Sección 2.1
Traslaciones y reflexiones

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Introducción

$y = f(x) = x^2$

entrada

$y = f(x)$

salida

En esta sección se estudiará el comportamiento de las gráficas de funciones, cuando se realizan *cambios en la entrada* o *cambios en la salida*.

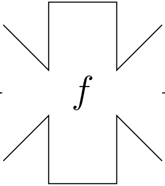
Los cambios (o transformaciones) que se consideran son sumar o restar una constante (traslaciones), cambiar el signo (reflexiones) y multiplicar por una constante (estiramientos y encogimientos).

En la gráfica de una función $y = f(x)$, los valores de entrada x se representan en el eje horizontal y los valores de salida y se representan en el eje vertical. Por eso, las transformaciones que se hagan a los valores de entrada van a producir cambios horizontales en la gráfica y las transformaciones que se hagan a los valores de salida van a producir cambios verticales en la gráfica.

= Cambio

Transformación en la entrada, produce *cambio* *horizontal* en la gráfica

$x \longrightarrow$



$\longrightarrow y = f(x)$

Transformación en la salida, produce *cambio* *vertical* en la gráfica

Cambios en las entradas (transformaciones horizontales)

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^2$ es la función inicial, una transformación horizontal t puede ser sumar uno a la entrada de f:

$$t(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ es la función inicial, una transformación horizontal t puede ser cambiar el signo de la entrada de f:

$$t(x) = f(-x) = \sqrt{-x}$$

3. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es la función inicial, una transformación horizontal t puede ser duplicar la entrada de f:

$$t(x) = f(2x) = \frac{1}{2x}$$

Cambios en las salidas (transformaciones verticales)

Ejemplos:

1. Si $f(x) = x^2$ es la función inicial, una transformación vertical t puede ser sumar uno a la salida de f:

$$t(x) = \overset{y}{f(x)} + 1 = x^2 + 1$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ es la función inicial, una transformación vertical t puede ser cambiar el signo de la salida de f:

$$t(x) = -\underset{y}{\underline{f(x)}} = -\sqrt{x}$$

3. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es la función inicial, una transformación vertical t puede ser duplicar la salida de f:

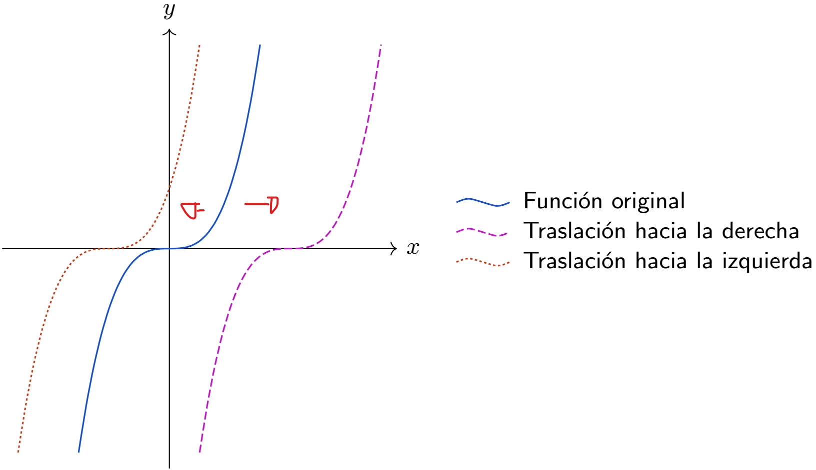
$$t(x) = \underset{2}{2}\underbrace{f(x)}_{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Traslaciones horizontales

↳ hacer un cambio o a mover la gráfica sobre el eje x.

Traslaciones horizontales

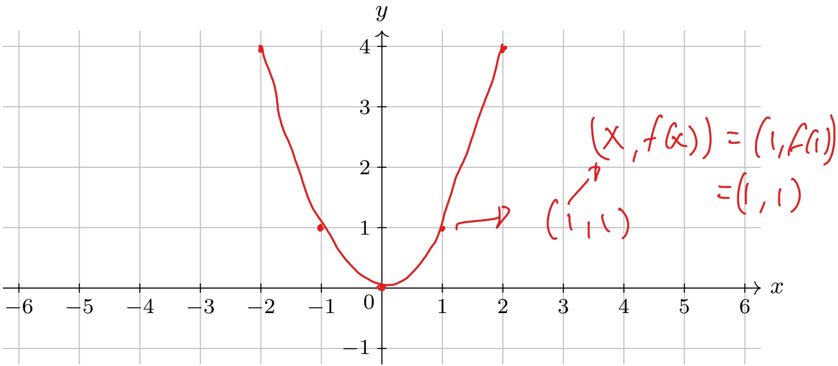
Una *traslación horizontal* es un movimiento rígido a la derecha o a la izquierda de todos los puntos de la gráfica de una función. Las traslaciones horizontales se obtienen al sumar o restar una constante a los *valores de entrada* de la función original.


y
x
Función original
Traslación hacia la derecha
Traslación hacia la izquierda

Ejemplo

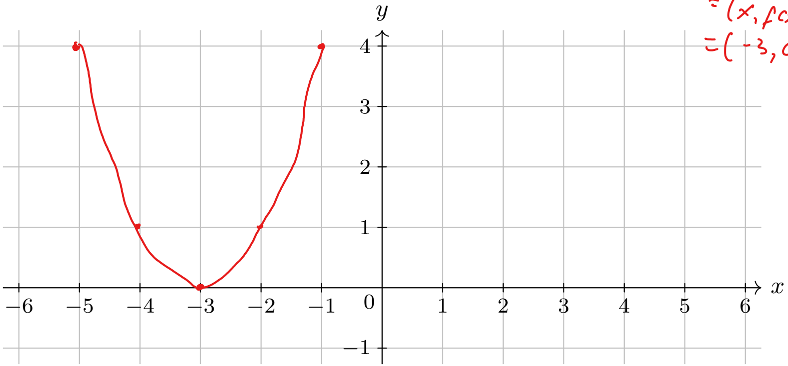
Grafique las siguientes funciones dando valores a la entrada x.

(a) $f(x) = x^2$



$X = -3 \rightarrow f(-3) = (-3+3)^2$
$= 0$
(x, y)
$= (x, f(x))$
$= (-3, 0)$

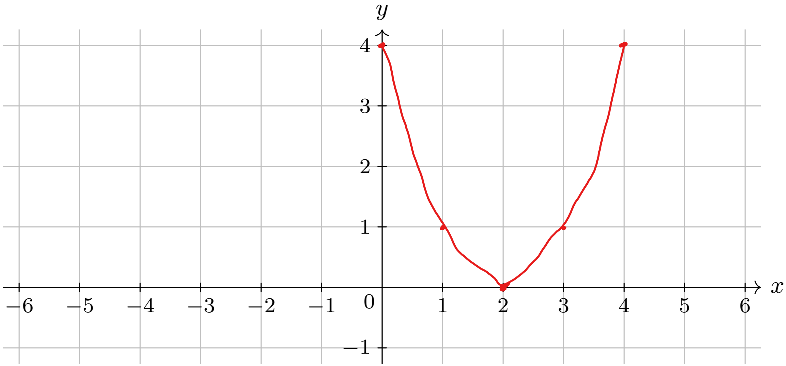
(b) $g(x) = (x + 3)^2$



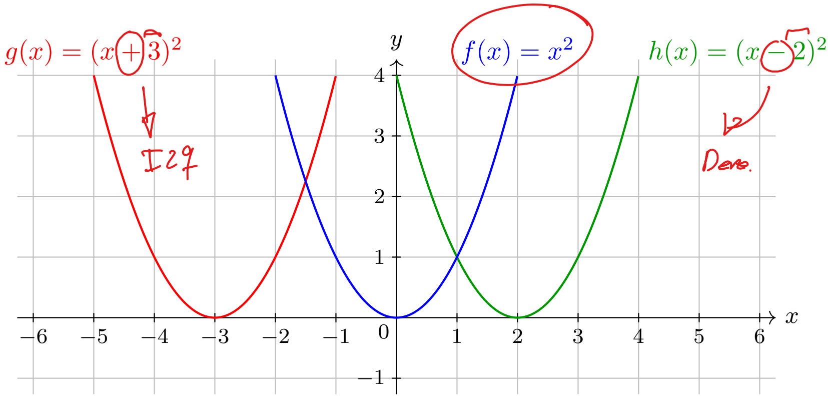
$x = 2 \to f(2) = (2-2)^2 = 0$

$(2, 0)$

(c) $h(x) = (x-2)^2$



¿Qué puede concluir al ver las gráficas de las funciones anteriores en el mismo plano coordenado?



En general, se tiene el siguiente teorema:

Traslaciones horizontales

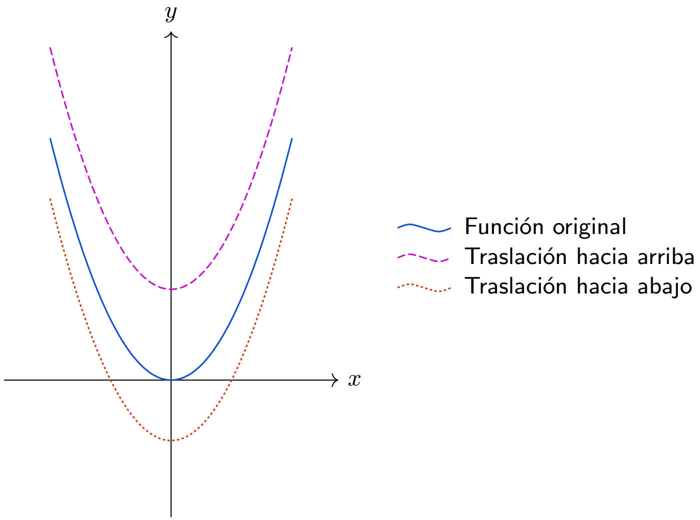
Si $c > 0$, entonces:

1. La gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades a la derecha tiene ecuación $y = f(x - c)$.
2. La gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades a la izquierda tiene ecuación $y = f(x + c)$.

Traslaciones verticales

Traslaciones verticales

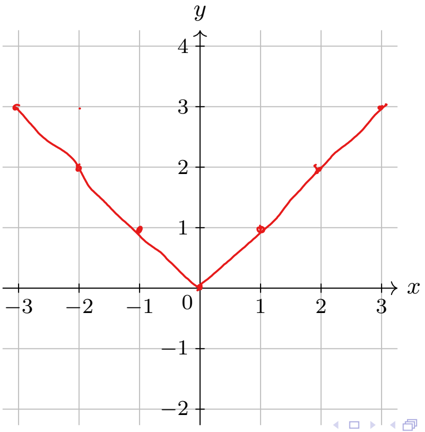
Una *traslación vertical* es un movimiento rígido, hacia arriba o hacia abajo, de todos los puntos en la gráfica de una función. Las traslaciones verticales resultan de sumar o restar una constante a los *valores de salida* de la función original.


y
x
Función original
Traslación hacia arriba
Traslación hacia abajo

Ejemplo

Grafique las siguientes funciones dando valores a la entrada x.

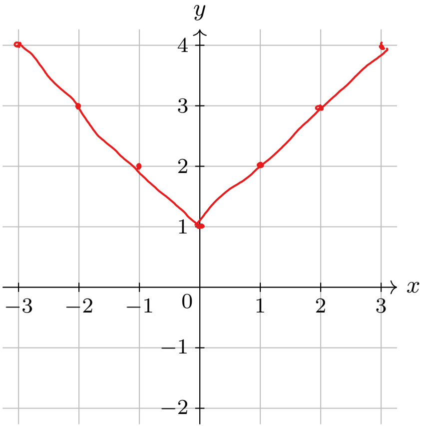
(a) $f(x) = |x|$



$x = 0 \to f(0) = |0| + 1 = 1$

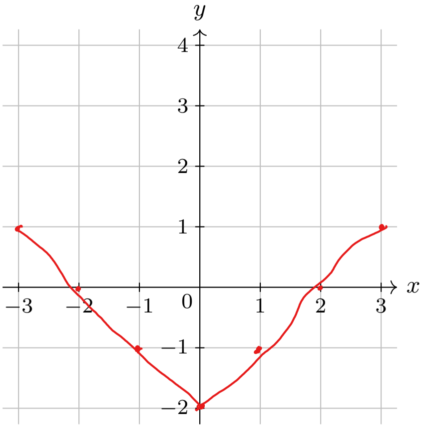
$(0, 1)$

(b) $g(x) = |x| + 1 = f(x) + 1$

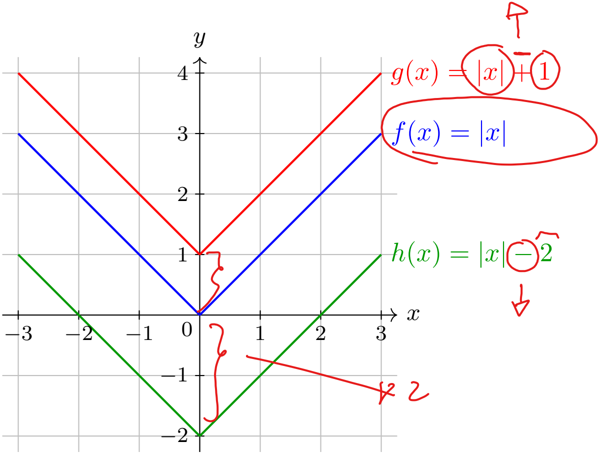


(c) $h(x) = |x| - 2 = f(x) - 2$

$x = 0 \to f(0) = |0| - 2$
$= -2$
$(0, -2)$



¿Qué puede concluir al ver las gráficas de las funciones anteriores en el mismo plano coordenado?



En general, se tiene el siguiente teorema:

Traslaciones verticales

Si $c > 0$, entonces: (1) Def fn. Original

1. La gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades hacia arriba tiene ecuación $y = f(x) + c$.
2. La gráfica de $y = f(x)$ trasladada c unidades hacia abajo tiene ecuación $y = f(x) - c$.

Reflexiones

Reflexiones

- Una *reflexión horizontal* refleja la gráfica a través del eje y, o sea, izquierda-derecha. Una reflexión horizontal resulta de cambiar el signo a la entrada de una función.
- Una *reflexión vertical* refleja la gráfica a través del eje x, o sea, arriba-abajo. Una reflexión vertical resulta de cambiar el signo a la salida de una función.

Ejemplo

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. La figura A muestra la reflexión horizontal:

$$h(x) = f(-x) = \sqrt{-x},$$

y la figura B muestra la reflexión vertical:

$$v(x) = -f(x) = -\sqrt{x}.$$

En ambas figuras, la gráfica de f es la que aparece punteada.

Reflexión horizontal

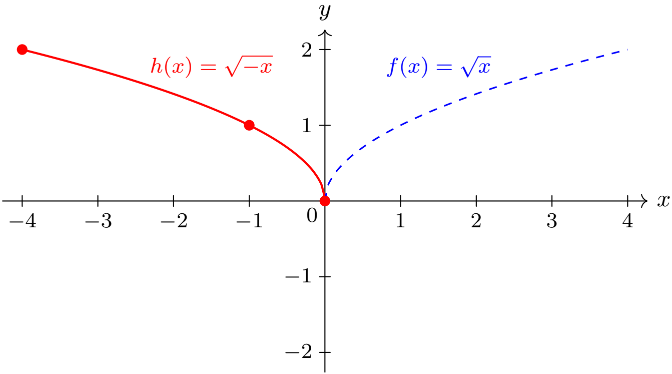


Figura A

Observe que en una reflexión horizontal los puntos que están en el eje y no se mueven.

Reflexión vertical

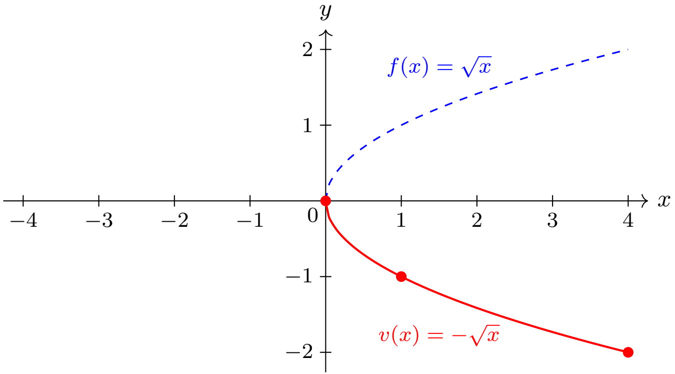


Figura B

Observe que en una reflexión vertical los puntos que están en el eje x no se cambian.

En resumen,

Reflexiones

1. La reflexión horizontal de una función f tiene ecuación $y = f(-x)$.
2. La reflexión vertical de una función f tiene ecuación $y = -f(x)$.

Funciones pares e impares

Función par

Una función es llamada *función par* si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de la función.

Por definición, una función par $y = f(x)$ es igual a su reflexión horizontal $y = f(-x)$.

Ejemplo

Muestre que la función $f(x) = x^2$ es una función par.
Además, use su gráfica para verificar que esta no cambia cuando se refleja a través del eje y.

$f(-2) = (-2)^2 = 4$ $\big\}$ $f(-2) = f(2)$

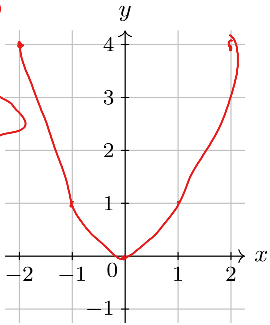
$f(2) = 2^2 = 4$

$f(x) = f(-x)$

• $f(-x) = (-x)^2$

$= x^2 = f(x)$

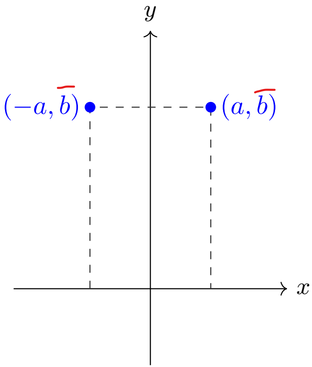
$\therefore$ $f(x) = x^2$ es una fn. Par.



Simetría con respecto al eje y

Una gráfica se dice ser *simétrica con respecto al eje* y si es igual a su reflexión a través del eje y.

Los puntos en la figura son simétricos con respecto al eje y.



Los siguientes enunciados son equivalentes:

Condiciones para que una función sea par

1. La gráfica de la función f es simétrica con respecto al eje y.
2. La reflexión horizontal de la gráfica de f es igual a la gráfica de f.
3. Por cada punto (x, y) en la gráfica de f, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica.
4. Para cualquier x en el dominio de f se cumple que $f(x) = f(-x)$.

Función impar

Una función es llamada *función impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de la función.

Por definición, una función impar tiene reflexión horizontal $y = f(-x)$ igual a su reflexión vertical $y = -f(x)$.

Ejemplo

Muestre que la función $\boxed{f(x) = x^3}$ es una función impar.
Además, use su gráfica para verificar que la reflexión horizontal es igual a la reflexión vertical.

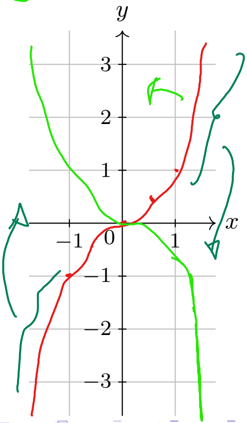
eje x

eje y

$f(-x) = -f(x)$ ✓

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

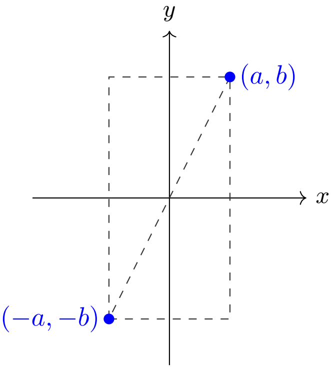
$\therefore\ f(x) = x^3$ es impar



Simetría con respecto al origen

Una gráfica se dice ser *simétrica con respecto al origen* si su reflexión horizontal es igual a su reflexión vertical.

Los puntos en la figura son simétricos con respecto al origen.



Los siguientes enunciados son equivalentes:

Condiciones para que una función sea impar

1. La gráfica de la función f es simétrica con respecto al origen.
2. La reflexión horizontal de la gráfica de f es igual a la reflexión vertical de la gráfica de f.
3. Por cada punto (x, y) en la gráfica de f, el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica.
4. Para cualquier x en el dominio de f se cumple que $f(-x) = -f(x)$.
5. La gráfica se queda igual si se rota $180°$ alrededor del origen.

Ejemplo

$f(x) = f(-x)$ $\qquad$ $f(-x) = -f(x)$

Determine si la función es par, impar o ninguna.

(a) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$ $\qquad$ impar ✓

(b) $g(x) = x^3 + x^2$

• $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq x^3 + x^2 = f(x)$ no es par

$\neq -f(x) = -(x^3 + x^2) = -x^3 - x^2$

No es impar.

(c) $h(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ $\qquad$ Par ✓