Sección 0.3
Factorización

Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Repaso

Expre. Alge. = Una combinación, letras signos y números

Ej: $3x - 2x + y$

- $5x + 3x = 8x$
- $3x - 2x = 1 \cdot x = x$
- $3x(4x) = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x = 12x^{1+1} = 12x^2$
- $\frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}$

Recuerde

- monomio
- Trinomio
- binomio
- polinomio

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Factorización

Expandir una expresión algebraica es el proceso de hallar el producto de las expresiones algebraicas que la conforman. Ahora se estudia el concepto inverso de expandir, el cual se llama *factorizar*. Este es el proceso de reescribir una expresión algebraica como el producto de otras expresiones algebraicas más sencillas.

$$\overbrace{\underbrace{x^2 - 1 = (x-1)(x+1)}_{\leftarrow \text{ expandir}}}^{\text{factorizar} \rightarrow}$$

Factor común

← Facto.

$a(b+c) = ab + ac$

→ expandiendo

algo en común

Observe si hay algún factor común en todos los términos de la expresión, si es así, use la propiedad distributiva.

Ejemplos

Factorice:

a. $10a - 15a^2 + 20a^3 = 5 \cdot 2a - 5 \cdot 3a \cdot a + 5 \cdot 4a \cdot a \cdot a$

$5a(2 - 3a + 4a^2)$

b. $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3 =$

c. $(x-1)(x+2)^2 - (x-1)^2(x+2) = (x-1)(x+2)(x+2) - (x-1)(x-1)(x+2)$

$(x-1)(x+2)\left[(x+2) - (x-1)\right]$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$a = 1$

Se usa para factorizar trinomios cuadráticos cuando el coeficiente líder (coeficiente de x^2) es igual a 1.

Observemos que:

$$(x + r)(x + s) = x^2 + \overbrace{(r + s)}^{b}x + \overbrace{rs}^{c}$$

Esto sugiere buscar dos números r y s tales que:

$$rs = c \text{ y } r + s = b$$

Ejemplos

Factorice:

a. $x^2 + 7x + 12$

(1) 12 | 7
6 · 2
4 · 3 → 4+3=7 ✓
12 · 1

(2) $(x+4)(x+3)$

b. $a^2 + 5a - 24$

$(a+8)(a-3)$

(1) 24 | 5
6·4 | 10
8·3 | 11
12·2 | 14
24·1 | 25
⋮

No siempre debo sumarlos. Jugar con los signos!

$\boxed{8-3}=5$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

ax^2+bx+c

Se usa para factorizar trinomios cuadráticos cuando el coeficiente líder es distinto de 1 $(a \neq 1)$.

Se hallan los factores del coeficiente líder y los del término constante, y a *prueba y error* se analizan todas las posibilidades hasta llegar a la factorización correcta.

① Tanteo

② Agrupación

1- · Dos # multiplicados den "a.c"
· Sumados ó Restados den "b"

2- Reescribir el Trinomio

3- Factorizarlo - Agrupación

Ejemplos

① Factores

3	70
3 , 1	7 , 10
	70 , 1
	35 , 2
	14 , 5

$7, -10$

$-7, 10$

Factorice:

Si !

a. $3x^2 + 11x - \boxed{70}$ NO !

② $(3x + 7)(x - 10) \to 3x^2 - 30x + 7x - 70$

$3x^2 - 23x - 70$

$(3x - 10)(x + 7)$ ✓ $\to 3x^2 + 21x - 10x - 70$

$3x^2 + 11x - 70$

1) Factores

8	15
8, 1	15, 1
4, 2	5, 3

Jugar con los signos

b. $8x^2 - 14x - 15$

$(8x \quad)(x \quad)$

$(4x \quad)(2x \quad)$

c) $3x^2 - 5x - 2$

1- $3(-2) = -6$

Factores

$2 \cdot 3$

$1 \cdot 6$

Sumados "-5"

$2 - 3 = -1$

$\boxed{1 - 6 = -5}$ ✓

2- $3x^2 + 1 \cdot x - 6x - 2$

3- $x(3x+1) - 2(3x+1)$

$(x-2)(3x+1)$ ✓

$(3x+1)(x-2)$

Uso de fórmulas

Algunas expresiones se pueden factorizar utilizando las siguientes fórmulas de *productos notables:*

- **Diferencia de cuadrados:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- **Cuadrado perfecto:** $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- **Cuadrado perfecto:** $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- **Diferencia de cubos:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- **Suma de cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Ejemplos

Factorice:

- $\sqrt{a} = b \iff b^2 = a$
- $\sqrt{9} = 3 \iff 3^2 = 9$
- $\sqrt{49} = 7 \iff 7^2 = 49$

$(ab)^n = a^n b^n$

a. $9x^2 - 49 = 3^2x^2 - 7^2 = (3x)^2 - 7^2$
$= (3x - 7)(3x + 7)$

b. $a^2 + 18a + 81 =$

c. $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (\underbrace{2x}_{a})^2 - 2 \cdot \overbrace{3 \cdot \underbrace{2x}_{a}\, y}^{b} + (\underbrace{3y}_{b})^2$
$= (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$
$= (2x - 3y)^2$

d. $64a^3 - 1 =$ Dif Cubos

e. $125x^3 + 27y^3 =$

Agrupación de términos

Algunas expresiones algebraicas tienen cuatro o más términos y a veces pueden ser factorizadas por *agrupación de términos:* se forman dos o más grupos, se factoriza cada grupo y cada uno de los grupos debe tener un factor en común.

Ejemplos

Factorice:

a. $x^3 - x^2 + 3x - 3 = (x^3 - x^2) + (3x - 3) = x^2(x-1) + 3(x-1)$
$= (x^2+3)(x-1)$

b. $3m^2 - 6mn - 4m + 8n =$

c. $2am + n - 1 - 2an + 2a - m = (2am - 2an + 2a) + (n - 1 - m)$
$= 2a(m - n + 1) + (n - 1 - m) = (2a - 1)(m - n + 1)$
$= 2a(m - n + 1) + (-1)(-n + 1 + m)$
$(m - n + 1)$