Incontinencia, Filtración glomerular; Controlador; Orina.

Correo: **l21212152@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

Se analiza el circuito utilizando la Ley de Voltajes de Kirchhoff y así encontrar la ecuación de la presión hidrostática sanguínea, $P_h(t)$ que llega a las nefronas en los riñones y la presión de salida $P_e(t)$ que percibe la uretra y sus esfínteres que retienen la orina, es decir, la entrada y salida del sistema respectivamente. El riñón realiza dos funciones principales: filtrar la sangre y reabsorber el contenido, lo que da como consecuencia el desecho de lo que no sirve, contenido en la orina. Para representar esto se utilizan dos resistencias, la primera R_1 en la rama principal en serie con la presión de entrada cuyo flujo corresponde a la sangre que llega a los riñones $Fs(t)$, y la segunda en la primera rama secundaria, representando la reabsorción, cuyo flujo es igual al flujo de sangre a los riñones menos la orina generada como desecho, $Fs(t) - O(t)$. De tal manera que la presión de entrada se representa como:

$$P_h(t) = R_1 Fs(t) + R_2 \left[Fs(t) - O(t)\right]$$

Luego en la segunda rama secundaria se representan el resto de los órganos del sistema urinario, los ureteres al presentar movimientos peristálticos, los cuales son contracciones que generan ondas que ayudan a transportar la orina desde los riñones hacia la vejiga, impidiendo que fluya en sentido contrario, se representa con un inductor L, cuyo flujo corresponde a la orina $O(t)$. Luego llega a la vejiga, al cual está prevista de propiedades elásticas que le permiten expandirse a medida que se llena de orina, lo cual permite que sea representada con un capacitor C. Dicho esto la rama donde sucede la reabsorción y por done fluye la orina puede ser igualada de la siguiente manera:

$$R_2\left[Fs(t)-O(t)\right]=L\frac{dO(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int O(t)dt+R_3O(t)$$

Finalmente, cuando es momento de excretar la orina producida, se dirige a la uretra la cual está rodeada de esfínteres internos y externos, este último siendo voluntario, que permite liberar la orina de manera consciente, se representa con una resistencia R_3,cuyo flujo es el mismo y por donde haya salida.

$$P_e(t)=R_3O(t)$$

1.2 Transformada de Laplace

Se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones principales, cuyo método consiste en el intercambio de la variable dependiente por la letra s, lo cual transforma las ecuaciones del dominio del tiempo al de frecuencia. Se obtienen los siguientes resultados, para la función de entrada:

$$P_h(s)=R_1Fs(s)+R_2\left[Fs(s)-O(s)\right]$$

Para la segunda ecuación principal se obtiene:

$$R_2\left[Fs(s)-O(s)\right]=LsO(s)+\frac{O(s)}{Cs}+R_3O(s)$$

Para la ecuación de salida del sistema se obtiene:

$$P_e(s)=R_3O(s)$$

1.3 Procedimiento algebraico

Para obtener la función de transferencia se deben despejar las ecuaciones transformadas a Laplace para que la entrada y salida estén en función de una única variable dependiente, en este caso se busca mantener ambas ecuaciones en función de $O(s)$, ya que se puede observar que la ecuación de la presión de salida se encuentra únicamente en función de la misma. Para esto se despeja el flujo de sangre representado por $Fs(s)$. Se empieza por la segunda ecuación principal, despejando el único término que contiene $Fs(s)$:

$$R_2Fs(s)-R_2O(s)=LsO(s)+\frac{O(s)}{Cs}+R_3O(s) \tag{1}$$

$$R_2Fs(s)=LsO(s)+\frac{O(s)}{Cs}+R_3O(s)+R_2O(s)$$

$$R_2Fs(s)=\frac{LsO(s)Cs+O(s)+R_3O(s)Cs+R_2O(s)Cs}{Cs}$$

$$Fs(s)=\frac{LsO(s)Cs+O(s)+R_3O(s)Cs+R_2O(s)Cs}{R_2Cs}$$

Una vez hecho esto, se factoriza la variable dependiente representada por $O(s)$, para ser suprimida con mayor facilidad posteriormente.

$$Fs(s) = O(s)\left[\frac{LsCs + 1 + R_3Cs + R_2Cs}{R_2Cs}\right]$$

Tomando la primera ecuación principal, se sustituye la ahora despejada $Fs(s)$ en los términos correspondientes:

$$P_h(s) = R_1Fs(s) + R_2Fs(s) - R_2O(s)$$

$$P_h(s) = Fs(s)\left[R_1 + R_2\right] - R_2O(s)$$

$$P_h(s) = O(s)\left[\frac{LsCs + 1 + R_3Cs + R_2Cs}{R_2Cs}\right]\left[R_1 + R_2\right] - R_2O(s)$$

Se multiplica, se condensa todo para que todas las variables tengan el mismo denominador y se reducen términos.

$$P_h(s) = O(s)\left[\frac{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1 + (R_2)^2\,Cs}{R_2Cs}\right] - R_2O(s)$$

$$P_h(s) = O(s)\left[\frac{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1 + (R_2)^2\,Cs - (R_2)^2\,Cs}{R_2Cs}\right]$$

Se mantiene despejada el flujo $O(s)$ en la nueva ecuación de entrada.

$$P_h(s) = O(s)\left[\frac{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1}{R_2Cs}\right]$$

Se aplica la función de transferencia colocando a la entrada como el denominador de la operación y la salida como el numerador, en ambas se factoriza el flujo $O(s)$ para eliminarlo de la ecuación al ser un términocontenido en ambas ecuaciones.

$$\frac{P_e(s)}{P_h(s)} = \frac{R_3O(s)}{O(s)\left[\frac{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1}{R_2Cs}\right]}$$

$$\frac{P_e(s)}{P_h(s)} = \frac{R_3}{\frac{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1}{R_2Cs}}$$

Se multiplica y se reducen términos para obtener:

$$\frac{P_e(s)}{P_h(s)} = \frac{R_2R_3Cs}{LCs^2R_1 + LCs^2R_2 + R_1 + R_2 + R_3CsR_1 + R_3CsR_2 + R_2CsR_1}$$

Finalmente se agrupan las variables del mismo nivel y se cambia la prioridad de los términos, primero R, luego C y finalmente L.

$$\frac{P_e(s)}{P_h(s)} = \frac{R_2R_3Cs}{\left(R_1CL + R_2CL\right)s^2 + \left(R_1R_3C + R_2R_3C + R_1R_2C\right)s + R_1 + R_2}$$

1.4 Resultado

La función de transferencia obtenida para la representación del sistema urinario es:

$$\frac{P_e(s)}{P_h(s)} = \frac{R_2R_3Cs}{(R_1CL + R_2CL)\,s^2 + (R_1R_3C + R_2R_3C + R_1R_2C)\,s + R_1 + R_2}$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

Para determinar la estabilidad del sistema en lazo abierto, se calculan los polos de la función de transferencia, es decir:

$$a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

donde las variables son:

$$\begin{aligned} a_2 &= R_1CL + R_2CL \\ a_1 &= R_1R_3C + R_2R_3C + R_1R_2C \\ a_0 &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Valores de parámetros para el control y el caso:

$$R_1 = 10 \times 10^3$$

$$R_2 = 1000 \times 10^3$$

$$L = 4.7 \times 10^{-3}$$

Estabilidad para el control (individuo saludable):

$$C = 440 \times 10^{-6}$$

$$R_3 = 20 \times 10^3$$

$$2.0887s^2 + 1.3288 \times 10^7 s + 0.6 = 0.0$$

En donde las raíces de la ecuación de segundo orden son:

$$\lambda_1 = -4.5154 \times 10^{-8}$$

$$\lambda_2 = -6.3619 \times 10^6$$

Para el caso del individuo enfermo (paciente con incontinencia):

$$C = 110 \times 10^{-6}$$

$$R_3 = 5 \times 10^3$$

$$0.52217s^2 + 1655.5 \times 10^3 s + 0.6 = 0.0$$

Las raíces obtenidas son las siguientes:

$$\lambda_2 = -3.\,624\,3 \times 10^{-7}$$

$$\lambda_2 = -3.\,624\,3 \times 10^{-7}$$

Se observa que las ambos pares de raíces para control y caso son reales y negativas, por lo tanto, se concluye que ambos sistemas son estables.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

Para obtener el modelo de ecuaciones integro-diferenciales se despejan los flujos o corrientes, en este caso correspondientes al flujo de sangre de entrada y la orina, junto con la salida, siendo la presión en la uretra, ya que corresponden a las variables dependientes del sistema. Se hace a partir de las ecuaciones principales:

$$\begin{aligned}
Fs(t) &= [P_h(t) - R_1Fs(t) + R_2O(t)]\left[\frac{1}{R_2}\right], \\
O(t) &= \left[R_2Fs(t) - L\frac{dO(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int O(t)dt - R_3O(t)\right]\left[\frac{1}{R_2}\right] \\
P_e(t) &= R_3O(t)
\end{aligned}$$

4 Error en estado estacionario

Para calcular el error en estado estacionario, es necesario calcular el siguiente límite, donde R(s) representa un escalón de entrada [1/s].

$$e\left(t\right) = \lim_{s\to 0} sR\left(s\right)\left[1 - \frac{P_h\left(s\right)}{P_e\left(s\right)}\right] = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left[1 - \frac{R_2R_3Cs}{\left(R_1CL + R_2CL\right)s^2 + \left(R_1R_3C + R_2R_3C + R_1R_2C\right)s + R_1 + R_2}\right]$$

$$= 1V.$$

$$R(s) : \text{Representa la entrada al sistema [el escalón } \frac{1}{s}]$$

$$\frac{P_h\left(s\right)}{P_e\left(s\right)} : \text{Representa la entrada al sistema [el escalón } \frac{1}{s}]$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Para obtener los valores de ganancia que permitan elaborar un controlador PID se grafica la respuesta de presión del paciente sano (control), el tratamiento y el caso de paciente enfermo del sistema urinario en lazo cerrado configurando la velocidad de la respuesta para que el sobreimpulso no sea mayor a 10% (esto porque se busca mantener la respuesta del tratamiento sea lo más parecida a la señal de control para que sea efectivo el controlador), al realizar esto se obtiene un controlador de tipo I, es decir solo se tiene la parte integral del mismo, lo quiere decir que es útil para eliminar el error en estado estacionario a la salida del sistema. El valor de ganancia obtenido para dicho elemento de control tiene un valor de:

$$k_I = \frac{1}{R_e C_r} = 1317.4583$$

$$C_r = 1 \times 10^{-6}$$

Se propone un valor de capacitor de Cr, para obtener los valores de los componentes electrónicos necesarios para que el controlador regule adecuadamente el sistema, que es el siguiente:

$$R_e = \frac{1}{k_I C_r} = \frac{1}{(1317.4583)(1 \times 10^{-6})} = 759.04\Omega$$