# Sección 3.5
# Ceros complejos
# y el teorema fundamental del álgebra

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

# Contenido

En la Sección 3.2 se menciona que todo polinomio de grado $n$ tiene a lo sumo $n$ ceros reales. En el sistema de los números complejos un polinomio de grado $n$ tiene exactamente $n$ ceros y se puede factorizar en exactamente $n$ factores lineales. $\rightarrow (x-c)$

Este importante resultado se conoce como el **Teorema Fundamental del Álgebra** y fue demostrado, por primera vez, por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

# Teorema fundamental del álgebra y sus consecuencias

Los siguientes teoremas son muy importantes en la determinación de los ceros de un polinomio, así como en su proceso de factorización.

## Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado $n$,

$$P(x) = \boxed{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (n \geq 1,\ a_n \neq 0),$$

con coeficientes complejos, tiene *al menos* un cero en el sistema de los números complejos.

Como todo número real también es un número complejo, el teorema anterior también aplica cuando los coeficientes son numeros reales.

$a+bi$

Es importante señalar que a partir del Teorema Fundamental del Álgebra y del Teorema del Factor discutido en la Sección 3.3, se puede deducir el siguiente teorema.

### Teorema de factorización lineal (factorización completa)

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n$, donde $n \geq 1$, entonces $P$ tiene exactamente $n$ factores lineales:

$$P(x) = \boxed{a_n}(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

donde $a_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$ son números complejos.

# Ejemplos

Observe que:

(a) El polinomio de primer grado $P(x) = x - 3$ tiene exactamente un cero: $x = 3$.

(b) El polinomio de segundo grado $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ tiene exactamente dos factores lineales y dos ceros: $x = 1$ y $x = 2$.

(c) Al factorizar el polinomio de tercer grado $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ por agrupación de términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x-1) - 4(x-1) \\ &= (x-1)(x^2-4) \\ &= (x-1)(x-2)(x+2), \end{aligned}$$

entonces, tiene exactamente tres factores lineales y tres ceros: $x = 1$, $x = 2$ y $x = -2$.

(d) Al factorizar el polinomio de cuarto grado $P(x) = x^4 - 81$, se obtiene:

$x^2 = z$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 81 = z^2 - 81 \\ &= (x^2 - 9)(x^2 + 9) \\ &= (x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i), \end{aligned}$$

entonces, tiene exactamente cuatro factores lineales y cuatro ceros: $x = \pm 3$ y $x = \pm 3i$.

# Ceros y sus multiplicidades

$(x-2)^2 \to \boxed{x=2}$

mult. 2

El Teorema de Factorización Lineal afirma que todo polinomio $P$ de grado $n$, tiene exactamente $n$ ceros. El siguiente ejemplo muestra que estos ceros no necesariamente deben ser distintos.

# Ejemplo

Encuentre todos los ceros del polinomio $P(x) = x^4 - 18x^2 + 81$.

$P(x) = (x^2)^2 - 18x^2 + 81$ , si $x^2 = z$

$= z^2 - 18z + 81$

$= (z-9)(z-9)$

$= (x^2-9)(x^2-9) = (x^2-9)^2 = ((x-3)(x+3))^2$

$= (x-3)^2 (x+3)^2$

$= (x-3)(x-3)(x+3)(x+3)$

los ceros son $x=3$, $x=-3$ repetidos dos veces, es decir tiene multiplicidad 2.

**Teorema de ceros**

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente $n$ ceros, teniendo en cuenta que cada cero con multiplicidad $k$ es contado $k$ veces.

# Ejemplos

1. Exprese el polinomio $P(x) = x^5 - 5x^3 - 36x$ como el producto de sus factores lineales y determine todos sus ceros.

$P(x) = x(x^4 - 5x^2 - 36)$, si $x^2 = z$

$= x(z^2 - 5z - 36)$

$= x(z-9)(z+4)$

$= x(x^2-9)(x^2+4)$

$= x(x-3)(x+3)(x+2i)(x-2i)$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$

$x = \pm i\sqrt{4}$

$x = \pm 2i$

$a_n$

2. Halle los ceros del polinomio $P(x) = \boxed{2}x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 4x - 6$ y expréselo como el producto de sus factores lineales.

① $\frac{p}{q} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6 \right\}$

$P(1) = 20 \qquad P(-3) = 0$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

②

| $\frac{1}{2}$ | 2 | 9 | 11 | 4 | -6 |
|---|---|---|---|---|---|
| | ↓ | 1 | 5 | 8 | 6 |
| | 2 | 10 | 16 | 12 | 0 |

| -3 | 2 | 10 | 16 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| | ↓ | -6 | -12 | -12 |
| | 2 | 4 | 4 | 0 |

$P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)(2x^2 + 4x + 4)$

$2x^2+4x+4$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{4}=\frac{-4\pm i\sqrt{16}}{4}=\frac{-4\pm 4i}{4}$$

$$\frac{-4+4i}{4}=-1+i$$

$$\frac{-4-4i}{4}=-1-i$$

$$-1\pm i$$

$$P(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)\left(x-(-1+i)\right)\left(x-(-1-i)\right)$$

Como se ha observado en los ejemplos anteriores, si existe un cero complejo, su conjugado también es un cero. Esto no ha sido casualidad, como lo indica el siguiente teorema.

### Teorema de ceros conjugados

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n$ con coeficientes reales. Si $a + bi$ es un cero del polinomio, entonces su conjugado $a - bi$ también es un cero del polinomio $P$.

# Ejemplos

1. Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado $4$ con coeficientes enteros y cuyos ceros son $-2$, $1$, $i$ y $-i$.

$(x+2)(x-1)(x-i)(x+i)$

$P(x) = a(x+2)(x-1)(x-i)(x+i)$

$\vdots$

$= a(x^4 + x^3 - x^2 + x - 2)$

2. Halle los ceros del polinomio

$$P(x) = \boxed{2}x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 12x - 8$$

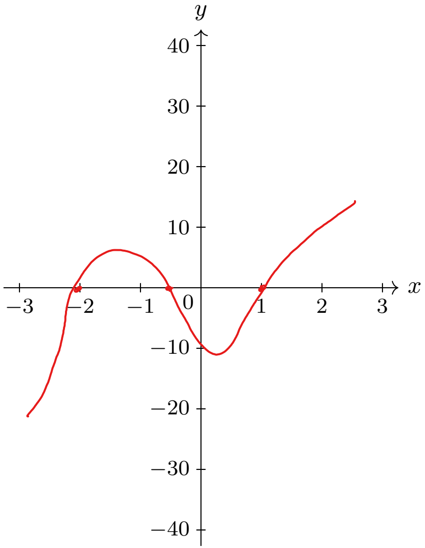
y luego dibuje su gráfica.

Verificar

Solo graficar con los ceros reales

⋮

$$P(x) = 2\underbrace{(x+2)}_{x=-2}\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)}_{x=-\frac{1}{2}}\underbrace{(x-1)}_{x=1}(x-2i)(x+2i)$$


y
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
x
−3
−2
−1
1
2
3

# Factores lineales y cuadráticos

El Teorema de Factorización Lineal permite escribir un polinomio de grado $n$ como el producto de sus factores lineales. Si no se desea utilizar números complejos en la factorización, entonces no se deben factorizar los polinomios cuadráticos cuyos ceros sean parejas de números complejos.

## Teorema de factores lineales y cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar como el producto de factores lineales y factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

Un factor cuadrático que no tiene ceros reales se llama *factor primo* o *factor irreducible en los reales*.

# Ejemplo

Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 24x - 72$:

(a) Factorice el polinomio $P(x)$ como el producto de sus factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

① $\frac{p}{q} = \{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72 \}$

② 
$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -3 & 7 & -24 & -72 \\ & \downarrow & 6 & 9 & 48 & 72 \\ \hline & 2 & 3 & 16 & 24 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 2 & 3 & 16 & 24 \\ & \downarrow & -3 & 0 & -24 \\ \hline & 2 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + 16$

$P(3) = 0$ , $P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

$(x-3)$ $\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$P(x) = 2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+16)$

(b) Factorice el polinomio $P(x)$ completamente como el producto de sus factores lineales.

$2x^2 + 16 = 0 \to 2x^2 = -16$

$x^2 = -8 \to x = \pm\sqrt{-8}$

$x = \pm i\sqrt{8}$

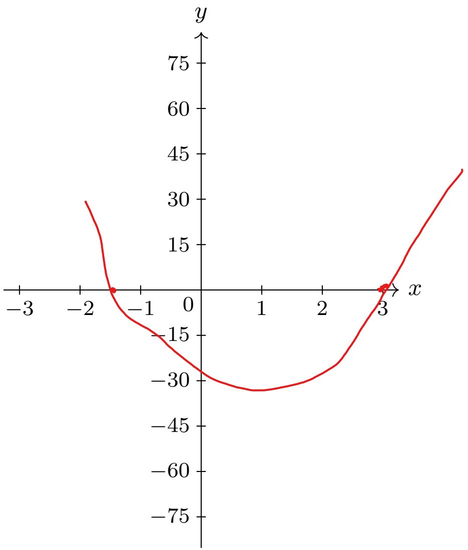
$x = \pm 2i\sqrt{2}$

$P(x) = 2(x-3)(x+\frac{3}{2})(x+2i\sqrt{2})(x-2i\sqrt{2})$

(c) Dibuje la gráfica del polinomio.

$(x-3)$ $\quad$ $\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$x=3$ $\quad$ $x=-\frac{3}{2}$


y
75
60
45
30
15
x
−3
−2
−1
0
1
2
3
−15
−30
−45
−60
−75