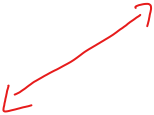
# Sección 1.1
# Pendientes y Rectas

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

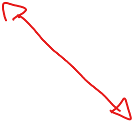
# Contenido

# Pendiente: Definición geométrica

Una recta es **creciente** cuando sube de izquierda a derecha:



Una recta es **decreciente** cuando baja de izquierda a derecha:



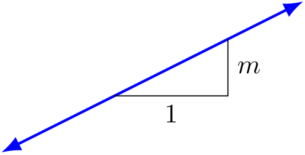
La pendiente es una medida de la inclinación de una recta.

La pendiente de una recta creciente se define de forma tal que es un número positivo y la pendiente de una recta decreciente se define de forma tal que es un número negativo.

Sea $m > 0$, entonces se tiene la siguiente interpretación geométrica de la pendiente de una recta:

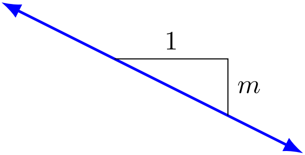
**Pendiente** es $m$.

Lo que se sube por cada paso a la derecha.

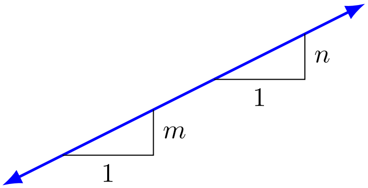



**Pendiente** es $-m$.

El negativo de lo que se baja por cada paso a la derecha.



Por las propiedades de *semejanza de triángulos*, no existe ambigüedad en esta definición:

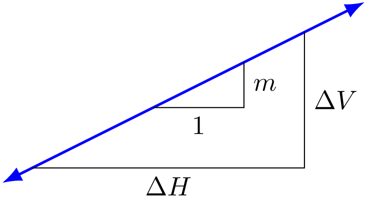



En triángulos semejantes, los cocientes que se forman con lados correspondientes son iguales:

$$\frac{n}{1} = \frac{m}{1},$$

por tanto, $n = m$.

De forma más general, *geométricamente* se define la pendiente de una recta de la siguiente forma:

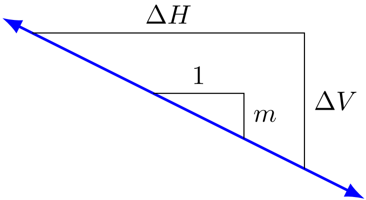



Por triángulos similares, la **pendiente** es:

Desplazamiento

$$m = \frac{m}{1} = \frac{\Delta V}{\Delta H}, = \frac{y}{x}$$

donde $\boxed{\Delta V > 0.}$




Por triángulos similares, la **pendiente** es:

$$-m = -\frac{m}{1} = \frac{\Delta V}{\Delta H}, = \frac{y}{x}$$

donde $\boxed{\Delta V < 0.}$

# Ejemplos

(a) En la figura de la derecha, cada cuadrado mide una unidad de largo por una de ancho. Halle la pendiente de las rectas $A$ y $B$.

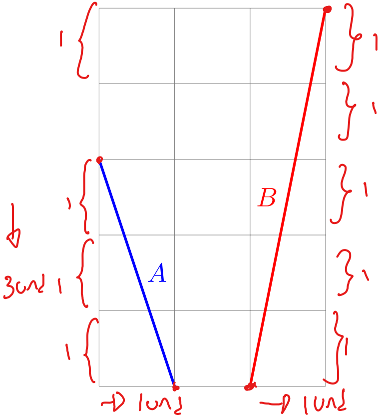
- $M = \frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{y}{x}$

- 1 Paso a la derecha y baja 3 und

$$M_A = -\frac{3}{1} = -3$$

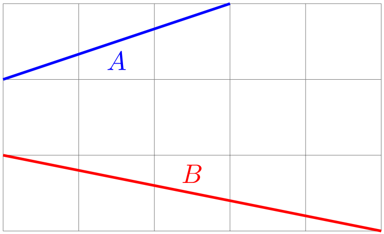
- 1 Pasa a la derecha y sube 5 und

$$M_B = \frac{5}{1} = 5$$



(b) En la figura de la izquierda, cada cuadrado mide una unidad de largo por una de ancho. Halle la pendiente de las rectas $A$ y $B$.

$m_A > 0$




$m_B < 0$

$m_A = \frac{1}{3}$

$m_B = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}$

# Pendiente: Definición aritmética

## Cambio horizontal y cambio vertical

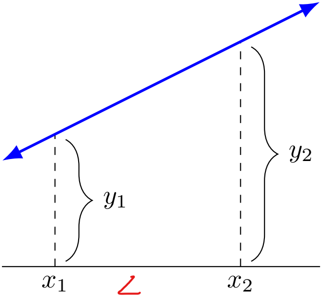
Si una recta pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ donde $\boxed{x_1 < x_2}$, se define:

(a) **Cambio horizontal:** $\Delta H = x_2 - x_1$.

(b) **Cambio vertical:** $\Delta V = y_2 - y_1$.

Ya que $x_1 < x_2$, se tiene siempre que $\Delta H > 0$.

En una recta creciente:



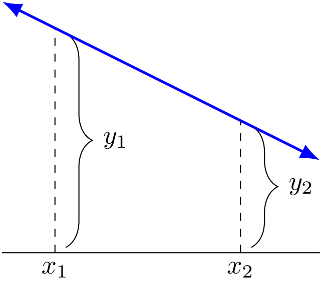

El cambio vertical es positivo,

$$\Delta V = y_2 - y_1 > 0$$

La pendiente es:

$$\frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$$

En una recta decreciente:




El cambio vertical es negativo,

$$\Delta V = y_2 - y_1 < 0$$

La pendiente es:

$$\frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$$

La siguiente definición de pendiente es consistente con las otras definiciones que se han dado hasta el momento, lo único es que en este caso se presenta de forma puramente algebraica, sin hacer referencia a la gráfica de la recta.

## Pendiente

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

# Ejemplo

$x_1, y_1$ $x_2$ $y_2$

Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

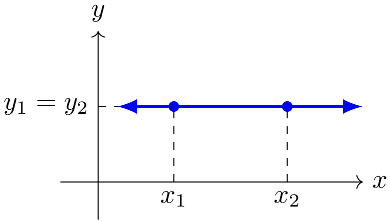
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-2}{3-(-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

# Rectas horizontales y rectas verticales

Si se aplica el razonamiento anterior a una recta horizontal, se tiene que, *al dar un paso a la derecha, no se sube ni baja en la gráfica*, es decir, que su pendiente debe ser cero.

Formalmente, la pendiente de una recta horizontal es:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0.$$

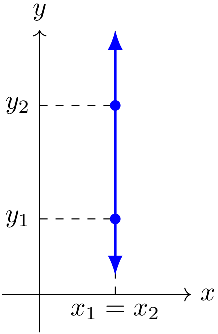


En el caso de una recta vertical, *ni siquiera se puede dar un paso a la derecha*, así que su pendiente no está definida.

Si se trata de usar la fórmula de pendiente se tendría que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}.$$

Pero esto último *no está definido*, pues resulta cero en el denominador.



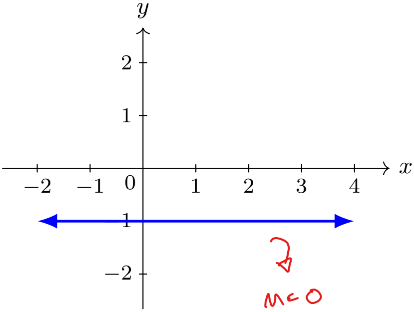
## Pendiente de recta horizontal y de recta vertical

(a) La pendiente de una recta horizontal es $0$.

(b) La pendiente de una recta vertical no está definida.

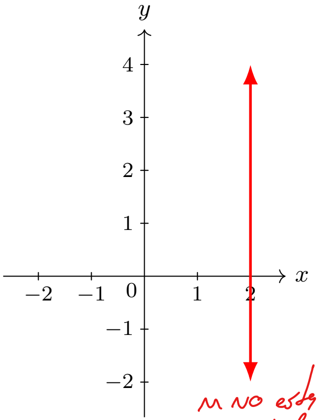
# Ejemplo

Halle una fórmula para la recta horizontal y para la recta vertical a continuación:




$m = 0$

$(x, -1)$




m no está definida

$\boxed{y = -1}$

$\boxed{x = 2}$

$\{(x, y) \mid y = -1,\ x \in \mathbb{R}\}$

# Fórmulas punto-pendiente y pendiente-intercepto de una recta

1 2

Si se conoce un punto $(x_1, y_1)$ y la pendiente $m$ de una recta, y si $(x, y)$ es cualquier otro punto en la recta, entonces:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

De aquí se obtiene:

## Ecuación punto-pendiente de una recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_1, y_1)$ y tiene pendiente $\boxed{m}$ es:

$$\boxed{y - \bar{y}_1 = m(x - \bar{x}_1).}$$

# Ejemplo

Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\underbrace{\overset{x_1}{(-2,1)}}$ y $\overset{x_2}{(-1,5)}$.

1 halle la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{-1-(-2)} = \frac{4}{1} = 4$$

2 Recta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

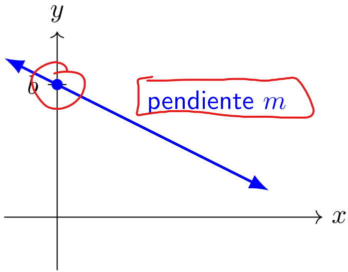
$$y - 1 = 4(x - (-2))$$

$$y - 1 = 4x + 8$$

$$y = 4x + 8 + 1$$

$$\boxed{y = 4x + 9}$$

Ahora, suponga que una recta tiene pendiente $m$ y cruza el eje $y$ a una altura $b$, por ejemplo, como se muestra en la siguiente figura:




Entonces se conoce la pendiente $m$ y el punto $(0, b)$ de la recta. Por la ecuación punto-pendiente:

## Ecuación pendiente-intercepto de una recta

La ecuación de la recta que tiene pendiente $m$ y cruza el eje $y$ por $(0, b)$ es:

$$\boxed{y = mx + b.}$$

# Ejemplos

$y = mx + b$

(a) Halle la ecuación de la recta que aparece a la derecha.

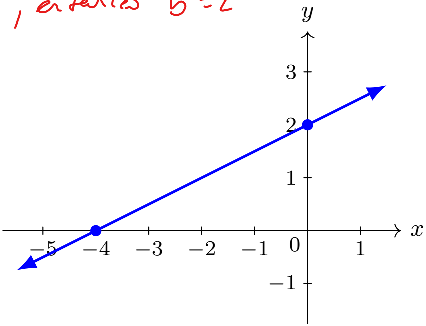
1. el intercepto es $(0,2)$, entonces $b = 2$

   $(0,b)$

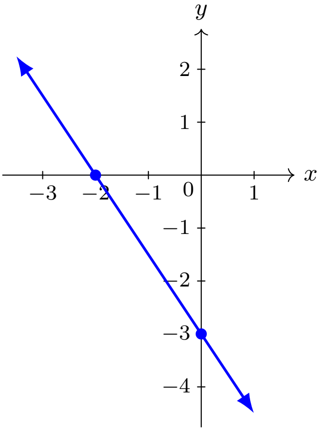
2. $m = \frac{1}{2}$

3. $y = mx + b$

   $$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$$



(b) Halle la ecuación de la recta que aparece a la izquierda.




(1) intercepto → $b = -3$

(2) $m < 0 \to m = -\frac{3}{2}$

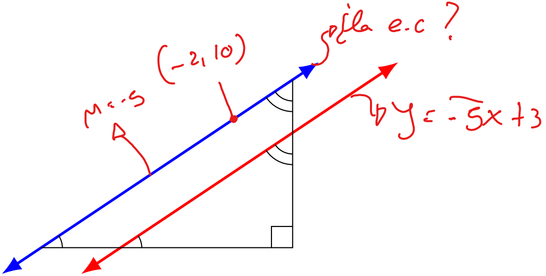
$y = mx + b$

$y = -\frac{3}{2}x - 3$

# Rectas paralelas y rectas perpendiculares

## Rectas paralelas

Decimos que dos rectas en el plano son *paralelas* si estas no se intersecan. Es decir, si no tienen puntos en común.




Los triángulos similares en la figura anterior sugieren el resultado que se enuncia a continuación:

## Pendientes de rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si, y solo si, ambas son verticales o ambas tienen la misma pendiente.

# Ejemplo

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 10)$ y es paralela a la recta con ecuación $y = -5x + 3$.

① la pendiente de "$-5$" es la misma para la otra recta paralela

$m = -5$

② $m = -5$ y $(-2, 10)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 10 = -5(x - (-2))$

$y - 10 = -5x - 10$

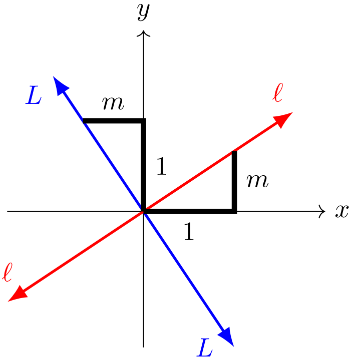
$\Rightarrow y = -5x - 10 + 10$

$\boxed{y = -5x}$

## Rectas perpendiculares

Se dice que dos rectas son *perpendiculares* si el ángulo formado en la intersección de estas es un ángulo recto, es decir, de $90^\circ$.

La relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares se puede deducir a partir de la siguiente figura:




La pendiente de $L$ es $-\dfrac{1}{m}$, mientras que la pendiente de $\ell$ es $\dfrac{m}{1}$.

A partir de esto, se deduce lo siguiente:

### Pendientes de rectas perpendiculares

Dos rectas, ninguna de las cuales es vertical, son perpendiculares si, y solo si, la pendiente de una es el negativo del recíproco de la pendiente de la otra.

# Ejemplo

La siguiente tabla compara las pendientes de rectas con las respectivas rectas perpendiculares.

$m_A = 4$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pendiente de una recta | $4$ | $-3$ | $\frac{5}{3}$ | $-\frac{2}{5}$ | $7.16$ | $0$ |
| Pendiente de la recta perpendicular | $-\frac{1}{4}$ | $-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{7.16}$ | $-\frac{1}{0}$ |

$m_B$

No está definido

# Ejemplo

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $\boxed{(2,5)}$ y es perpendicular a la recta con ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$L$

$\ell$

$(0,4)$

$y = mx + b$

① $m_L = -2$

② $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -2(x-2)$

$y - 5 = -2x + 4$

$y = -2x + 4 + 5$

$y = -2x + 9$

# Ecuación lineal en dos variables

Dada una ecuación de la forma $\boxed{Ax + By = C}$, suponga que al menos uno de $A$ o $B$ es diferente de $0$.

- Si $\boxed{B \neq 0}$, entonces se puede escribir de la forma $y = -\dfrac{A}{B}x + \dfrac{C}{B}$ y, por consiguiente, es la ecuación de una recta.
- Si $\boxed{B = 0}$, entonces $\boxed{A \neq 0}$ (pues al menos uno de $A$ o $B$ debe ser distinto de $0$) y la ecuación se puede expresar como $\boxed{x = \dfrac{C}{A}}$, que también es la ecuación de una recta.

## Ecuación lineal en dos variables

Una ecuación que se puede expresar en la forma $Ax + By = C$, donde $A, B, C$, son constantes y al menos uno de $A$ o $B$ no es cero, se llama *ecuación lineal en dos variables*. La gráfica en el plano cartesiano de una ecuación lineal en dos variables es una recta.

Como la gráfica de una ecuación lineal en dos variables es una recta, y la gráfica de una recta está determinada por dos puntos, la gráfica de una ecuación lineal en dos variables se puede dibujar rápidamente con tan solo encontrar los **interceptos**.

- Para hallar el intercepto en el eje $x$, se reemplaza $y = 0$ en la ecuación $Ax + By = C$ y se resuelve para $x$.
- Para hallar el intercepto en el eje $y$, se reemplaza $x = 0$ en la ecuación $Ax + By = C$ y se resuelve para $y$.

# Ejemplo

Dibuje la gráfica de la ecuación $5x - 3y = -15$.

① intercepto en x

Si $y = 0 \to 5x = -15$

$x = \frac{-15}{5} = -3$

$\to (-3, 0)$

② intercepto en y

Si $x = 0 \to -3y = -15$

$y = \frac{-15}{-3} = 5$

$\to (0, 5)$