Sección 1.7
Funciones de potencia

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Definición

Funciones de potencia

Las *funciones de potencia* son aquellas que se pueden expresar de la forma:

$$f(x) = ax^p,$$

donde a y p son constantes.

Ejemplo

Las siguientes son ejemplos de funciones de potencia:

(a) $f(x) = 5x^3$

(b) $g(x) = -7x^4$

(c) $h(x) = 6x^{-1}$

(d) $k(x) = \dfrac{6}{x^2}$

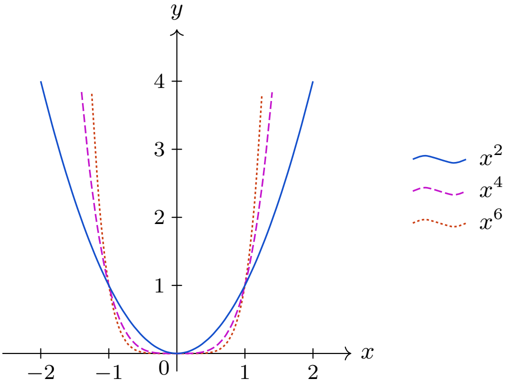
(e) $p(x) = 0.74x^{1/2}$

(f) $q(x) = -\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{x}$

Funciones de potencias enteros positivos

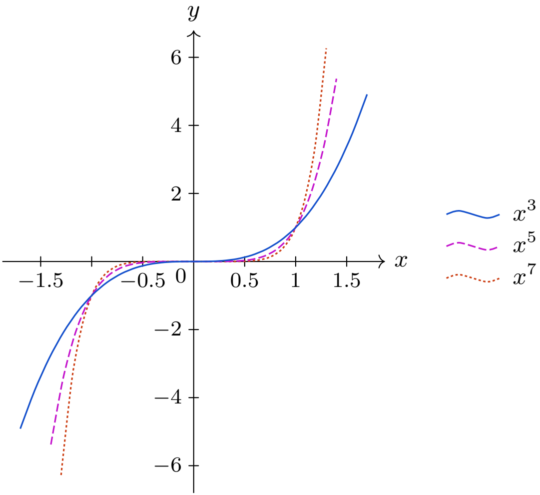
Cuando los exponentes de la función potencia son *enteros positivos*, la gráfica de su función puede ser esencialmente de dos formas. Esto se ilustra a continuación:

Gráficas de **potencias pares**:



- Observe que la salida y es siempre positiva.
- Observe que la salida y es la misma cuando se entra un valor y su negativo. Esto resulta en que la gráfica es *simétrica con respecto al eje* y.
- Observe que mientras mayor la potencia, más *se aplana* la gráfica cerca del origen.

Gráficas de **potencias impares**:



- Observe que la salida y es positiva cuando la entrada x es positiva y la salida y es negativa cuando la entrada x es negativa.
- El tipo de simetría que resulta se llama *simetría con respecto al origen*.
- Observe que mientras mayor la potencia, más *se aplana* la gráfica cerca del origen.

En resumen,

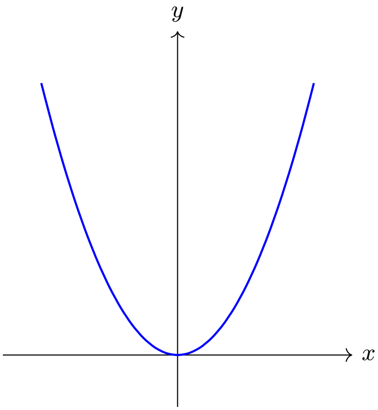
Gráficas de funciones de potencias enteros positivos

La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

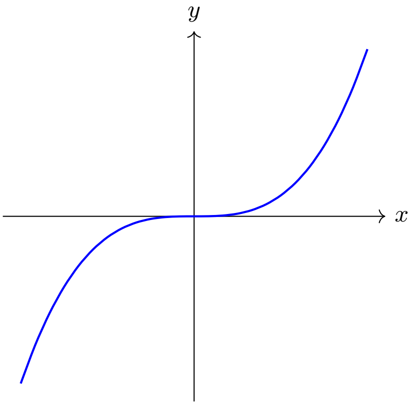
$$f(x) = x^n,$$

donde n es un entero positivo mayor que 1, tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ o $y = x^3$, dependiendo si n es par o impar (véanse las figuras siguientes).

Caso n par



Caso n impar



Funciones de potencias enteros negativos

Ejemplo 1. Dibuje la gráfica de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Solución:

Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, no puede haber ningún punto de la forma $(0, f(0))$ en la gráfica de f. O sea, la gráfica de f no intercepta la recta $x = 0$ (el eje y).

El comportamiento de la función f para valores de x cercanos a 0 es de crucial importancia al dibujar la gráfica.

Considere la tabla a continuación:

x	0.1	0.01	0.001	0.000001
$f(x) = \dfrac{1}{x}$				

Observe que a medida que la entrada x se acerca a cero con valores positivos (x "tiende a cero" por la derecha), la salida $\dfrac{1}{x}$ parece aumentar de forma no acotada. Decimos en este caso que la función "tiende a infinito".

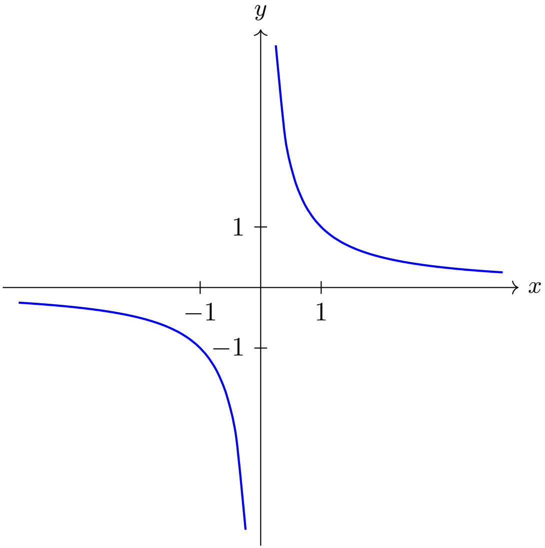
Ahora considere la tabla:

x	1	10	100	$1,000$	$1,000,000$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$					

Observe que a medida que la entrada x "tiende a infinito", la salida $\dfrac{1}{x}$ "tiende a cero".

La gráfica se puede completar considerando valores negativos de x, grandes y pequeños, como en la tabla siguiente:

x	-1	-10	-100	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \dfrac{1}{x}$						


y
x
1
-1
1
-1

Observe en la gráfica:

- Si la entrada x es positiva, entonces la salida y es positiva; si la entrada x es negativa, entonces la salida es negativa.
- Si x tiende a cero por la derecha, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a cero por la izquierda, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a negativo infinito.
- Si x tiende a positivo infinito, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a cero.
- Si x tiende a negativo infinito, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a cero.

Ejemplo 2. Dibuje la gráfica de $f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$, para $x \neq 0$.

Solución:

Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, no puede haber ningún punto de la forma $(0, f(0))$ en la gráfica de f. O sea, la gráfica de f no intercepta la recta $x = 0$ (el eje y).

Como en el ejemplo anterior, el comportamiento de la función f para valores de x cercanos a 0 va a ser un factor determinante en la forma que tiene la gráfica.

Considere la siguiente tabla:

x	0.1	0.01	0.001	0.000001
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$				

Observe que a medida que la entrada x se acerca a 0, con valores positivos, los valores de salida $\dfrac{1}{x^2}$ aumentan sin cota, es decir, la función "tiende a infinito".

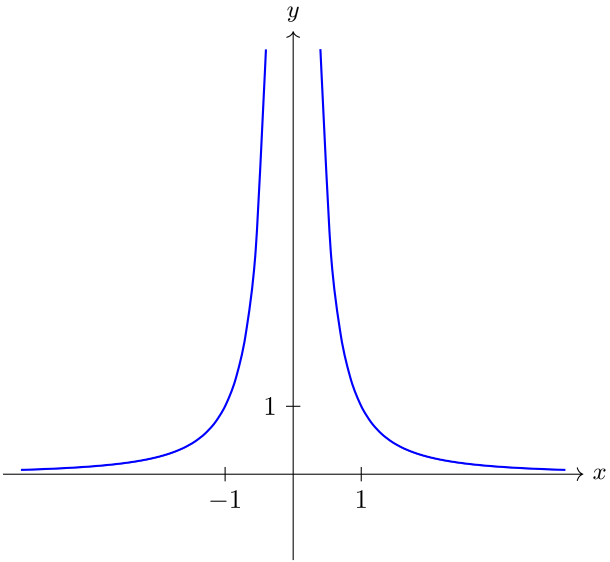
Ahora, observe en la siguiente tabla que a medida que la entrada x tiende a infinito, la salida $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero:

x	1	10	100	$1,000$	$1,000,000$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$					

La gráfica se puede completar considerando valores negativos de x, grandes y pequeños, como en la tabla a continuación:

x	-1	-10	-100	-0.1	-0.01
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$					

Observe que cuando el signo de la entrada x cambia, la salida $\dfrac{1}{x^2}$ se queda igual. Esto resulta en la simetría con respecto al eje y que exhibe la gráfica a continuación.


y
x
1
−1
1

Observe en la gráfica:

- La salida y siempre es positiva, sin importar si la entrada x es positiva o negativa.
- Si x tiende a cero por la derecha, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a cero por la izquierda, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a positivo infinito, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero.
- Si x tiende a negativo infinito, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero.

En los dos ejemplos anteriores se puede observar una idea fundamental, de gran ayuda al graficar este tipo de funciones:

Tamaño de un cociente

$$\frac{1}{\text{pequeño}} = \text{grande} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\text{grande}} = \text{pequeño}$$

La recta $x = 0$ (el eje y) en las gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es un ejemplo de una *asíntota vertical*, y la recta $y = 0$ (el eje x) es un ejemplo de una *asíntota horizontal*.

En resumen,

Gráficas de funciones de potencias enteros negativos

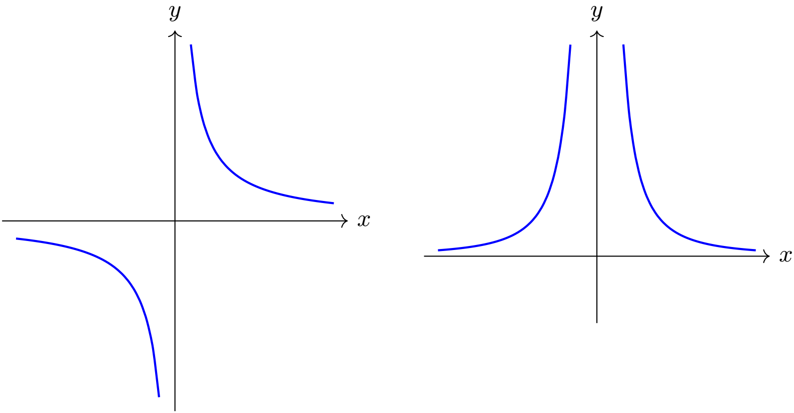
La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

donde n es un entero positivo, tiene la misma forma general que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, o $y = \frac{1}{x^2}$, dependiendo si n es impar o par (véanse las figuras siguientes).

Caso n impar

Caso n par



Observe que en ambos casos la asíntota horizontal es la recta $y = 0$ y la asíntota vertical es la recta $x = 0$.

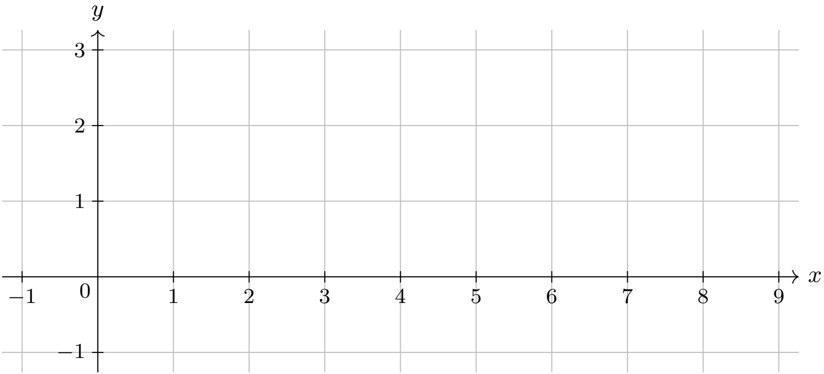
Funciones de potencias radicales

Función radical

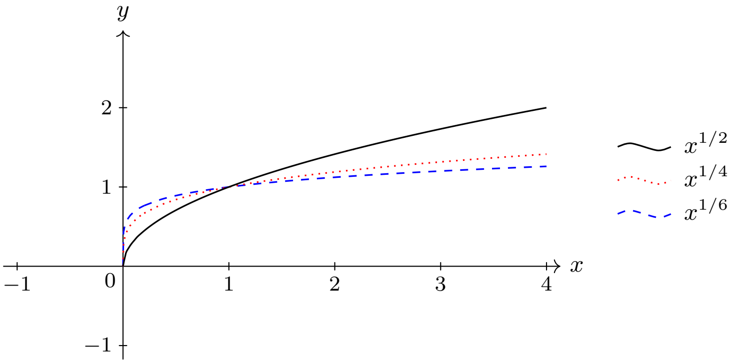
Una *función radical* es una función de la forma $f(x) = x^{1/p} = \sqrt[p]{x}$, donde p es un entero positivo.

Recuerde que si p es un entero positivo par, entonces $x^{1/p}$ se define como el número real *no-negativo* que elevado a la p es igual a x. Por ejemplo:

Ejemplo 3. Dibuje la gráfica de la función raíz cuadrada $f(x) = x^{1/2}$.

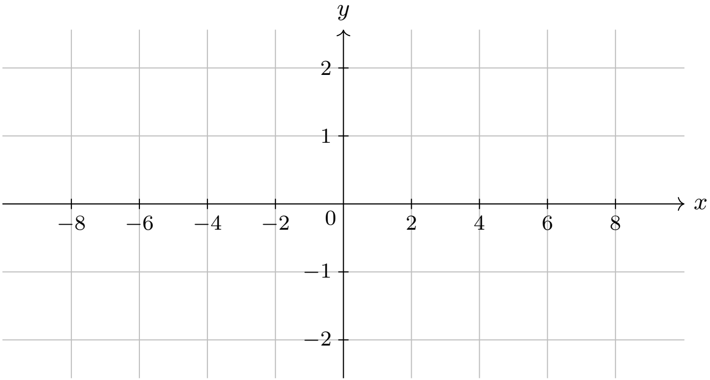


En general, la gráfica de $f(x) = x^{1/p}$ para cualquier entero positivo par p se pueden dibujar de igual manera. Observe que estas funciones solo están definidas para $x \geq 0$. Por eso la gráfica aparece solo en el primer cuadrante.

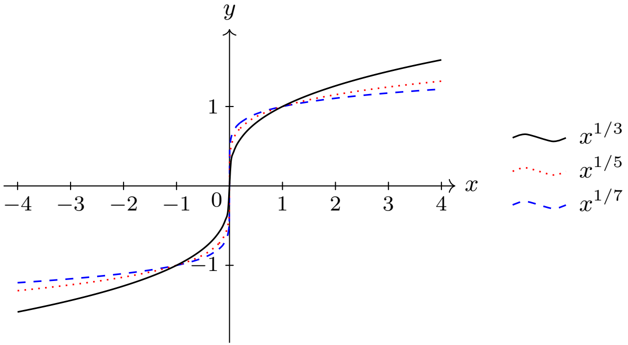


Recuerde que si p es un entero positivo impar, entonces $x^{1/p}$ se define como el número real que elevado a la p es igual a x. Por ejemplo:

Ejemplo 4. Dibuje la gráfica de la función raíz cúbica $f(x) = x^{1/3}$.



En general, la gráfica de $f(x) = x^{1/p}$ para cualquier entero positivo impar p se puede dibujar de igual manera.



En resumen,

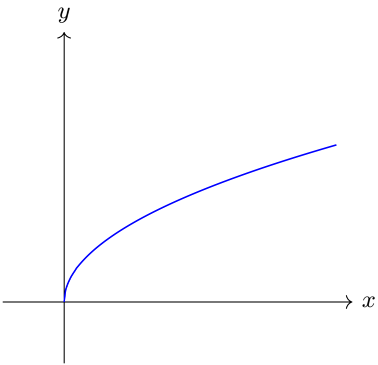
Gráficas de la función $f(x) = x^{1/p}$

La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

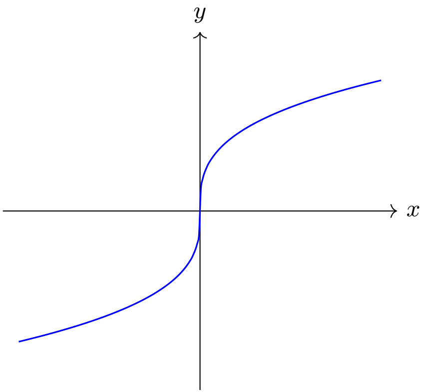
$$f(x) = x^{1/p} = \sqrt[p]{x},$$

donde p es un entero positivo ($p \neq 1$) tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^{1/2}$ o $y = x^{1/3}$ dependiendo de si p es par o impar (véanse las figuras siguientes).

Caso p par



Caso p impar



Variación directa e inversa

Variación directa e inversa

- Si $y = kx$ donde k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **directamente proporcional** a x, o que **varía directamente** con x.
- Si $y = \dfrac{k}{x}$ donde k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **inversamente proporcional** a x, o que **varía inversamente** con x.

En ambos casos, la constante k se llama la **constante de proporcionalidad**.

Ejemplos

1. La función que toma como entrada el número de bicicletas y produce como salida el número de ruedas en ese conjunto de bicicletas es

$$r(b) = 2b,$$

la cual es un ejemplo de variación directa. En esta función el número de ruedas $r(b)$ es directamente proporcional al número de bicicletas b, y la constante de proporcionalidad es 2.

2. De acuerdo a la ley de Boyle, si la temperatura se mantiene constante, y se comprime una masa fija de gas, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen V del gas. Esto quiere decir que $P = \dfrac{k}{V}$ para alguna constante k. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad si una muestra de aire con volumen de 5 mililitros se encuentra a una presión de 2.02 atmósferas?

Las aplicaciones de variación directa e inversa se pueden extender a otras potencias de x.

Variación directa e inversa como la n-ésima potencia

- Si $y = kx^n$ donde $n > 0$ y k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **directamente proporcional a la potencia** n **de** x, o que **varía directamente con respecto a la potencia** n **de** x.
- Si $y = \dfrac{k}{x^n}$ donde $n > 0$ y k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **inversamente proporcional a la potencia** n **de** x, o que **varía inversamente con respecto a la potencia** n **de** x.

En ambos casos, la constante k se llama **constante de proporcionalidad**.

Ejemplos

1. El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio. Escriba un modelo matemático para esta relación.

2. El costo de producción por unidad de una revista de aparición mensual varía inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad de impresión. Si el costo de producción por unidad es de $\$6.00$ cuando se imprimen $2,500$ ejemplares, ¿cuál será el costo si se imprimen $6,400$ ejemplares?