Sección 3.3
División de polinomios y teorema del factor

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Será útil recordar cómo se dividen números enteros, ya que se va a usar el mismo proceso para dividir polinomios.

Ejemplo. Divida $37,658$ entre 24 (sin usar calculadora).

$$
\begin{array}{r|r}
 & 1569 \\ \hline
24 & 37658 \\
 & -24 \\ \hline
 & 136 \\
 & -120 \\ \hline
 & 165 \\
 & -144 \\ \hline
 & 218 \\
 & -216 \\ \hline
 & 2
\end{array}
$$

$$37658 = (1569)(24) + 2$$

Algoritmo de la división

El procedimiento para dividir un polinomio por otro es bastante similar al proceso de división larga usado con números enteros.

La técnica para dividir polinomios se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. Divida $f(x) = 6x^4 + x^3 - 3x - 5$ por $d(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

$$2x^2 - 3x + 1 \rightarrow \text{Cociente}$$

$$\text{Divisor} - 3x^2+5x+6 \,\overline{\big)\, 6x^4 + x^3 + 0x^2 - 3x - 5} \quad \text{Dividendo}$$

$$-\cancel{6x^4} - 10x^3 - 12x^2$$

$$-\cancel{9x^3} - 12x^2 - 3x - 5$$

$$\cancel{9x^3} + 15x^2 + 18x$$

$$\cancel{3x^2} + 15x - 5$$

$$-\cancel{3x^2} - 5x - 6$$

$$10x - 11 \;\text{——}\; \text{Residuo}$$

$2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4$

$2x^2 \cdot 5x = 10x^3$

$2x^2 \cdot 6 = 12x^2$

① $\dfrac{6x^4}{3x^2} = 2x^2$

② $\dfrac{-9x^3}{3x^2} = -3x$

③ $\dfrac{3x^2}{3x^2} = 1$

El resultado se puede escribir como:

Dividendo

divisor

$$\underbrace{\frac{6x^4+x^3-3x-5}{3x^2+5x+6}}_{\text{División}} = \underbrace{2x^2-3x+1}_{\text{Cociente}} + \underbrace{\frac{10x-11}{3x^2+5x+6}}_{\text{Residuo/Divisor}}$$

También se escribe como:

$$\underbrace{6x^4+x^3-3x-5}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(3x^2+5x+6)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(2x^2-3x+1)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{10x-11}_{\text{Residuo}}$$

2. Divida $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4$ por $\boxed{d(x) = x - 4}$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x + 1 \\
\hline
x - 4 & 2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 \\
 & -2x^3 + 8x^2 \\
\hline
 & 3x^2 - 11x - 4 \\
 & -3x^2 + 12x \\
\hline
 & x - 4 \\
 & -x + 4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

① $\dfrac{2x^3}{x} = 2x^2$

② $\dfrac{3x^2}{x} = 3x$

③ $\dfrac{x}{x} = 1$

$$2x^3 - 5x^2 - 11x - 4 = (2x^2 + 3x + 1)(x - 4)$$

En este ejemplo el residuo es 0.

Esto significa que $x-4$ divide exactamente a $2x^3-5x^2-11x-4$.
En otras palabras, $x-4$ es un factor de $2x^3-5x^2-11x-4$.

Se escribe:

$$\frac{2x^3-5x^2-11x-4}{x-4}=2x^2+3x+1$$

También se puede escribir:

$$\underbrace{2x^3-5x^2-11x-4}_{\text{Dividendo}}=\underbrace{(x-4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(2x^2+3x+1)}_{\text{Cociente}}$$

En cada uno de los ejemplos se pudo escribir el dividendo como el producto del divisor por el cociente más el residuo. Esto es siempre cierto. Este hecho se conoce como el algoritmo de la división.

Algoritmo de la división

Si un polinomio $f(x)$ se divide por un polinomio $d(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$f(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde el grado de $r(x)$ es estrictamente menor que el grado de $d(x)$ (en particular, $r(x)$ podría ser el *polinomio cero*).

Al polinomio $f(x)$ se le llama **dividendo**, $d(x)$ se llama **divisor**, $q(x)$ se llama **cociente** y $r(x)$ se llama **residuo**.

Note que el algoritmo de la división implica que:

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}.$$

División sintética

$x+c = x-(-c)$

La división sintética es un método simplificado para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $\boxed{x-c.}$

① Escribir en una fila los coeficientes del dividendo

② bajar el primer coeficiente "siempre"

③ multiplique por c y sume.

Ejemplos

1. Para ilustrar este método (división sintética), se hará la división de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ por $\boxed{x - 3}$. $\Rightarrow c = 3$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -5 & -6 & 1 \\ \hline & \downarrow & 3\cdot 2=6 & 3\cdot 1=3 & -3\cdot 3=-9 \\ \hline & 2 & -5+6=1 & 3-6=-3 & -9+1=-8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -5 & -6 & 1 \\ \hline & & 6 & 3 & -9 \\ \hline & 2 & 1 & -3 & -8 \end{array}$$

$\underbrace{2 \quad 1 \quad -3}_{\text{Cociente}}$ $\quad$ $\underbrace{-8}_{\text{Residuo}}$

Cociente $\Downarrow$ $2x^2 + x - 3$

El resultado se obtiene a partir de los números escritos en la tercera fila: el *cociente* es $2x^2 + x - 3$ y el *residuo* es -8.

Observe que el cociente es de un grado menor que el dividendo.

El resultado de la división se puede expresar como:

$$\underbrace{2x^3 - 5x^2 - 6x + 1}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x-3)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(2x^2 + x - 3)}_{\text{Cociente}} \underbrace{-8}_{\text{Residuo}} .$$

Equivalentemente, también se puede expresar como:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 6x + 1}{x-3} = (2x^2 + x - 3) + \frac{-8}{x-3}.$$

2. Use división sintética para dividir $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ por $\boxed{d(x) = x + 2.}$

$= x - (-2) \rightarrow c = -2$

c | Coeficientes del dividendo

"ojo si falta una variable poner cero"

$+$

El resultado se puede expresar como:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = (x+2)(x^3 - 5x^2 + 10x - 18) + 35$$

Equivalente,

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{x+2} = x^3 - 5x^2 + 10x - 18 + \frac{35}{x+2}$$

WARNING

La división sintética solo funciona cuando se divide por un polinomio lineal mónico $x - c$, si se divide por algún otro polinomio se debe hacer la división larga.

Teorema del residuo y teorema del factor

En general, cuando se divide un polinomio $P(x)$ por un divisor lineal $x-c$, se puede concluir del algoritmo de división que

$$P(x) = \cancel{(x-c)Q(x)} + r,$$

donde $Q(x)$ es el cociente y el residuo r tiene que ser constante, pues es de grado menor que el divisor $x-c$. Evaluando en c se obtiene:

$$P(c) = (c-c)Q(c) + r,$$

y por consiguiente $\boxed{P(c) = r.}$

Este resultado se resume a continuación.

Teorema del residuo

El residuo obtenido cuando se divide un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $x - c$, es igual al número que se obtiene cuando se evalúa el polinomio en c, es decir $P(c)$.

Ejemplo

Si $p(x) = x^4 + 4x^2 - 3x - 1$, use el teorema del residuo para evaluar $p(2)$.

$x-2$

- $P(2) = 2^4 + 4(2)^2 - 3(2) - 1 = 25$
- $P(2)$ es el residuo que se obtiene al dividir $p(x)$ entre $x-2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 0 & 4 & -3 & -1 \\
 & \downarrow & 2 & 4 & 16 & 26 \\
\hline
 & 1 & 2 & 8 & 13 & \boxed{25}
\end{array}
$$

El siguiente resultado ya se ha aplicado para graficar polinomios. Ahora se puede demostrar usando el algoritmo de división:

Si $x-c$ es un factor de $p(x)$, entonces $p(x)$ factoriza en la forma

$$p(x)=(x-c)q(x),$$

de aquí

$$p(c)=(c-c)q(c)=0$$

y por ende c es un cero de $p(x)$.

Recíprocamente, si c es un cero de $p(x)$, entonces $p(c)=0$, y por el teorema del residuo

$$p(x)=(x-c)q(x)+0=(x-c)q(x).$$

Teorema del factor

El número c es un cero del polinomio $p(x)$ si, y solo si, $x - c$ es un factor de $p(x)$.

Si c es un cero osea $P(c) = 0$ ó si el residuo es cero al evaluar c en $p(x)$ entonces $(x-c)$ es un factor.

El teorema del factor es muy útil cuando se quiere factorizar un polinomio. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$.

Notemos que al evaluar $p(x)$ en $x=-1$ $\boxed{c=-1}$ obtenemos $p(-1)=0$

$$p(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 5(-1) + 12 = 0$$

$x-(-1)$ es un factor de $p(x)$; Por el Th del factor.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -6 & 5 & 12 \\
 & \downarrow & -1 & 7 & -12 \\
\hline
 & 1 & -7 & 12 & 0
\end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad -7 \quad 12}_{x^2-7x+12}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \\
&= (x+1)(x^2 - 7x + 12) \\
&= (x+1)(x-4)(x-3)
\end{aligned}$$

2. Demuestre que $q(x) = x - a$ es un factor de $f(x) = x^n - a^n$ para cualquier entero positivo n.

Como sabemos, por el Th del residuo, $f(a)$ es el residuo de la division de $f(x)$ entre $x-a=q(x)$

Como $f(a) = a^n - a^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ ó $n \in \mathbb{Z}^+$, Ahora por el Th del factor $x-a=q(x)$ es un factor de $f(x)$.

3. Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 4, con ceros -2 de multiplicidad uno, 3 de multiplicidad uno y 1 de multiplicidad dos.

Por el Th del factor, dado que son ceros entonces

$$p(x) = (x-(-2))(x-3)(x-1)^2$$
$$= (x+2)(x-3)(x-1)^2$$