Sección 1.2
Introducción a funciones

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Se usa el término función para describir la dependencia de una cantidad sobre otra. Esto se puede reconocer cuando decimos, por ejemplo:

- La estatura de una persona depende de su edad.
- La temperatura en un lugar y día dado depende de la hora.
- El costo de enviar un paquete por correo depende del peso del paquete.
- El área de un círculo depende del radio del círculo.

Ejemplo

$\to x$ $\to y$

La siguiente tabla muestra un ejemplo que representa el costo de enviar un paquete como función del peso de este. En la columna de la izquierda está el peso del paquete en onzas, y en la columna de la derecha el costo en dólares:

x W (onzas)	y Sello (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29

Puede observarse que si el paquete pesa 2.5 onzas, el costo para hacer un envío de éste será $\$0.83$, al igual que si pesa 3 onzas.

Definición de función

Función

Sean A y B conjuntos. Una *función* f de A hasta B, que se denota como $f : A \to B$, es una relación que asigna a cada elemento x del conjunto A **exactamente un elemento**, llamado $f(x)$, del conjunto B. El elemento de B denotado $f(x)$ se llama el valor de f en x, o la *imagen* de x bajo f.

$x \in A$

$f(x) \in B$

Dominio
codominio

Sea $f : A \to B$ una función. El conjunto A se conoce como el *dominio* de la función y el conjunto B se conoce como el *codominio* de la función. El *rango* es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía en todo el dominio. No necesariamente el *rango* de una función es igual al *codominio*.

y ⇒ Rango = Todos los posibles resultados o valores de f(x), conforme a la variación de x

X ⇒ Dominio = Valores de x que hacen la función bien definida

$f: A \to B$

$y \Rightarrow$ Rango
$x \Rightarrow$ Dominio

El símbolo que representa un elemento arbitrario en el dominio de una función f se llama la *variable independiente*, usualmente se denota por x.

El símbolo que representa un elemento en el rango de f se llama la *variable dependiente*, usualmente se denota por y. Por eso, escribimos $y = f(x)$ y decimos que x es la variable independiente y y es la variable dependiente (¿de qué depende?, pues de x).

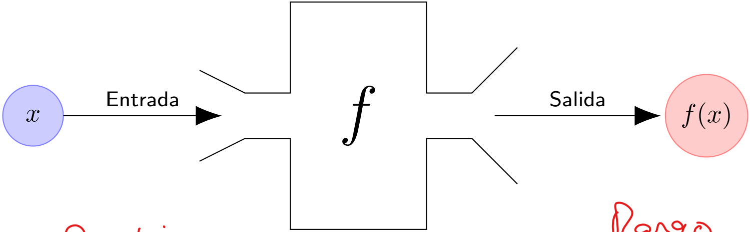
$y = f(x)$

salidas

entrada

1 Se puede pensar en una función como una máquina.

Si x está en el dominio de la función, entonces cuando x **entra** a la máquina, ésta produce una **salida** $f(x)$. Los valores del dominio son los **valores de entrada** y los valores del rango serán los **valores de salida**.



Dominio

Rango

2 Otra manera de representar una función es con un diagrama de flechas.

Cada flecha lleva un elemento de A a un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociado con x, $f(a)$ está asociado con a y así sucesivamente.

Pares ordenados

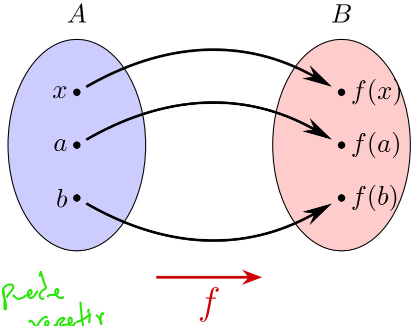
$(x, f(x))$

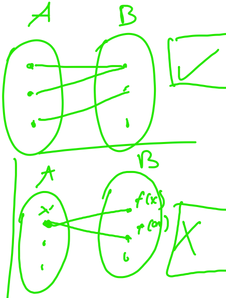
$(a, f(a))$

$(b, f(b))$

No se puede repetir

Si se puede repetir





$(x, f(x))$

$(x, f(a))$

Ejemplo

Sea $\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ definida por $\boxed{f(x) = x^2 + 5.}$ $\rightarrow$ $y = f(x) = x^2 + 5$

$y = x^2 + 5$

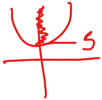
(a) Exprese en palabras cómo actúa f sobre cada uno de los valores de entrada.

Para cada número real se le asigna o le corresponde otro número real determinado por "x^2+5"

(b) Encuentre el dominio, el codominio y el $\boxed{\text{rango de } f.}$

$\mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$

$-\infty \leq x \leq \infty$



$y \geq 5$

Cuatro formas de representar una función

?

1. **Verbalmente.** Usando palabras para describir la relación entre las dos variables.

Ejemplos:

(a) Para cada persona corresponde una edad.

(b) Si Juan gana $\$15$ por hora en su trabajo, conociendo el número de horas que trabaja en la semana (valor de entrada) es fácil determinar su salario (valor de salida).

x

y

(c) La función toma cualquier entrada, le resta 3 y luego eleva el resultado al cuadrado.

x

$y = (x-3)^2$

2. **Numéricamente.** Por tablas o un conjunto de pares ordenados.

Ejemplos:

(a) Usando una tabla para describir el número de ruedas en un conjunto de bicicletas.

Número de bicicletas	Número de ruedas
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
⋮	⋮

(b) Usando pares ordenados, la relación anterior sería:

$$\{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10),\ldots\}$$

3. **Algebraicamente.** Por medio de una ecuación con variables.

Ejemplos:

y

(a) La ecuación $A = \pi r^2$ representa el área A de un círculo como función de su radio $\boxed{r.}$

x

(b) Si d representa la diagonal de un cuadrado, entonces el área A del cuadrado como función de su diagonal es $A = \dfrac{d^2}{2}$.

dependencia x

4. **Visualmente.** Mediante el trazado de gráficas en el plano cartesiano.

   Esto se analizará con detalle en la próxima sección.

Ejemplo

Depende

y - salida

El perímetro de un rectángulo es 20 metros. Exprese el área del rectángulo como una función de la longitud de uno de sus lados.

x - entrada

$P_{\square} = 20 = 2l + 2w \rightarrow 20 - 2w = 2l$

$\boxed{\frac{20-2w}{2} = l}$

$A = l \times w$

$\boxed{A = \frac{20-2w}{2} \times w}$ → Área en función del ancho.

Evaluar una función

En caso que una función sea definida por una fórmula, para evaluar la función en un número a de su dominio, se sustituye el número a en la variable. En otras palabras, se le asigna el valor de entrada a la variable independiente para obtener el valor de salida.

Ejemplos

1. Si $\boxed{f(x) = -x^2 + 3x + 16,}$ halle $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ y $f(3)$.

$x = -1$

$f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) + 16 = -1 - 3 + 16 = -4 + 16 = 12$ ✓

$f(0) = 16$ ✓

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 17.25 \approx \frac{69}{4}$ ✓

$f(3) = 16$ ✓

y x

2. El costo de las uvas se determina generalmente por su peso. Por lo tanto, el costo de un paquete de uvas es una función de su peso. Si se supone que las uvas cuestan $\$0.80$ por libra, el peso en libras sería la entrada, y el costo sería la salida.

¿Cuál es el costo de 4 libras de uvas?

$C = 0.80P$

C = Costo
P = Peso

$C(P) = 0.80P$

$y = C(4) = 0.80(4) = \frac{16}{5} = 3.2$ dolares

3. Si $f(x) = x^2 + 4x + 5$ evalúe las siguientes expresiones.

(a) $f(a) = a^2 + 4a + 5$

x

(b) $f(-a) = a^2 - 4a + 5$

(c) $f(a+h) = (a+h)^2 + 4(a+h) + 5 = a^2 + 2ah + h^2 + 4a + 4h + 5$

(d) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, evalúe $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$.

① $f(a+h) = \dfrac{1}{(a+h)-1} = \dfrac{1}{a+h-1}$ ② $f(a) = \dfrac{1}{a-1}$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h-1} - \frac{1}{a-1}}{h} = \frac{\frac{a-1-(a+h-1)}{(a+h-1)(a-1)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{a} - \cancel{1} - \cancel{a} - h + \cancel{1}}{(a+h-1)(a-1)}}{h} = \frac{\frac{-h}{(a+h-1)(a-1)}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(a+h-1)(a-1)}$$

$$= \frac{-1}{(a+h-1)(a-1)}$$

Dominio y rango de una función

El *dominio* de una función es el conjunto de los valores de entrada. El *rango* de la función es el conjunto de los valores de salida.

A menos que se diga lo contrario, en este curso solo se consideran funciones cuyo dominio y rango consisten de números reales.

evitar , $\frac{\quad}{\text{cero}}$, $\sqrt{\text{negativo}}$

$\sqrt{x}$

$x \geq 0$

El dominio puede estar dado explícitamente. Por ejemplo, la expresión algebraica

$$f(x) = x^3, \quad \boxed{0 \leq x \leq 4}$$

deja saber de forma explícita que el dominio de la función f es el conjunto $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$.

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$

Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no está explícito, entonces el dominio de la función es el dominio de la expresión (es decir, todos los valores de x para los cuales la expresión está bien definida).

Ejemplos

1. Halle el dominio para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\rightarrow$ ojo las deno. no puede ser cero

$\rightarrow x \neq 0$ Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

2. Halle el dominio para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \frac{15}{x-3}$ $\neq 0$

$X - 3 \neq 0$

$\boxed{X \neq 3}$

$\{X \in \mathbb{R} \mid X \neq 3\}$ ✓

(b) $f(x) = \sqrt{x-3}$

$X - 3 \geq 0$

$\boxed{X \geq 3}$

$\{X \in \mathbb{R} \mid X \geq 3\}$

(c) $f(x) = \sqrt{-x}$

(d) $f(x) = -x^2 + 3x + 16$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

(e) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

(f) $f(x) = x + 4$ para $\boxed{0 \leq x \leq 5}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$

comportamiento de la f.

3. Si se define $f(x) = 5 - \dfrac{\sqrt{3x+1}}{2}$, halle el dominio y el rango de f.

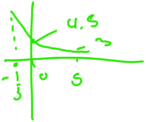
Dominio

$3x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ $\quad \mathrm{Dom}\, f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{3} \}$

$= [-\frac{1}{3}, \infty)$

el Rango es el conjunto de valores que dependen de la variación de x, entonces

Si $x = -\frac{1}{3}$ note $y = f(-\frac{1}{3}) = 5$



Si $x = 0$ note $y = f(0) = \frac{9}{2} = 4.5$

Si $x = 5$ note $y = f(5) = 3$

$\mathrm{Rango}\, f = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5 \}$