Sección 0.4
Ecuaciones

Universidad de Puerto Rico
Recinto de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Repaso

- $|a| = 0 \rightarrow a = 0$
- $|a| = b \rightarrow a = b$ ó $a = -b$, donde $b > 0$
- $|a| = |b| \rightarrow a = b$ ó $a = -b$
- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

1] $mcm(x, x^2, x^3) = x^3$ "es el de mayor exponente"

2] $mcm(x^2 - 9, x + 3) = mcm((x+3)(x-3), x+3)$

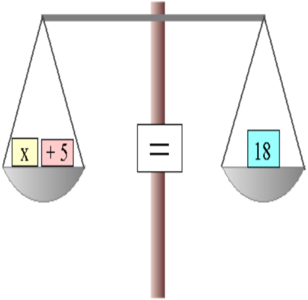
$= (x+3)(x-3)$ "son los factores comunes y no comunes"

Ecuaciones

¿Para qué sirven las ecuaciones?

Las ecuaciones permiten pasar del mundo real donde se observa un fenómeno al mundo simbólico de las matemáticas.

Problemas Verbales



Ecuación

Una *ecuación* es una igualdad de dos expresiones matemáticas que incluye por lo menos una variable que representa una cantidad desconocida.

Ejemplos: Las siguientes son ecuaciones en la variable x.

a. $6x + 8 = 9$
b. $x + 5 = 3x + 6$
c. $x^2 + 2 = 6 - \dfrac{1}{x}$
d. $x^2 + 3x + 8 = 0$
e. $\sqrt{x} + 2 = 0$
f. $|x| - 7 = 0$

Soluciones de una ecuación

Las *soluciones o raíces* de una ecuación son los valores (números) que deben tomar las variables (letras) para que la igualdad se cumpla.

Ejemplo: $\frac{1}{6}$ es una solución de la ecuación $6x + 8 = 9$.

Note que $\cancel{6}\left(\frac{1}{\cancel{6}}\right)+8 = 1+8 = 9$ $\boxed{\checkmark}$.

$6x+8=9 \rightarrow 6x\cancel{+8}\cancel{-8}=9-8$

$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6}$

Resolver una ecuación

Resolver una ecuación es el proceso de encontrar todas las soluciones de esa ecuación.

Ejemplo: Las soluciones de $x^2 = 25$ son $x = -5$ y $x = 5$.

• $x^2 = 25 \to \sqrt{x^2} = \sqrt{25}$

$\sqrt{x^2} = 5 \to |x| = 5 \to x = 5$

$x = -5$

• $\sqrt{x^2} = \sqrt{25} \to x = \pm 5$

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son *equivalentes* si tienen exactamente las mismas soluciones.

Ejemplos:

a. $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ y $|x| = 3$ **son** ecuaciones equivalentes.

$|x| = 3 \rightarrow x = 3$ ó $x = -3$

b. $x^2 = 9$ y $\boxed{x = 3}$ **no son** ecuaciones equivalentes.

Propiedades de la igualdad

Las siguientes propiedades llevan a ecuaciones equivalentes y serán útiles para resolver ecuaciones:

1. $\boxed{A = B \Leftrightarrow A + C = B + C}$
2. $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$

Ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* en una variable x es una ecuación definida para todos los valores de x, que usando las propiedades de igualdad se puede expresar de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$.

Ejemplos

Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales.

a. $3x + 1 = 5(2 - x)$

$\boxed{\text{Sí}}$

① $3x+1=10-5x$

② $3x+5x+1-10=0$

$\boxed{8x-9=0}$

$ax+b=0$

b. $\dfrac{2}{x} - 5 = 3x$

$\boxed{\bullet\ \text{NO}}$ • Sí

① $2x^{-1}-5=3x$

② $2x^{-1}-3x-5=0$

$a^{-1}=\dfrac{1}{a^1}$

Resuelva la ecuación $\overbrace{8(2x-3)-16}^{x=3} = \overbrace{18-2(x+2)}^{x=3}$.

$$16x \underbrace{-24-16} = 18 - 2x - 4$$

$$16x + 2x - 40 = 18 - 4$$

$$18x - 40 = 14$$

$$18x - 40 - 14 = 0$$

$$18x - 54 = 0$$

$$\frac{\cancel{18}x}{\cancel{18}} = \frac{54}{18} \rightarrow x = \frac{54}{18} = 3$$

$(S-V)$ $\cancel{(S-V)}$

Dado que $B = \frac{F}{\cancel{S-V}}$, $\boxed{\text{resolver para } S.}$

$(S-V)B = F$

$SB - VB = F$

$$\frac{SB}{B} = \frac{F + VB}{B}$$

$$S = \frac{F+VB}{B} \checkmark \qquad S = \frac{F}{B} + V \checkmark$$

Ecuaciones cuadráticas

Una *ecuación cuadrática* en la variable x es una ecuación que se puede expresar de la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

$\in \mathbb{R}$

Ejemplo

Expresar las siguientes ecuaciones cuadráticas en la forma $ax^2+bx+c=0$.

a. $x^2+3x=2(7-x)$

b. $(x+2)(2-5x)=x(3x-1)$

$2x-5x^2+4-10x=3x^2-x$

$-5x^2+4-8x=3x^2-x$

$-5x^2-3x^2+4-8x+x=0$

$\boxed{-8x^2-7x+4=0}$

Propiedad del producto cero

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por factorización y usando la siguiente propiedad de los números reales.

Si el producto dos cantidades es igual a cero, entonces alguna de ellas (o ambas) debe ser cero:

$$\boxed{AB = 0} \text{ si y solo si } A = 0 \text{ o } B = 0$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^2 - 10x = -21$.

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x-3)(x-7) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 7 = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 7$$

Verificar

Falta!

Ecuación cuadrática simple

Las soluciones de la ecuación cuadrática $\boxed{x^2 = c,}$ donde $c \geq 0$, son:

$$x = \sqrt{c} \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{c}.$$

$X^2 = 25 \quad \rightarrow \quad X = \sqrt{25}$ y $X = -\sqrt{25}$

$X = 5$ y $X = -5$

Ejemplo

$\boxed{\text{Resuelva}}$ la ecuación cuadrática simple $3x^2 - 21 = 0$.

$3x^2 = 21$

$x^2 = \dfrac{21}{3}$

$x^2 = 7 \quad \to \quad x = \sqrt{7}$ y $x = -\sqrt{7}$

$x = \pm\sqrt{7}$

Completar el cuadrado

Para convertir $\boxed{x^2 + bx}$ en un cuadrado perfecto, se debe sumar $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Esto resulta en un cuadrado perfecto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Completamos
cuadrado

Ejemplo

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática usando la técnica de completar el cuadrado:

$$\boxed{x^2 - 8x + 3} = 12$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$x^2 - 8x = 12 - 3$$

$$x^2 - 8x = 9$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{8}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$x - 4 = \pm 5$$

$$x - 4 = 5 \rightarrow \boxed{x = 5 + 4 = 9}$$

$$x - 4 = -5 \rightarrow \boxed{x = -5 + 4 = -1}$$

Verifica!

ax^2+bx

Cuando la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 1$, se divide todo entre a para obtener:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

la cual está en la forma del caso anterior.

Ejemplo

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática usando la técnica de completar el cuadrado:

$a=2$

$$2x^2 + 5x + 1 = 2$$

$$\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 1$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$x + \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$x = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x = -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Fórmula cuadrática

Las soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verifique las soluciones !

Ejemplo

Resuelva la ecuación $3x^2 - 2x = 1$ haciendo uso de la fórmula cuadrática.

$a=3 \quad b=-2 \quad c=-1 \qquad 3x^2-2x-1=0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Falta Verificar

El *discriminante* de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) es $\boxed{D = b^2 - 4ac.}$

1. Si $\boxed{D > 0,}$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

4. Verificar las soluciones

Ejemplo

Determine cuántas soluciones reales tiene $\boxed{5}x^2 - 2x + 3 = 0$.

a b c

$a = 5 \quad b = -2 \quad c = 3$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(5)(3) = 4 - 60 = -56$

Como $D < 0$ entonces no tiene solución real.

Ecuaciones con variable en el denominador

Pasos para resolver:

1. Hallar el mínimo común denominador (MCD). $\rightarrow \text{MCD}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right) = \text{mcm}(3, 5)$
2. Multiplicar a ambos lados de la ecuación por el MCD.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Verificar que las soluciones conseguidas en el paso anterior no hagan cero el denominador.

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-7}=\frac{x^2-20}{x^2-10x+21}$$

① $\text{mcD}\left(\frac{3}{x-3}, \frac{5}{x-7}, \frac{x^2-20}{x^2-10x+21}\right) = \text{mcm}(x-3, x-7, x^2-10x+21)$

$= \text{mcm}(x-3, x-7, (x-3)(x-7)) = (x-3)(x-7)$

② $(x-3)(x-7)\left(\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-7}\right) = (x-3)(x-7)\left(\frac{x^2-20}{x^2-10x+21}\right)$

$\cancel{(x-3)}(x-7)\left(\frac{3}{\cancel{x-3}}\right) + (x-3)\cancel{(x-7)}\left(\frac{5}{\cancel{x-7}}\right) = \cancel{(x-3)(x-7)}\left(\frac{x^2-20}{\cancel{(x-3)(x-7)}}\right)$

$$(x-7)3 + (x-3)5 = x^2-20$$

3 $\quad 3x - 21 + 5x - 15 = x^2 - 20$

$$8x - 36 = x^2 - 20$$

$$0 = x^2 - 20 - 8x + 36$$

$$0 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)(x-4) = 0$$

$x - 4 = 0$ ó $x - 4 = 0$ 4 Verificar

$x = 4$ ó $x = 4$

Ecuaciones con radicales

$(\sqrt{x}) = c$

Pasos para resolver:

- Reescribir con el radical solo a un lado de la ecuación.
- Elevar ambos lados de la ecuación al índice del radical.
- Resolver la ecuación resultante.
- Verificar las soluciones conseguidas en el paso anterior. Pueden surgir soluciones extrañas (que no son solución de la ecuación original).

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$\sqrt{3x-2}+2=x$$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

1. $\sqrt{3x-2} = x-2$

2. $\left(\sqrt{3x-2}\right)^{\cancel{2}} = (x-2)^2$

$3x-2 = (x-2)^2$

$3x-2 = x^2-4x+4$

$0 = x^2-4x-3x+4+2$

$0 = x^2-7x+6$

3. $x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

$x-1=0$ ó $x-6=0$

$\boxed{x=1}$ ó $\boxed{x=6}$

No es solución

Sí es solución

Ecuaciones con valor absoluto

Pasos para resolver:

- Aislar la expresión que tenga el valor absoluto.
- Verificar si la ecuación tiene sentido. Por ejemplo $\boxed{|x| = -3,}$ sabemos que esto no es posible y, por ende, no tiene solución.
- Usar la definición de valor absoluto para reescribir la ecuación con dos ecuaciones sin valor absoluto.
  (Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$).
- Resolver ambas ecuaciones independientemente.
- Verificar las respuestas.

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$2\left|4-\frac{5}{2}x\right|+6=18$$

1

$$2\left|4-\frac{5}{2}x\right|=18-6$$

$$2\left|4-\frac{5}{2}x\right|=12$$

$$\left|4-\frac{5}{2}x\right|=\frac{12}{2}$$

$$\left|4-\frac{5}{2}x\right|=6$$

3

$4-\frac{5}{2}x=6$ ó $4-\frac{5}{2}x=-6$

$$-\frac{5}{2}x = 6-4$$

$$x = -\frac{2}{5}(6-4)$$

$$x = -\frac{2}{5}\cdot 2$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{5}}$$

$$-\frac{5}{2}x = -6-4$$

$$x = -\frac{2}{5}(-6-4)$$

$$x = -\frac{2}{5}(-10)$$

$$x = \frac{2\,\cancel{(10)}}{\cancel{5}}$$

$$\boxed{x = 2\cdot 2 = 4}$$

Verificar Falta