Sección 3.6
Funciones racionales

$\mathbb{Q} \quad \dfrac{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

$b \neq 0$

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Introducción

En esta sección se estudiarán las funciones que se expresan como el cociente de dos funciones polinómicas. Estas funciones se conocen como **funciones racionales**.

Funciones racionales

Una función racional $r(x)$ es una función que se puede expresar de la forma:

$$r(x) = \frac{P(x)}{\boxed{Q(x)}},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, y $Q(x)$ no es igual al *polinomio cero*.

Observe que el dominio de la función racional $r(x)$ consiste de todos los números reales x tales que $Q(x) \neq 0$.

$\mathrm{Dom}_{r(x)} = \{ x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0 \}$

Ejemplos

1. Las siguientes funciones son funciones racionales.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^5 - \frac{2}{5}x^2 + 1}$

   (b) $g(x) = \dfrac{x-3}{(x+4)^5} - 4$

   (c) $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$

2. La función $r(x) = \dfrac{2^x}{x+1}$ no es una función racional porque su numerador no es un polinomio.

3. Halle el dominio de las siguientes funciones racionales.

(a) $r(x) = \dfrac{x}{x+3}$

$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
$(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

(b) $r(x) = \dfrac{3-x^2}{4x^2+3}$

$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2+3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{-\frac{3}{4}}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq -\frac{3}{4}\}$
$= \mathbb{R}$

(c) $r(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$

$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+3x+2 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x+1) \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ ó } x \neq -1\}$
$(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

(d) $r(x) = \dfrac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$

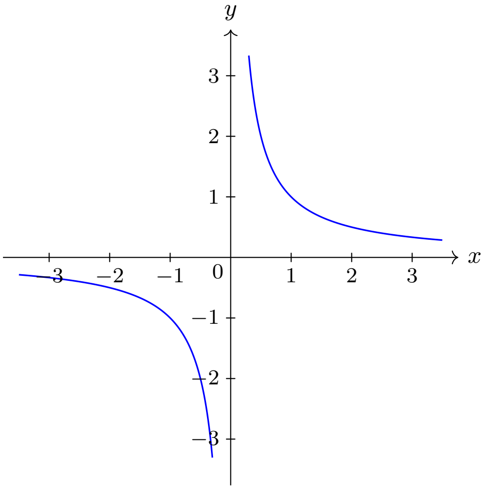
$\text{Dom}_{r(x)} \neq \text{Dom}_{\frac{1}{x+1}}$

$\text{Dom} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ ó } x \neq -1\}$
$= (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \infty)$

Gráficas de funciones racionales

Para graficar funciones racionales se debe prestar atención especial a los valores que hacen cero el denominador, así como el comportamiento de la gráfica de la función cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

La función racional $r(x) = \dfrac{1}{x}$ también es una *función de potencia* y ya se estudió en el Capítulo 1. Se vuelve a presentar su gráfica a continuación:

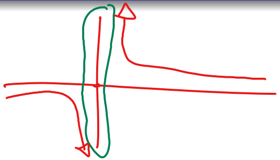


Se observa que:

- A medida que x se acerca a 0 por la derecha, $f(x)$ tiende a infinito positivo. En notación simbólica: $f(x) \to +\infty$ cuando $\boxed{x \to 0^{+}}$.
- A medida que x se acerca a 0 por izquierda, $f(x)$ tiende a infinito negativo. En notación simbólica: $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^{-}$.
- A medida que x tiende a infinito positivo, $f(x)$ tiende a cero tomando valores positivos. En notación simbólica: $f(x) \to 0^{+}$ cuando $x \to +\infty$.
- A medida que x tiende a infinito negativo, $f(x)$ tiende a cero tomando valores negativos. En notación simbólica: $f(x) \to 0^{-}$ cuando $x \to -\infty$.

En el caso anterior, se dice que la gráfica tiene una *asíntota vertical* con ecuación $x = 0$ y una *asíntota horizontal* con ecuación $y = 0$.

A continuación se define formalmente estos conceptos.

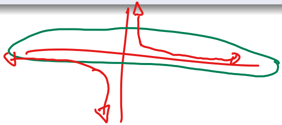


Asíntota vertical

La recta $\boxed{x = a}$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f si $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to a$ por la derecha o por la izquierda.

Asíntota horizontal

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si $f(x) \to b$ cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.



Ejemplos

$x - 1 = 0$ $\quad (x - c)$

$x = 1$

1. Explique por qué la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Si: $x \to 1^-$ $\quad f(x) \to -\infty$ $\quad$ eje: $f(0.999) = \dfrac{1}{0.999-1} = \dfrac{1}{-0.001} = -1000$

$x \to 1^+$ $\quad f(x) \to +\infty$ $\quad$ eje: $f(1.001) = \dfrac{1}{1.001-1} = \dfrac{1}{0.001} = 1000$

2. Explique por qué la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$ no tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Si $x \to 1^-$ $\quad f(x) = 1 \to 1$ $\quad$ ej: $f(0.999) = \dfrac{0.999-1}{0.999-1} = \dfrac{-0.001}{-0.001} = 1$

Si $x \to 1^+$ $\quad f(x) = 1 \to 1$ $\quad$ ej: $f(1.001) = \dfrac{1.001-1}{1.001-1} = \dfrac{0.001}{0.001} = 1$

En general, se tiene el siguiente resultado:

Asíntotas verticales de una función racional

La recta $\boxed{x = c}$ es una asíntota vertical de una función racional si, y solo si, $(x - c)$ es un factor lineal de su denominador pero no es un factor lineal de su numerador.

Halle las asíntotas horizontales de las siguientes funciones racionales (para esto, divida el numerador y el denominador de la función por la mayor potencia de x que aparezca en el denominador). 1

(a) $r(x) = \dfrac{3x}{4x-2}$ $\rightarrow \dfrac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{4x}{x} - \frac{2}{x}} = \dfrac{3}{4 - \cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}} \rightarrow \dfrac{3}{4}$ Si: $x \rightarrow \pm\infty \rightarrow \frac{3}{4} = y$

(b) $r(x) = \dfrac{3x}{4x^2-2}$ $\rightarrow \dfrac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \dfrac{\cancel{\frac{3}{x}}^{\,0}}{4 - \cancel{\frac{2}{x^2}}^{\,0}} \rightarrow \dfrac{0}{4} = 0$ Si: $x \rightarrow \pm\infty \rightarrow 0 = y$

(c) $r(x) = \dfrac{3x^2}{4x-2}$ $\rightarrow \dfrac{\frac{3x^2}{x}}{\frac{4x}{x} - \frac{2}{x}} = \dfrac{3x}{4 - \cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}} \rightarrow \pm\infty$ No hay Asíntota horizontal.

Una forma alterna de hacer el mismo cómputo se obtiene de observar que la asíntota horizontal da información del comportamiento de la función racional "en los extremos", es decir, para valores de la entrada x que sean muy grandes en magnitud, en símbolos, cuando $x \to \pm\infty$.

Ya se sabe que el comportamiento "en los extremos" de un polinomio está determinado por su termino líder. Entonces es razonable esperar que el comportamiento en los extremos de una función racional esté determinado por el cociente:

$$\boxed{\frac{\text{término líder del numerador}}{\text{término líder del denominador}}.}$$

2

Ejemplo

Use el análisis anterior para determinar el comportamiento en los extremos de las siguientes funciones racionales.

(a) $r(x) = \dfrac{3x}{4x - 2}$ $\quad \rightarrow \quad \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4} = y$

(b) $r(x) = \dfrac{3x}{4x^2 - 2}$ $\quad \rightarrow \quad \dfrac{3\cancel{x}}{4x^2} = \dfrac{3}{4x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$

(c) $r(x) = \dfrac{3x^2}{4x - 2}$ $\quad \rightarrow \quad \dfrac{3x^2}{4x} = \dfrac{3x}{4} \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$

En resumen:

Asíntotas horizontales de una función racional

Sea $r(x)$ una función racional dada por:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

La existencia de asíntotas horizontales depende de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$, como se indica a continuación:

1. Si $n < m$, la asíntota horizontal de la gráfica de r es la recta $y = 0$.
2. Si $m = n$, la asíntota horizontal de la gráfica de r es la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$.
3. Si $n > m$, la gráfica de r no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo

Halle el dominio de la función racional $r(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ $= \dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}$ y determine sus asíntotas verticales y su asíntota horizontal. Halle los interceptos y luego grafique.

• Dom $= \{x \in \mathbb{R} \mid (x+2)(x-2) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \vee x \neq 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

• Asint. Verticales. $(x+2)$ y $(x-2)$ son factores lineales del denominador, entonces $x = -2$ y $x = 2$ hay Asi. Vert. $r(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to 2$, $x \to -2$ por la derecha o por la izquierda.

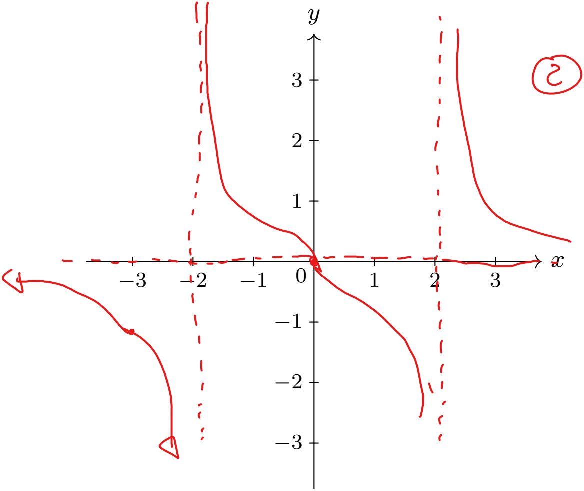
• Asin. H. $y = 0$. $\dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. $r(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$

• y: $x = 0 \to \dfrac{0}{4} = 0 \to (0,0)$

x: $y = 0 \to 0 = \dfrac{2x}{x^2-4} \to 0(x^2-4) = 2x$ $(0,0)$

$0 = 2x$

$0 = x$



① Interceptos y Asíntotas

② $r(-3) = -\frac{6}{5}$

Procedimiento para graficar una función racional

En resumen, para trazar la gráfica de una función racional, se sugiere considerar los siguientes pasos:

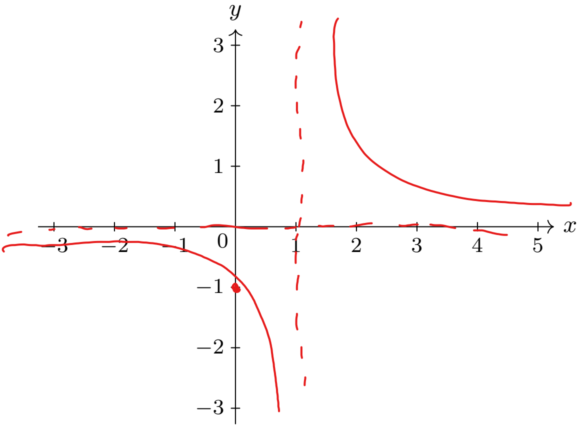
1. Factorice el numerador y el denominador.
2. Halle el dominio de la función racional.
3. Halle las asíntotas verticales, si existen.
4. Halle la asíntota horizontal, si existe.
5. Halle los interceptos con los ejes coordenados y grafíquelos.
6. Haga un bosquejo de la gráfica. Para ello puede utilizar valores de prueba para x que estén en cada una de las regiones determinadas por las asíntotas verticales.

Ejemplos

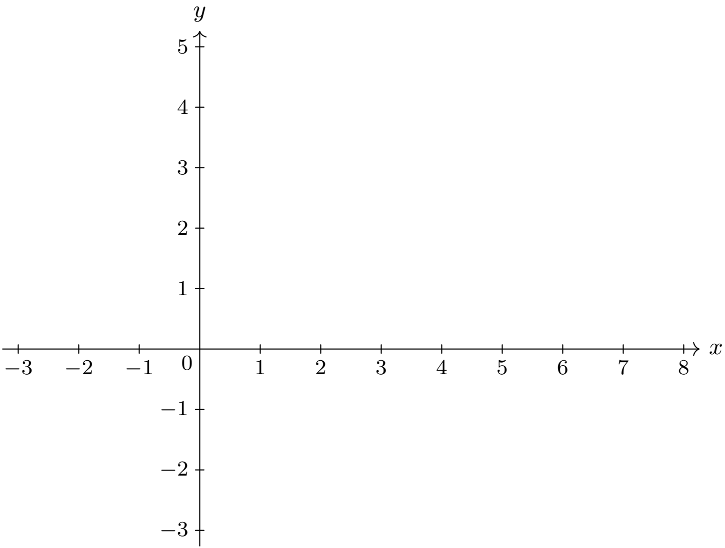
(a) Dibuje la gráfica de $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

$\frac{a}{b} = 0 \rightarrow \boxed{a = 0}$

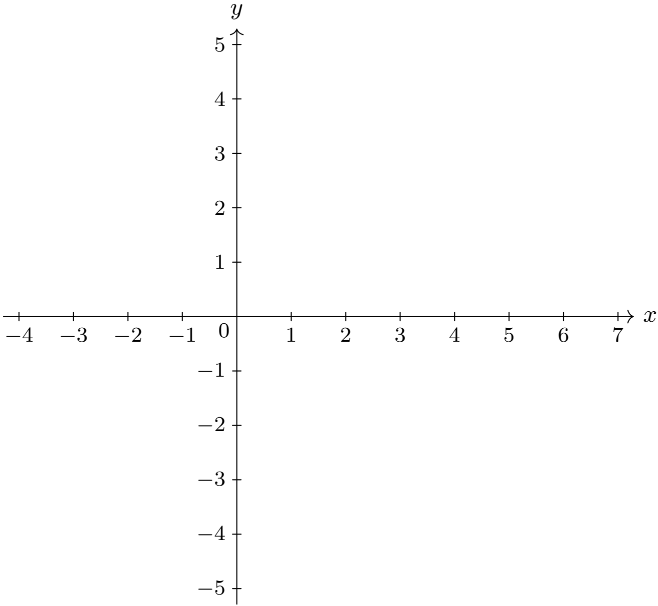
$b \neq 0$


y
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
x

(b) Dibuje la gráfica de $r(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8

(c) Dibuje la gráfica de $r(x) = \dfrac{3x(x-2)}{(x+1)(x-4)}$.


y
5
4
3
2
1
x
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3
−4
−5

(d) Dibuje la gráfica de $r(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x-2}$. $= \dfrac{(x+2)(x+1)}{(2x-1)(x+2)}$

① ✓

② Dom $= \{x \in \mathbb{R} \mid (2x-1)(x+2) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}$ ó $x \neq -2\}$

$= (-\infty,-2) \cup (-2,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},\infty)$

③ Asin. Vert. Como el factor lineal $(2x-1)$ esta solo en el deno. ahí hay una asintota. $x = \frac{1}{2}$.

$r(x) = \dfrac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{(2x-1)\cancel{(x+2)}} = \dfrac{x+1}{2x-1}$ $\longrightarrow$ Si $x=-2 \to r(x) = \frac{1}{5}$
$(-2, \frac{1}{5})$

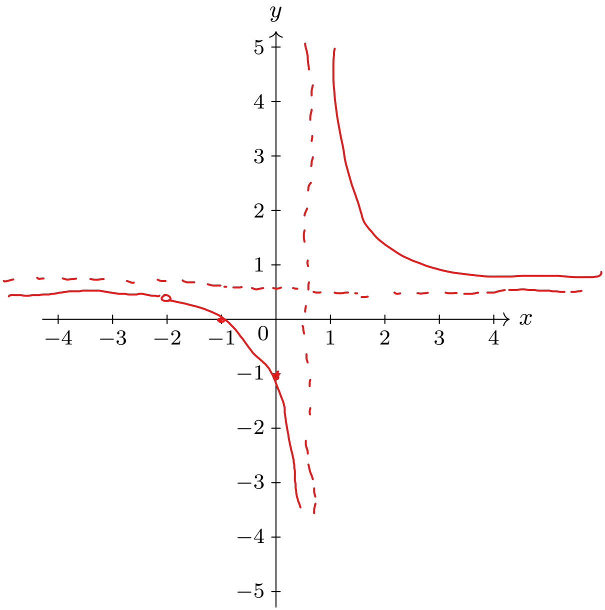
④ Asin H. $\frac{1}{2} = y = \dfrac{1\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}$

③ x: $y=0 \to \dfrac{(x+2)(x+1)}{(2x-1)(x+2)} = 0 \to$ ($(x+2)=0$ ó $(x+1)=0$

$\boxed{x=-2}$ $\quad$ $x=-1$ ✓ $(-1,0)$

No es. Porque no esta en el Dom

y: $x=0 \to \frac{2}{-2} = -1 \to (0,-1)$


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4