Sección 0.2
Exponentes y Radicales

Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Repaso

* $-a=(-1)a$

* $-(a+b)=-a-b$

* $\left.\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ - \cdot - = + \end{array}\right\} +$

  $\left.\begin{array}{l} + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \end{array}\right\} -$

* $-(a-b)$

  $=-a+b=b-a$

Exponentes

$a \in \mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}$

Si a es un número real y n es un número natural (entero positivo), entonces:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ factores}}$$

El número a se llama **base** y el número n se llama **exponente**.

Ejemplos

a. $3^4 = \overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}^{4\text{-veces}} = 9 \times 3 \times 3 = 27 \times 3 = 81$

b. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{32}$

c. $(-4)^3 = -4 \cdot -4 \cdot -4 = -64$

d. $(-2)^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16$

e. $-2^4 = (-1)2^4 = -(2^4) = -(16) = -16$

Exponente cero

Si $a \neq 0$ es cualquier número real, entonces $a^0 = 1$.

Ejemplos

a. $\pi^0 =$ 1

b. $(-3)^0 =$ 1

c. $-5^0 =$ $(-1)\,5^0 = (-1)\,1 = -1$

d. $\left(\frac{7}{2}\right)^0 =$ 1

e. 0^0 no está definido.

Exponente negativo

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces:

- $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$ ①

- $$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Ejemplos

$-a = (-1)a$

a. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

b. $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

c. $-2^{-3} = (-1)(2)^{-3} = (-1) \cdot \frac{1}{2^3} = (-1) \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

d. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = \frac{8}{27}$

e. 0^{-n}, n un número natural, no está definido.

$\to \frac{1}{0^n}$

Reglas de los exponentes

Sean las bases a y b números reales y los exponentes m y n enteros positivos, entonces:

E1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

E2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

E3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

E4. $(ab)^n = a^n b^n$

E5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

Ejemplos

a. $x^3 \cdot x^2 =$ $x^{3+2} = x^5$

b. $\dfrac{x^2}{x^4} =$

c. $(-x^4)^3 =$

d. $(-x^4.y^2)^3 =$ $\left((-1)x^4 \cdot y^2\right)^3$

$= (-1)^3 (x^4)^3 (y^2)^3$

$= -1 \; x^{12} y^6$

$= -x^{12} y^6$

e. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3 =$

Usando las propiedades anteriores, simplifique las expresiones.

a. $\left(\frac{c^4d^3}{d^2}\right)\left(\frac{d^2}{c^3}\right)^3 = \frac{c^4 d^3}{d^2}\cdot\frac{d^{2\cdot 3}}{c^{3\cdot 3}}$

$= \frac{c^4 d^3 d^6}{d^2 c^9} = \frac{c^4 d^{3+6}}{d^2 c^9} = \frac{c^4 d^9}{d^2 c^9}$

(1) $c^4 c^{-9} d^9 d^{-2} = c^{-5} d^7 = \frac{d^7}{c^5}$

$\frac{d^9 d^{-2}}{c^9 c^{-4}} = \frac{d^{9-2}}{c^{9-4}} = \frac{d^7}{c^5}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

b. $\left(2u^2v^3\right)^3\left(4u^3v\right)^{-2} =$ 1

$$\boxed{\frac{v^7}{2}}$$

Radicales

Ya sabemos qué significa 2^n, si n es un entero positivo. ¿Qué pasa si n es una fracción? Por ejemplo, $2^{\frac{3}{5}}$. Para esto vamos a hablar de los *radicales*.

El símbolo $\sqrt{}$ es llamado radical y representa la raíz cuadrada positiva. La expresión dentro del radical es llamada el **radicando** y el **índice del radical** es 2.

Radical

$$\sqrt[n]{x^m}$$

exponente

índice del radical

Radicando

Raíz cuadrada

La *raíz cuadrada* de un número no-negativo a, que se denota por $\sqrt{a}$, es un número no-negativo que multiplicado por sí mismo da a, es decir:

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

$$b = \sqrt{a} \text{ si y solo si } b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ y $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$.

Observación

Note que $\sqrt{16} = \sqrt{(-4)^2} \neq -4$. En general, $\sqrt{a^2} \neq a$ si $a < 0$.

Propiedades de la raíz cuadrada

Sean a y b números reales **positivos** y c un número real cualquiera. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

C1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

C2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \ b \neq 0$

C3. $\sqrt{c^2} = |c|$ $\rightarrow \sqrt{c^2} = c$ if $\boxed{c > 0}$

Positivo

Ejemplos

• Como $5^2 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$

a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25}\,\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

• $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

b. $\sqrt{\dfrac{49}{4}} =$

c. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\Rightarrow \sqrt{(-3)^2} = -3$ ✗

Raíz n-ésima

Sea n cualquier entero positivo. Se dice que el número real b es la raíz n-ésima de un número a, si se cumple que:

$$b^n = a$$

Este número real b se denota por $\sqrt[n]{a}$ y al número n se le llama índice del radical.

Si n es par entonces se exige que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

$\sqrt{a} = b \longleftrightarrow b^n = a$

Si $n=2$
Raíz Cuadrada

Propiedades de la raíz n-ésima

Si a, b son números reales y m, n son enteros positivos, entonces:

R1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

R2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

R3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

R4. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplos

a. $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{5}$ $= 2\sqrt[3]{5}$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40 = 2^3 \cdot 5$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} =$

c. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\dfrac{1}{64}}} =$ use R3

R4

d. $\sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)$, 3 es impar

e. $\sqrt[4]{(\underbrace{-2}_{a})^4} = |-2| = 2$

$\sqrt[4]{a^4} = |a|$

Ejercicio

Simplifique la siguiente expresión usando las propiedades de los radicales:

$$4\sqrt{50} - 6\sqrt{32} - 3\sqrt{18}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$50 = 2\cdot 5^2$

$32 = 2^5$

$18 = 2\cdot 3^2$

R.1
R4

$$4\sqrt{2\cdot 5^2} - 6\sqrt{2^5} - 3\sqrt{2\cdot 3^2}$$

$$4\sqrt{2}\sqrt{5^2} - 6\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2} - 3\sqrt{2}\sqrt{3^2}$$

$$4\sqrt{2}\,|5| - 6\,|2|\,|2|\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,|3|$$

$$20\sqrt{2} - 24\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \rightarrow 20x - 24x - 9x$$

$$= -13x = -13\sqrt{2}$$

Factori. $-13\sqrt{2}$

Relación entre los exponentes y los radicales

$n \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$

Si n es un entero positivo, m un entero y a un número real, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \qquad \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, se exige que $a \geq 0$.

El **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** de la raíz o el exponente del radicando.

Ejemplos

$$256 = 2^8 = 2^5 \cdot 2^3$$

a. $27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{2\sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{2\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{4}$

b. $25^{\frac{3}{2}} =$

c. $16^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(16)^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{(16)^2}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{16^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{16^2}}$ ✓

$= \frac{1}{\sqrt[5]{256}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^5}\,\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{2\sqrt[5]{2^3}}$ ✓

Ejercicios

Sean x, y números reales positivos.

$7^2 = 49 \longleftrightarrow \sqrt{49} = 7$

a. $3\sqrt{49x^3} - 5\sqrt{16x^3} = 3\sqrt{49}\sqrt{x^3} - 5\sqrt{16}\sqrt{x^3}$

$= 3 \cdot 7\sqrt{x^3} - 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{x^3}$

$= 21\sqrt{x^3} - 20\sqrt{x^3} = \sqrt{x^3}$

$2^3 = 8 \leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

b. $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{-x} + 4\sqrt[3]{27x} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{-x} + 4\cdot\sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{x}$

$= 2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{-x} + 4\cdot 3\sqrt[3]{x}$

$\boxed{\begin{aligned}&\sqrt[3]{x^3 \cdot x}\\ &= \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{x}\\ &= x\sqrt[3]{x}\end{aligned}}$

$= \underline{2}x\underline{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{-x} + \underline{12}\,\underline{\sqrt[3]{x}}$

$= 2\sqrt[3]{x}\,(x+6) + \sqrt[3]{-x}$ ✓

$$\frac{y^3}{y} = y^3 \cdot y^{-1} = y^{3-1} = y^2$$

c. $\sqrt{\dfrac{18x^4y^3}{2x^{-2}y}} + 2\sqrt{\dfrac{16x^3y^5}{x^{-3}y^3}} =$ $\sqrt{\dfrac{18x^4y^3}{\frac{2y}{x^2}}} + 2\sqrt{\dfrac{16x^3y^5}{\frac{y^3}{x^3}}}$

$$\sqrt{\frac{18x^4y^{\cancel{3}}x^2}{2\cancel{y}}} + 2\sqrt{\frac{16x^3y^5x^3}{y^3}} = \sqrt{\frac{18x^6y^2}{2}} + 2\sqrt{16x^6y^2} = \sqrt{9x^6y^2} + 2\sqrt{16x^6y^2}$$

$$\sqrt{9}\sqrt{x^6y^2} + 2\cdot\sqrt{16}\sqrt{x^6y^2} = 3\sqrt{x^6y^2} + 8\sqrt{x^6y^2} = 11\sqrt{x^6y^2}$$