Sección 3.2
Gráficas de funciones polinómicas

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

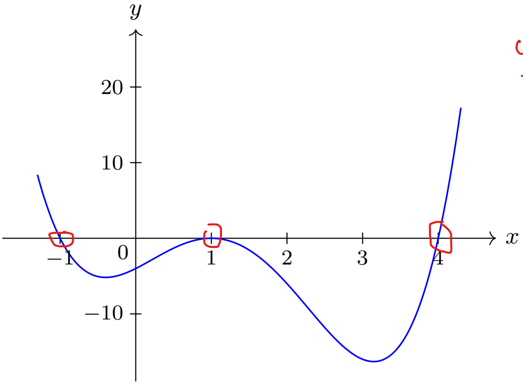
1. Ceros reales y su multiplicidad
2. Máximos y mínimos

En la sección anterior se analizó el comportamiento de las funciones polinómicas cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Ahora se consideran algunas propiedades adicionales que ayudarán a graficar las funciones polinómicas.

Ceros reales y su multiplicidad

Considere la siguiente gráfica de la función polinómica

$$f(x) = x^{\boxed{4}} - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$



$y = 0 \rightsquigarrow$ despejo x

$f(x) = 0$

Note que la gráfica de f tiene tres interceptos en el eje x.

Se observa que la gráfica *cruza* el eje x en los valores -1 y 4, además *toca* el eje x en el valor 1. Como consecuencia de eso, la gráfica entre dos interceptos consecutivos está arriba del eje x o debajo del mismo.

Si se factoriza completamente la función f es fácil hallar los interceptos en x de la gráfica, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

Cero real de un polinomio

Si f es una función polinómica y c es un número real para el cual $f(c) = 0$, se dice que c es un **cero real** de la función f.

Como consecuencia de esta definición, se puede observar que si c es un cero real de una función f, entonces c es un intercepto en x de la gráfica de f. Más aún, se puede demostrar que $x - c$ es un factor de $f(x)$.

$f(x) = x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)(x+3) = 0$

$x+3=0$ ó $x+3=0$

$x = -3$ ó $x = -3$

$\rightarrow \boxed{c = -3}$

$(-3, 0) = (-3, f(-3))$

$\therefore$ -3 es el cero real de f y $(x+3)$ es un factor de f.

$(x-(-3)) = (x+3)$

Propiedades de los ceros reales de un polinomio

Sea f un polinomio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El número c es una raíz o solución de la ecuación $f(x) = 0$.
2. El número c es un cero real de f.
3. El número c es un intercepto de la gráfica de f con el eje x.
4. El término $x - c$ es un factor de f.

Ejemplo

Encuentre un polinomio de grado 3 cuyos ceros son -2, 3 y 6.

Como son ceros $\overset{=c}{-2}$, $\overset{=c}{3}$ y $\overset{=c}{6}$ de la función f, entonces

$x - c$ es un factor de f, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} x-(-2) \\ x-3 \\ x-6 \end{array}\right\}$$

son factores de f. Así, el polinomio de grado 3 será

$$f(x) = a(x+2)(x-3)(x-6) \quad , \; a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0$$

$(x+2)^{2}$ ó $(x+2)^{4}$

Multiplicidad de un cero

Si f es una función polinómica y $x - c$ es un factor de f que aparece exactamente k veces, es decir, k es el mayor entero positivo para el cual $(x - c)^k$ es factor de f, se dice que c es un **cero de multiplicidad** k.

Ejemplo

Determine los ceros de $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2$ y su multiplicidad.

$x^4 + 3x^3 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 3x - 4) = 0$

$x^2(x+4)(x-1) = 0$

$x^2 + 3x - 4$

$(x+4)(x-1)$

$x^2 = 0$ $\quad x+4=0$ $\quad x-1=0$

$\boxed{x=0}$ $\quad x=-4$ $\quad x=1 \rightarrow$ Valores de C

$(x-0)^2$

$x=0$, la multiplicidad es 2. y $x=-4$ y $x=1$ son de multiplicidad 1.

Si c es un cero de la función $f(x)$, entonces para trazar la gráfica de f es importante analizar su comportamiento para valores de x cercanos a c, ya sea por la izquierda o por la derecha.

Si el cero es de multiplicidad par, entonces el signo de $f(x)$ no cambia al considerar valores de x cercanos a c, por la derecha o por la izquierda. Por lo tanto, la gráfica de f *toca* pero no cruza el eje x en el valor c.

Si el cero es de multiplicidad impar, entonces $f(x)$ sí cambia de signo al considerar valores de x cercanos a c por ambos lados. Por lo tanto, en este caso la gráfica de f sí cruza el eje x.

$x^2(x+4)(x-1)$

$\sim (x-0)^2 (x-(-4))(x-1)$

$x-0 \to c=0$

$x-(-4) \to c=-4$

$x-1 \to c=1$

$(x-c)^k$

En resumen, se tiene el siguiente resultado:

Comportamiento cerca de los ceros

Sea c un cero real con multiplicidad k de una función polinomial f.

- Si k es par, entonces la gráfica de f toca, pero no cruza el eje x en c.
- Si k es impar, entonces la gráfica de f cruza el eje x en c.

Ejemplo

Graficar $f(x) = x(x-1)^2(x-3)$. $\Rightarrow f(x) = \boxed{x^4} - 5x^3 + 7x^2 - 3x$

① raíces ó ceros (Interceptos en x)

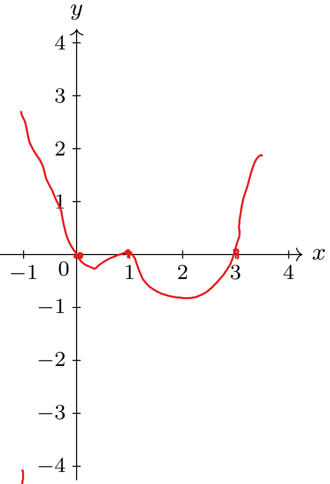
$x(x-1)^2(x-3) = 0$

$\boxed{x=0}$ $(x-1)^2 = 0$ $x - 3 = 0$

$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=3}$ → valores de c

1 2 1 → multiplicidad

Cruza x No cruza en x Cruza a x



② los extremos de f(x) serán los mismos que $\underline{y = x^4}$

$x \to \infty, -\infty$ ⟩ $f(x) \to \infty$ ∪

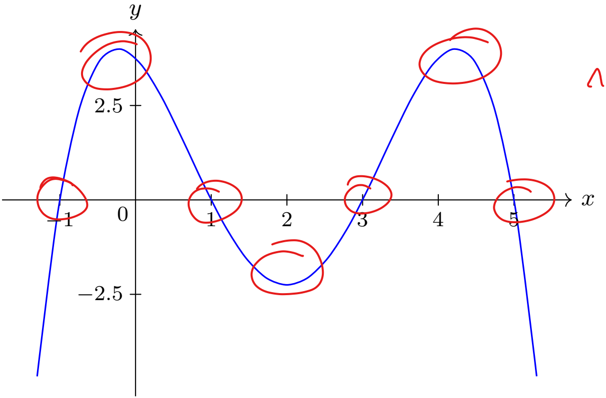
Máximos y mínimos

Considere la siguiente gráfica de la función polinómica

$$f(x) = -\frac{1}{4}\boxed{x^4} + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 2x + \frac{15}{4}$$

$n = 4$

$n - 1 = 4 - 1 = 3$



$n - 1 = 3$

$n = 3 + 1$

$\boxed{n = 4}$

4, 6, 8, ...

Observe que la gráfica corta el eje x en 4 puntos distintos, los cuales dividen el eje x en cinco intervalos.

A la izquierda de -1 la función crece de manera continua y a la derecha de 5 la función decrece de forma continua. Además, en cada uno de los tres intervalos que están entre -1 y 5, la función debe tener un máximo o un mínimo local. En este ejemplo, la función polinómica es de grado 4 y tiene 3 máximos o mínimos locales.

De forma general, se tiene la siguiente propiedad:

Como máximo.

Máximos y mínimos locales de una función polinómica

La gráfica de una función polinómica de grado n puede tener a lo más $n-1$ máximos o mínimos locales.

Ejemplos

1. En cada una de las siguientes gráficas de polinomios indique cuál es el grado menor del polinomio.

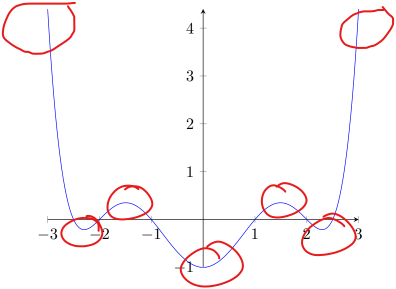


Figura A

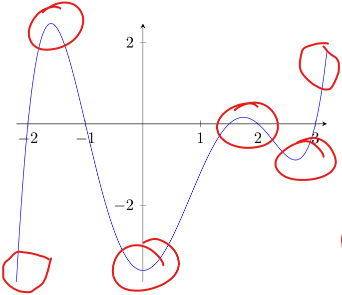


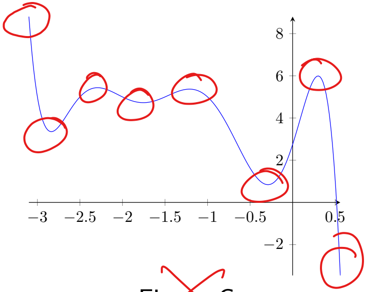
Figura B

Como hay 6 max o min locales, entonces la función tiene grado al menos de 6.

6, 8, 10, ...

2. Seleccione la gráfica que mejor represente la función

$$f(x) = -2x^{5} + x^4 - 3x^2 + x - 2$$



~~Figura C~~

7 ,9 ,11 . . . .

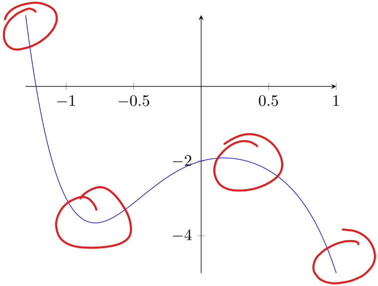


Figura D ✓

3, ,5, ,7

Ahora se resumen las propiedades de las funciones polinómicas que facilitan el trazado de sus gráficas.

Propiedades de las gráficas de funciones polinómicas

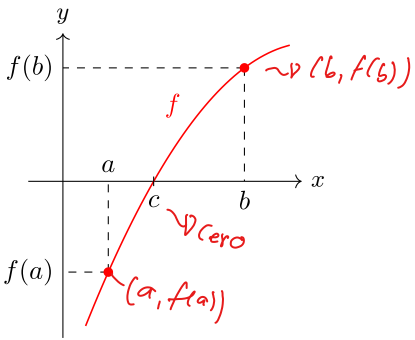
Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$ y $n \geq 2$.

- La gráfica de f es una curva suave y continua.
- El mayor número de máximos y mínimos locales es $n - 1$.
- La función tiene a lo sumo n ceros reales, es decir, intercepta al eje x en a lo más n puntos.
- En un cero de multiplicidad par, la gráfica toca el eje x pero no lo cruza.
- En un cero de multiplicidad impar, la gráfica cruza el eje x.
- Entre dos ceros consecutivos, la gráfica está encima del eje x o debajo del eje x.
- En los extremos (para valores grandes de x, positivos y negativos), la gráfica se comporta como la gráfica de $y = a_n x^n$.

El siguiente teorema es un hecho importante que a veces puede ayudar a graficar una función polinómica.

Teorema del valor intermedio

Si f es una función polinómica donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe al menos un cero real de f en el intervalo (a, b), es decir, existe un valor c entre a y b donde $f(c) = 0$.



Guía para graficar funciones polinómicas

1. Determine el comportamiento en los extremos de la gráfica, analizando la forma del término líder $a_n x^n$.
2. Halle los ceros de la función así como su multiplicidad. Los ceros coinciden con los interceptos en x. La multiplicidad de los ceros reales se usa para determinar si la gráfica cruza o solamente toca el eje x en esos valores.
3. Se usa la información anterior para realizar un bosquejo de las partes importantes de la gráfica.
4. De ser necesario, puede determinar si la gráfica está por encima o por debajo del eje x entre dos ceros consecutivos, eligiendo un valor de prueba en ese intervalo y evaluando la función en ese valor. Si el resultado es positivo, la gráfica está por encima del eje x, y si es negativo está por debajo del eje x.
5. Puede analizar la cantidad de máximos y mínimos locales usando el grado del polinomio, para verificar que no haya algún error con su gráfica.

Ejemplo

Graficar la función $f(x) = \frac{1}{2}(2x-1)(x+2)^2(x-2)$.

① Extremos

$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x^2 \cdot x = x^4$

los extremos de $f(x)$ se comportan con los de $x^4 \Rightarrow \cup$

$x \to \infty$, $x \to -\infty$) $f(x) \to \infty$

② Ceros

$\frac{1}{2}(2x-1)(x+2)^2(x-2) = 0$

$\frac{1}{2} \neq 0$ $\quad 2x - 1 = 0 \quad (x+2)^2 = 0 \quad x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad x = -2 \quad x = 2$

$k=1$ (impar) pasa el eje x $\quad k=2$ (par) no pasa x $\quad k=1$ (impar) pasa el eje x

③ ✓

③ hay 3 max o min locales.

$n=4$

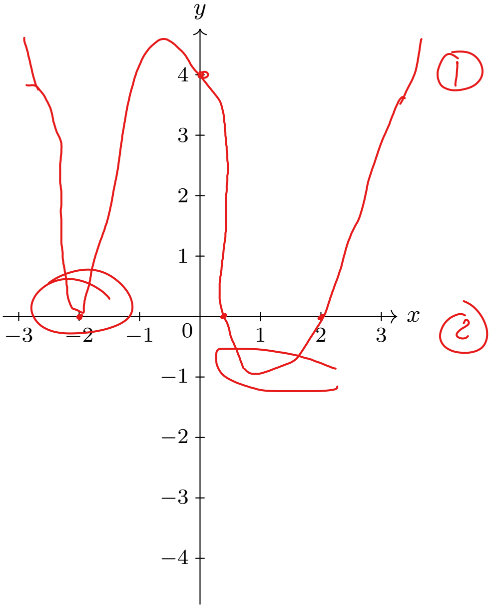
$\boxed{n-1=3}$ ✓

④ Podemos buscar el intercepto en y

$$y=f(0)=\frac{1}{2}(2(0)-1)(0+2)^2(0-2)$$

$$=\frac{1}{2}(-1)(2)^2(-2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8=4$$


y
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
x
−3
−2
−1
1
2
3
1
2