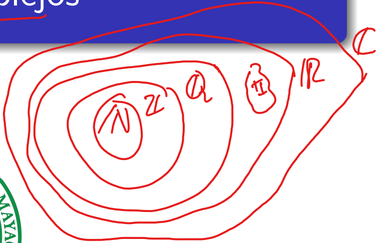
Sección 2.4
Números complejos



Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

En el Capítulo 0 se observó que algunas ecuaciones cuadráticas no tenían *soluciones reales*:

- Por ejemplo, la ecuación
$$\boxed{x^2 = -1,}$$
no tiene soluciones reales, ya que no existe un número real que elevado al cuadrado sea negativo.
- En general, para la ecuación
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0,$$
si su discriminante es negativo: $D = b^2 - 4ac < 0$, se observó que la ecuación cuadrática no tenía soluciones reales.

En esta sección se extiende el sistema de los números reales, formando un nuevo sistema numérico, de forma tal que en este nuevo sistema, un polinomio de grado n tenga n raíces.

Definiciones

Considere la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Si se resuelve mecánicamente para x:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Lo que se obtiene *no es un número real*.

$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

Se va a extender el sistema de números reales añadiendo un nuevo número que sea solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Este nuevo número se denota por la letra i y se define de forma tal que tenga la propiedad $i^2 = -1$.

En el nuevo sistema numérico se desea definir una multiplicación entre números reales b y este nuevo número i, obteniendo nuevos números que se denotarán por bi.

Los números de la forma bi se llaman **números imaginarios**.

Propiedades de los números imaginarios

Se quiere que el número 1 siga siendo la identidad multiplicativa, por lo que $1 \cdot i = i$. El número $-1 \cdot i$ se denotará por $-i$.

Se va a exigir que la propiedad conmutativa de la multiplicación $ab = ba$ y la propiedad asociativa de la multiplicación $a(bc) = (ab)c$ sigan siendo válidas en el nuevo sistema numérico.

A partir de la definición anterior, se obtiene lo siguiente:

Potencias de i

- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = 1$

El patrón continúa: $i, -1, -i, 1, \ldots$

Ejemplo

Simplifique las siguientes potencias.

(a) i^{33} $= \left(i^{8}\right)^{3} \cdot i^{9} = 1^{3} \cdot i^{3} \cdot i^{3} \cdot i^{3} = 1 \cdot (-i)(-i)(-i)$

$= -i^{3} = -(-i) = i$

(2) $33 \div 4 = 8$, $33 - 32 = \boxed{1}$ $\qquad i^{33} = i^{1} = i$

(b) i^{100}

(c) $\dfrac{i^{12}}{3}$ $= \frac{1}{3} \cdot i^{12} = \frac{1}{3}\left(i^{2}\right)^{6} = \frac{1}{3}(-1)^{6} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

(d) $(3i)^4$

Notación de radical

Si $a > 0$, se utiliza el símbolo $\sqrt{-a}$ para representar al número imaginario $(\sqrt{a})i$, es decir:

$$\boxed{\sqrt{-a} = (\sqrt{a})i}$$

$$\sqrt{-27} = i\sqrt{27} = (\sqrt{27})i$$

WARNING

Se debe tener cuidado con la notación de radical, pues las leyes de radical no siempre son válidas en este nuevo sistema:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$$

Por esto, es recomendable evitar su uso, cambiando los radicales a la notación sin radical.

Ejemplo

Resuelva las siguientes operaciones.

(a) $\sqrt{-49}$ $= i\sqrt{49} = i7 = 7i$

(b) $\sqrt{-25}\sqrt{-3}$ $= i\sqrt{25}\, i\sqrt{3} = i^2\sqrt{25}\sqrt{3} = i^2 \cdot 5\sqrt{3}$
$= -1 \cdot 5\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{-\frac{25}{144}}$

Números complejos

Un *número complejo* es cualquier número que se puede escribir en la forma:

$\in \mathbb{R}$ # imaginario

$$\boxed{a + bi}$$

donde a y b son números reales y donde i satisface que $\boxed{i^2 = -1.}$

Observaciones

1. En el número complejo $a + bi$, el número a se llama **parte real** y el número b se llama **parte imaginaria**.
2. Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ es *igual* al número real a.
3. Si $b \neq 0$ y $a = 0$, entonces el número complejo $a + bi$ es un número imaginario.

Ejemplo

Determine la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos.

(a) $z = \underbrace{3}_{\in \mathbb{R}} - \overbrace{5i}^{\in \text{ imaginaria}}$

(b) $z = \underline{-2} + \overline{\sqrt{2}i}$

(c) $z = \underbrace{\overline{-13i}}_{\text{imaginaria}}$ Real = 0

(d) $z = \underbrace{5}_{\text{Real}}$ imaginaria = 0

Igualdad de números complejos

Los números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si, y solo si, $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo

Observe que:

(a) $3 - 5i = \cancel{e}^{\ln(3)} - \sqrt{25}i.$ $= 3 - \sqrt{25}i = 3 - 5i$

(b) $x + 2yi = -7 + 6i$ si, y solo si, $x = -7$ y $y = 3$.

Aritmética de números complejos

Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. A continuación se explican dichas operaciones.

Suma y resta de números complejos

Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se definen las operaciones de *suma* y *resta* como sigue:

$$\text{Suma:} \quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\text{Resta:} \quad (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo

Realice las siguientes sumas y restas.

(a) $(4-3i)\boxed{+}(2+4i)$

① $= (4+2) + (-3+4)i$

$= 6 + 1i = 6+i$

② $4 - 3i + 2 + 4i$

$= 4 + 2 - 3i + 4i$

$= 6 - 3i + 4i$

$= 6 + (-3+4)i$

$= 6 + 1 \cdot i = 6+i$

(b) $(\underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b}i) - (\underbrace{-3}_{c} + \underbrace{5}_{d}i)$

$(2-(-3)) + (3-5)i = 5 - 2i$

(c) $\sqrt{-49} + 2\sqrt{-4}$ $= i\sqrt{49} + 2i\sqrt{4} = i \cdot 7 + 2 \cdot i \cdot 2 = 7i + 4i$
$= (7+4)i$
$= 11i$

(d) $\left(7 - \frac{2i}{3}\right) - \left(-4 + \frac{5i}{3}\right)$

Multiplicación de números complejos

Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se define la *multiplicación* entre ellos como:

$$
\begin{aligned}
(a + bi) \cdot (c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + adi + bci + bd(-1) \\
&= (ac \boxed{-} bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Realice los siguientes productos.

(a) $(\underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b}i) \cdot (\underbrace{4}_{c} - \underbrace{4}_{d}i)$

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

1 $(2\cdot 4 - 3\cdot(-4)) + (2(-4) + 3\cdot 4)i$

$(8+12) + (-8+12)i$

$20 + 4i$

2 desarrollando los productos.

(b) $(-7+2i)\cdot(3-5i)$

Para dividir números complejos, es conveniente definir el conjugado de un número complejo.

Conjugado de un número complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$, su *conjugado* se denota por $\bar{z}$ y se define por:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplos

1. Halle el conjugado de los siguientes números complejos.

   (a) $z = 2 + 4i$ $\rightarrow \bar{z} = 2 - 4i$

   (b) $z = -3i - 5$ $\rightarrow \bar{z} = -5 + 3i$

   (c) $z = 4$ $\rightarrow \bar{z} = 4$

   (d) $z = -3i$ $\rightarrow \bar{z} = 3i$

2. Halle el producto de $5 - 3i$ y su número complejo conjugado.

$$(\overset{a}{5} - \overset{b}{3}i)(\overset{c}{5} + \overset{d}{3}i)$$

$$= (5 \cdot 5 - (-3)(3)) + (5 \cdot 3 + (-3)(5))i$$

$$= (25 + 9) + \cancel{(15 - 15)i}^{\,0}$$

$$= 25 + 9$$

$$= 5^2 + 3^2$$

Multiplicar un número complejo por su conjugado es equivalente a sumar los cuadrados de la parte real e imaginaria, es decir:

$$\underline{(a+bi)(a-bi)} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = \boxed{a^2 + b^2.}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

División de números complejos

Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, la *división* se lleva a cabo como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\
&= \frac{a(c-di)+bi(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\
&= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \\
&= \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} \\
&= \boxed{\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Realice las siguientes divisiones.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$$

(a) $\dfrac{\overset{a}{2} + \overset{b}{3}i}{\underset{c}{4} - \underset{d}{2}i}$

$$= \frac{2\cdot 4 + 3(-2)}{4^2+(-2)^2} + \frac{3\cdot 4 - 2(-2)}{4^2+(-2)^2}\cdot i$$

$$= \frac{8-6}{16+4} + \frac{12+4}{16+4}\cdot i = \frac{2}{20} + \frac{16}{20} i = \frac{1}{10} + \frac{4}{5} i$$

(b) $\dfrac{-2-4i}{3+5i}$

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

$i = \sqrt{-1} \to i^2 = -1$

En el Capítulo 0 se resolvieron ecuaciones cuadráticas de la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0,}$$

aplicando la fórmula cuadrática. Las soluciones que se obtienen a partir de la fórmula cuadrática son:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

y si $\boxed{b^2 - 4ac < 0,}$ entonces la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales. Sin embargo, si se interpretan las raíces de negativos como números complejos, las soluciones que da la fórmula cuadrática satisfacen la ecuación original.

Ejemplo

Halle las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

(a) $\underset{a}{\underline{\ }}\, x^2 + \underset{b}{\underline{3}}x + \underset{c}{\underline{4}} = 0$

- $b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$ NO hay sol. Real

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2(1)} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} \begin{cases} X_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2} \\ X_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

(b) $\overset{a}{2}x^2 \overset{b}{-2}x + \overset{c}{5} = 0$