Sección 2.2
Estiramientos y encogimientos

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Estiramientos y encogimientos horizontales

Para estirar o encoger horizontalmente la gráfica de una función se multiplica la entrada de la función por una constante.

$\sqrt[3]{x}$

Por ejemplo, $\boxed{g(x) = \sqrt[3]{6x}}$ y $h(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}x}$ son transformaciones que estiran o encogen horizontalmente la gráfica de la función básica $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ejemplos

1. La grafica de la función f en la siguiente figura (Figura A) se encoge horizontalmente para obtener la gráfica de la función g (Figura B).

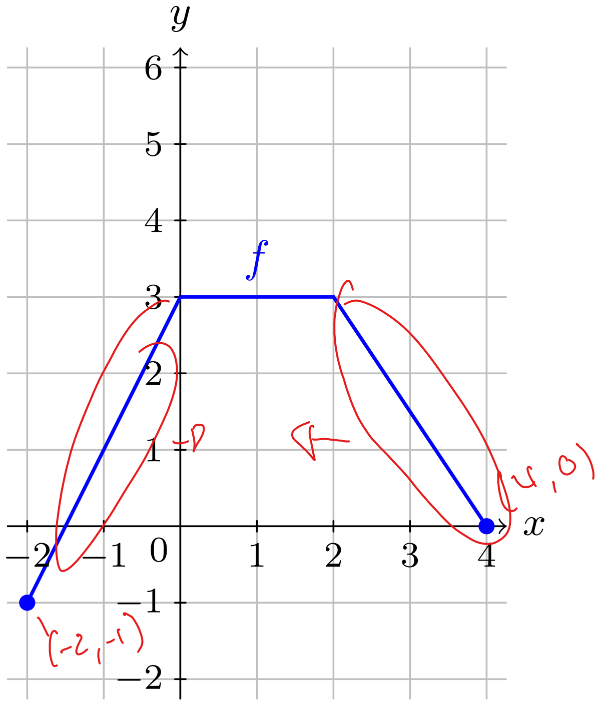


Figura A

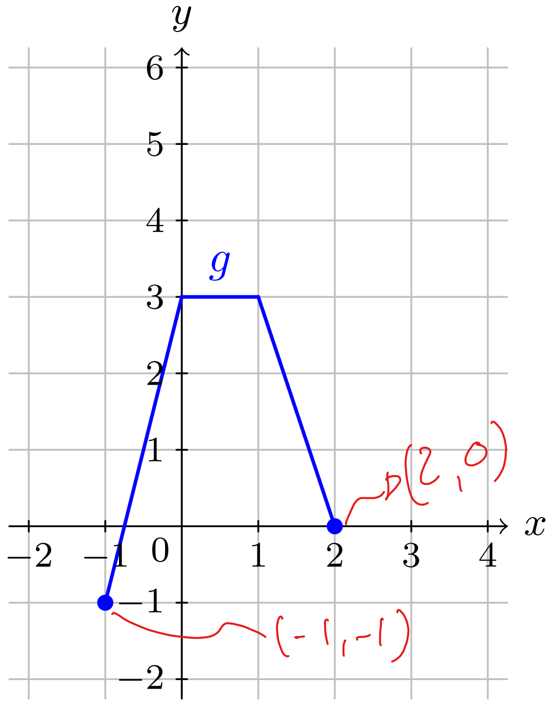


Figura B

Complete las siguientes tablas a partir de las figuras anteriores.

Dom, entrada — Rango, salida

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-1	3	3	0

Cambia — No cambia

x	-1	0	1	2
$g(x)$	-1	3	3	0

¿Cómo se puede obtener una fórmula para la gráfica de g, si se conoce la fórmula para la gráfica de f?

Note si $x=-2$ "entrada para $f(x)$", la $\div$ por 2, obtenemos la entrada de $g(x)$.

$\frac{-2}{2} = -1$ $\quad$ $\frac{0}{2} = 0$ $\quad$ $\frac{2}{2} = 1$ $\quad$ $\frac{4}{2} = 2$

$-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$ $\quad$ $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ $\quad$ $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ $\quad$ $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x \cdot \frac{1}{2} =$ $\quad$ $x \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $x \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $x \cdot \frac{1}{2}$

• "$\frac{1}{2}$ = factor" afecta el dominio o la entrada de x para $f(x)$.

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-1	3	3	0

$=-2\cdot\frac{1}{2}$ $\quad =0\cdot\frac{1}{2}$

$X = x\cdot\frac{1}{2}$	-1	0	1	2	→ esto cambia
$f(2X)$	-1	3	3	0	→ esto No cambia

$\cdot\ f\left(2\left(x\cdot\frac{1}{2}\right)\right) \rightarrow f\left(2\left(-2\cdot\frac{1}{2}\right)\right)$

$= f\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(-2)\right) = f(-2)$

$= -1$

$\cdot\ f(2X) = f\left(2\left(x\cdot\frac{1}{2}\right)\right)$

$= f\left(2\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)\right)$

$= f\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot x\right)$

$= f(x)$

$f\left(\cancel{2}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{2}\right)\right) = f(-2) = -1$

factor $= \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \rightarrow 2\cdot 1 = c\cdot 1$

$2 = c$

$c = 2$

El truco es afecte el domio por $\frac{1}{2}$, pero cuando calcule la imagen "salida" multiplique ese valor por 2. y de esta forma cancelo 2 con $\frac{1}{2}$, así no cambiamos los valores en "y".

$\therefore$ Encogimos a $f(x)$ horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$.

2. Grafique las siguientes funciones dando valores a la entrada x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

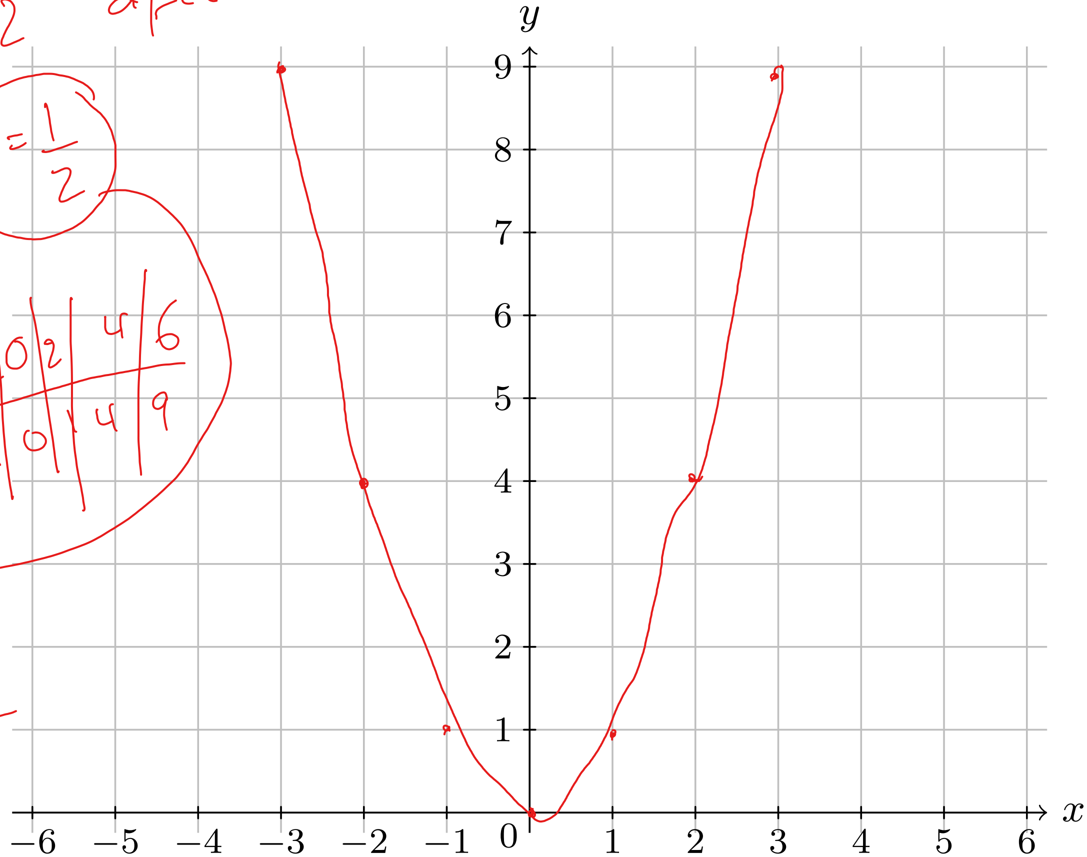
(a) $f(x) = x^2$

"dominio por 2" afectar

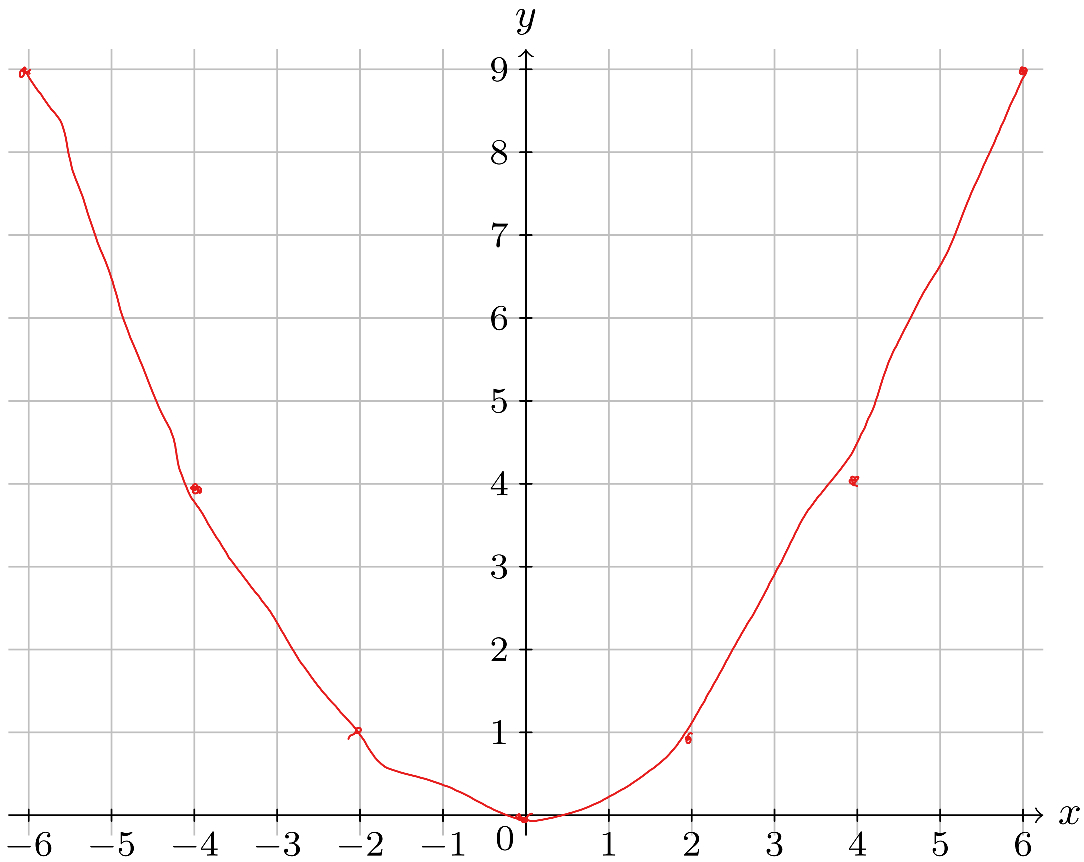
$\frac{1}{c} = 2$ Factor $\rightarrow$ $C = \frac{1}{2}$

$X = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(\frac{1}{2}X)$	9	4	1	0	1	4	9

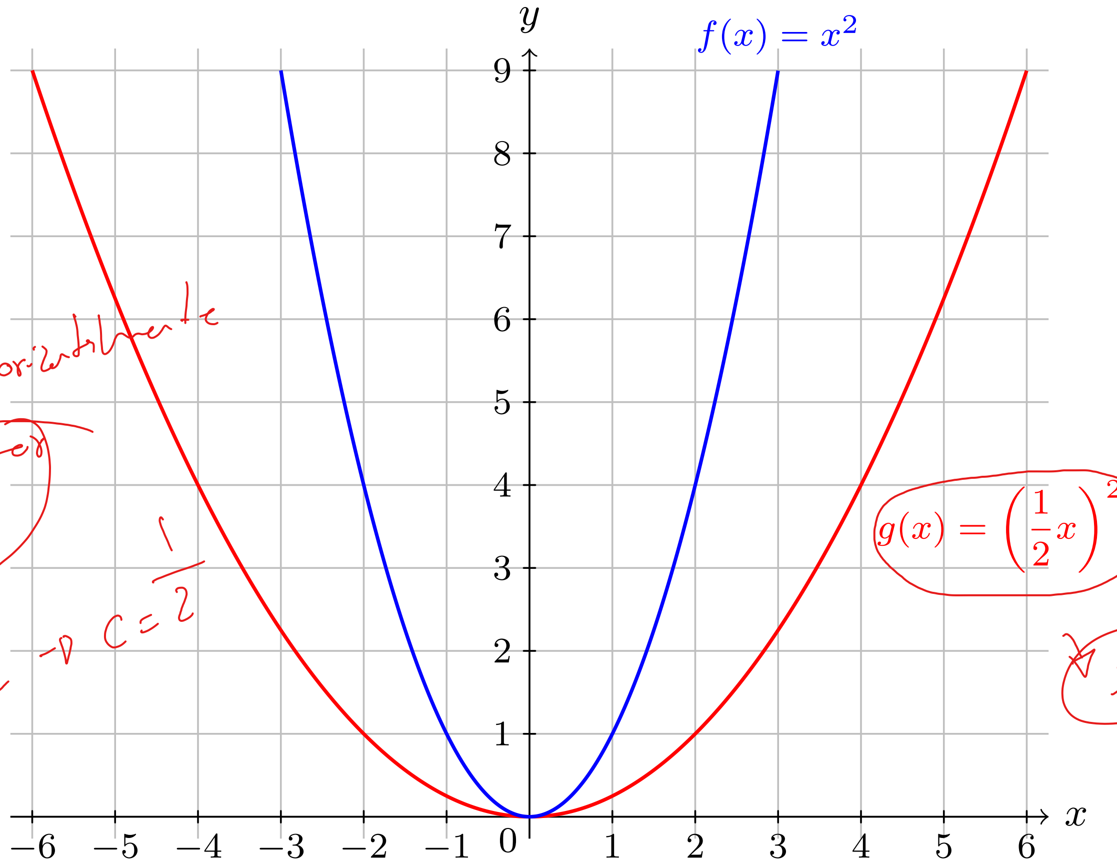
$g(x) = (\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{c} x)^2$



(b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$



¿Qué puede concluir al comparar las gráficas de las funciones anteriores?



∴ estiramos a $f(x)$ horizontalmente por un factor de 2.

$\frac{1}{c} = 2 \rightarrow c = \frac{1}{2}$

$\times 2$

en la entrada o en "x"

En resumen,

Estiramiento y encogimiento horizontal

- Si $0 < c < 1$, entonces: o la forma en que se debe escribir.
  La gráfica de $y = f(cx)$ es un *estiramiento horizontal* de la gráfica de $y = f(x)$, por un factor de $\frac{1}{c}$. — Dan, ó, entrada
- Si $c > 1$, entonces:
  La gráfica de $y = f(cx)$ es un *encogimiento horizontal* de la gráfica de $y = f(x)$, por un factor de $\frac{1}{c}$.

Estiramiento y encogimiento vertical

salida o en "y"

Para estirar o encoger verticalmente la gráfica de una función se multiplica la salida de la función por una constante.

$= 6f(x)$

Por ejemplo, $g(x) = 6\sqrt[3]{x}$ y $h(x) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x}$ son transformaciones que estiran o encogen verticalmente la gráfica de la función básica $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ejemplos

1. La grafica de la función f en la siguiente figura (Figura A) se estira verticalmente para obtener la gráfica de la función g (Figura B).

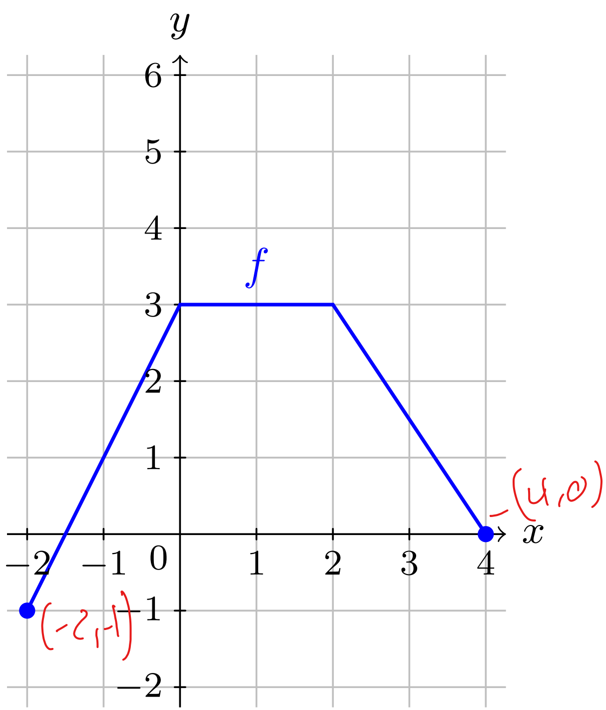


Figura A

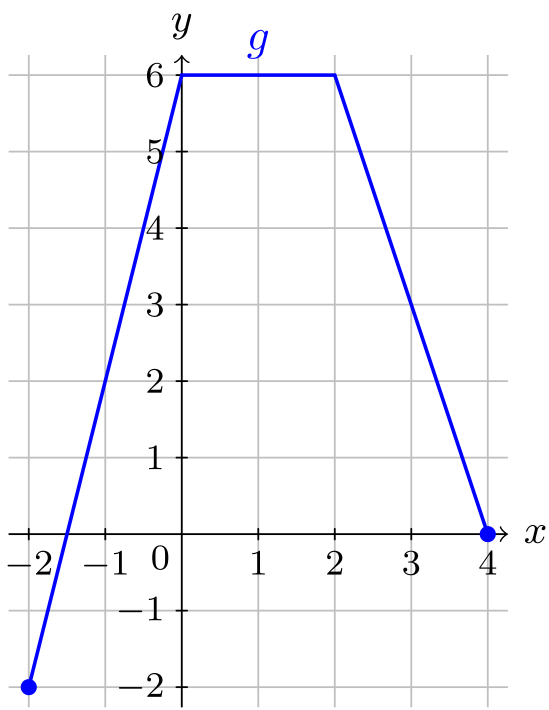


Figura B

Complete las siguientes tablas a partir de las figuras anteriores.

No cambia

x	-2	0	2	4
$f(x)$	-1	3	3	0

cambia

x	-2	0	2	4
$g(x)$	-2	6	6	0

x
y

¿Cómo se puede obtener una fórmula para la gráfica de g, si se conoce la fórmula para la gráfica de f?

$$y = f(x) \to g(x) \to 2y = 2f(x) = g(x)$$

Obs Para este caso solo tenemos el valor de c, no hay $\frac{1}{c}$.

Vertical

factor

$\therefore$ estiro $f(x)$ por un factor de 2.

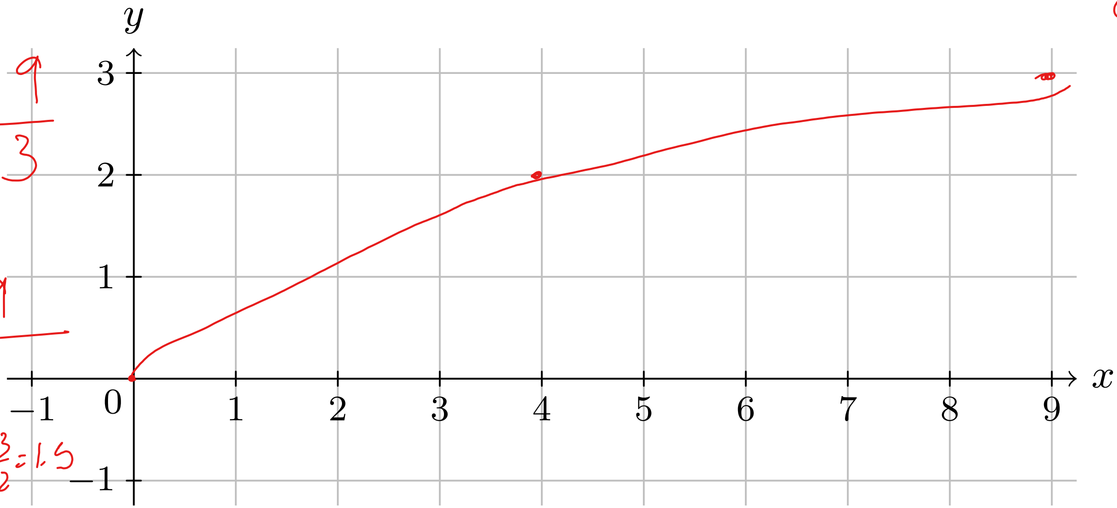
2. Grafique las siguientes funciones dando valores a la entrada x.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ $\rightarrow$ $y = f(x)$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{c}\sqrt{x}$

x	0	4	9
$f(x)$	0	2	3

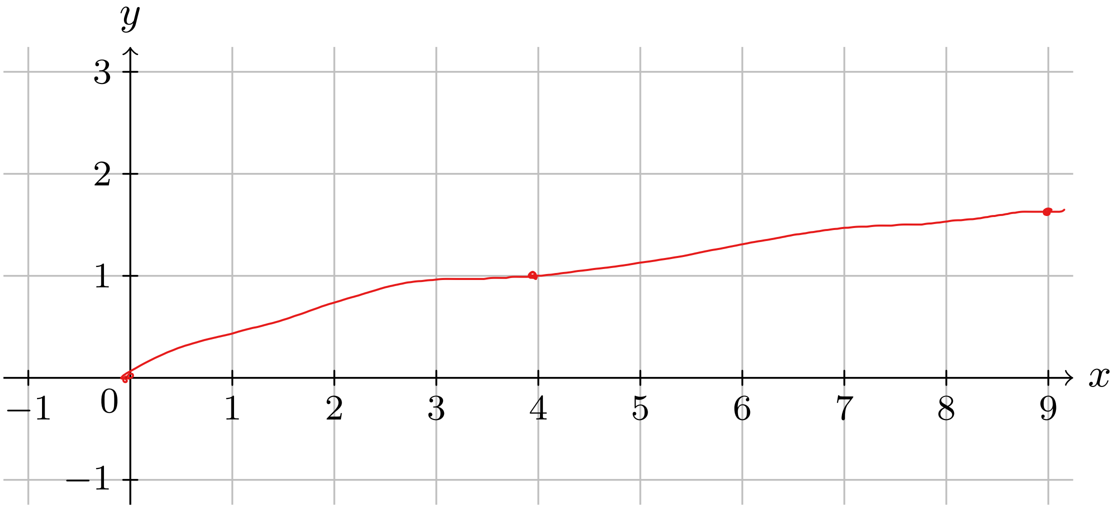
x	0	4	9
$\frac{1}{2}f(x)$	0	$\frac{1}{2}\cdot 2=1$	

$\frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2} = 1.5$

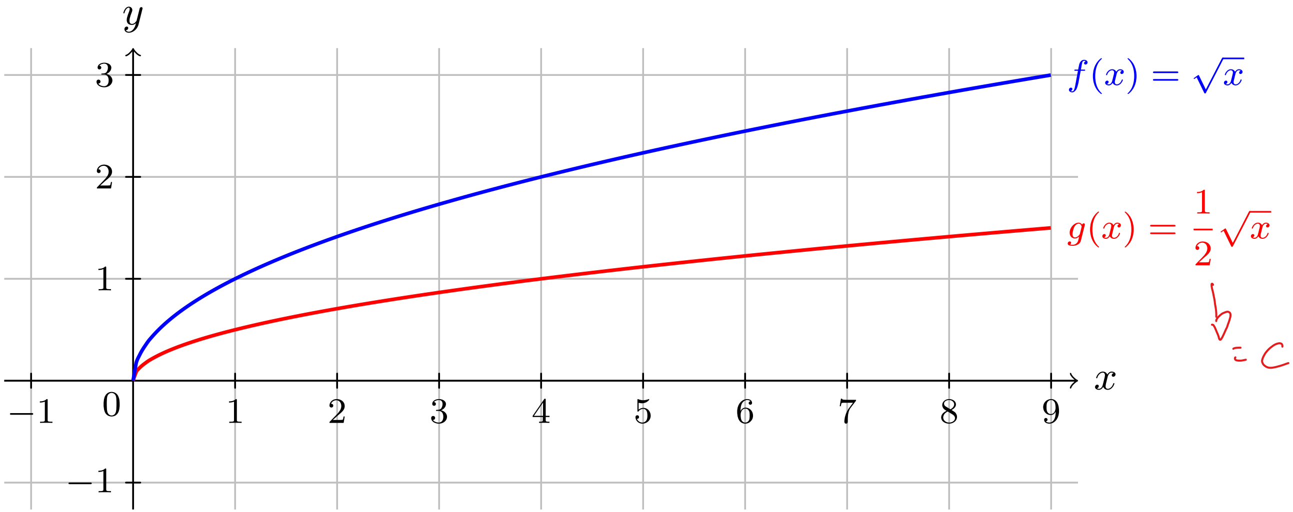


- multiplique la $\underbrace{\text{salida (el valor en } y)}_{\text{vertical}}$ por un factor $\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $c = \frac{1}{2}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$



¿Qué puede concluir al comparar las gráficas de las funciones anteriores?



$\therefore$ encogí $f(x)$ verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$.

En resumen,

Estiramiento y encogimiento vertical

- Si $c > 1$, entonces:
  La gráfica de $y = cf(x)$ es un *estiramiento vertical* de la gráfica de $y = f(x)$, por un factor de c. → salida ó (valor en y)
- Si $0 < c < 1$, entonces:
  La gráfica de $y = cf(x)$ es un *encogimiento vertical* de la gráfica de $y = f(x)$, por un factor de c.

WARNING

Cuando a una función se le hace más de una transformación, el orden en que se hacen las transformaciones puede hacer una diferencia.

Ejemplo

1 Enunciado

A Suponga que la gráfica de una función f se traslada 1 unidad hacia la derecha, y que luego de esto se estira horizontalmente por un factor de 2:

$\frac{1}{c} = 2$

$$y = f(x) \longrightarrow \boxed{y = f(x-1)} \longrightarrow y = f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

$c = \frac{1}{2}$

B Ahora suponga que se cambia el orden de las transformaciones. Primero se estira horizontalmente la gráfica de f por un factor de 2, y luego este estiramiento se traslada 1 unidad hacia la derecha:

$y = f(\frac{1}{2} \cdot x)$

$$y = f(x) \longrightarrow \boxed{y = f\left(\frac{x}{2}\right)} \longrightarrow y = f\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$y = f(\frac{1}{2}(x-1))$

Como puede verse, las fórmulas que se obtuvieron para y, es decir, $y = f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ y $y = f\left(\frac{x-1}{2}\right)$, no son iguales.

· Obs finales

① enunciado $\xrightarrow{a}$ función

‼ Si la original es una función Potencia (sec 1.7)

① A. Si empieza con Traslación ... imagine que es sin factorizar. Haga la traslación y después haga lo que piden. (factor común)

① B. Contrario empieza con estiramiento o encogimiento. Imagine que es con factorizar (factor común). Haga y después lo que piden.

② función $\xrightarrow{a}$ enunciado

① Debe escribir lo que está dentro osea de x como $\pm b(x \pm a)$ "una factorización (factor común)" es decir factorizar el coeficiente de la x si es $\neq 1$.

② Paso 1 x → Horizontal

1 Reflexión H
2 enc. ó est. H
3 Traslación H

Paso 2 y → Vertical

1 Reflexión V
2 enc. o est. V
3 Traslación V

$f(x) = 2((2x-1)^2 - 3) \longrightarrow$ a enunciado.

En este caso la función potencia que genera $f(x)$ es $\underbrace{g(x)=x^2}_{\text{la original}}$.

① $2((\overbrace{2(x-\tfrac{1}{2})}^{H \to})^2 \underbrace{-3}_{})$ $\qquad 2x-1 = 2(x-\tfrac{1}{2})$

$\underbrace{2}_{}(2(x-\tfrac{1}{2}))^2 \underbrace{-6}_{} \to$ Vertical

② Horizontal

- Un encogimiento H por un factor de $\frac{1}{2}$. $\to c = 2 > 1$
- Traslación H $\frac{1}{2}$ unidades a la derecha.

Vertical

- $c=2>1$, estiramiento vertical por un factor de 2.
- Traslación 6 unidades hacia abajo.