Sección 3.4
Ceros racionales y funciones polinómicas

2

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

En la sección anterior vimos que podemos factorizar una función polinómica de grado mayor que 2 (para lo cual antes no teníamos algún método), usando división sintética para hallar los ceros.

Ejemplo

Dado que $x = 3$ es un cero de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, halle su factorización completa y los otros ceros.

$(x-3)$ es un factor de $f(x)$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
 & \downarrow & 3 & -3 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & 0
\end{array}
$$

$x^2 - x - 2$

$f(x) = (x-3)(x^2-x-2)$

$= (x-3)(x-2)(x+1)$

$= (x-3)(x-2)(x-(-1))$

Ceros de $f(x)$ serán

$3, 2, -1$

Así que, si conocemos un cero c de un polinomio, usando división sintética podemos factorizarlo como $(x - c)$ por un cociente que es de un grado menor que el polinomio original. Luego, repetimos este proceso hasta llegar a un cociente cuadrático.

Ahora la pregunta es: ¿de dónde sacamos los ceros?, porque en el ejemplo anterior si no nos dicen que $x = 3$ es un cero, no hubiéramos podido resolver el ejercicio. Como siempre las matemáticas vienen a nuestro rescate y la respuesta está en el **teorema de los ceros racionales**.

Ceros racionales y funciones polinómicas

q   p

Teorema de los ceros racionales

Si el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, y $x = \dfrac{p}{q}$ es un cero racional de $f(x)$, donde p y q no tienen ningún factor primo en común, entonces p debe ser un divisor del término constante a_0 y q debe ser un divisor del coeficiente líder a_n.

Guía para hallar los ceros racionales de un polinomio

1. **Hacer una lista de los posibles ceros racionales**. Use el *teorema de los ceros racionales* para hacer una lista de todos los posibles ceros racionales.
2. **Dividir**. Use división sintética para evaluar la función polinómica en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el Paso 1. Cuando el residuo sea 0, observe el cociente que haya obtenido.
3. **Repetir**. Repita los Pasos 1 y 2 con el cociente obtenido. Deténgase cuando obtenga un cociente que sea cuadrático o que se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice por tanteo (de ser posible) para hallar los ceros restantes.

Ejemplos

1. Encuentre todos los ceros reales de la función polinómica

$$f(x) = \underbrace{2}_{a_n}x^3 + x^2 - 13x + \underbrace{6}_{a_0}$$

① Divisores de

$a_n = 2 \rightarrow q: \pm 1, \pm 2$

$a_0 = 6 \rightarrow p: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$\rightarrow$ Los posibles ceros racionales son:

$\frac{p}{q}: \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$

② $f(1) = -4$, $f(2) = 0$

③

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & \downarrow & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + 5x - 3$

$f(x) = (x-2)(2x^2 - 5x - 3)$

$= (x-2)(x+3)(2x-1)$

Ceros reales serán $2, -3, \frac{1}{2}$

2. Encuentre todos los ceros reales de la función

$$f(x) = 3x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 1$$

los ceros de $f(x)$ seran los mismos que de $2f(x)$.

$g(x) = 2f(x) = \underbrace{6}_{a_n}x^3 + 5x^2 - \underbrace{2}_{a_0}$

① $a_n = 6$, $a_0 = 2$

$q: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$p: \pm 1, \pm 2$

$\to \frac{p}{q} = \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3} \right\}$

② $g(1) = 9$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

③

$\frac{1}{2}$	6	5	0	-2
		3	4	2
	6	8	4	0

$6x^2 + 8x + 4$

$\to f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\underbrace{(6x^2 + 8x + 4)}$

$b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 < 0$

Solo tiene un cero real y es $\frac{1}{2}$.

3. Halle las raíces enteras de la ecuación

$$17x^3 - 14x^2 - 37x - 6 = 0$$

4. Determine los valores de k para que 1 sea un cero de

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - k^2x + k \qquad \text{entre } x-1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & -k^2 & k \\ & \downarrow & 1 & 6 & 6-k^2 \\ \hline & 1 & 6 & 6-k^2 & \underbrace{6-k^2+k}_{=0} \end{array}$$

$6-k^2+k=0$

$-k^2+k+6=0$

$-(k^2-k-6)=0$

$-(k-3)(k+2)=0$

$-(k-3)=0$ ó $k+2=0$

$-k+3=0$ $\qquad$ $k=-2$

$k=3$

5. Encuentre un polinomio ~~cúbico~~ Cuadrado con 1 y 2 como ceros y tal que $f(0) = 1$ y ~~$f(-1) = -4$~~.

$$f(x) = a(x-1)(x-2)$$

entonces $f(0) = 1 = a(0-1)(0-2)$

$$1 = a(-1)(-2)$$
$$1 = a \cdot 2$$
$$\frac{1}{2} = a$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$