

## Sección 3.1

# Funciones polinómicas de grado mayor que 2



Universidad de Puerto Rico  
Recinto Universitario de Mayagüez  
Facultad de Artes y Ciencias  
Departamento de Ciencias Matemáticas

# Contenido

1 Propiedades de gráficas de monomios

2 Propiedades de gráficas de polinomios

## Función polinómica de grado $n$

Una *función polinómica* de grado  $n$  en la variable  $x$  es una función que puede ser escrita en la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde  $n$  es un entero no negativo,  $a_n \neq 0$  y los coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$  y  $a_0$  pueden ser cualquier número real.

$$x^2, x^2 + 2, x^2 + 2x + 3, ax^2 + bx + c$$

Al monomio con el mayor exponente para  $x$  (es decir,  $a_n x^n$ ) se le denomina **término líder** y al coeficiente de dicho término ( $a_n$ ) se le denomina **coeficiente líder**. Al término  $a_0$  se le llama **término constante**.

En el Capítulo 2, se estudiaron las gráficas de las funciones mostradas en la siguiente tabla, las cuales son casos particulares de funciones polinómicas.

Grado de $f$	Forma de $f(x)$	Gráfica de $f(x)$
0	$f(x) = a_0$	Recta horizontal con intercepto en $y$ igual a $a_0$ .
1	$f(x) = \overline{a_1}x + \overline{a_0}$ $y = mx + b$	Recta con pendiente $\overline{a_1}$ e intercepto en $y$ igual a $\overline{a_0}$ .
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	Una parábola con eje de simetría $x = -\frac{a_1}{2a_2}$ .

Los polinomios pueden ser clasificados de acuerdo a su *grado*. Es costumbre escribir el polinomio de tal forma que los grados de sus términos estén en orden descendente. Cuando está escrito en esta forma se dice que está en forma estándar.

# Ejemplo

Determine si cada una de las siguientes funciones son polinomios. Si es así escriba el mismo en su forma estándar e identifique el término líder.

✓(a)  $f(x) = 3x - 5x^3 + 8$   $= -5x^3 - 3x + 8$

✗(b)  $g(x) = -x^4 + 5\sqrt{x} + 6$   $= -x^4 + 5x^{1/2} + 6$

✓(c)  $F(x) = \frac{3}{5}x + \sqrt{3}x^2 - 2x^5$   $= -2x^5 + \sqrt{3}x^2 + \frac{3}{5}x$

✗(d)  $G(x) = 2x^3 + 8x - \left(\frac{2}{x}\right) = 2x^3 + 8x - 2x^{-1}$

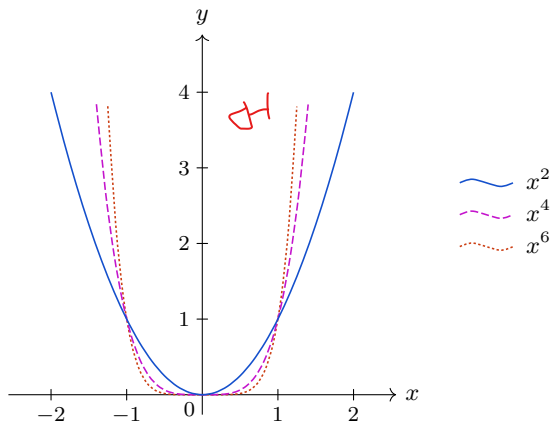
# Propiedades de gráficas de monomios

Un **monomio** es un polinomio de la forma  $ax^n$ , donde  $a$  es cualquier número real distinto de cero y  $n$  es un entero no negativo. Una función polinómica descrita por un monomio, tiene la forma  $f(x) = ax^n$ . Este tipo de funciones ya fueron estudiadas cuando  $a = 1$ , pues coinciden con las *funciones de potencia*, cuyas propiedades principales se resumen a continuación.



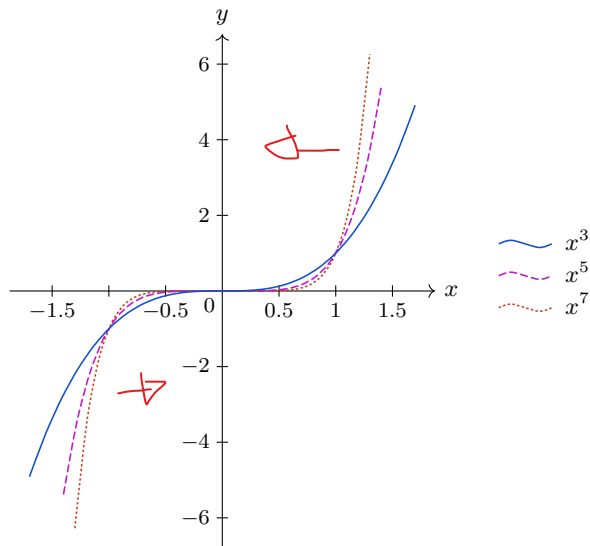
# Propiedades de la función $f(x) = x^n$ cuando $n$ es par

- 1 La gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje  $y$ .
- 2 El dominio de  $f$  es el conjunto de todos los números reales, es decir,  $(-\infty, \infty)$ . El rango es el conjunto de todos los números reales no-negativos, es decir,  $[0, \infty)$ .
- 3 La gráfica siempre contiene los puntos  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ .
- 4 La función es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y creciente en  $[0, \infty)$ .
- 5 Mientras mayor sea el exponente  $n$ , *más inclinada* está la gráfica en los intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[1, \infty)$ , y *más plana* se ve la gráfica cerca del origen.



# Propiedades de la función $f(x) = x^n$ cuando $n$ es impar

- 1 La gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al origen.
- 2 El dominio y el rango de  $f$  es el conjunto de los números reales, es decir,  $(-\infty, \infty)$ .
- 3 La gráfica de  $f$  siempre contiene los puntos  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ .
- 4 La función es creciente en todo su dominio  $(-\infty, \infty)$ .
- 5 Mientras mayor sea el exponente  $n$ , *más inclinada* está la gráfica en los intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[1, \infty)$ , y *más plana* se ve la gráfica cerca del origen.



# Propiedades de gráficas de polinomios

De acuerdo a lo que se ha observado de las gráficas de monomios, se pueden deducir tres rasgos o propiedades de las funciones polinómicas que merecen ser enfatizadas.

## 1. Dominio

El dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de los números reales. La gráfica continúa indefinidamente a la derecha del cero y a la izquierda del cero y no tiene ningún hueco o salto. Se dice en este caso que la función es *continua*. Informalmente, se dice que la gráfica “se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel”.

## 2. Forma general

La gráfica es una curva suave, y es de forma ondulada. No tiene vértices agudos ni cambios bruscos. Además, en los extremos se levanta o cae indefinidamente, es decir, la salida “tiende a infinito” (positivo o negativo) cuando la entrada “tiende a infinito” (positivo o negativo).

### 3. Comportamiento general cuando $x \rightarrow \infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$

Existen 4 posibles *comportamientos* de la función  $f(x) = ax^n$  ( $n \geq 1$  y  $a \neq 0$ ), cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$ . Estos se describen a continuación:

Casos	Entrada	Salida
$a > 0$ y $n$ par	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
	$x \rightarrow -\infty$	
$a > 0$ y $n$ impar	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$a < 0$ y $n$ par	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
	$x \rightarrow -\infty$	
$a < 0$ y $n$ impar	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$



La tercera propiedad hace referencia a polinomios de la forma  $f(x) = ax^n$ , sin embargo, se puede generalizar a cualquier tipo de polinomios y es de mucha utilidad para graficar funciones polinómicas.



## Comportamiento en los extremos de funciones polinómicas

## La gráfica de la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

se comporta como la gráfica de  $y = a_n x^n$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

El teorema anterior también se refiere a la *concavidad* de la gráfica en los extremos. Es decir, cualquier polinomio  $f(x)$  de grado  $n$ , tiene la misma concavidad en sus extremos que la función determinada por su término líder  $a_n x^n$ .

# Ejemplo

Determine el comportamiento en los extremos de la función, es decir, el comportamiento de la función cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

(a)  $y = \boxed{x^3} + 5x^2 + 2$   $\rightarrow$  la gráfica de (a) es similar a la gráfica de  $x^3$

(b)  $y = 1 - \boxed{2x^4}$

•  $x \rightarrow \infty \quad f(x) \rightarrow -\infty$   
 $x \rightarrow -\infty \quad f(x) \rightarrow -\infty$

$\rightarrow$  " " (b) "  $-2x^4$   $\cap$

•  $x \rightarrow \infty \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$   
 $x \rightarrow -\infty \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

$\sim -x^3$

(c)  $y = 1 - 2x^2 - \boxed{x^3}$

(d)  $y = 2x^3 + \boxed{x^4} + 1$   $\cup \sim x^4$