

Sección 0.9 Círculos



Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

- 1 Repaso
- 2 Definición de círculo
- 3 Ecuación de un círculo

Repaso

$$\cdot M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\cdot d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

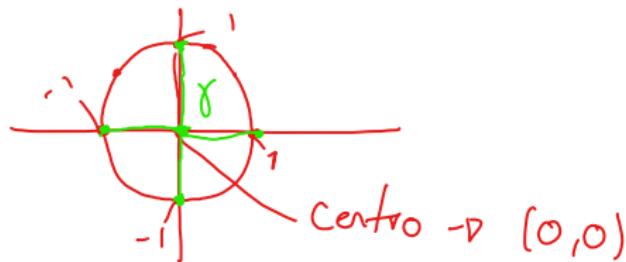
$$\cdot x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Definición de círculo



Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo C , llamado centro, es constante. La distancia de cualquier punto del círculo al centro se llama el radio del círculo.

Ejemplo:



Como el radio es una
distancia entonces
 $r > 0$
Positivo

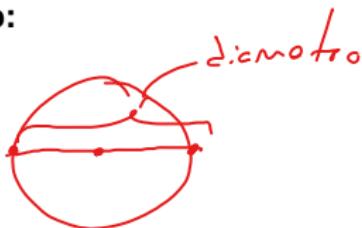
Diámetro de un círculo

El diámetro de un círculo es cualquier segmento de recta que pasa por el centro del círculo y cuyos extremos se encuentran en el borde del círculo.

El diámetro de un círculo es **dos** veces su **radio**.

$$d = 2r \rightarrow r = \frac{d}{2} !$$

Ejemplo:



$$r = 4 \text{ cm}$$

$$d = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$$

Ecuación de un círculo

Si el centro de un círculo tiene coordenadas $C(h, k)$ y su radio es r , se puede utilizar la definición de círculo para deducir *la ecuación de ese círculo*.

Sea $P(x, y)$ cualquier punto del círculo, entonces:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$d(C, P) = r$$

centro
punto

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2xh + h^2 - 2yk + k^2 &= \boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2} \end{aligned}$$

*Ecuación
del círculo*

(h, k) : centro

r : radio

La ecuación del círculo con centro (h, k) y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En particular, cuando el centro está en el origen $(0, 0)$, la ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

$$(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = 4$$

Ejemplos

- a. Determine el centro y el radio del círculo que corresponde a la ecuación $x^2 + (y + 2)^2 = 7$.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - (-2))^2 = 7$$

$$\bullet (h, k) = (0, -2) \quad \checkmark$$

$$r^2 = 7 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{7} \quad \checkmark$$

- u, k*
- b. Determine la ecuación del círculo con centro en el punto $(2, -5)$ y radio de 3 unidades.

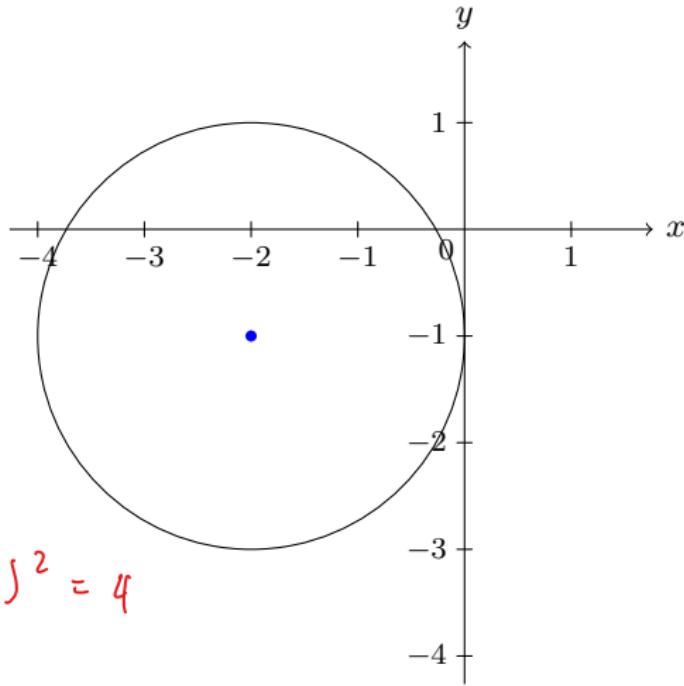
$$(x-2)^2 + (y - (-5))^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + (y + 5)^2 = 9 \quad \checkmark$$

- c. Halle la ecuación del círculo que representa la siguiente gráfica.

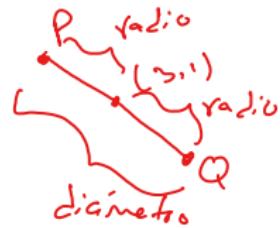
$$y = 2$$

$$(h, k) = (-2, -1)$$



$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

- d. Determine la ecuación del círculo cuyos extremos de un diámetro son $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$.



① Utilizar for. Punto medio, para encontrar el centro

② la distancia de un extremo al centro. radio

$$\textcircled{1} \quad M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2} \right) = (3, 1) \quad \underline{\text{centro}}$$

$$\textcircled{2} \quad d(P, M) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{53} \quad \underline{\text{radio}}$$

$$\bullet \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 53$$

$$r = \sqrt{53} \rightarrow r^2 = 53$$

¿Es la ecuación de un círculo?

Para determinar si una ecuación de la forma $x^2 + ax + y^2 + by = c$ es la ecuación de un círculo, debemos utilizar la técnica de completar el cuadrado para las variables x y y .

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

- Si $c + \frac{a^2 + b^2}{4} > 0$, entonces la ecuación representa un círculo.
- Si $c + \frac{a^2 + b^2}{4} = 0$, entonces la ecuación representa un punto.
- Si $c + \frac{a^2 + b^2}{4} < 0$, entonces la ecuación no tiene sentido y, por tanto, no representa ningún punto en el plano.

Ejemplos

Determine si las siguientes ecuaciones representan un círculo, de serlo encuentre el centro y radio.

a. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 8$

① $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 8$

$$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \dots$$

② $x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + y^2 - 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 8 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$

③ $(x + \frac{4}{2})^2 + (y - \frac{2}{2})^2 = 13$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

R/ Si: representa un círculo, $r = \sqrt{13}$, $(h, k) = (-2, 1)$

b. $2x^2 + 2y^2 + x + 4y = 0$

$$\textcircled{1} \quad (2x^2 + x) + (2y^2 + 4y) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 2(x^2 + \frac{x}{2}) + 2(y^2 + 2y) = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$\textcircled{3} \quad 2\left((x + \frac{1}{4})^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + 2\left((y + \frac{2}{2})^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 2(y + 1)^2 - 2 = 0$$

$$2(x + \frac{1}{4})^2 + 2(y + 1)^2 = 0 + \frac{1}{8} + 2$$

Verificación

c.) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = -5$

$$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2(y+1)^2 = \frac{17}{8}$$

$$2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2\right] = \frac{17}{8}$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{17}{16} > 0 \text{ si representa un círculo}$$

① $2x^2 + 4x + 3y^2 + 6y = 6$ ② $2(x^2 + 2x) + 3(y^2 + 2y) = 6$

d. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 6y = 6$

(2) $2((x+1)^2 - 1) + 3((y+1)^2 - 1) = 6$

(3) $2(x+1)^2 - 2 + 3(y+1)^2 - 3 = 6$

$$2(x+1)^2 + 3(y+1)^2 = 6 + 2 + 3$$

$$2(x+1)^2 + 3(y+1)^2 = 11$$