Sección 1.7
Funciones de potencia

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Definición

Funciones de potencia

Las *funciones de potencia* son aquellas que se pueden expresar de la forma:

$$f(x) = ax^p,$$

donde a y p son constantes.

Ejemplo

Las siguientes son ejemplos de funciones de potencia:

(a) $f(x) = 5x^3$

(b) $g(x) = -7x^4$

(c) $h(x) = 6x^{-1}$

(d) $k(x) = \dfrac{6}{x^2}$

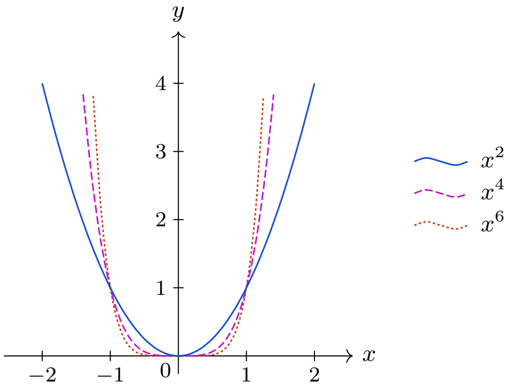
(e) $p(x) = 0.74x^{1/2}$

(f) $q(x) = -\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{x}$

Funciones de potencias enteros positivos

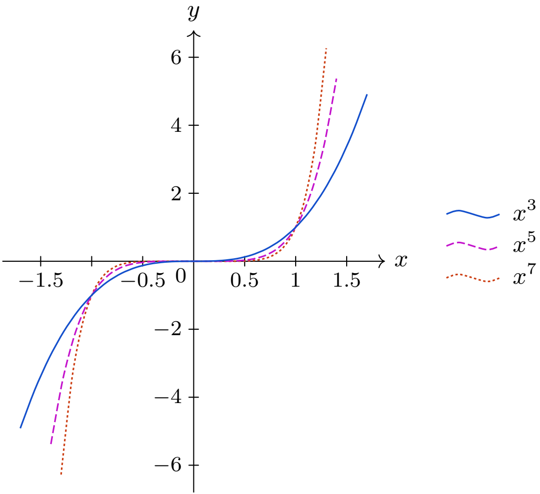
Cuando los exponentes de la función potencia son *enteros positivos*, la gráfica de su función puede ser esencialmente de dos formas. Esto se ilustra a continuación:

Gráficas de **potencias pares**:



- Observe que la salida y es siempre positiva.
- Observe que la salida y es la misma cuando se entra un valor y su negativo. Esto resulta en que la gráfica es *simétrica con respecto al eje* y.
- Observe que mientras mayor la potencia, más *se aplana* la gráfica cerca del origen.

Gráficas de **potencias impares**:



- Observe que la salida y es positiva cuando la entrada x es positiva y la salida y es negativa cuando la entrada x es negativa.
- El tipo de simetría que resulta se llama *simetría con respecto al origen*.
- Observe que mientras mayor la potencia, más *se aplana* la gráfica cerca del origen.

En resumen,

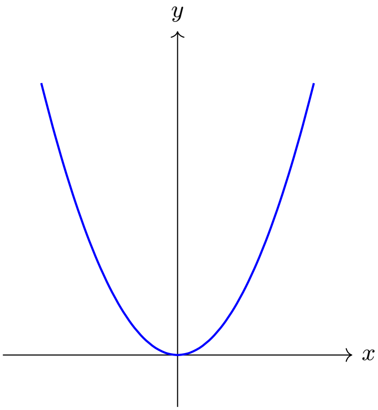
Gráficas de funciones de potencias enteros positivos

La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

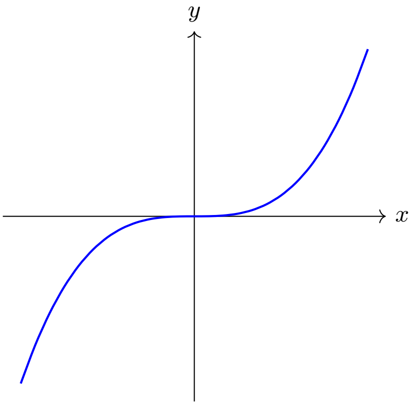
$$f(x) = x^n,$$

donde n es un entero positivo mayor que 1, tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ o $y = x^3$, dependiendo si n es par o impar (véanse las figuras siguientes).

Caso n par



Caso n impar



Funciones de potencias enteros negativos

Ejemplo 1. Dibuje la gráfica de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, para $x \neq 0$.

Solución:

Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, no puede haber ningún punto de la forma $(0, f(0))$ en la gráfica de f. O sea, la gráfica de f no intercepta la recta $x = 0$ (el eje y).

El comportamiento de la función f para valores de x cercanos a 0 es de crucial importancia al dibujar la gráfica.

Considere la tabla a continuación:

x	0.1	0.01	0.001	0.000001
$f(x) = \frac{1}{x}$	10	100	1000	1000000

$x \to 0$

$f(x) = y \to \infty$

Observe que a medida que la entrada x se acerca a cero con valores positivos (x "tiende a cero" por la derecha), la salida $\frac{1}{x}$ parece aumentar de forma no acotada. Decimos en este caso que la función "tiende a infinito".

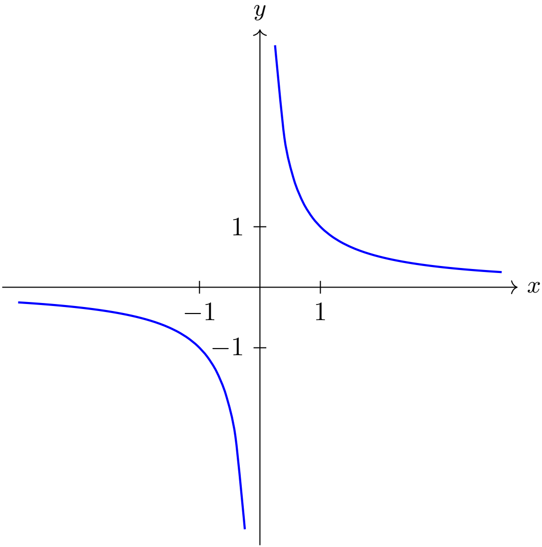
Ahora considere la tabla:

x	1	10	100	$1,000$	$1,000,000$	$x \to \infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.000001	$y \to 0$

Observe que a medida que la entrada x "tiende a infinito", la salida $\frac{1}{x}$ "tiende a cero".

La gráfica se puede completar considerando valores negativos de x, grandes y pequeños, como en la tabla siguiente:

x	-1	-10	-100	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \frac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-10	-100	-1000


y
x
1
-1
1
-1

Observe en la gráfica:

- Si la entrada x es positiva, entonces la salida y es positiva; si la entrada x es negativa, entonces la salida es negativa.
- Si x tiende a cero por la derecha, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a cero por la izquierda, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a negativo infinito.
- Si x tiende a positivo infinito, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a cero.
- Si x tiende a negativo infinito, entonces $\dfrac{1}{x}$ tiende a cero.

Ejemplo 2. Dibuje la gráfica de $\boxed{f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}}$, para $x \neq 0$.

Solución:

Como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, no puede haber ningún punto de la forma $(0, f(0))$ en la gráfica de f. O sea, la gráfica de f no intercepta la recta $x = 0$ (el eje y).

Como en el ejemplo anterior, el comportamiento de la función f para valores de x cercanos a 0 va a ser un factor determinante en la forma que tiene la gráfica.

Considere la siguiente tabla:

x	0.1	0.01	0.001	0.000001
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$				

Observe que a medida que la entrada x se acerca a 0, con valores positivos, los valores de salida $\dfrac{1}{x^2}$ aumentan sin cota, es decir, la función "tiende a infinito".

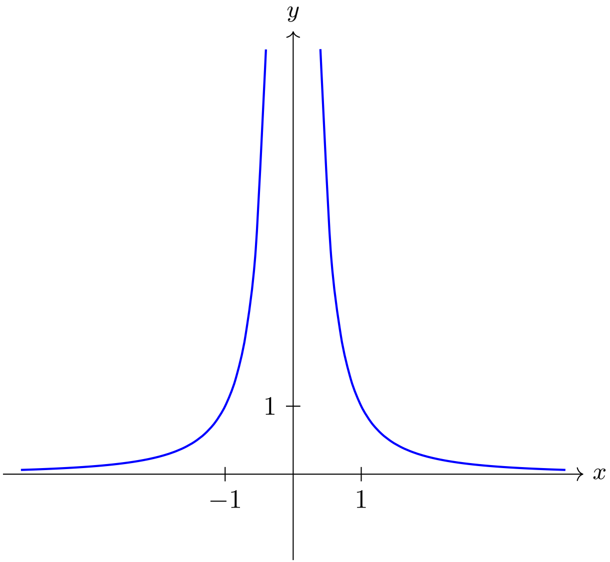
Ahora, observe en la siguiente tabla que a medida que la entrada x tiende a infinito, la salida $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero:

x	1	10	100	$1,000$	$1,000,000$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$					

La gráfica se puede completar considerando valores negativos de x, grandes y pequeños, como en la tabla a continuación:

x	-1	-10	-100	-0.1	-0.01
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$					

Observe que cuando el signo de la entrada x cambia, la salida $\dfrac{1}{x^2}$ se queda igual. Esto resulta en la simetría con respecto al eje y que exhibe la gráfica a continuación.


y
x
1
−1
1

Observe en la gráfica:

- La salida y siempre es positiva, sin importar si la entrada x es positiva o negativa.
- Si x tiende a cero por la derecha, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a cero por la izquierda, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a positivo infinito.
- Si x tiende a positivo infinito, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero.
- Si x tiende a negativo infinito, entonces $\dfrac{1}{x^2}$ tiende a cero.

En los dos ejemplos anteriores se puede observar una idea fundamental, de gran ayuda al graficar este tipo de funciones:

Tamaño de un cociente

$$\frac{1}{\text{pequeño}} = \text{grande} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\text{grande}} = \text{pequeño}$$

La recta $x = 0$ (el eje y) en las gráficas de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es un ejemplo de una *asíntota vertical*, y la recta $y = 0$ (el eje x) es un ejemplo de una *asíntota horizontal*.

En resumen,

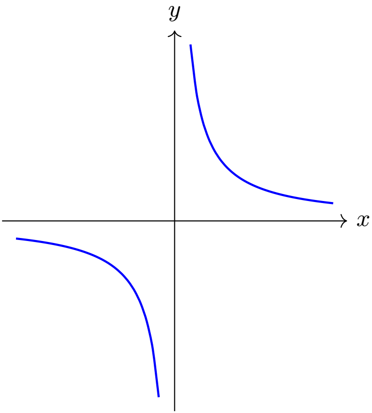
Gráficas de funciones de potencias enteros negativos

La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

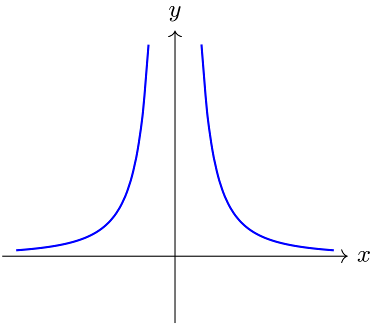
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

donde n es un entero positivo, tiene la misma forma general que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, o $y = \frac{1}{x^2}$, dependiendo si n es impar o par (véanse las figuras siguientes).

Caso n impar



Caso n par



Observe que en ambos casos la asíntota horizontal es la recta $y = 0$ y la asíntota vertical es la recta $x = 0$.

Funciones de potencias radicales

Función radical

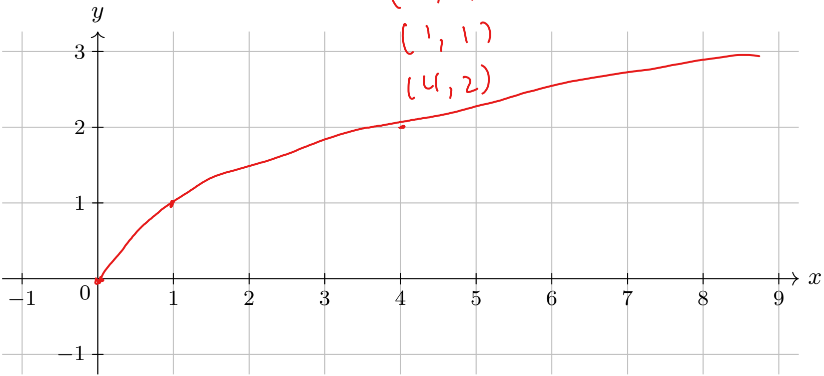
Una *función radical* es una función de la forma $f(x) = x^{1/p} = \sqrt[p]{x}$, donde p es un entero positivo.

Recuerde que si p es un entero positivo par, entonces $x^{1/p}$ se define como el número real *no-negativo* que elevado a la p es igual a x. Por ejemplo:

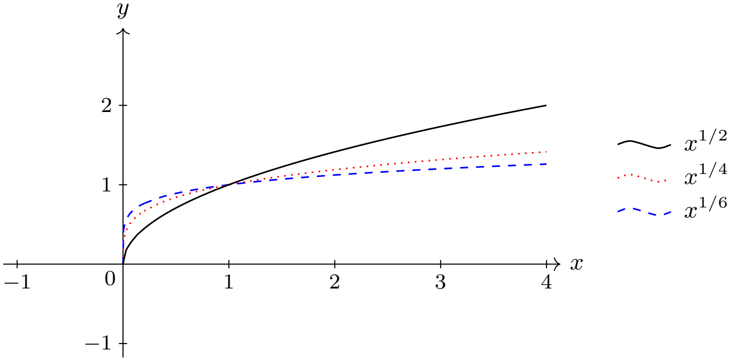
Si $p = 2$ $\sqrt{4} = 2$, Pues 2 es no-negativo y $2^2 = 4$

Ejemplo 3. Dibuje la gráfica de la función raíz cuadrada $f(x) = x^{1/2}$.

(0, 0)
(1, 1)
(4, 2)



En general, la gráfica de $f(x) = x^{1/p}$ para cualquier entero positivo par p se pueden dibujar de igual manera. Observe que estas funciones solo están definidas para $x \geq 0$. Por eso la gráfica aparece solo en el primer cuadrante.

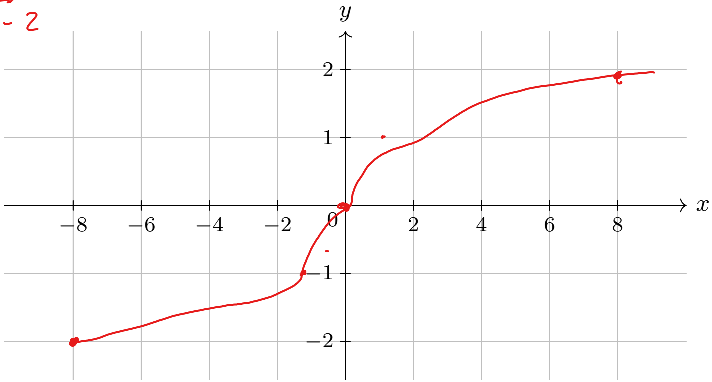


Recuerde que si p es un entero positivo impar, entonces $x^{1/p}$ se define como el número real que elevado a la p es igual a x. Por ejemplo:

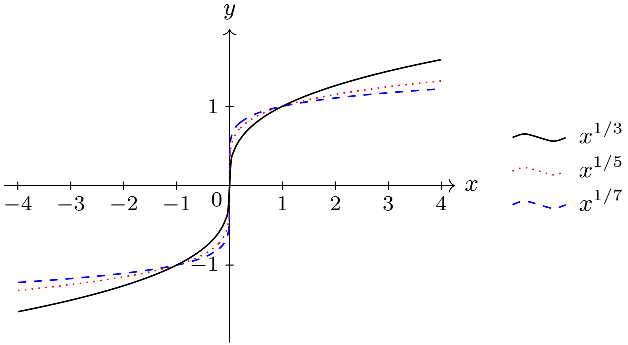
Si: $p = 3$ $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ y $(-2)^3 = -8$

Ejemplo 4. Dibuje la gráfica de la función raíz cúbica $f(x) = x^{1/3}$.

x	y
−8	−2



En general, la gráfica de $f(x) = x^{1/p}$ para cualquier entero positivo impar p se puede dibujar de igual manera.



En resumen,

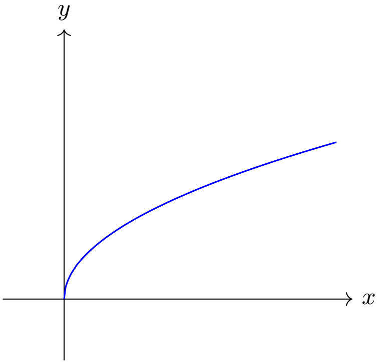
Gráficas de la función $f(x) = x^{1/p}$

La gráfica de cualquier función de potencia de la forma

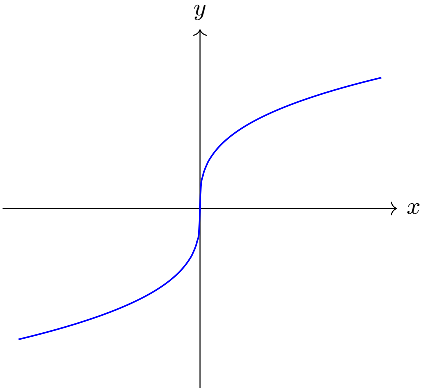
$$f(x) = x^{1/p} = \sqrt[p]{x},$$

donde p es un entero positivo $(p \neq 1)$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^{1/2}$ o $y = x^{1/3}$ dependiendo de si p es par o impar (véanse las figuras siguientes).

Caso p par



Caso p impar



Variación directa e inversa

Variación directa e inversa

- Si $y = kx$ donde k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **directamente proporcional** a x, o que **varía directamente** con x.
- Si $y = \dfrac{k}{x}$ donde k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **inversamente proporcional** a x, o que **varía inversamente** con x.

En ambos casos, la constante k se llama la **constante de proporcionalidad**.

Ejemplos

1. La función que toma como entrada el número de bicicletas y produce como salida el número de ruedas en ese conjunto de bicicletas es

$$r(b) = 2b,$$

la cual es un ejemplo de variación directa. En esta función el número de ruedas $r(b)$ es directamente proporcional al número de bicicletas b, y la constante de proporcionalidad es 2.

2. De acuerdo a la ley de Boyle, si la temperatura se mantiene constante, y se comprime una masa fija de gas, la presión P del gas es inversamente proporcional al volumen V del gas. Esto quiere decir que $P = \dfrac{k}{V}$ para alguna constante k. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad si una muestra de aire con volumen de 5 mililitros se encuentra a una presión de 2.02 atmósferas?

$k = ?$ $\quad P = 2.02 \quad V = 5$

$k =$

$P = \dfrac{k}{V} \longrightarrow 2.02 = \dfrac{k}{5}$

$k = (2.02)5 = 10.1$

Las aplicaciones de variación directa e inversa se pueden extender a otras potencias de x.

Variación directa e inversa como la n-ésima potencia

- Si $y = kx^n$ donde $n > 0$ y k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **directamente proporcional a la potencia** n **de** x, o que **varía directamente con respecto a la potencia** n **de** x.
- Si $y = \dfrac{k}{x^n}$ donde $n > 0$ y k es una constante diferente de cero, entonces se dice que y es **inversamente proporcional a la potencia** n **de** x, o que **varía inversamente con respecto a la potencia** n **de** x.

En ambos casos, la constante k se llama **constante de proporcionalidad**.

Ejemplos

y

1. El área de un círculo es directamente proporcional $\boxed{\text{al cuadrado}}$ de su radio. Escriba un modelo matemático para esta relación.

x

$A = \pi r^2 \rightarrow \quad y = \pi x^2$

2. El costo de producción por unidad de una revista de aparición mensual varía inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad de impresión. Si el costo de producción por unidad es de $\$6.00$ cuando se imprimen $2,500$ ejemplares, ¿cuál será el costo si se imprimen $6,400$ ejemplares?

Revisar