Sección 0.8
Plano coordenado, distancia y punto medio

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

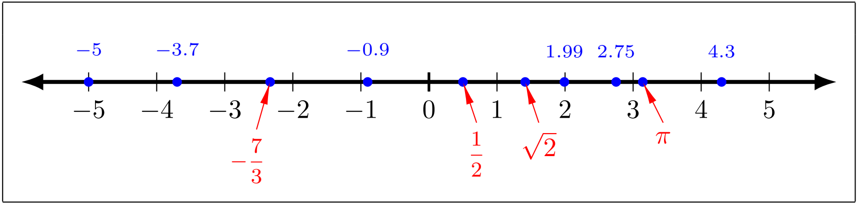
Contenido

1. Plano coordenado
2. Fórmula de distancia
3. Fórmula de punto medio
4. Gráficas de ecuaciones en dos variables

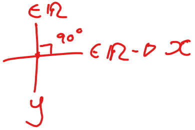
Plano coordenado

El plano coordenado es la unión entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos dibujar gráficas de ecuaciones algebraicas.

La recta real se forma al establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los elementos del conjunto de los números reales.



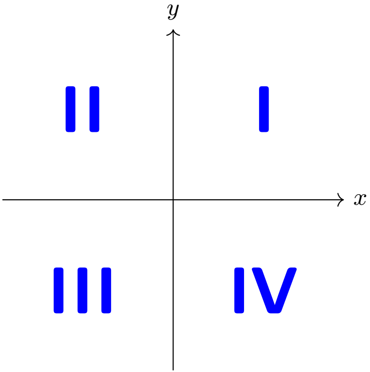
De manera análoga, se forma el plano cartesiano estableciendo una correspondencia uno a uno entre los puntos en el plano y los elementos en el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.



El *plano coordenado* se forma considerando dos rectas numéricas **perpendiculares** entre sí, cuyo punto de intersección se le llama **origen**.

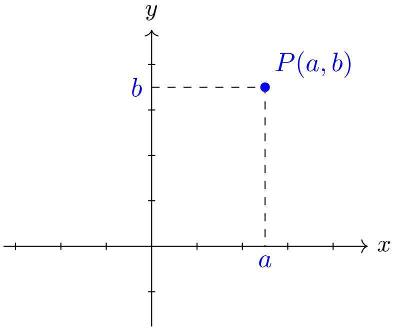
La recta horizontal es llamada el **eje** x (o eje de abscisas) y la recta vertical es llamada el **eje** y (o eje de ordenadas). Ambos son llamados los ejes coordenados. Estos ejes coordenados dividen el plano en 4 partes llamadas **cuadrantes**.

Los cuadrantes son enumerados del I al IV en contra de las manecillas del reloj.



Localización de puntos en el plano coordenado

Cualquier punto P sobre el plano se localiza mediante un par único de números reales. Para localizar el punto, trace un par de rectas que pasen por P y que sean perpendiculares a los ejes x y y. Estas rectas cruzarán los ejes en puntos con coordenadas a y b, y al punto P se le asigna el par ordenado (a, b).



Sea (a, b) un punto en el plano. La primera coordenada se llama coordenada x del punto (o abscisa del punto) y la segunda coordenada se llama coordenada y del punto (u ordenada del punto).

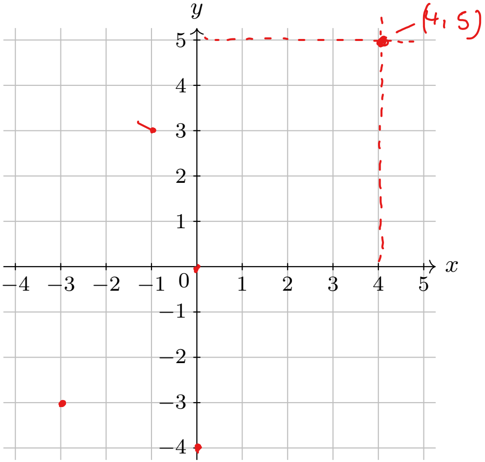
Ejemplos

a. Determine la coordenada x (o abscisa) y la coordenada y (u ordenada) de los siguientes puntos en el plano.

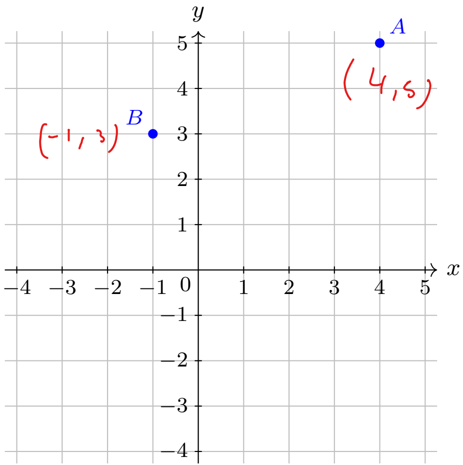
- $(-1, 2)$ $\rightarrow$ (x, y)
- $(2, 3)$
- $(-1, -3)$
- $(5, -2)$

b. Ubique los siguientes puntos en el plano:

$$(\underset{x}{4}, \underset{y}{5}), (-1, 3), (4, -3), (-2, -3)$$



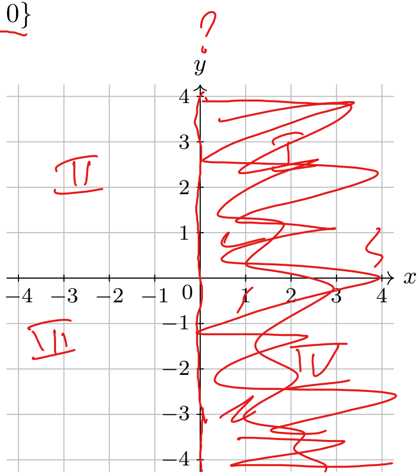
c. Determine las coordenadas de los puntos A y B.



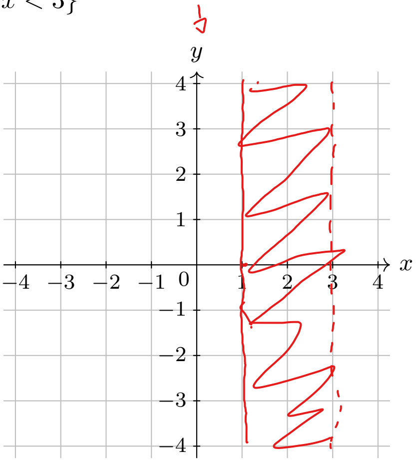
Regiones en el plano coordenado

Grafique las siguientes regiones en el plano coordenado.

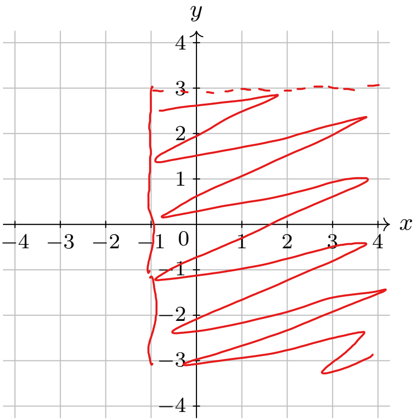
a. $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$



b. $\{(x, y) \mid 1 \leq x < 3\}$



c. $\{(x, y) \mid x \geq -1 \text{ y } y < 3\}$



d. $\{(x,y) \mid \underline{|x| \leq 1} \text{ y } |y| > 2\}$

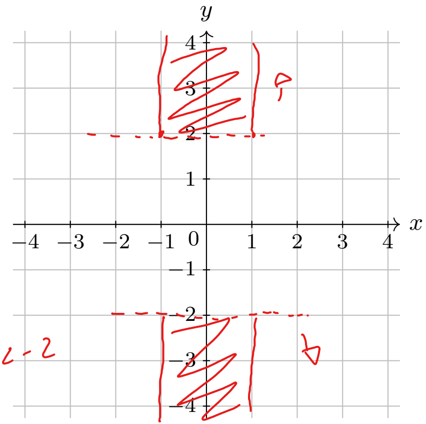
$|x| \leq 1$

$\Updownarrow$

$-1 \leq x \leq 1$

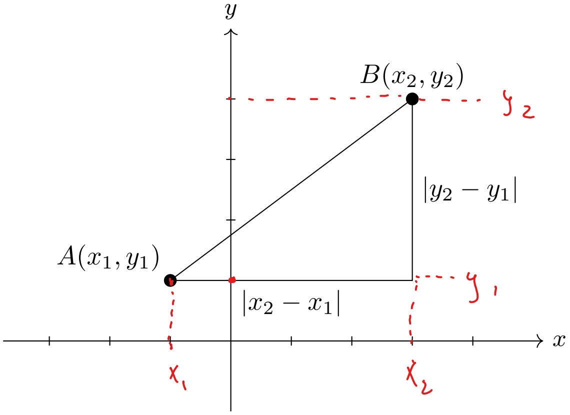
$|y| > 2$

$y > 2$ y $y < -2$



Distancia entre dos puntos

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ puntos en el plano.



Fórmula de distancia

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos

$x_1, y_1 \qquad x_2, y_2$

a. Halle la distancia entre $A(1, -6)$ y $B(-1, -3)$.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-(-6))^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-3+6)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9}$$

$$= \sqrt{13}$$

b. ¿Cuál de los puntos $\boxed{C(-6,3)}$ o $\boxed{D(3,0)}$ está más cerca de $\underline{E(-2,1)}$?

$$d(C,E) = \sqrt{(-2-(-6))^2 + (1-3)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 4} = \sqrt{20}$$

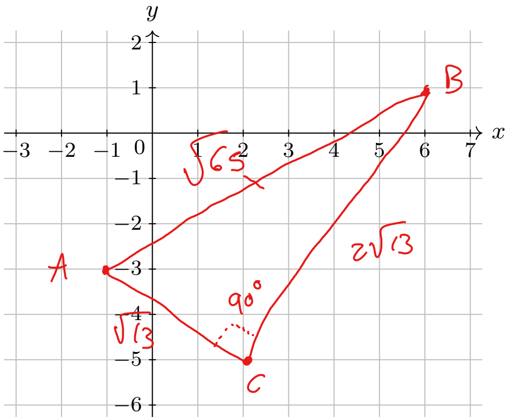
$$d(D,E) = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-0)^2}$$

$$= \sqrt{25+1}$$

$$= \sqrt{26}$$

$$\sqrt{20} < \sqrt{26}$$

c. Demuestre que el triángulo ABC formado por los puntos $A(-1,-3)$, $B(6,1)$ y $C(2,-5)$ es un triángulo rectángulo. Calcule su perímetro y su área.



$$AB = d(A,B) = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} \approx 8.06 \; \} \; \text{hip.}$$

$$AC = d(A,C) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3.60$$

$$BC = d(B,C) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \approx 7.21$$

Punto medio

Se pueden hallar las coordenadas del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos son dos puntos del plano. Para esto, se utilizan los promedios de las coordenadas de x y y.

Fórmula de punto medio

El punto medio M del segmento de recta de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ es:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplos

a. Halle el punto medio del segmento que une los puntos $A\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $B\left(\frac{4}{3}, -1\right)$.

x_1, y_1

x_2, y_2

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{3+\frac{4}{3}}{2}, \frac{\frac{1}{2}-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{13}{3}}{2}, \frac{-\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{13}{6}, -\frac{1}{4}\right)$$

b. Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto $(3, 2)$ y su punto medio es el punto $(-3, 5)$. Encuentre las coordenadas del otro extremo.

$$M = (-3, 5) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+3}{2}, \frac{y_1+2}{2}\right)$$

$$-3 = \frac{x_1+3}{2} \to -6 = x_1+3 \to -6-3 = x_1 \to x_1 = -9$$

$$5 = \frac{y_1+2}{2} \to y_1 = 8$$

$$\boxed{(-9, 8)}$$

Gráficas de ecuaciones en dos variables

Una *ecuación en dos variables*, como $y = x^2 - 1$, expresa la relación entre dos cantidades. Un punto (x_1, y_1) satisface la ecuación si hace la ecuación cierta cuando los valores de x y y son sustituidos en la ecuación.

Gráfica de una ecuación

La gráfica de una ecuación en x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano coordenado que satisfacen la ecuación.

Ejemplos

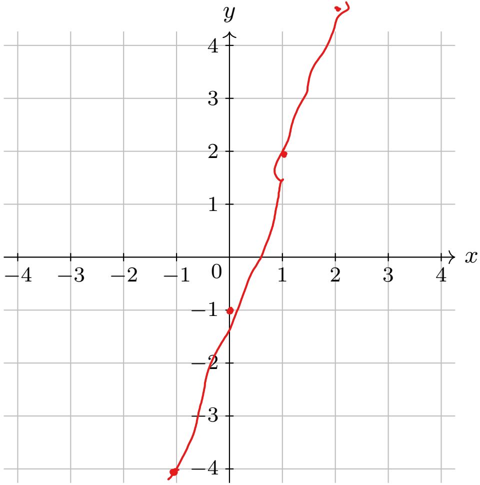
a. Dibuje la gráfica de la ecuación $\boxed{3x - y = 1.}$

① Despejar para y

$y = 3x - 1$

②

x	$y = 3x - 1$	(x, y)
-3	$y = -10$	$(-3, -10)$
-2	$y = -7$	$(-2, -7)$
-1	-4	$(-1, -4)$
0	-1	$(0, -1)$
1	2	$(1, 2)$
2	5	$(2, 5)$
3	8	$(3, 8)$


y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

b. Dibuje la gráfica de $y = 4 - x^2$.

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(\sqrt{65})^2 = (\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{13})^2$

$65 = 13 + 4 \cdot 13$

$65 = 13 + 52$

$65 = 65$

Si es un Triangulo rect.

Perímetro

$P = AB + BC + AC$

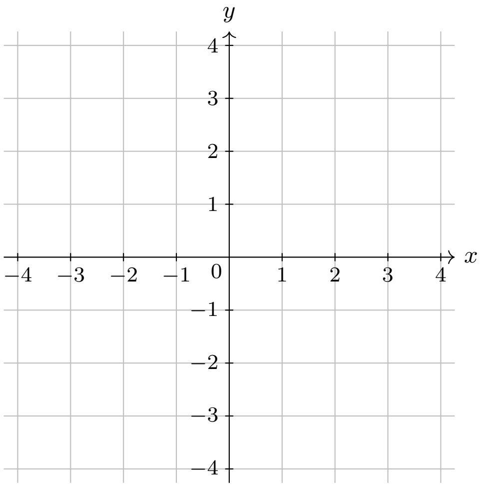
$= \sqrt{65} + 2\sqrt{13} + \sqrt{13}$

$= \sqrt{65} + 3\sqrt{13} \approx 18.8$ und

Área

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{BC \cdot AC}{2}$

$= \dfrac{26}{2} = 13 \text{ und}^2$


y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

$|x| = 3 \to x = -3$ ó

$x = 3$

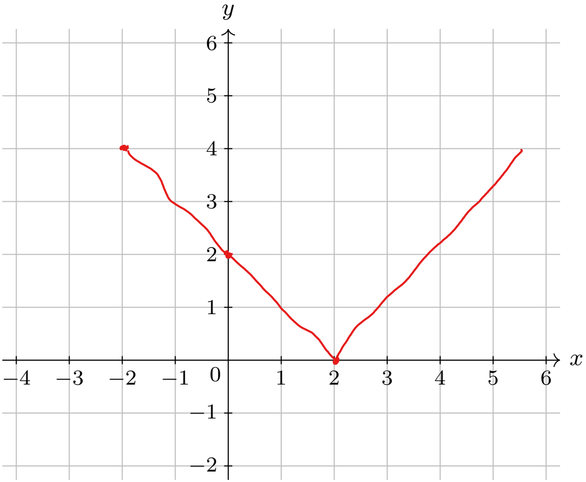
c. Dibuje la gráfica de $y = |x - 2|$.

1 ✓

2

$\underbrace{f(x)}_{y} = x^2$

$y = x^2$


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6