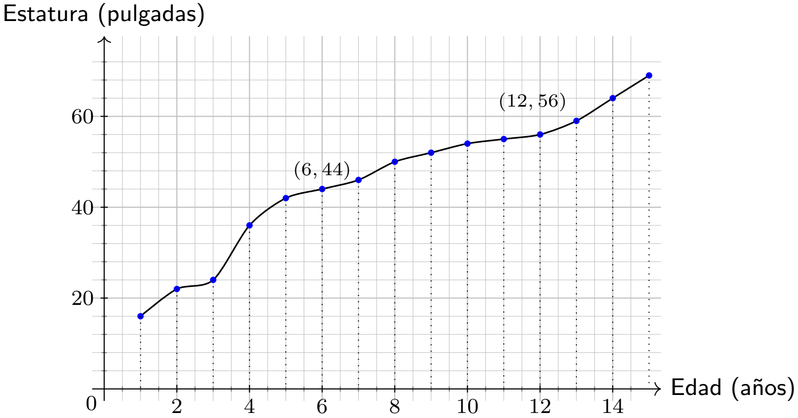
Sección 1.5
Razón de cambio promedio

Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez
Facultad de Artes y Ciencias
Departamento de Ciencias Matemáticas

Contenido

Razón de cambio promedio

La figura muestra la gráfica de la estatura de una persona (desde la niñez hasta la adolescencia), en pulgadas, como función de su edad, en años.

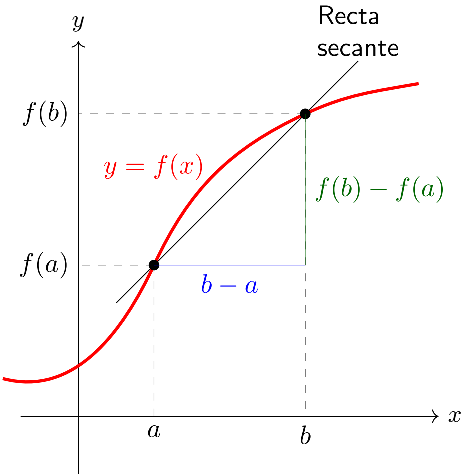


La razón de crecimiento promedio de este joven entre la edad de 6 a 12 es la pendiente de la recta secante que contiene los puntos $(6, 44)$ y $(12, 56)$:

$$\frac{\text{cambio en salida}}{\text{cambio en entrada}} = \frac{56 - 44}{12 - 6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ pulgadas/año.}$$

La razón de cambio promedio del hombre o razón de crecimiento promedio entre la edad de 6 y 12 años es de 2 pulgadas por año.

La razón de cambio promedio es la pendiente de la recta secante entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f. Esta es la línea que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Razón de cambio promedio entre a y b:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Resumen

Razón de cambio promedio

La *razón de cambio promedio* de una función $\boxed{y = f(x)}$ entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$\frac{\text{cambio en salidas}}{\text{cambio en entradas}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejemplos

1. Halle la razón de cambio promedio de $f(x) = x^3$ desde:

   (a) $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$

   razón de cambio promedio $= \dfrac{\text{Cambio en salida}}{\text{Cambio en entrada}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

   $= \dfrac{1^3 - 0^3}{1 - 0} = \dfrac{1}{1} = 1$

   (b) $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$

   7 ✓

   $\boxed{f(x) = x^3}$

   $f(0) = 0^3 = 0$

   $f(-2) = (-2)^3 = -8$

   (c) $x_1 = -2$ a $x_2 = 0$

   $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{0 - (-8)}{0 + 2} = \dfrac{8}{2} = 4$ ✓

2. Halle la razón de cambio promedio de $g(x) = -x^2 + 4$ con dominio restringido a $[0, \infty)$, para los siguientes intervalos:

$\boxed{\text{c Vand}}$ $\boxed{\text{Bonus 3}}$

(a) $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$

-1

$f(2) = -2^2 + 4 = -4 + 4 = 0$

$f(1) = -1^2 + 4 = -1 + 4 = 3$

(b) $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$

-3

$= \frac{0 - 3}{1} = \frac{-3}{1}$

(c) $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$

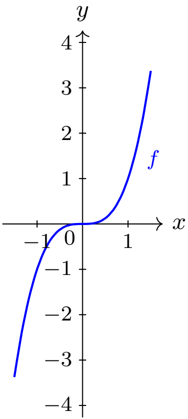
$= -3$

-3

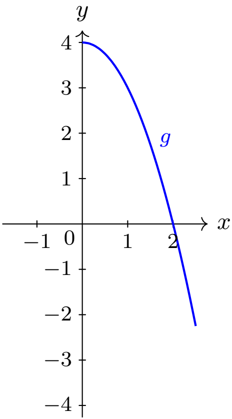
Observación

- Si la función es creciente en un intervalo, entonces la razón de cambio promedio entre cualesquiera dos puntos del intervalo es positiva.
- Si la función es decreciente en un intervalo, entonces la razón de cambio promedio entre cualesquiera dos puntos del intervalo es negativa.

Razón de cambio positiva



Razón de cambio negativa



3. A continuación se presenta una tabla con valores de la función f.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	4	6	9	15

Encuentre la razón de cambio promedio de f en los siguientes intervalos:

Eval ← Bonus 3

(a) De $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{9-4}{4-2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

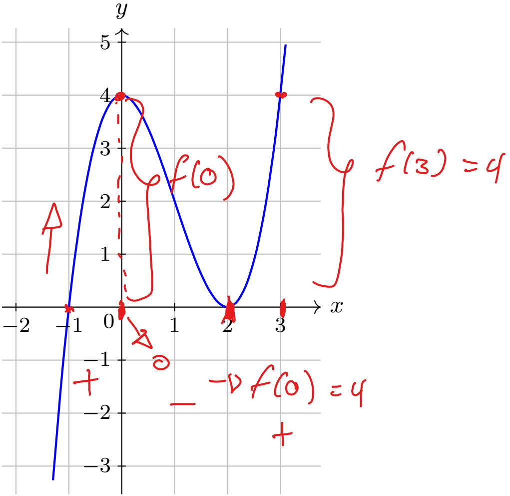
(b) De $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$

3 ✓

$f(x_1) = f(2) = 4$

$f(x_2) = f(4) = 9$

4. Halle la razón de cambio promedio de la función dada por la siguiente gráfica en los intervalos indicados:



$f(x_1) = f(-1) = 0$

$f(x_2) = f(0) = 4$

(a) $x_1 = -1$ a $x_2 = 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0-(-1)} = \frac{4}{1} = 4$$

(b) $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$

$f(x_2) = f(2) = 0$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -\frac{4}{2} = -2$$

(c) $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{4 - 0}{3 - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

5. La siguiente tabla muestra la población existente comprendida entre 1997 y 2006, de una pequeña comunidad.

x $\quad$ $f(x) = y$

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1,336
2000	1,578
2001	1,591
2002	1,483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

Aumento "+"

Decre. "−"

De acuerdo a la información de la tabla anterior, responda las siguientes preguntas.

(a) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población entre 1998 y 2001? Indique las unidades.

$(1998, 856)$

$(2001, 1591) = (x, f(x)) \to \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{1591-856}{2001-1998} = \dfrac{735}{3} = 245$

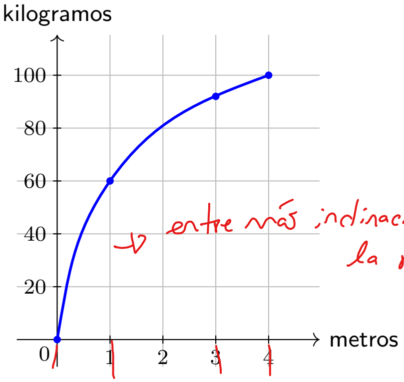
$245 \dfrac{\#\text{ de habi.}}{\text{Año}}$

(b) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población entre 2002 y 2004? Indique las unidades.

(c) ¿En cuál periodo de tiempo la población es creciente?

(d) ¿En cuál periodo de tiempo la población es decreciente?

6. La gráfica de una función f se da a continuación. Indique si la razón de cambio promedio de f es mayor en el intervalo $[0, 1]$ (o sea, entre $x = 0$ y $x = 1$) o en el intervalo $[3, 4]$. Diga cuáles son las unidades de la razón de cambio promedio.



entre más inclinacion mayor es la razón de cambio promedio.

En general,

Unidades de una razón de cambio promedio

Las unidades de una razón de cambio promedio de una función son:

$$\frac{\text{Unidades de salida}}{\text{Unidades de entrada}}$$

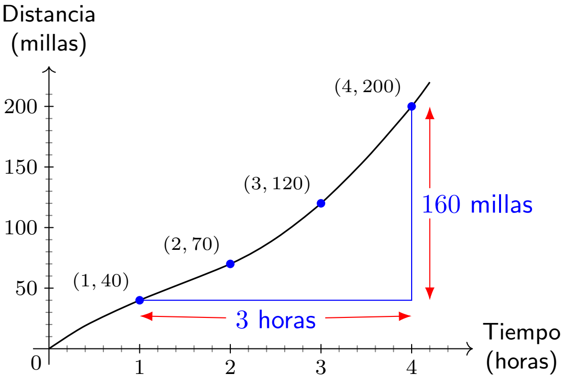
→ eje Y
→ eje X

Velocidad promedio

Se oye hablar a diario del concepto de *velocidad*. Si se viaja una distancia de 100 millas en dos horas, entonces la razón de cambio promedio de la distancia es $\dfrac{100 \text{ mi}}{2 \text{ h}} = 50 \text{ mi/h}$. Ahora suponga que se toma un viaje en automóvil y la distancia que se viaja se registra cada pocos minutos. La distancia s recorrida es una función del tiempo t:

$$f(t) = s(t) = \text{distancia total viajada en el tiempo } t.$$

La gráfica de esta función s se presenta en la próxima figura.



La gráfica muestra que se ha viajado un total de 40 millas después de 1 hora, se ha viajado 70 millas al cabo de 2 horas, 120 millas después de 3 horas, 200 luego de 4 horas, y así sucesivamente.

La razón de cambio promedio (velocidad promedio) entre la $1:00$ p.m. y las $4:00$ p.m. es:

$$\frac{200-40}{4-1} = \frac{160 \text{ mi}}{3 \text{ h}} \approx 53.3 \text{ mi/h}.$$

En general, si la función representa distancia como función del tiempo, entonces la razón de cambio promedio de la función distancia en un intervalo de tiempo es la velocidad promedio.

Velocidad promedio

La *velocidad promedio* de la función posición $s(t)$ en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es:

$$\frac{\text{cambio en } s}{\text{cambio en } t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Ejemplos

1. La distancia en pies por la que viaja una bola que rueda por una rampa está dada por la función $s(t) = 5t^2$, donde t es el tiempo en segundos después de que la bola se deja caer. Encuentre la velocidad promedio de la bola desde:

$S(3) = 5(3)^2 = 45$
$S(2) = 5(2)^2 = 20$

   (a) $t_1 = 2$ segundos a $t_2 = 3$ segundos

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(3) - S(2)}{3-2} = \frac{45-20}{3-2} = 25 \frac{ft}{seg}$$

   (b) $t_1 = 2$ segundos a $t_2 = 2.5$ segundos

$22.5 \frac{ft}{seg}$

Verificar.

Razón de cambio promedio de una función lineal

2. Sea $f(x) = 5x - 3$. Encuentre la razón de cambio promedio en los siguientes intervalos:

$f(1) = 5(1) - 3 = 5 - 3 = 2$

$f(0) = 5(0) - 3 = -3$

   (a) $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-3)}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

   (b) $x_1 = 2$ a $x_2 = 5$

$$\frac{f(5) - f(2)}{3 - 2} = \frac{22 - 7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$f(a+h) = 5(a+h) - 3$

$f(a) = 5a - 3$

   (c) $x_1 = a$ a $x_2 = a + h$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{5(a+h) - 3 - (5a - 3)}{\cancel{a} + h - \cancel{a}} = \frac{\cancel{5a} + 5h - \cancel{3} - \cancel{5a} + \cancel{3}}{h}$$

$$= \frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}} = 5$$

En el ejemplo anterior se mostró que si una función es lineal, entonces la razón de cambio promedio en cualquier intervalo es una constante. En la otra dirección esto es fácil de mostrar. Una función que tenga como razón de cambio promedio una misma constante para cualquier intervalo, tiene que ser una función lineal.

Función lineal y razón de cambio promedio

Una funcion es lineal si, y sólo si, su razón de cambio promedio es constante.