Sección 0.2
Exponentes y Radicales

Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Repaso

Exponentes

Si a es un número real y n es un número natural (entero positivo), entonces:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ factores}}$$

El número a se llama **base** y el número n se llama **exponente**.

Ejemplos

a. $3^4 =$

b. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 =$

c. $(-4)^3 =$

d. $(-2)^4 =$

e. $-2^4 =$

Exponente cero

Si $a \neq 0$ es cualquier número real, entonces $a^0 = 1$.

Ejemplos

a. $\pi^0 =$

b. $(-3)^0 =$

c. $-5^0 =$

d. $\left(\frac{7}{2}\right)^0 =$

e. 0^0 no está definido.

Exponente negativo

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos

a. $5^{-2} =$

b. $(-3)^{-4} =$

c. $-2^{-3} =$

d. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} =$

e. 0^{-n}, n un número natural, no está definido.

Reglas de los exponentes

Sean las bases a y b números reales y los exponentes m y n enteros positivos, entonces:

E1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

E2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

E3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

E4. $(ab)^n = a^n b^n$

E5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$

Ejemplos

a. $x^3 \cdot x^2 =$

b. $\dfrac{x^2}{x^4} =$

c. $(-x^4)^3 =$

d. $(-x^4.y^2)^3 =$

e. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3 =$

Usando las propiedades anteriores, simplifique las expresiones.

a. $\left(\dfrac{c^4 d^3}{d^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{c^3}\right)^3 =$

b. $\left(2u^2v^3\right)^3\left(4u^3v\right)^{-2} =$

Radicales

Ya sabemos qué significa 2^n, si n es un entero positivo. ¿Qué pasa si n es una fracción? Por ejemplo, $2^{\frac{3}{5}}$. Para esto vamos a hablar de los *radicales*.

El símbolo $\sqrt{}$ es llamado radical y representa la raíz cuadrada positiva. La expresión dentro del radical es llamada el **radicando** y el **índice del radical** es 2.

Raíz cuadrada

La *raíz cuadrada* de un número no-negativo a, que se denota por $\sqrt{a}$, es un número no-negativo que multiplicado por sí mismo da a, es decir:

$$b = \sqrt{a} \text{ si y solo si } b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$ y $\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$.

Observación

Note que $\sqrt{16} = \sqrt{(-4)^2} \neq -4$. En general, $\sqrt{a^2} \neq a$ si $a < 0$.

Propiedades de la raíz cuadrada

Sean a y b números reales **positivos** y c un número real cualquiera. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

C1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

C2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$

C3. $\sqrt{c^2} = |c|$

Ejemplos

a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} =$

b. $\sqrt{\dfrac{49}{4}} =$

c. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| =$

Raíz n-ésima

Sea n cualquier entero positivo. Se dice que el número real b es la raíz n-ésima de un número a, si se cumple que:

$$b^n = a$$

Este número real b se denota por $\sqrt[n]{a}$ y al número n se le llama índice del radical.

Si n es par entonces se exige que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Propiedades de la raíz n-ésima

Si a, b son números reales y m, n son enteros positivos, entonces:

R1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

R2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$

R3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

R4. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplos

a. $\sqrt[3]{40} =$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} =$

c. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\dfrac{1}{64}}} =$

d. $\sqrt[3]{(-2)^3} =$

e. $\sqrt[4]{(-2)^4} =$

Ejercicio

Simplifique la siguiente expresión usando las propiedades de los radicales:

$$4\sqrt{50} - 6\sqrt{32} - 3\sqrt{18}$$

Relación entre los exponentes y los radicales

Si n es un entero positivo, m un entero y a un número real, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si n es par, se exige que $a \geq 0$.

El **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** de la raíz o el exponente del radicando.

Ejemplos

a. $27^{\frac{1}{3}} =$

b. $25^{\frac{3}{2}} =$

c. $16^{-\frac{2}{5}} =$

Ejercicios

Sean x, y números reales positivos.

a. $3\sqrt{49x^3} - 5\sqrt{16x^3} =$

b. $\sqrt[3]{8x^4} + \sqrt[3]{-x} + 4\sqrt[3]{27x} =$

c. $\sqrt{\dfrac{18x^4y^3}{2x^{-2}y}} + 2\sqrt{\dfrac{16x^3y^5}{x^{-3}y^3}} =$