Sección 3.1
Funciones polinómicas de grado mayor que 2

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Función polinómica de grado n

Una *función polinómica* de grado n en la variable x es una función que puede ser escrita en la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo, $a_n \neq 0$ y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ y a_0 pueden ser cualquier número real.

Al monomio con el mayor exponente para x (es decir, $a_n x^n$) se le denomina **término líder** y al coeficiente de dicho término (a_n) se le denomina **coeficiente líder**. Al término a_0 se le llama **término constante**.

En el Capítulo 2, se estudiaron las gráficas de las funciones mostradas en la siguiente tabla, las cuales son casos particulares de funciones polinómicas.

Grado de f	**Forma de** $f(x)$	**Gráfica de** $f(x)$
0	$f(x) = a_0$	Recta horizontal con intercepto en y igual a a_0.
1	$f(x) = a_1x + a_0$	Recta con pendiente a_1 e intercepto en y igual a a_0.
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	Una parábola con eje de simetría $x = -\dfrac{a_1}{2a_2}$.

Los polinomios pueden ser clasificados de acuerdo a su *grado*. Es costumbre escribir el polinomio de tal forma que los grados de sus términos estén en orden descendente. Cuando está escrito en esta forma se dice que está en **forma estándar**.

Ejemplo

Determine si cada una de las siguientes funciones son polinomios. Si es así escriba el mismo en su forma estándar e identifique el término líder.

(a) $f(x) = 3x - 5x^3 + 8$

(b) $g(x) = -x^4 + 5\sqrt{x} + 6$

(c) $F(x) = \dfrac{3}{5}x + \sqrt{3}x^2 - 2x^5$

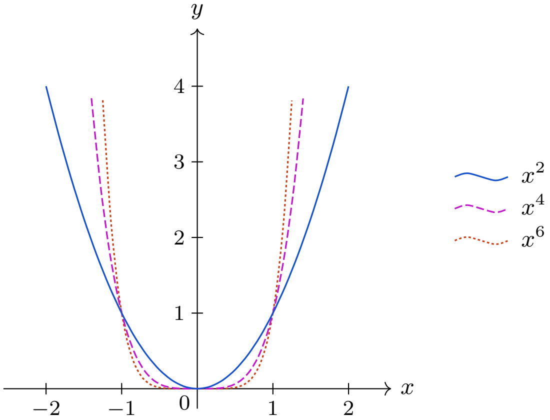
(d) $G(x) = 2x^3 + 8x - \dfrac{2}{x}$

Propiedades de gráficas de monomios

Un **monomio** es un polinomio de la forma ax^n, donde a es cualquier número real distinto de cero y n es un entero no negativo. Una función polinómica descrita por un monomio, tiene la forma $f(x) = ax^n$. Este tipo de funciones ya fueron estudiadas cuando $a = 1$, pues coinciden con las *funciones de potencia*, cuyas propiedades principales se resumen a continuación.

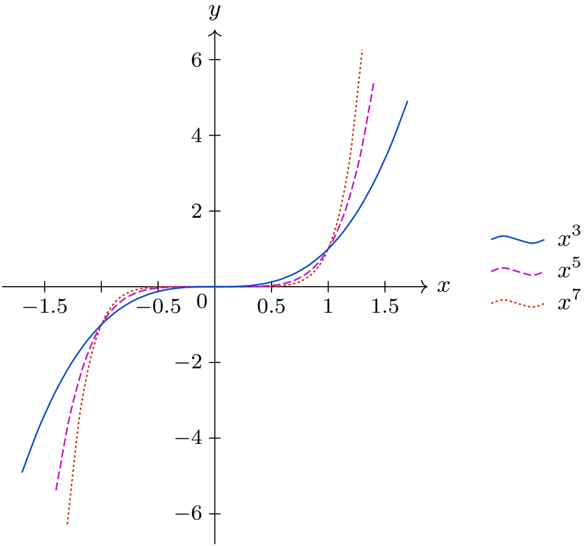
Propiedades de la función $f(x) = x^n$ cuando n es par

1. La gráfica de f es simétrica respecto al eje y.
2. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$. El rango es el conjunto de todos los números reales no-negativos, es decir, $[0, \infty)$.
3. La gráfica siempre contiene los puntos $(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.
4. La función es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty]$.
5. Mientras mayor sea el exponente n, *más inclinada* está la gráfica en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, y *más plana* se ve la gráfica cerca del origen.


y
4
3
2
1
0
x
−2
−1
1
2
x^2
x^4
x^6

Propiedades de la función $f(x) = x^n$ cuando n es impar

1. La gráfica de f es simétrica con respecto al origen.
2. El dominio y el rango de f es el conjunto de los números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica de f siempre contiene los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$.
4. La función es creciente en todo su dominio $(-\infty, \infty)$.
5. Mientras mayor sea el exponente n, *más inclinada* está la gráfica en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, y *más plana* se ve la gráfica cerca del origen.


y
6
4
2
-2
-4
-6
-1.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
x
x^3
x^5
x^7

Propiedades de gráficas de polinomios

De acuerdo a lo que se ha observado de las gráficas de monomios, se pueden deducir tres rasgos o propiedades de las funciones polinómicas que merecen ser enfatizadas.

1. **Dominio**

   El dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de los números reales. La gráfica continúa indefinidamente a la derecha del cero y a la izquierda del cero y no tiene ningún hueco o salto. Se dice en este caso que la función es *continua*. Informalmente, se dice que la gráfica "se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel".

2. Forma general

La gráfica es una curva *suave*, y es de forma ondulada. No tiene *vértices agudos* ni cambios bruscos. Además, en los extremos se levanta o cae indefinidamente, es decir, la *salida* “tiende a infinito” (positivo o negativo) cuando la *entrada* “tiende a infinito” (positivo o negativo).

3. Comportamiento general cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$

Existen 4 posibles *comportamientos* de la función $f(x) = ax^n$ ($n \geq 1$ y $a \neq 0$), cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. Estos se describen a continuación:

Casos	Entrada	Salida
$a > 0$ y n par	$x \to \infty$	$f(x) \to \infty$
	$x \to -\infty$	
$a > 0$ y n impar	$x \to \infty$	$f(x) \to \infty$
	$x \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$
$a < 0$ y n par	$x \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
	$x \to -\infty$	
$a < 0$ y n impar	$x \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
	$x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$

La tercera propiedad hace referencia a polinomios de la forma $f(x) = ax^n$, sin embargo, se puede generalizar a cualquier tipo de polinomios y es de mucha utilidad para graficar funciones polinómicas.

Comportamiento en los extremos de funciones polinómicas

La gráfica de la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

se comporta como la gráfica de $y = a_n x^n$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

El teorema anterior también se refiere a la *concavidad* de la gráfica en los extremos. Es decir, cualquier polinomio $f(x)$ de grado n, tiene la misma concavidad en sus extremos que la función determinada por su término líder $a_n x^n$.

Ejemplo

Determine el comportamiento en los extremos de la función, es decir, el comportamiento de la función cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) $y = x^3 + 5x^2 + 2$

(b) $y = 1 - 2x^4$

(c) $y = 1 - 2x^2 - x^3$

(d) $y = 2x^3 + x^4 + 1$