Sección 1.9
Funciones inversas

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Una función es una relación de correspondencia o proceso que a cada entrada en un conjunto dado, le asigna una salida única. La pregunta ahora es si dada una salida de una función se puede decidir de forma no ambigua la entrada de dónde vino.

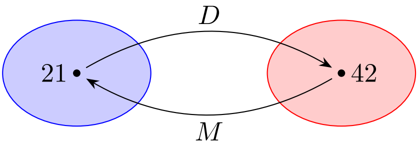
En otras palabras, una función puede verse como un proceso. Ese proceso, ¿se podrá revertir? De poderse, ¿cómo se halla una fórmula para el proceso inverso?, ¿cómo se gráfica el proceso inverso?, ¿cómo se reconoce si un proceso es invertible?

Ejemplos

1. Si la función que duplica una cantidad se llama D, entonces $D(x) = 2x$. ¿Cuál es el proceso inverso?

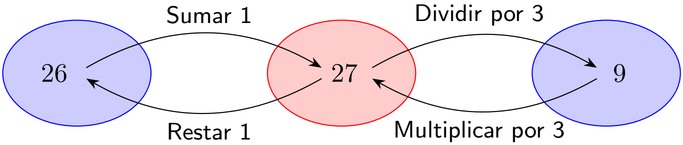
   Solución:

   El proceso inverso de duplicar una cantidad es reducirla a la mitad: $M(x) = \frac{x}{2}$. Por ejemplo, $D(21) = 2(21) = 42$ y $M(42) = \frac{42}{2} = 21$.

   Formalmente, la función inversa de $D(x) = 2x$ es $M(x) = \frac{x}{2}$.

2. En un programa de televisión, el anfitrión ofrece $\$100$ al primer concursante que resuelva el siguiente problema: Se escoge un número, se le suma 1, y luego el resultado se divide por 3. Si el número final es 9, ¿cuál fue el número inicial?



La función original era “sumar uno y luego dividir por tres”:

$$f(x) = \frac{x+1}{3}.$$

La función inversa es “multiplicar por tres y luego restar uno”:

$$g(x) = 3x - 1.$$

Se observa que $g(9) = 3(9) - 1 = 26$ y $f(26) = \dfrac{26+1}{3} = 9$.

En general, para cualquier entrada x:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{3}\right) = 3\left(\frac{x+1}{3}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x$$

$$f(g(x)) = f(3x-1) = \frac{(3x-1)+1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

Note que dada una entrada, la función seguida de su inversa no cambia la entrada. Esta observación se puede usar para definir función inversa.

Función inversa

Una función g se dice ser la *inversa* de una función f, si:

- $g(f(x)) = x$, para cualquier x en el dominio de f, y
- $f(g(x)) = x$, para cualquier x en el dominio de g.

Observe que en particular:

Si g es la función inversa de f, entonces f es la función inversa de g.

Notación para la función inversa

La función inversa de una función f se representa por el símbolo f^{-1}.

En particular, usando esta notación, si f es una función, entonces la función f^{-1} satisface:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f, y
- $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.

WARNING

El "-1" que aparece en la notación de una función inversa NO es un exponente. No tiene nada que ver con el inverso multiplicativo o *recíproco* de un número. Es decir,

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}.$$

Es solo notación para representar la función inversa.

Ejemplos

1. Use composición de funciones para mostrar que si $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, para $x \neq 3$, entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{x-1}$.

2. Use composición de funciones para mostrar que $R(x) = \sqrt{x}$ no es la inversa de $Q(x) = x^2$.

Tablas de funciones inversas

Si f tiene función inversa, entonces:

$$\begin{aligned}(a,b) \text{ está en la tabla de } f &\Leftrightarrow f(a)=b\\ &\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a\\ &\Leftrightarrow (b,a) \text{ está en la tabla de } f^{-1}\end{aligned}$$

Tabla de una función inversa

Si f y g son funciones inversas, entonces:

(a,b) está en la tabla de f si, y solo si, (b,a) está en la tabla de g.

Ejemplos

1. La función f se presenta en la tabla A. Su función inversa f^{-1} se representa en la tabla B. Observe que si un punto (a, b) está en la tabla de una, el punto (b, a) está en la tabla de la otra.

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	5	9	13	17

Tabla A

x	5	9	13	17
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

Tabla B

Observe que el dominio de f es el rango de f^{-1}, y que el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Dominio y rango de una función inversa

Si f y g son funciones inversas, entonces:

- El dominio de f es igual al rango de g, y
- El rango de f es igual al dominio de g.

2. Considere la función que eleva al cuadrado y suma uno: $f(x) = x^2 + 1$. La tabla A tiene algunos valores de esta función y la tabla B muestra los valores al intercambiar las entradas y las salidas.

x	-1	0	1
$f(x)$	2	1	2

Tabla A

Entradas	2	1	2
Salidas	-1	0	1

Tabla B

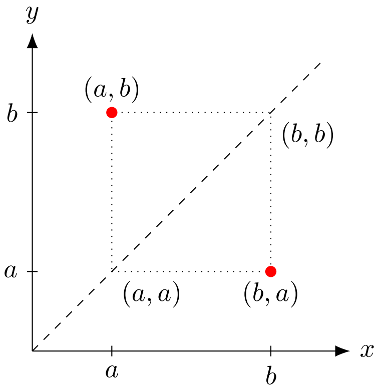
Explique por qué la función f no tiene función inversa.

Gráficas de funciones inversas

Si f tiene función inversa, entonces: $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Es decir,

(a, b) está en la gráfica de $f \Leftrightarrow (b, a)$ está en la gráfica de f^{-1}.

Observando la siguiente figura se puede ver que el punto (a, b) es la reflexión del punto (b, a) a través de la diagonal.



Por lo tanto,

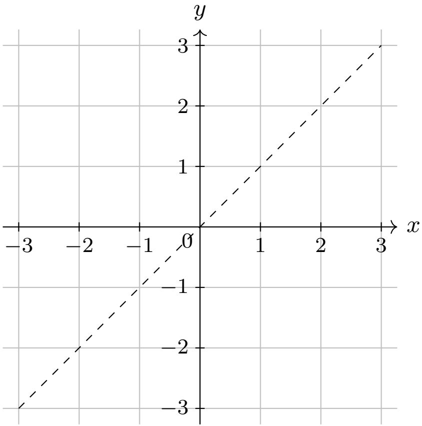
La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f a través de la diagonal.

Gráfica de una función inversa

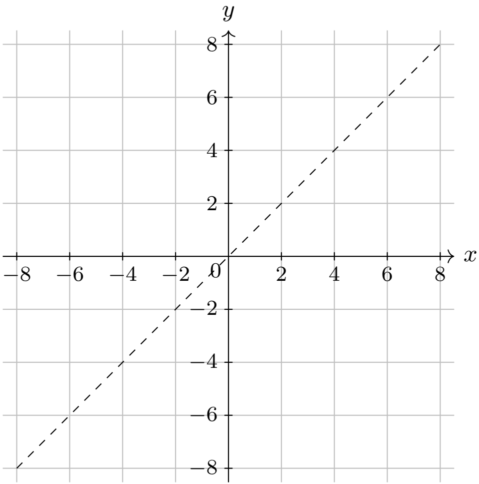
Si f tiene una función inversa, la gráfica de la función inversa se obtiene reflejando la gráfica de f a través de la diagonal.

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 3x$. Grafique f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.



2. Sea $f(x) = x^3$. Grafique f y f^{-1} en el mismo plano coordenado.



El último ejemplo muestra lo que sucede en general con funciones de potencias impares. Si n es impar, la función inversa de la función potencia $f(x) = x^n$ es la n-ésima raíz, $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Cuando n es un entero impar, las gráficas de $f(x) = x^n$ y $g(x) = \sqrt[n]{x}$ tienen la misma forma que las de $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Hallando la inversa de una función

A veces la inversa de una función puede hallarse revirtiendo paso a paso los procesos que componen la función. Sin embargo, hay funciones como, por ejemplo:

$$f(x) = \frac{x}{x-1},$$

para las cuales esos métodos son inefectivos. A continuación se muestra un método más general.

Proceso para encontrar la inversa de una función

Si $y = f(x)$ tiene una función inversa, entonces para encontrarla podemos seguir los siguientes pasos:

- Se resuelve la ecuación $y = f(x)$ por la variable x para obtener $x = f^{-1}(y)$.
- Se intercambian las variables x y y para obtener $y = f^{-1}(x)$.

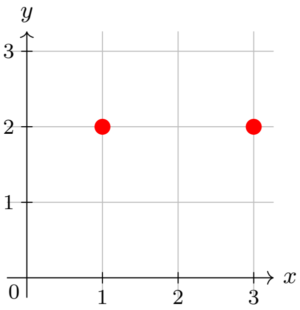
Ejemplos

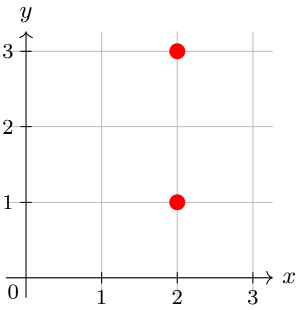
1. Halle la función inversa de $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Halle la función inversa de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

3. Use el procedimiento anterior para mostrar que la función $Q(x) = x^2$ no tiene inversa.

Considere la relación entre las gráficas a continuación:





Si la gráfica de la izquierda se refleja a través de la diagonal, se obtiene la gráfica de la derecha.

Observe que la gráfica de la izquierda es una función, pues cada entrada tiene una y sólo una salida. Sin embargo, la gráfica de la derecha no es una función, pues hay una entrada que tiene más de una salida.

En general, se puede concluir que si dos entradas diferentes producen la misma salida entonces la función no tiene inversa; ó, lo que es igual, una misma salida no puede venir de dos entradas diferentes.

Así que si f es una función y, si $f(a)$ y $f(b)$ son la misma salida, es decir, $f(a) = f(b)$, entonces las entradas a y b no pueden ser diferentes, o sea, $a = b$.

Función uno a uno

Una función f se dice ser *uno a uno* si para cualquier par de valores a y b en su dominio, se cumple:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Equivalencias para la existencia de la función inversa

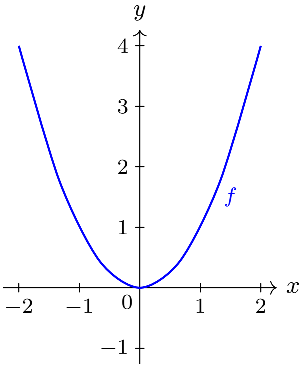
Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) Una función tiene inversa.
(b) Entradas diferentes producen salidas diferentes.
(c) Una misma salida no puede venir de dos entradas diferentes.
(d) La función es uno a uno.
(e) Toda recta horizontal cruza la gráfica de la función a lo más en un punto.

El último resultado equivalente se llama la **prueba de la recta horizontal**. Para entenderlo mejor, considere el siguiente ejemplo.

Ejemplos

1. Determine si la función $f(x) = x^2$ es invertible.



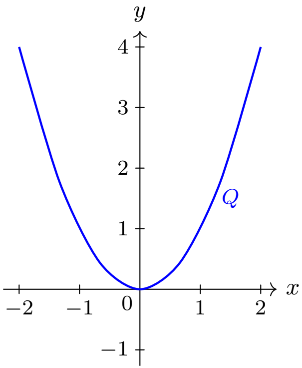
2. Muestre que la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ es uno a uno.

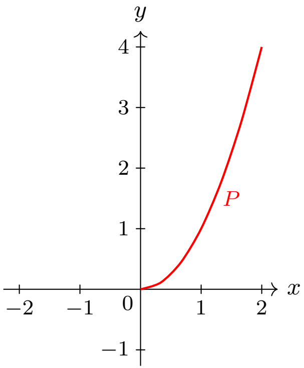
Restringiendo el dominio de una función para obtener una función invertible

Cuando tenemos funciones que no son *uno a uno*, se puede restringir su dominio de tal forma que la función resultante sea *uno a uno*.

Ejemplo

Considere la función $Q(x) = x^2$ definida para todo x en los números reales, en comparación con la función $P(x) = x^2$ definida solamente para todo $x \geq 0$. Estas dos funciones son diferentes pues aunque tienen la misma fórmula su dominio es diferente.



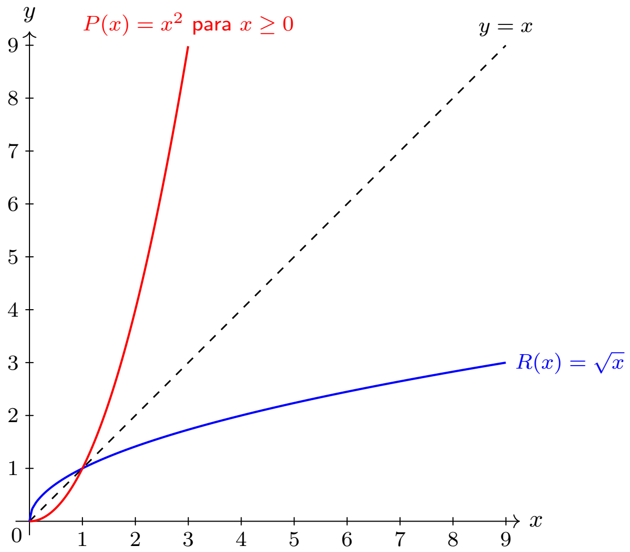


Ya sabemos que la función Q no tiene inversa. Sin embargo, la función P sí tiene inversa, un argumento es porque P es uno a uno:

$$P(a) = P(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = b,$$

pues $a \geq 0$ y $b \geq 0$, ya que a y b están en el dominio de P.

En la siguiente figura puede verse que si se refleja la gráfica de P a través de la diagonal, se obtiene la gráfica de su función inversa: $R(x) = \sqrt{x}$.


y
$P(x) = x^2$ para $x \geq 0$
$y = x$
$R(x) = \sqrt{x}$
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9