

# Sección 0.1

## Sistema de números reales



Universidad de Puerto Rico  
Recinto de Mayagüez  
Facultad de Artes y Ciencias  
Departamento de Ciencias Matemáticas

# Contenido

1 Números reales

2 Valor absoluto

3 Distancia

# Números reales

- **Números naturales:** El conjunto de los números *naturales* es:

$$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Para contar

y se representa con la letra  $\mathbb{N}$ .

- **Números enteros:** El conjunto de los números *enteros* es:

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

y se representa por la letra  $\mathbb{Z}$ .

$\mathbb{W} = \text{Cardinales}$

$\mathbb{Z}$

- **Números racionales:** Cualquier *número racional* se puede escribir de la forma

$$r = \frac{a}{b}$$

donde  $a, b$  son enteros y  $b \neq 0$ . En general, denotamos el conjunto de los números racionales con la letra  $\mathbb{Q}$ .

Ejemplos:

$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{10}{5} = 2$$

$\underbrace{\phantom{00}}_{\text{exacto}}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{5} = 0.8 \\ \frac{4}{11} = 0.363636 = 0.\overline{36} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Decimal} \\ \text{finito} \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Decimal} \\ \text{finito} \\ \text{Periodico} \end{array}$

- **Números irracionales:** Cualquier número *irracional* NO se puede escribir de la forma

$$r = \frac{a}{b}$$

- No hay un patrón
- No son periódicos
- Son infinitos

donde  $a, b$  son enteros y  $b \neq 0$ . En general, denotamos el conjunto de los números irracionales con la letra II

II ? NO es repetitivo

Ejemplos:

$$\text{II} = \left\{ x : x \neq \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} = \mathbb{Q}^c$$

$$4.01001000100001 \checkmark$$

$$\pi = 3.141592\dots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$$

$$\sqrt{3} = 1.732050\dots$$

- **Números reales:** El conjunto de los números *reales* está formado por todos los números *racionales* y todos los números *irracionales*. Este conjunto se representa con la letra  $\mathbb{R}$ .

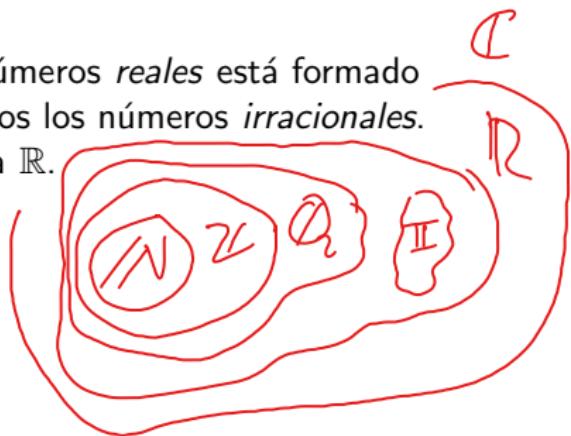
Ejemplos:

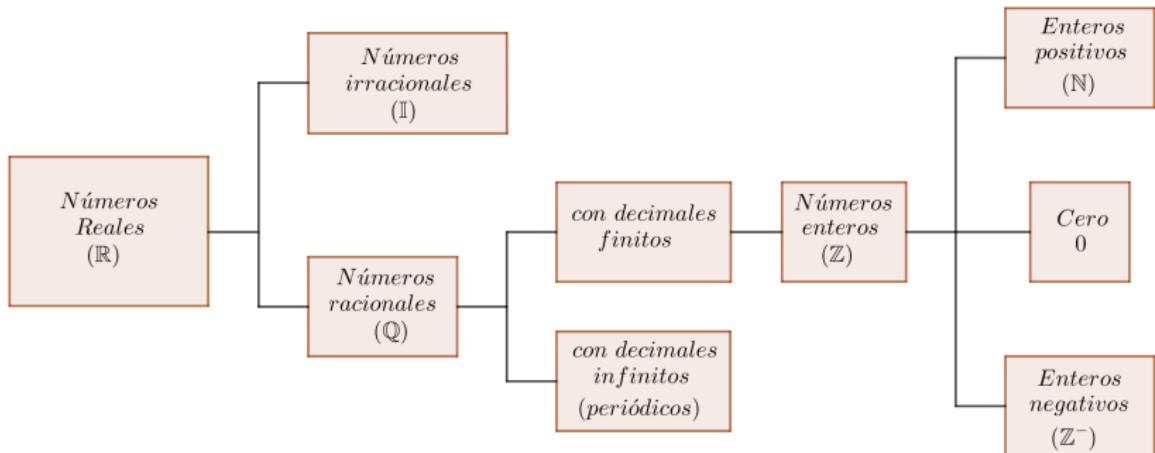
-1

$\frac{1}{2}$

0

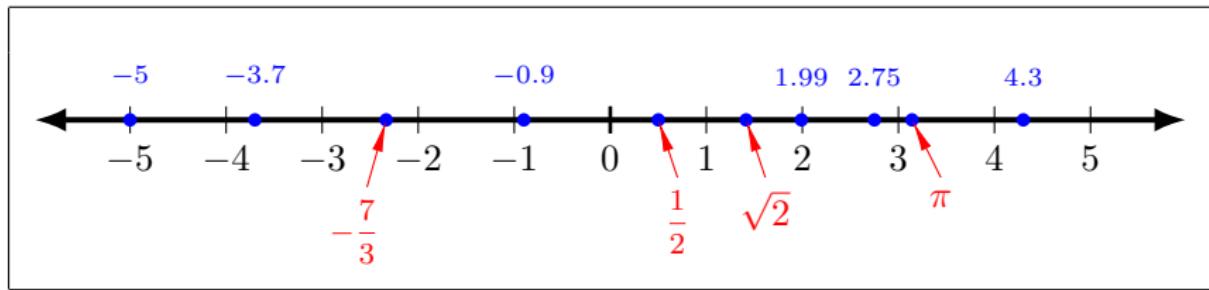
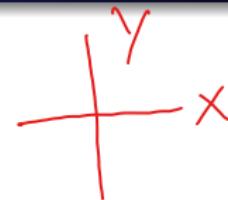
5.79





# Representación gráfica de los números reales

Recta Real



# Propiedades de los números reales

Las siguientes propiedades son válidas para cualquier elección de tres números reales  $a, b$  y  $c$ .

1. **Clausura de la suma:**  $a + b$  es un número en  $\mathbb{R}$
2. **Clausura de la multiplicación:**  $ab$  es un número en  $\mathbb{R}$
3. **Commutativa de la suma:**  $a + b = b + a$
4. **Commutativa de la multiplicación:**  $ab = ba$
5. **Asociativa de la suma:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$
6. **Asociativa de la multiplicación:**  $(ab)c = a(bc)$
7. **Distributiva:**  $a(b + c) = ab + ac \ \& \ (b + c)a = ba + ca$
8. **Identidad aditiva:**  $a + 0 = a \ \& \ 0 + a = a$
9. **Identidad multiplicativa:**  $a \cdot 1 = a \ \& \ 1 \cdot a = a$
10. **Inverso aditivo:**  $a + (-a) = 0 \ \& \ (-a) + a = 0$
11. **Inverso multiplicativo:** Si  $a \neq 0$ , entonces  $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ \& \ \frac{1}{a} \cdot a = 1$

## Ejemplos

- $3 + 5 = 8 = 5 + 3$
- $8 \cdot 10 = 80 = 10 \cdot 8$
- $\cancel{6} \overbrace{(5+4)}^{(5+4)} = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4$   
 $= 30 + 24 = 54$
- $2 + (-2) = 0$   
 ~~$2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$~~

# Propiedades de los números negativos

N1.  $(-1)a = -a$

N2.  $-(-a) = a$

N3.  $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

N4.  $(-a)(-b) = ab$

N5.  $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}, \quad b \neq 0$

N6.  $\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}, \quad b \neq 0$

N7.  $-(a + b) = -a - b$

N8.  $-(a - b) = b - a$

Ley

$$\begin{array}{ll} + : + = + & \\ - : - = + & \\ + : - = - & \\ - : + = - & \end{array}$$

## Ejemplos

$$\bullet 4 + (-2+3)$$

$$4 + 1 = 5$$

Pemdas  
-D

$$\bullet 6(10 + (-1)) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot (-1)$$

$$= 60 + (-6)$$

$$\therefore 60 - 6 = 54$$

$$\bullet -\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = 1$$

# Propiedades de las fracciones

F1.  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

F2.  $\left(\frac{a}{b}\right) \div \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

F3.  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

F4.  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

F5.  $\frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$

F6.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cancel{2}}{\cancel{c} \cancel{1}} = \frac{ad}{bc}$$

② Convertir a homog.

$\left( \frac{1}{2} = ? \frac{?}{4} \right) ?$

## Ejemplos

$$\cdot \frac{5}{8} \div \frac{5}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \cancel{\frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 5}} - \cancel{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot \frac{3^x 3}{4^x 3} + \frac{5^x 2}{6^x 2} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \frac{36 + 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{18 + 20}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12} \\ \textcircled{2} \text{mínimo común múltiplo} \end{array}$$



$$\frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

• mínimo común denominador

Tabla 4: 4, 8,  $\textcircled{12}$ , 16, 20,  $\textcircled{24}$ , ...

Tabla 6: 6,  $\textcircled{12}$ , 18,  $\textcircled{24}$ , ...

# Mínimo común múltiplo

- **Mínimo común múltiplo (mcm):** Es el resultado de multiplicar todos los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia.

**Ejemplo:** Hallar el mínimo común múltiplo entre 72 y 50.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \text{ Tabla} & 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ & 50 = 2 \cdot 5^2 \\ \hline & 1800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \\ 72 \Big| 2 \\ 36 \Big| 2 \\ 18 \Big| 2 \\ 9 \Big| 3 \\ 3 \Big| 3 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \Big| 2 \\ 25 \Big| 5 \\ 5 \Big| 5 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{mcm}(72, 50) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ &= 1800 \end{aligned}$$

# Máximo común divisor

- **Máximo común divisor (mcd):** Es el resultado de multiplicar los factores comunes con su menor exponente.

**Ejemplo:** Hallar el máximo común divisor entre 48 y 60.

$$\begin{aligned} 48 &= \underline{2^1} \cdot \underline{3^1} & \text{mcd}(48, 60) &= 2^2 \cdot 3 \\ 60 &= \underline{2^2} \cdot \underline{3^1} \cdot 5 & & = 12 \\ &&\text{Descom. factores}& \\ &&\text{Primos}& \end{aligned}$$

# Mínimo común denominador

- **Mínimo común denominador (MCD):** El *mínimo común denominador* de dos o más fracciones es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

**Ejemplo:** Hallar el mínimo común denominador entre  $\frac{5}{18}$  y  $\frac{7}{45}$ .

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\text{MCD}\left(\frac{5}{18}, \frac{7}{45}\right) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$= 90$$

# Desigualdades

Una *desigualdad* es una expresión matemática que usa alguno de los siguientes símbolos de relación de orden:

- estricto*
- |        |                     |
|--------|---------------------|
| <      | “menor que”         |
| $\leq$ | “menor o igual que” |
| >      | “mayor que”         |
| $\geq$ | “mayor o igual que” |

# Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real  $a$ , se denota por  $|a|$ , está definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

**Ejemplos:**

$$|\underbrace{-3}_{a}| = -(a) = -(-3) = 3$$

$$a = -3 < 0$$

# Propiedades del valor absoluto

A1.  $|a| = |-a|$

A2.  $|ab| = |a||b|$

A3.  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

A4.  $|a^n| = |a|^n$

# Ejemplos

$$\bullet | -4 - 3 | = |-7| = 7 \quad \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ -1 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\bullet \frac{|x-2|}{x-2}$$

5. -  $x < 1$

$\rightarrow x-2 < 0$

$\rightarrow |x-2| = -(x-2)$

$$\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{2-x}{x-2} = \frac{\cancel{-(x-2)}}{\cancel{x-2}} = -1$$

$= -x + 2$   
 $= 2 - x$

# Distancia

Si  $a$  y  $b$  son números reales, la **distancia** entre los puntos  $a$  y  $b$  en la recta real es:

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|$$

## Ejemplos

$$d(0, -7) \leftarrow ① |0 - (-7)| = |0 + 7| = |7|$$

a. Hallar la distancia entre 0 y -7.

$$| -7 - 0 | = |-7| = 7 \quad ②$$

b. Hallar la distancia entre 2 y 13.

2. Leer |

c. Hallar la distancia entre -21 y -4.

$$d\left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{4}\right) = \left| \frac{2}{4} - \left(-\frac{3}{5}\right) \right| = \left| \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \right|$$

d. Hallar la distancia entre  $-\frac{3}{5}$  y  $\frac{2}{4}$ .

$$= \left| \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{5}{10} + \frac{6}{10} \right| = \left| \frac{11}{10} \right| \approx \frac{11}{10} \quad \checkmark$$