

# Aplicación de un Modelo DTGARCH con Ruido Blanco t-Student en Series de Tiempo Financieras derivadas de los Índices BOVESPA y Dow-Jones

Adriana Gaitán V, Jesús D. Hernández.

Director

Joaquín González B.

Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística.



Universidad del Tolima

Facultad de Ciencias

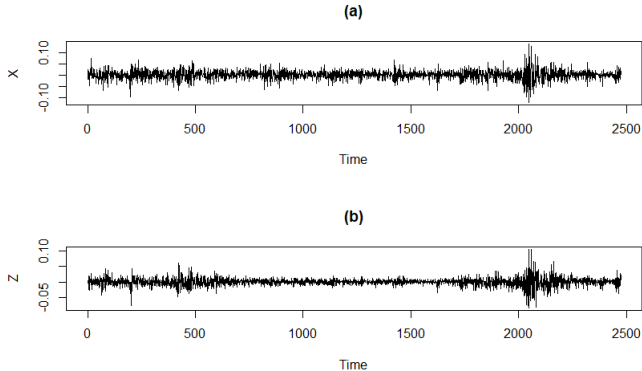
Departamento de Matemáticas y Estadística

Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística

Ibagué

2018

## Motivación



Datos financieros.

(a)  $X_t = \ln(BOVESPA_t) - \ln(BOVESPA_{t-1})$ .

(b)  $Z_t = \ln(DOWJONES_t) - \ln(DOWJONES_{t-1})$ .

# Contenido

- 1 Introducción
- 2 Consideraciones Teóricas
  - Especificación del modelo DTGARCH
  - Función de verosimilitud condicional
    - Densidades a priori
    - Densidades a posteriori
  - Algoritmo
    - Esquema Metrópolis Hastings de Caminata Aleatoria
    - Esquema Metrópolis Hastings Independiente
- 3 Ejemplos Ilustrativos
  - Un ejemplo simulado
  - Una aplicación en finanzas
- 4 Conclusiones
- 5 Referencias

# Objetivos

## Objetivo General

Aplicar la metodología Bayesiana propuesta por Chen, Gerlach y So (2006) para modelos DTGARCH con errores t-Student, a series de tiempo financieras derivadas de los índices BOVESPA y Dow-Jones.

## Objetivos Específicos

- Estimar los parámetros desconocidos de un modelo DTGARCH.
- Chequear la validación del modelo DTGARCH con los residuales estandarizados.
- Ilustrar la metodología considerada con un ejemplo simulado.
- Aplicar la metodología considerada para comparar la captura de la volatilidad.

## Introducción

- Los modelos de series de tiempo han sido usados en campos tan diversos como la economía, la meteorología, las finanzas, la biología, entre otros. los modelos TAR (Threshold Autoregressive Models) propuestos inicialmente por Tong (1978), asumen que los valores de un proceso (denominado el proceso de umbrales)  $\{Z_t\}$  determinan la dinámica del proceso de interés  $\{X_t\}$ .
- Nieto (2005) diseñó una metodología Bayesiana para la identificación y la estimación de los modelos TAR en presencia de datos faltantes, además, Nieto (2008) desarrolla la fase de cálculo de pronóstico con estos modelos.

## Introducción

- Moreno y Nieto (2014) compararon el ajuste de los modelos TAR con ruidos Gaussianos con los modelos GARCH con ruidos t-Student en series financieras de indicadores de bolsas de valores, y encontraron que los modelos TAR con ruidos Gaussianos pueden tener dificultades para capturar la heterocedasticidad marginal de la serie.
- Zhang y Nieto (2015) modelan un TAR con datos faltantes cuando el proceso del ruido blanco tiene una distribución t-Student. Proponen en futuras investigaciones usar el modelo TAR junto al modelo GARCH dado que puede existir la posibilidad de mejores pronósticos y una mejora en el ajuste de los datos.

## Especificación del modelo DTGARCH

Sean  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$  procesos estocásticos relacionados por la ecuación:

$$X_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \phi_i^{(j)} X_{t-i} + a_t \quad \text{Ecuación de la Media}$$

$$a_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} a_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} h_{t-n} \quad \text{Ecuación de la Volatilidad}$$

si  $r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j$ , con  $j = 1, \dots, l$ , donde  $\{\varepsilon_t\} \sim \frac{t_\nu}{\sqrt{\nu(\nu-2)}}$ .

El modelo se simboliza como  $DTGARCH(l; k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l)$  y se dice que  $\{X_t\}$  es un modelo TAR con un GARCH de umbrales.

## Supuestos y definiciones.

### Supuestos y definiciones:

- $\{Z_t\}$  es la variable de umbrales y  $\{X_t\}$  es la variable de interés.
- Se asume  $\{Z_t\}$  que es un proceso estacionario con distribución continua.



## Supuestos y definiciones.

### Supuestos y definiciones:

- $\{Z_t\}$  es la variable de umbrales y  $\{X_t\}$  es la variable de interés.
- Se asume  $\{Z_t\}$  que es un proceso estacionario con distribución continua.
- $\{Z_t\}$  es exógena a  $\{X_t\}$ , en el sentido de que  $\{X_t\}$  no retroalimenta a  $\{Z_t\}$ .

## Supuestos y definiciones.

### Supuestos y definiciones:

- $\{Z_t\}$  es la variable de umbrales y  $\{X_t\}$  es la variable de interés.
- Se asume  $\{Z_t\}$  que es un proceso estacionario con distribución continua.
- $\{Z_t\}$  es exógena a  $\{X_t\}$ , en el sentido de que  $\{X_t\}$  no retroalimenta a  $\{Z_t\}$ .
- $\{\varepsilon_t\}$  y  $\{Z_t\}$  son mutuamente independientes.

## Supuestos y definiciones.

### Supuestos y definiciones:

- $\{Z_t\}$  es la variable de umbrales y  $\{X_t\}$  es la variable de interés.
- Se asume  $\{Z_t\}$  que es un proceso estacionario con distribución continua.
- $\{Z_t\}$  es exógena a  $\{X_t\}$ , en el sentido de que  $\{X_t\}$  no retroalimenta a  $\{Z_t\}$ .
- $\{\varepsilon_t\}$  y  $\{Z_t\}$  son mutuamente independientes.
- $\alpha_0^{(j)} > 0$  ;  $\alpha_m^{(j)}, \beta_n^{(j)} \geq 0$  ;  $\sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} < 1$  ;  $\sum_{i=1}^p \max_j |\phi_i^{(j)}| < 1$ .

## Supuestos y definiciones.

### Supuestos y definiciones:

- $\{Z_t\}$  es la variable de umbrales y  $\{X_t\}$  es la variable de interés.
- Se asume  $\{Z_t\}$  que es un proceso estacionario con distribución continua.
- $\{Z_t\}$  es exógena a  $\{X_t\}$ , en el sentido de que  $\{X_t\}$  no retroalimenta a  $\{Z_t\}$ .
- $\{\varepsilon_t\}$  y  $\{Z_t\}$  son mutuamente independientes.
- $\alpha_0^{(j)} > 0$  ;  $\alpha_m^{(j)}, \beta_n^{(j)} \geq 0$  ;  $\sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} < 1$  ;  $\sum_{i=1}^p \max_j |\phi_i^{(j)}| < 1$ .

## Parámetros

### Parámetros estructurales:

- $l$  : Número de regímenes.
- $k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l$  : Órdenes autorregresivos.
- $r_1, \dots, r_{l-1}$  : Valores umbrales.
- $d$  : Parámetro de rezago.

### Parámetros no estructurales:

- $\phi_j = (\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{k_j}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, l$
- $\alpha_j = (\alpha_0^{(j)}, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{p_j}^{(j)}, \beta_0^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_{q_j}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, l$
- $\nu$  : Grados de libertad de la t-Student.

## Parámetros

### Parámetros estructurales:

- $l$  : Número de regímenes.
- $k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l$  : Órdenes autorregresivos.
- $r_1, \dots, r_{l-1}$  : Valores umbrales.
- $d$  : Parámetro de rezago.

### Parámetros no estructurales:

- $\phi_j = (\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{k_j}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, l$
- $\alpha_j = (\alpha_0^{(j)}, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{p_j}^{(j)}, \beta_0^{(j)}, \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_{q_j}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, l$
- $\nu$  : Grados de libertad de la t-Student.

## Función de Verosimilitud Condicional

Sean  $x_{1,k} = (x_1, \dots, x_k)$  con  $k = \max\{k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; d\}$  y  $z_{1,T} = \{z_1, \dots, z_T\}$ , la función de verosimilitud condicional estará dada por:

$$f(x_{k+1,T} | x_{1,k}, z_{1,T}, \Theta) = f(x_{k+1} | x_{1,k}, z_{1,T}, \Theta) \cdot \dots \cdot f(x_T | x_{1,k}, x_{k+1,T-1}, z_{1,T}, \Theta)$$

donde  $\Theta = (\phi_1, \dots, \phi_l, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, r, d, \nu)$  y T es el número de observaciones totales de la serie.

Como  $\{\varepsilon_t\} \sim \frac{t_\nu}{\sqrt{\nu(\nu-2)}}$  para  $t = k+1, \dots, T$  se tiene que

$$f(x_{k+1,T} | x_{1,k}, z_{1,T}, \Theta) = \prod_{t=k+1}^T \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi(\nu-2)}} \frac{1}{\sqrt{h_t}} \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_t)^2}{(\nu-2)h_t} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \right\}$$

$$\text{con } \mu_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \phi_i^{(j)} x_{t-i} \text{ y } h_t = \alpha_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} a_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} h_{t-n}.$$

## Desidades a priori y a posteriori

Se asume independencia a priori, se asumen conocidos los hiperparámetros. Se conocen o se estiman en forma preliminar el número de regímenes  $l$  y los órdenes autorregresivos. Siguiendo a Chen, Gerlach y Lin (2009), y Zhang y Nieto (2015), procedemos a obtener las densidades a posteriori de los coeficientes autorregresivos  $\phi_j$  y  $\alpha_j$  con  $j = 1, \dots, l$ , los valores umbrales  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$ , el parámetro de rezago  $d$  y los grados de libertad del proceso de ruido  $\nu^* = \frac{1}{\nu}$ .



## Densidades a priori

- $\phi_j \sim N(\phi_{0,j}, \mathbf{V}_{0,j}^{-1})$
- $\alpha_j \sim I\left(\alpha_0^{(j)} > 0 ; \alpha_m^{(j)}, \beta_n^{(j)} \geq 0 ; \left(\sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)}\right) < 1\right)$
- La densidad a priori para el valor umbral  $\mathbf{r}$  es la inversa de la integral

$$C = \int \dots \int_A dr_1 \dots dr_{l-1}$$

con  $A$  una región en la que se satisface

- $P_a < r_1 < \dots < r_{l-1} < P_b$
- Cada regimen contiene al menos  $H\%$  de los datos de la variable de umbrales rezagada  $Z_{t-d}$ .

Así

$$\mathbf{r} \sim I(P_a < r_1 < \dots < r_{l-1} < P_b, \mathbf{r} \in A)$$

- $d \sim I(d \in 0, 1, \dots, d_0)$  con  $d_0$  : un rezago máximo considerado.
- $\nu^* \sim I(\frac{1}{\nu} \in [0, 0.25])$

## Densidades a posteriori

### Proposición 1

Para cada  $j = 1, \dots, l$ , la distribución condicional a posteriori de  $\phi_j$ , dados los parámetros  $\phi_i$  con  $i \neq j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\nu^*$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  y  $d$  es de la forma:

$$f(\phi_j | \phi_i, i \neq j, \alpha_j, x_{1,k}, z_{1,T}, \mathbf{r}, d, \nu^*) \propto \prod_{t=k+1}^T \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_t)^2}{(\nu - 2)h_t} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\phi_j - \phi_{0,j})' \mathbf{V}_{0,j} (\phi_j - \phi_{0,j}) \right\}$$

## Densidades a posteriori

### Proposición 2

Para cada  $j = 1, \dots, l$ , la distribución condicional a posteriori de  $\alpha_j$ , dados los parámetros  $\phi_j$ , con  $j = 1, \dots, l$ ,  $\alpha_i$  con  $i \neq j$ ,  $\nu^*$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  y  $d$  es de la forma:

$$\begin{aligned}
 & f(\alpha_j | \alpha_i, i \neq j, \phi_j, x_{1,k}, z_{1,T}, \mathbf{r}, d, \nu^*) \\
 &= \prod_{t=k+1}^T \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\pi(\nu-2)}} \frac{1}{\sqrt{h_t}} \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_t)^2}{(\nu-2)h_t} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \right\} \\
 & \times I \left( \alpha_0^{(j)} > 0 ; \alpha_m^{(j)}, \beta_n^{(j)} \geq 0 ; \left( \sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} \right) < 1 \right)
 \end{aligned}$$

## Densidades a posteriori

### Proposición 3

Sea  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  el vector de valores umbrales, la distribución condicional a posteriori dados los parámetros  $\phi_j, \alpha_i$  con  $j = 1, \dots, l$ ,  $\nu^*$  y  $d$  es de la forma:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{r} | \phi_j, \alpha_j, x_{1,k}, z_{1,T}, d, \nu^*) \\ &= \prod_{t=k+1}^T \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi(\nu-2)}} \frac{1}{\sqrt{h_t}} \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_t)^2}{(\nu-2)h_t} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \right\} \\ & \times I(P_a < r_1 < \dots < r_{l-1} < P_b, r \in A) \end{aligned}$$

## Densidades a posteriori

### Proposición 4

La distribución condicional a posteriori del parámetro  $d$  dados los parámetros  $\phi_j, \alpha_j, \nu^*, \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  es una multinomial:

$$f(d = j^* | \phi_j, \alpha_j, x_{1,k}, z_{1,T}, \mathbf{r}, \nu^*) \\
= \frac{f(\mathbf{x}_{k+1,T} | d=j^*, \phi_j, \alpha_j, z_{1,T}, \mathbf{r}, \nu^*) Pr(d = j^*)}{\sum_{i=0}^{d_0} f(\mathbf{x}_{k+1,T} | d=i, \phi_j, \alpha_j, z_{1,T}, \mathbf{r}, \nu^*) Pr(d = i)}$$

## Densidades a posteriori

### Proposición 5

La distribución condicional a posteriori de los grados de libertad del proceso del ruido  $\{\varepsilon_t\}$ , dado los parámetros  $\boldsymbol{\phi}_j = (\phi_1, \dots, \phi_l)'$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)'$ ,  $d$  y  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$  es:

$$\begin{aligned} f(\nu^* | \boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{\alpha}_j, x_{1,k}, z_{1,T}, \mathbf{r}, d) \\ = \prod_{t=k+1}^T \left\{ \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{\pi(\nu-2)}} \frac{1}{\sqrt{h_t}} \left[ 1 + \frac{(x_t - \mu_t)^2}{(\nu-2)h_t} \right]^{-\frac{\nu+1}{2}} \right\} \\ \times I\left(\frac{1}{\nu} \in [0, 0.25]\right) \end{aligned}$$

## Algoritmo

Se utilizan las densidades a posteriori de cada uno de los parámetros para generar las muestras iterativas deseadas.

- 1) Fijar los valores iniciales para  $\phi_j, \alpha_j$  con  $j = 1, \dots, l$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$ ,  $d$  y  $\nu^*$ .
- 2) Para la iteración  $g = 1, \dots, G$ , donde  $G$  es la longitud de la cadena MCMC, se simula un valor para  $\phi_j, \alpha_j$  con  $j = 1, \dots, l$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$ ,  $d$  y  $\nu^*$  como sigue:
  - Para  $\phi_{j,g}$  usando Metrópolis Hastings (Caminata Aleatoria).
  - Para  $\alpha_{j,g}$  usando Metrópolis Hastings (Caminata Aleatoria e Independiente).
  - Para  $\mathbf{r}_g$  usando Metrópolis Hastings (Caminata Aleatoria).
  - Para  $\mathbf{d}_g$  usando la distribución multinomial.
  - Para  $\nu_g^*$  usando Metrópolis Hastings (Caminata Aleatoria).
- 3) Tomar  $g = g + 1$  y volver al paso 2).

## Algoritmo

Las estimaciones puntuales y por intervalo de los parámetros de cualquier función excepto la del rezago  $d$  se obtienen promediando la función en todas las iteraciones de muestra después del período de calentamiento. La estimación del parámetro de rezago  $d$  se obtiene con la moda de todas las iteraciones obtenidas después del periodo de calentamiento.

Puede haber una convergencia lenta en la cadena de Markov, especialmente cuando  $\sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} \simeq 1$  con  $j = 1, \dots, l$ . Para mejorar la convergencia MCMC se emplea un Metrópolis Hastings Independiente después del periodo de calentamiento. Chen, Gerlach y So (2006).



## Algoritmo Metrópolis Hastings de Caminata Aleatoria

El algoritmo Metrópolis Hastings caminata aleatoria simula una cadena de Markov cuya distribución es  $f(\theta^*|\theta_{t-1})$  siendo  $f(\cdot)$  la función objetivo.

- 1 Generar una observación  $\theta^*$  apartir de la caminata aleatoria.

$$\theta^* = \theta_{t-1} + a * N(0, 1)$$

Donde  $\theta_{t-1}$  es la  $(t - 1)$ -ésima iteración y  $a$  es el tamaño de paso.

- 2 Generar una variable  $u \sim U(0, 1)$ .
- 3 Calcular la probabilidad de aceptar el valor generado:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{f(\theta^*|x)}{f(\theta_{t-1}|x)} \right\}$$

- 4 Si  $u \leq \alpha$ , hacer  $\theta_t = \theta^*$ , en caso contrario, hacer  $\theta_t = \theta_{t-1}$ .
- 5 Volver a 1.

## Algoritmo Metrópolis Hastings Independiente

Sea  $f(\theta^*|\theta_{t-1})$  la función objetivo, el algoritmo Metrópolis Hastings Independiente simula una cadena de Markov cuya distribución es  $g(\theta^*|\theta_{t-1})$  siendo  $g(\cdot)$  la función instrumental.

- ❶ Generar una observación  $\theta^*$  de  $g(\theta^*|\theta_{t-1})$ .
- ❷ Generar una variable  $u \sim U(0, 1)$ .
- ❸ Calcular la probabilidad de aceptar el valor generado:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{f(\theta^*|x)g(\theta_{t-1}|x)}{f(\theta_{t-1}|x)g(\theta^*|x)} \right\}$$

Donde  $g(\cdot)$  en nuestro caso es la distribución normal multivariada con vector de medias  $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{p_j}, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_{q_j})$  y matriz de covarianzas  $\hat{\Sigma}$  de  $\bar{\alpha}$ .

- ❹ Si  $u \leq \alpha$ , hacer  $\theta_t = \theta^*$ , en caso contrario, hacer  $\theta_t = \theta_{t-1}$ .
- ❺ Volver a 1.

## Validación del modelo

Para cada  $t = k + 1, \dots, T$  con  $k = \max\{k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; d\}$ , sea

$$e_t = (X_t - X_{t|t-1})/\sqrt{h_t}$$

si  $r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j$ , con  $j = 1, \dots, l$ , donde

$$X_{t|t-1} = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \phi_i^{(j)} x_{t-i} \quad y \quad h_t = \alpha_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} a_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} h_{t-n}$$

siendo  $X_{t|t-1}$  el predictor un paso adelante para  $X_t$ .

## La función de varianza condicional

Considerese  $\tilde{x}_{t-1} = \{x_{t-1}, \dots, x_1\}$ , la función de varianza condicional del proceso  $\{X_t\}$  es:

$$Var(X_t | \tilde{x}_{t-1}) = \sum_{j=1}^l p_{t,j} [h_t^j]^2 + \sum_{j=1}^l p_{t,j} \mu_{t-1,j}^2 - \left( \sum_{j=1}^l p_{t,j} \mu_{t-1,j} \right)^2$$

Donde  $p_{t,j} = Pr(Z_{t-\hat{d}} \in (r_{j-1}, r_j])$ ,  $\mu_{t-1,j} = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{k_j} \phi_i^{(j)} x_{t-i}$  y

$$h_t = \alpha_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{p_j} \alpha_m^{(j)} a_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^{q_j} \beta_n^{(j)} h_{t-n}, \text{ para } j = 1, \dots, l, \text{ y}$$

$t = k+1, \dots, T$ , con  $k = \max\{k_1, \dots, k_l; p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l; d\}$ .

## Ejemplos Ilustrativos

Se aplica el algoritmo propuesto para datos simulados y para series de tiempo financieras con el fin de ilustrar la metodología propuesta. Se ejecuta un muestreador de Gibbs con Metrópolis Hastings de 10.000 iteraciones, donde el 25 % de las muestras se toma como periodo de calentamiento y lo restante, para la inferencia. Para el caso de los  $\alpha_j$ 's, las primeras 2.500 iteraciones son tomadas como muestra de calentamiento mediante un Metrópolis Hastings de caminata aleatoria y 7.500 iteraciones de Metrópolis Hastings independiente para la inferencia, con el fin de mejorar la convergencia.

## Un ejemplo simulado

Se toma una serie de tiempo  $\{x_t\}$  de tamaño  $T=1000$  del siguiente modelo DTGARCH(2;1,1;1,1;1,1):

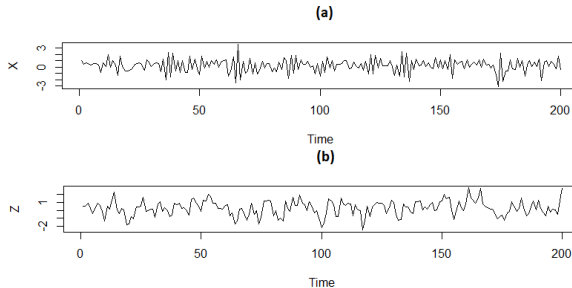
$$X_t = \begin{cases} -0.5 - 0.6X_{t-1} + a_t & \text{si } Z_t < 0 \\ 0.9 - 0.7X_{t-1} + a_t & \text{si } Z_t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

con  $a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$ ,

$$h_t = \begin{cases} 0.5 + 0.1a_{t-1}^2 + 0.02h_{t-1} & \text{si } Z_t < 0 \\ 0.1 + 0.3a_{t-1}^2 + 0.08h_{t-1} & \text{si } Z_t > 0 \end{cases}$$

donde  $\varepsilon_t \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} \frac{t_6}{\sqrt{6/4}}$ ,  $Z_t = 0.5Z_{t-1} + \epsilon_t$ , el cual es un proceso estacionario con distribución continua y  $\{\epsilon_t\}$  es un proceso de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianza 1, con  $\{\varepsilon_t\}$  y  $\{\epsilon_t\}$  independientes.

En la siguiente Figura, se presentan las últimas 200 observaciones de la serie simulada anteriormente, donde se pueden apreciar conglomerados de baja y alta volatilidad:



**Figura:** (a)Variable de interés del ejemplo simulado. (b)Variable de umbrales del ejemplo simulado

Empleamos 100 repeticiones, 10.000 iteraciones y descartamos las primeras 2.500. Las condiciones iniciales se fijaron de la siguiente manera:

Los valores iniciales para los parámetros no estructurales son:

- $\phi_0^{(j)} = \phi_1^{(j)} = \alpha_0^{(j)} = \alpha_1^{(j)} = \beta_1^{(j)} = 0.5$  para  $j = 1, 2$  y para los grados de libertad de la t-Student se toma  $\nu = 5$ .

Los valores iniciales para los parámetros estructurales son:

- Para el valor umbral  $r$ , se toma la mediana de la distribución empírica de  $Z_{t-d}$  cuyo valor es 0.2824 y  $d = 0$  para el rezago.

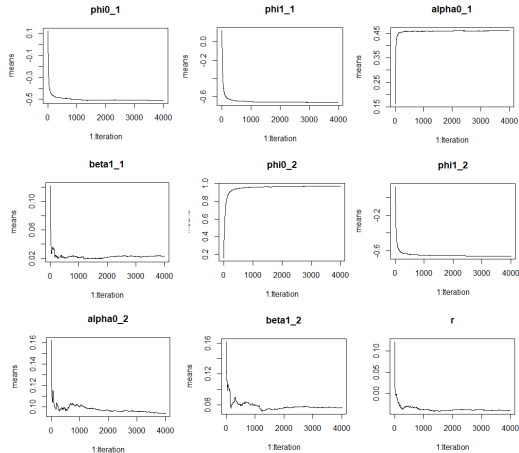
Los hiperparámetros utilizados para las densidades a priori son:

- $\phi_{0,j} = \mathbf{0}$ ,  $V_{0,j}^{-1} = 0.01 \cdot \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{0}$  es un vector de ceros y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.  $d_0 = 3$  como el rezago máximo.



Resultados de la simulación del modelo DTGACRH obtenido de 100 repeticiones.

Parámetro	Real	Estimado	D.E.	I.C. 95 %	Cob.	Sesgo
$\phi_0^{(1)}$	-0.5	-0.4374	0.0057	-0.5095,-0.4901	91	-0.0742
$\phi_1^{(1)}$	-0.6	-0.6183	0.0022	-0.6034,-0.5953	98	0.0183
$\alpha_0^{(1)}$	0.5	0.4660	0.0060	0.4541,0.5736	94	-0.0340
$\alpha_1^{(1)}$	0.1	0.1202	0.0017	0.0135,0.1292	97	0.0202
$\beta_1^{(1)}$	0.02	0.0309	0.0034	0.0188,0.0393	99	0.0109
$\phi_0^{(2)}$	0.9	0.9901	0.0048	0.8033,0.9197	96	0.0901
$\phi_1^{(2)}$	-0.7	-0.6201	0.0030	-0.7985,-0.6888	89	-0.0799
$\alpha_0^{(2)}$	0.1	0.0831	0.0036	0.0800,0.1921	94	-0.0169
$\alpha_1^{(2)}$	0.3	0.2852	0.0060	0.2743,0.3233	99	-0.0148
$\beta_1^{(2)}$	0.08	0.0763	0.0015	0.0711,0.18 70	99	0.0037
$r$	0	-0.0427	0.0416	-0.1133,- 0.0074	96	-0.0427
$\nu$	6	6.1054	0.0010	5.9975,6.2012	96	0.2410
$d$	0	0	(100)			



**Figura:** Gráficas Cumuplot de las muestras simuladas MCMC de las primeras 4000 iteraciones

## Validación del modelo

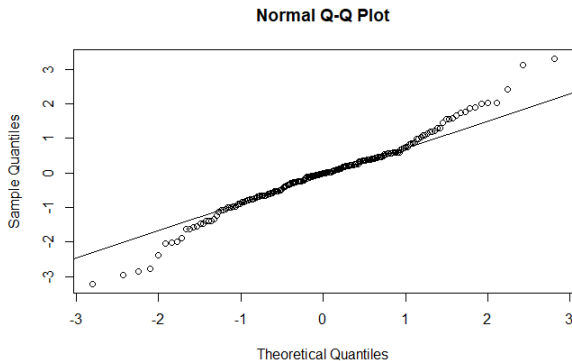


Figura: Gráfica Q-Q de los residuales estandarizados.

La gráfica CUSUM-SQ muestra que no hay evidencia de una especificación incorrecta del modelo.

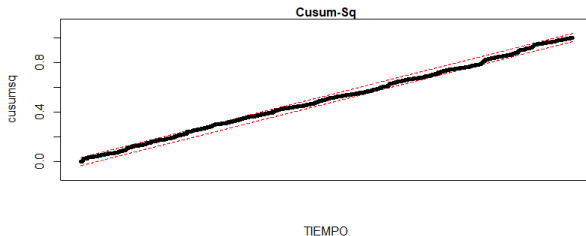
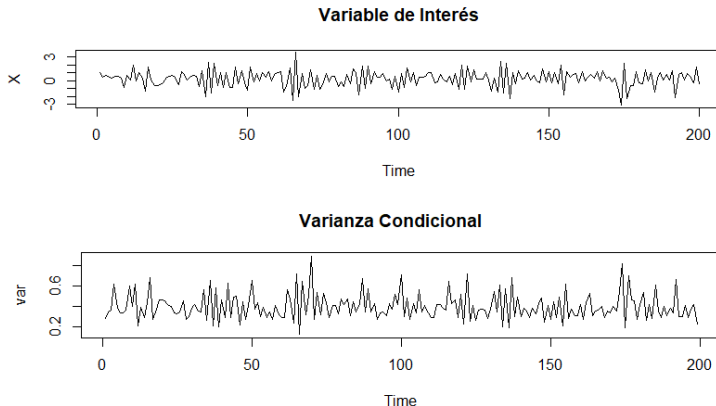


Figura: Gráfico CUSUM-SQ de los residuos estandarizados del modelo estimado

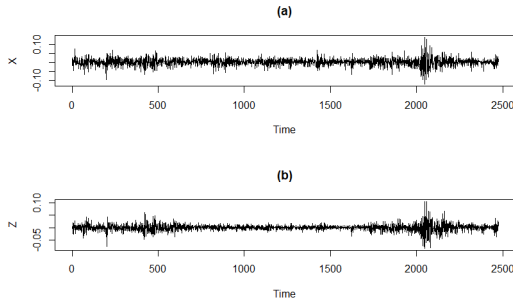
Comparación de la variable de interés y la función de varianza condicional, la cual, se estima con los promedios de las 100 repeticiones.



**Figura:** Ejemplo simulado versus Función de varianza condicional de las últimas 200 observaciones.

## Una aplicación en finanzas

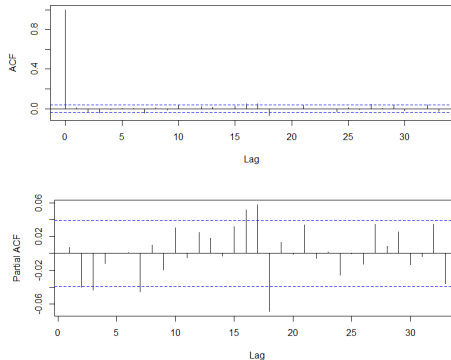
A continuación, se utilizan los retornos diarios del  $\ln$  del promedio industrial Dow Jones como la variable de umbrales, y los retornos diarios del  $\ln$  del índice BOVESPA (Índice de la bolsa de valores de Sao Paulo) como la variable de interés, desde el 12 de diciembre de 2000 hasta el 02 de junio de 2010.



**Figura:** (a)  $X_t = \ln(BOVESPA_t) - \ln(BOVESPA_{t-1})$ .  
(b)  $Z_t = \ln(DOWJONES_t) - \ln(DOWJONES_{t-1})$ .

## Ajuste del modelo AR-GARCH a la serie de rendimientos del BOVESPA

Se ajusta un modelo  $AR(p)$  a la media condicional de los datos, un modelo  $GARCH(m,s)$  para la varianza condicional y finalmente se estiman todos los parámetros del modelo.



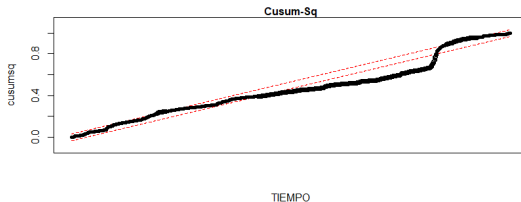
**Figura:** Función de autocorrelación y de autocorrelación parcial de la serie de retornos del BOVESPA

El modelo estimado es el siguiente:

$$X_t = 0.0014 - 0.0388X_{t-3} + a_t$$

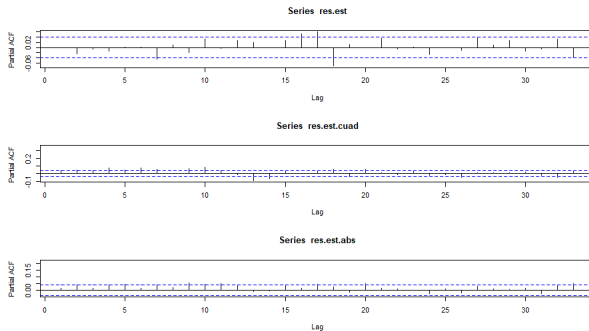
$$a_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = 7.480 \times 10^{-6} + 0.0735a_{t-1}^2 + 0.9066\sigma_{t-1}^2$$



**Figura:** CUSUMSQ para los residuos estandarizados del modelo AR-GARCH para el BOVESPA





**Figura:** Diagnóstico del modelo AR-GARCH para la serie de retornos del BOVESPA. ACF para los residuales estandarizados, los residuos estandarizados al cuadrado y los valores absolutos de los residuos estandarizados

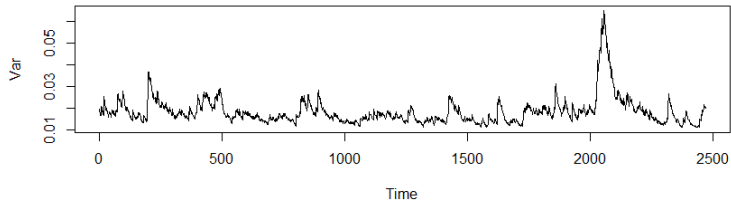


Figura: Función de varianza condicional del modelo AR-GARCH

## Ajuste del modelo DTGARCH a la serie de rendimientos del BOVESPA

Para la postulación del número de regímenes, se asume como un valor conocido, en este caso  $l = 3$ , con el fin de comparar con los modelos TAR obtenidos en Zhang y Nieto (2015) y Moreno y Nieto (2014).

Los tres regímenes hacen referencia a los retornos negativos, retornos pequeños y retornos grandes positivos en los retornos de  $\ln$  de la serie BOVESPA.

Los órdenes autorregresivos a considerar son  $k_1 = k_2 = k_3 = 3$ ,  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$  y  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ , valores dados por los órdenes autorregresivos resultantes de ajustar un AR-GARCH a los retornos diarios del  $\ln$  del índice BOVESPA de la sección anterior.

Empleamos 100 repeticiones, 10.000 iteraciones y descartamos las primeras 2.500. Las condiciones iniciales se fijaron de la siguiente manera:

Los valores iniciales para los parámetros no estructurales son:

- $\phi_0^{(j)} = \phi_1^{(j)} = \phi_2^{(j)} = \phi_3^{(j)} = \alpha_0^{(j)} = \alpha_1^{(j)} = \beta_1^{(j)} = 0.5$  para  $j = 1, 2, 3$  y para los  $\nu$  grados de libertad de la t-Student se toma como valor inicial  $\nu = 5$ .

Los valores iniciales para los parámetros estructurales son:

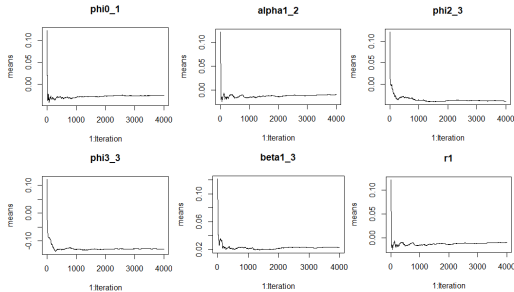
- Los valores umbrales  $r_1$  y  $r_2$  los percentiles 25 y 75 de la distribución empírica de  $Z_t$  cuyos valores son -0.0054 y 0.0057 respectivamente, y  $d = 1$  para el rezago.

Los hiperparámetros utilizados para las densidades a priori son:

- $\phi_{0,j} = \mathbf{0}$ ,  $V_{0,j}^{-1} = 0.01 \cdot \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{0}$  es un vector de ceros y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.  $d_0 = 3$  como el rezago máximo.

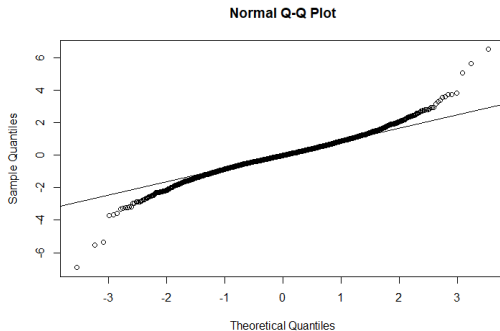
Estimación de parámetros para los datos financieros con 100 repeticiones.

Parámetro	Media	D.E.	Inf. 95	Sup. 95
$\phi_0^{(1)}$	-0.0119	0.0034	-0.0175	-0.0045
$\phi_1^{(1)}$	0.1233	0.0030	0.1181	0.1298
$\alpha_0^{(1)}$	0.0135	0.0033	0.0079	0.0207
$\alpha_1^{(1)}$	0.0012	0.0029	$3.1 \times 10^{-6}$	0.0047
$\beta_1^{(1)}$	0.0081	0.0029	0.0022	0.0120
$\phi_0^{(2)}$	0.0007	0.0033	$7.9 \times 10^{-5}$	0.0049
$\phi_1^{(2)}$	0.0078	0.0033	0.0022	0.0150
$\alpha_0^{(2)}$	0.0195	0.0029	0.0137	0.0235
$\alpha_1^{(2)}$	0.0034	0.0029	0.0012	0.0093
$\beta_1^{(2)}$	0.0096	0.0029	0.0037	0.0135
$\phi_0^{(3)}$	0.0131	0.0033	0.0075	0.0203
$\phi_1^{(3)}$	-0.0024	0.0033	-0.0080	-0.0004
$\phi_2^{(3)}$	-0.0445	0.0032	-0.0499	-0.0374
$\phi_3^{(3)}$	-0.1217	0.0030	-0.1270	-0.1153
$\alpha_0^{(3)}$	0.0254	0.0029	0.0197	0.0294
$\alpha_1^{(3)}$	0.0017	0.0029	$6.2 \times 10^{-5}$	0.0042
$\beta_1^{(3)}$	0.0238	0.0029	0.0181	0.0278
$r_1$	-0.0051	0.0029	-0.0110	-0.0012
$r_2$	0.0054	0.0029	-0.0005	0.0093
$\nu$	5	0.0010	4.9975	5.0013
$d$	0	(100)		



**Figura:** Gráficas Cumuplot de las muestras simuladas MCMC de las primeras 4000 iteraciones

## Validación del modelo



**Figura:** Gráfico Q-Q para los residuos estandarizados del modelo DTGARCH para el BOVESPA

La figura muestra comportamiento estable en los residuales estandarizados, así como también un comportamiento simétrico y colas pesadas.

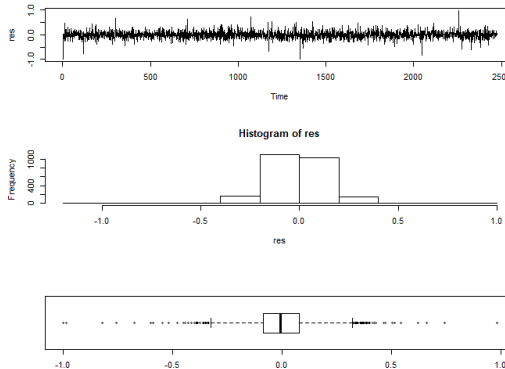
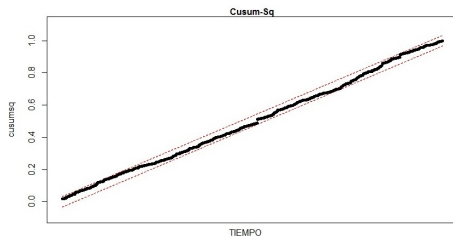


Figura: Traza, histograma y boxplot de los residuales del modelo DTGARCH.



La gráfica CUSUM-SQ indica que no hay evidencia de una especificación incorrecta del modelo. Con lo anterior, el modelo tiene un ajuste apropiado.



**Figura:** Gráfico CUSUMSQ de los residuos estandarizados del modelo estimado (2).

## Comparación de la función de varianza condicional de los modelos ajustados a la serie de rendimientos del BOVESPA

Con los parámetros estimados, se llega al siguiente modelo para los datos:

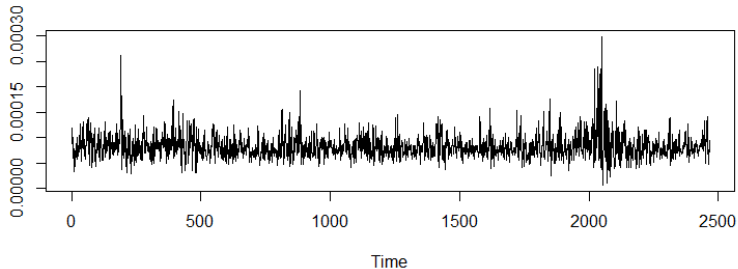
$$X_t = \begin{cases} -0.0119 + 0.1233X_{t-1} + a_t & \text{si } Z_t < -0.0051 \\ 0.0007 + 0.0078X_{t-1} + a_t & \text{si } -0.0051 \leq Z_t < 0.0054 \\ 0.0131 - 0.0024X_{t-1} - 0.0445X_{t-2} & \text{si } Z_t > 0.0054 \\ -0.1217X_{t-3} + a_t & \end{cases} \quad (2)$$

donde,

$$h_t = \begin{cases} 0.0135 + 0.0012a_{t-1}^2 + 0.0081h_{t-1} & \text{si } Z_t < -0.0051 \\ 0.0195 + 0.0034a_{t-1}^2 + 0.0096h_{t-1} & \text{si } -0.0051 \leq Z_t < 0.0054 \\ 0.0254 + 0.0017a_{t-1}^2 + 0.0238h_{t-1} & \text{si } Z_t > 0.0054 \end{cases}$$

con  $a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$ .

Finalmente, se presenta la varianza condicional descrita en la sección 1.6 para el ajuste del modelo DTGARCH a la serie de rendimientos BOVESPA.

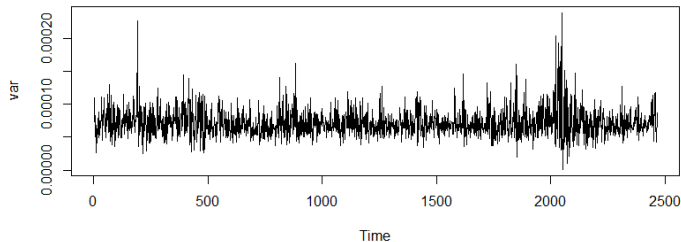


**Figura:** Función de varianza condicional del modelo DTGARCH con ruido t-Student.

donde se aprecia una captura aceptable de la volatilidad de la serie en estudio.

Moreno y Nieto (2014) encontraron un modelo TAR similar para los mismos datos , asumiendo la distribución Gaussiana para el proceso de ruido, sin considerar el modelo GARCH:

$$X_t = \begin{cases} -0.0127 + 0.1113X_{t-1} - 0.0685X_{t-2} & \text{si } Z_t < -0.0054 \\ +0.0198\varepsilon_t & \\ 6.81 \times 10^{-4} + 0.0137\varepsilon_t & \text{si } -0.0054 \leq Z_t < 0.0057 \\ 0.0135 - 0.0837X_{t-1} - 0.0684X_{t-2} & \text{si } Z_t > 0.0057 \\ -0.1687X_{t-3} - 0.0633X_{t-4} + 0.0191\varepsilon_t & \end{cases}$$

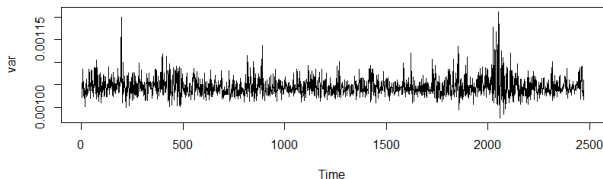


**Figura:** Función de varianza condicional del modelo TAR con ruido blanco Gaussiano.

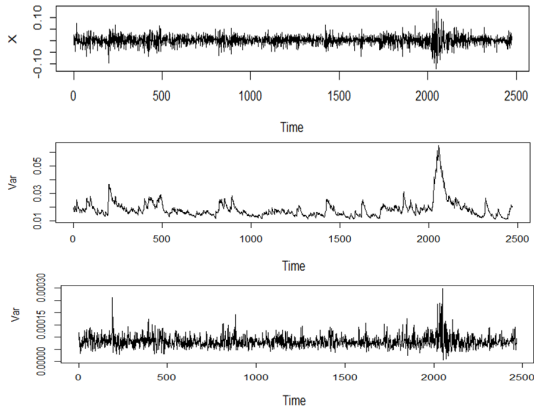
Zhang y Nieto (2015) encontraron un modelo TAR similar para los mismos datos , asumiendo la distribución t-Student para el proceso de ruido, sin considerar el modelo GARCH::

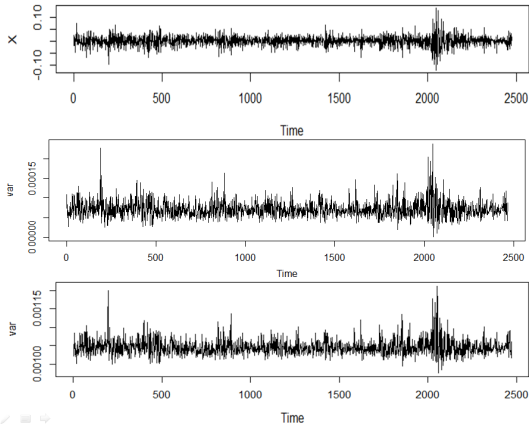
$$X_t = \begin{cases} -0.0106 + 0.1296X_{t-1} + 0.0355\varepsilon_t & \text{si } Z_t < -0.0051 \\ 0.0009 + 0.0099X_{t-1} + 0.0259\varepsilon_t & \text{si } -0.0051 \leq Z_t < 0.0054 \\ 0.0128 - 0.0054X_{t-1} - 0.0201X_{t-2} & \text{si } Z_t > 0.0054 \\ -0.0917X_{t-3} + 0.0354\varepsilon_t & \end{cases}$$

con 2.3 grados de libertad para el proceso  $\{\varepsilon_t\}$ .



**Figura:** Función de varianza condicional del modelo TAR con ruido t-Student.





## Conclusiones

El desarrollo de la metodología propuesta es satisfactorio tanto en datos simulados como en los datos financieros, permitiendo un mejor ajuste de los datos al modelo DTGARCH, además, según las comparaciones con trabajos realizados anteriormente, se evidencia una mejor captura del aspecto heterocedástico contenido en los datos.

En futuras investigaciones, se recomendaría estudiar modelos DTGARCH con otro tipo de distribuciones para los errores y otros modelos que capturen volatilidad.



## Participación en eventos

- VII Encuentro Nacional de Matemáticas y Estadística.  
Universidad de Tolima.  
Ibagué, Tolima.  
Mayo, 2017.  
*Metodología Bayesiana para Estimar Parámetros en Modelos DTGARCH* . (Comunicación).
- Simposio Internacional de Estadística.  
Universidad Nacional de Colombia.  
Medellín, Antioquia.  
Agosto, 2017.  
*Metodología Bayesiana para la Estimación de Parámetros del Modelo TAR-GARCH Doble con Ruido Blanco  $t$ -Student*. (Póster).

## Referencias



Chen, C.W.S., Gerlach, R. & So, M.K.P.

*Comparison of nonnested asymmetric heteroskedastic models*,  
Computational Statistics and Data Analysis, **51**, 2164-2178, (2006).



Hanwen, Z. & Nieto, F.

*TAR modeling with missing data when the white noise process follows a student's t-distribution*,  
Revista Colombiana de Estadística, **38**, 239-266, (2015).



Moreno, E. & Nieto, F.

*Modelos TAR en series de tiempo financieras*,  
Communications in Statistics, **7**, 223-243, (2014).

## Referencias



Nieto, F.

*Modeling bivariate threshold autoregressive processes in the presence of missing data,*

*Communications in Statistics : Theory and Methods*, **34**, 905-930, (2005).



Nieto, F.

*Forecasting with univariate TAR models,*

*Statistical Methodology*, **5**, 263-276, (2008).



Nieto, F. & Moreno, E.

*Univariate conditional distributions of an open-loop TAR stochastic process,*

*Revista Colombiana de Estadística*, **39**, 149-165, (2016).



Tong, H.

*On a threshold model. In C. H. Chen (Ed.),*

*Pattern recognition and signal processing*, Amsterdam: Sijhoff & Noordhoff, (1978).