

# Einheitliche Beschreibung der Schaftform – Methoden und Programme – *BDATPro*

## A Uniform Description of Stem Profiles – Methods and Programs – *BDATPro*

Von E. KUBLIN

### Zusammenfassung

Für die Erfassung des Volumens und der Sortenstruktur am stehenden Holz werden Schaftformmodelle gebraucht. Im Zuge der Bundeswaldinventur wurde für alle Baumarten ein einheitliches System von Schaftformgleichungen abgeleitet, mit dem der Durchmesser an einer beliebigen Stelle im Schaft anhand des BHD, eines oberen Durchmessers und der Stammhöhe berechnet werden kann. Die Grundgleichungen für die Durchmesserschätzung sind Tensor-Produkt-Splines, die als lineare Regressionsmodelle mit variierenden Koeffizienten aufgefasst werden können. Mit diesen Modellen wird die bewährte Tradition einer segmentierten Schaftformbeschreibung in einem einheitlichen und methodisch gut fundierten Rahmen fortgesetzt. Die Grundzüge des mathematischen Modells werden skizziert und Beziehungen zu früheren Schaftformuntersuchungen aufgezeigt.

Der obere Durchmesser, aufgefasst als über das  $h/d$  Verhältnis hinausgehender Formparameter, bietet die Möglichkeit, die Grundmodelle über Normierungsgleichungen und Formigkeitsstufen an regionale Verhältnisse anzupassen. Mit einem aus den Bundeswaldinventurdaten kalibrierten Tarif für die Formquotienten  $q_{0,3}$  wird aus den Grundgleichungen ein repräsentatives Schaftformmodell für die Durchmesserschätzung aus BHD und Höhe abgeleitet. Die theoretischen Aspekte der Modellanpassungen werden informell diskutiert und anhand von praktischen Beispielen erläutert.

**Schlüsselwörter:** Schaftformgleichungen, Tensor-Produkt-Spline, Einheitsschaftform, Formigkeitsstufen.

### Summary

Taper equations are needed to estimate stand volume and assortment structure. Along with the national forest inventory a system of taper equations was developed for the main tree species, which allows estimation of diameters at an arbitrary height based upon DBH, an upper diameter and the total height of the stem. The basic taper equation is a special version of a tensor-product-spline. Using this model type the approved tradition of a segmented description of the stem profile is continued. From a theoretical point of view it is a linear regression model with varying coefficients, embedding it methodically in an unified and well-founded framework. Characteristics of the mathematical model are outlined and compared with earlier investigations.

Application of the upper diameter as an additional form-parameter and supplement to the height/diameter ratio makes it possible to adapt the taper equations to regional form characteristics by normalizing equations and form factors. Based upon data provided by the national forest inventory a tariff for the form ratio  $q_{0,3}$  was calibrated which allows derivation of a uniform and representative taper equation for diameter estimation depending on DBH and height as predictor variables, only. Theoretical aspects of several model adaptations are discussed and illustrated by examples.

**Keywords:** Taper equations, tensor-product-spline, standard form, form classes.

## 1 Einleitung

Für eine nachhaltige Bewirtschaftung der Wälder sind Informationen über den Holzvorrat und die Sortenstruktur zwingend notwendig. Hierzu wird am stehenden Holz das Derbholzvolumen von Probestäumen über einfach zu messende Größen wie Baumhöhe, Durchmesser in Brusthöhe und eventuell einen weiteren Durchmesser außerhalb des Wurzelanlaufs mit Hilfe von Regressionsgleichungen oder Volumentabellen geschätzt und auf

die interessierende Befundseinheit hochgerechnet. Bei Bestandesinventuren und Inventuren auf regionaler Ebene kann der Vorrat anhand einfacher Tariffunktionen mit dem BHD und/oder der Baumhöhe als Eingangsgrößen kostengünstig ermittelt werden. Wegen des breit gefächerten Formenspektrums kommen bei großräumig angelegten Inventuren und bei Nationalinventuren dreiparametrische Volumenfunktionen, bei denen das Derbholzvolumen als Funktion des BHD eines oberen Durchmessers und der Baumhöhe geschätzt wird, zum Einsatz. Eine rechnerische Aufgliederung des Schaftholzes stehender Bäume in handelsübliche Sortimente ist jedoch nur mit Schaftformgleichungen möglich, bei denen der Durchmesser ( $d_x$ ) an einer beliebigen Stelle im Schaft (X) als Funktion  $d_x = S(X \mid d_1, d_2, h)$  von der Baumstärke  $d_1$  ( $d_{1,3m}, d_{0,05 \cdot h}$ ), eines Durchmessers  $d_2$  ausserhalb des Wurzelanlaufs ( $d_{7m}, d_{0,3 \cdot h}$ ) und der Wipfelhöhe ( $h$ ) berechnet wird.

Die mathematische Beschreibung der Schaftform zum Zwecke der Kubierung von Bäumen oder Stammabschnitten hat eine lange Tradition. Ausgangspunkt für alle Schaftformmodelle ist die Beobachtung, dass sich die Mantellinie der wichtigsten Nadel- und Laubbaumarten im wesentlichen durch drei Segmente mit unterschiedlicher Krümmung charakterisieren lässt. Ein konvexes Teilstück am Stammfuß mit starker Krümmung, die zur Mitte hin abnimmt, in eine konkave Form übergeht und schließlich in einer leicht gekrümmten und schwach konkaven Mantellinie im Gipfelstück ausläuft. In den ersten wissenschaftlichen Arbeiten um 1800 wurde die Schaftform in den einzelnen Stammsegmenten näherungsweise durch Rotationskörper, Neiloid, Paraboloid und Kegelstumpf beschrieben und aus den idealisierten geometrischen Formen Gleichungen für das Stamm- und Abschnittsvolumen abgeleitet. Die bekanntesten Formeln sind die Mittenflächenformel, die Endflächenformel und die Formel von NEWTON (KRÜNITZ 1781, SMALIAN 1837). Später wurde versucht, auf der Grundlage physikalischer und anatomischer Gesetzmäßigkeiten Funktionen zur Beschreibung der Stammform auf deduktiven Weg herzuleiten (METZGER 1893, METZGER 1894). Analytische Lösungen konnten allerdings nur unter sehr vereinfachenden Annahmen über Aufbau und Funktion des Schaftes angegeben werden. Einfacher und flexibler und damit letztlich erfolgreicher erwiesen sich Modellansätze, bei denen die Gesetzmäßigkeiten im Stammaufbau auf der Basis von Sektionsdurchmessern analysiert und tabellarisch als Ausbauchungsreihe (HOHENADL 1936) oder in einem Regressionsmodell beschrieben werden.

Die erste Schaftformgleichung stammt von HÖJER (1903; in BEHRE 1927), der eine logarithmische Funktion für die Durchmesser-Höhenbeziehung verwendet. Später wurden einfache Hyperbelfunktionen (BEHRE 1927), Polynome (OSUMI 1959) und mit steigender Rechnerleistung auch zunehmend komplexere Funktionen für die Beschreibung der Mantellinie eingesetzt und schließlich die Idee einer segmentierten Beschreibung der Stammform wieder aufgegriffen. Durch die additive Überlagerung von Funktionen, die am Stammfuß, in der Mitte oder an der Spitze wirksam sind, können die unterschiedlichen Krümmungsverhältnisse am Schaft besser nachgebildet werden, als das mit einer für den ganzen Schaftbereich zuständigen Funktion möglich ist (HRADETZKY 1976, ROIKO-JOKELA 1976, RIEMER et al. 1996). Seit ungefähr 25 Jahren werden Splinefunktionen, das sind abschnittsweise aus Polynomen oder anderen Funktionstypen stetig und differenzierbar zusammengesetzte Funktionen, für die modellhafte Beschreibung der Schaftform verwendet. Splinefunktionen wurden anfangs hauptsächlich zur Interpolation oder Glättung von baumindividuellen Messreihen eingesetzt (SLOBODA 1977, LAHTINEN und LAASASNAHO 1979, SABOROWSKI et al. 1981). Die Interpolation garantiert allerdings nur bei glatten Durchmesserreihen eine akzeptable Approximation für die Mantellinie. Bei starken Krümmungen am Stammfuß, bei Ausbuchtungen in der Stammform oder Messfehlern muss mit Oszillationen in der Interpolationsfunktion gerechnet werden. Messfehler und Unebenheiten am Schaft können mit Verfahren der Splineglättung ausgeglichen werden. Die Stärke der Glättung kann manuell vorgegeben oder mittels Kreuzvalidierungsmethoden automatisch bestimmt werden. Bei der Festlegung der Glättungspara-

meter ist darauf zu achten, dass eine Überglättung der idealisierten Schaftform vermieden wird. Für die Interpolation und Glättung gibt es eine Vielzahl von Lösungsalgorithmen und Programme (SPÄTH 1973, DE BOOR 1978). Obwohl alle Programme einfach zu handhaben und numerisch effizient sind, können sie einen Nachteil nicht wettmachen. Die interpolierende bzw. glättende Splinefunktion wird aus (n-1) Segmenten zusammengesetzt, wobei die (n-2) inneren Messstellen als Verknüpfungspunkte (Knoten) fungieren. Die Anzahl der freien Parameter (Freiheitsgrade), die bestimmt werden müssen, ist n, d.h. durch die Interpolation und Glättung findet lediglich eine Umparametrisierung der Ausgangsdaten, aber keine Datenreduktion statt (DIERCKX 1993). Das hat zur Folge, dass bei umfangreichen Messreihen die Berechnung einer glättenden Splinefunktion numerisch sehr aufwändig werden kann. Für eine komprimierte Beschreibung der Messdaten eines einzelnen Probebaums oder einer Serie von Messreihen mit nur wenigen Freiheitsgraden eignet sich die Splineregression, bei der die Schaftfunktion aus zwei bis drei Polynomstücken mit glatten Übergängen an den Anknüpfungsstellen (1 bis 2 inneren Knoten) zusammengesetzt wird. Dabei orientiert sich die Positionierung der Knoten nicht an den einzelnen Messwerten sondern an der Krümmung der Mantellinie. Mit einem Knoten im Bereich des Stammfußes und einem in der Spitze lassen sich gute Anpassungsergebnisse beim baumweisen Ausgleich der Schaftform oder bei der Berechnung einer mittleren Ausbauchungsreihe erzielen. Bei drei kubischen Polynomstücken, die stetig differenzierbar zusammengesetzt werden, hat die Regressionfunktion 6 freie Parameter, die je nach Splinedarstellung gut interpretierbar sind und numerisch stabil mit den Standardverfahren der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden können (KUBLIN 1987). Regressionssplines sind die Basis für die BWI-Schaftformgleichungen, die im folgenden dargestellt werden.

## 2 Schaftformgleichungen – BWI

### 2.1 Grundlagen – echte Ausbauchungsreihen und Formzahlen

Bei großräumig angelegten Inventuren müssen für eine Vielzahl von Baumarten oder Baumartengruppen die Volumen und Sortengehalte von Bäumen unterschiedlichster Dimension berechnet werden. Die Bandbreite der Stammdimensionen reicht vom Stangenholz mit einem BHD beispielsweise von 10 cm und einer Höhe um die 10 m bis hin zum Starkholz mit Höhen über 40 m und Stärken von 60 cm und mehr. Einen Eindruck von der zu erwartenden Formenvielfalt bei Großinventuren vermittelt Abbildung 1a, in der die Sektionsdurchmesser von Fichten aus Versuchsflächen in Baden-Württemberg über der Höhe dargestellt sind. Neben der ausgeprägten Variabilität von Durchmessern und Höhen fällt auf, dass sowohl in den starken und mittleren als auch in den schwachen Stammdimensionen unterschiedlich schnell abfallende Mantellinien beobachtet werden können. Die Trennung von Dimension und Form, die nach PRODAN (1965) „... in den verschiedenen Durchmessern und in ihrer Abnahme mit zunehmender Höhe...“ zum Ausdruck kommt, verbunden mit dem Übergang zu echten Ausbauchungsreihen vereinfacht die Schaftformbeschreibung. Die Skalierung der Fichten Messreihen in Abbildung 1a bezüglich des  $d_{0,05 \cdot h}$  und der Stammhöhe ergibt die in der Abbildung 1b dargestellten Ausbauchungsreihen für die echten Formquotienten. Eine Gruppierung der Ausbauchungsreihen ist offensichtlich. Eine Gruppe mit überdurchschnittlich hohen Formquotienten (vollformig) steht einer etwa gleichstarken Gruppen mit unterdurchschnittlichen Werten (abformig) gegenüber, dazwischen liegen die Ausbauchungsreihen von zwei Bäumen stellvertretend für eine Gruppe von Bäumen mit einer mittleren Schaftformaussprägung. Schon früh wurde versucht, die in den Ausbauchungsreihen enthaltene Information auf eine summarische Größe zu reduzieren (PRESSLER und KUNZE 1873). Die bekannteste ist die echte Schaftformzahl  $\lambda_{0,1}$ <sup>1</sup> =  $[1 + (d_{0,3 \cdot h}/d_{0,1 \cdot h})^2 + (d_{0,5 \cdot h}/d_{0,1 \cdot h})^2 + (d_{0,7 \cdot h}/d_{0,1 \cdot h})^2 +$

<sup>1</sup> In der älteren Literatur wird die echte Schaftformzahl meist mit  $\lambda_{0,9}$  bezeichnet

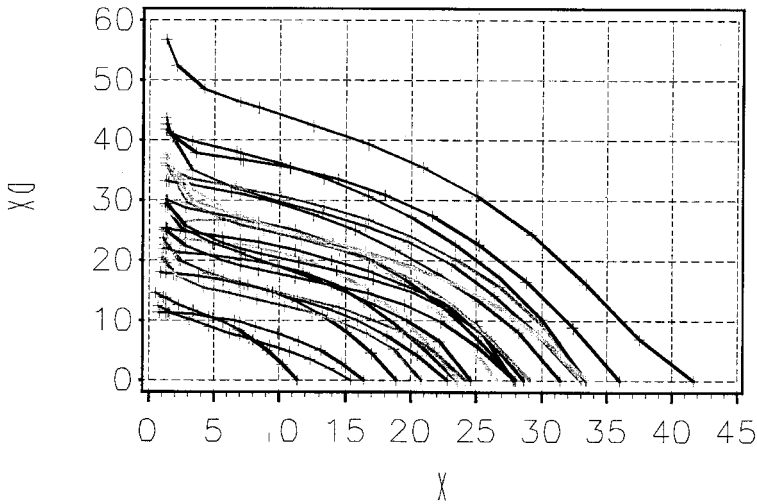


Abb. 1a. Durchmesser-Höhenspektrum für Fichten – absolute Messwerte.

Fig. 1a. Diameter-height-distribution of spruce – absolut values.

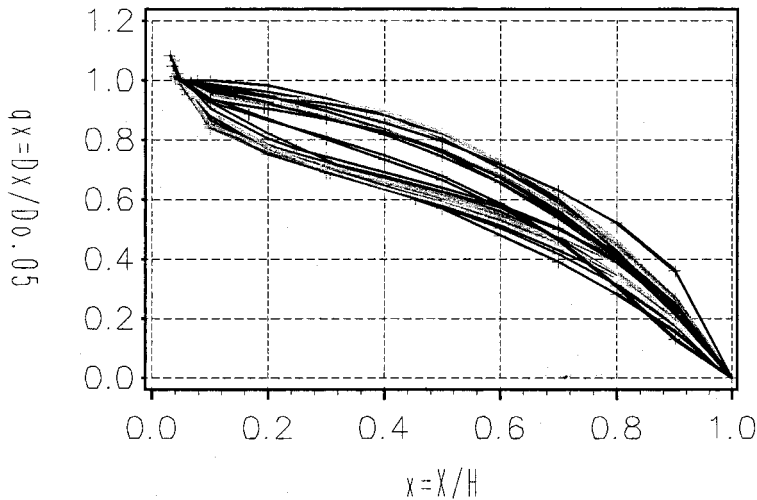


Abb. 1b. Durchmesser-Höhenspektrum für Fichten – echte Ausbauchungsreihen.

Fig. 1b. Diameter-height-distribution of spruce – Form ratios.

$(d_{0.9 \cdot h} / d_{0.1 \cdot h})^2 \cdot 0.2$  von HOHENADL (1936). In den Arbeiten von KRENN und PRODAN (1944) wird der Zusammenhang zwischen ausgewählten Formquotienten und  $\lambda_{0.1}$  untersucht und gezeigt, dass sich die Formquotienten durch lineare bzw. quadratische Regressionspolynome aus der Schaftformzahl berechnen lassen. Diese Zusammenhänge finden sich auch in den Messreihen wieder, die zur Kalibrierung der BWI-Schaftkurven verwendet wurden. In der Abbildung 2 sind die echten Formquotienten  $q_x = d_{x \cdot h} / d_{0.05 \cdot h}$  von 4490 Fichten über der Schaftformzahl  $\lambda_{0.1}$  aufgetragen und mit einer linearen Regression  $q_x = a_x + b_x \lambda_{0.1}$  für die relativen Höhen  $x = 0.1$  (0.2) 0.9 separat ausgeglichen. Trotz der großen Streuung, die in dem sehr heterogenen Ausgangsmaterial begründet ist, ist der lineare Zusammenhang deutlich zu erkennen.

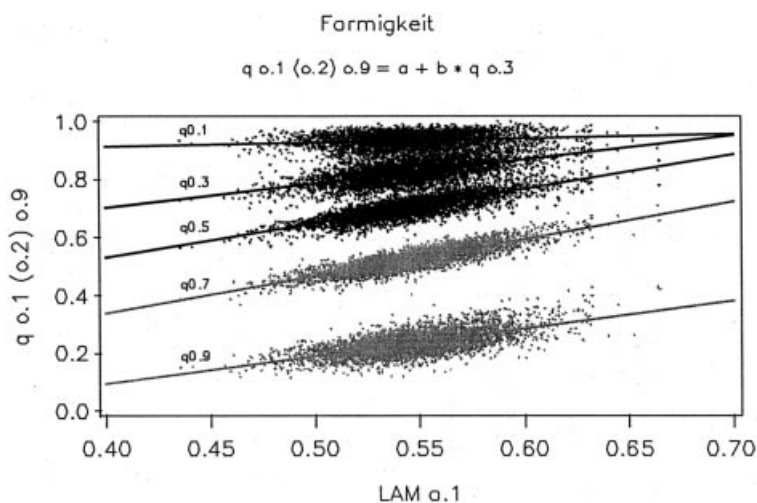


Abb. 2. Lineare Regression echte Formquotienten ( $q_x = d_{x*h}/d_{0.05*h}$ ) und  $\lambda_{0.1} - q_x = a_x + b_x \lambda_{0.1}$  für  $x = 0.1 (0.2) 0.9$ .

Fig. 2. Linear regression of the form ratios ( $q_x = d_{x*h}/d_{0.05*h}$ ) und  $\lambda_{0.1} - q_x = a_x + b_x \lambda_{0.1}$  für  $x = 0.1 (0.2) 0.9$ .

Die in der Abbildung 2 dargestellten Abhängigkeitsstrukturen sind theoretisch interessant, für die Prognose der Schaftform bei Inventuren aber ungeeignet, da die erklärende Variable  $\lambda_{0.1}$  eine sektionsweise Vermessung des Probebaums voraussetzen würde, was aus Kostengründen unrealistisch ist. Deshalb wird bereits in den Arbeiten von ALTHERR (1963) für die Tanne und PRODAN (1965) für die Fichte vorgeschlagen, die Schaftformzahl  $\lambda_{0.1}$  durch  $q_{0.5}$  zu ersetzen und damit die anderen Formquotienten zu prognostizieren. Mit dem  $q_{0.3}$  als erklärende Variable ergeben sich für die Formquotienten  $q_{0.1}$ ,  $q_{0.5}$ ,  $q_{0.7}$  und  $q_{0.9}$  die in der Abbildung 3 dargestellten linearen Regressionsbeziehungen

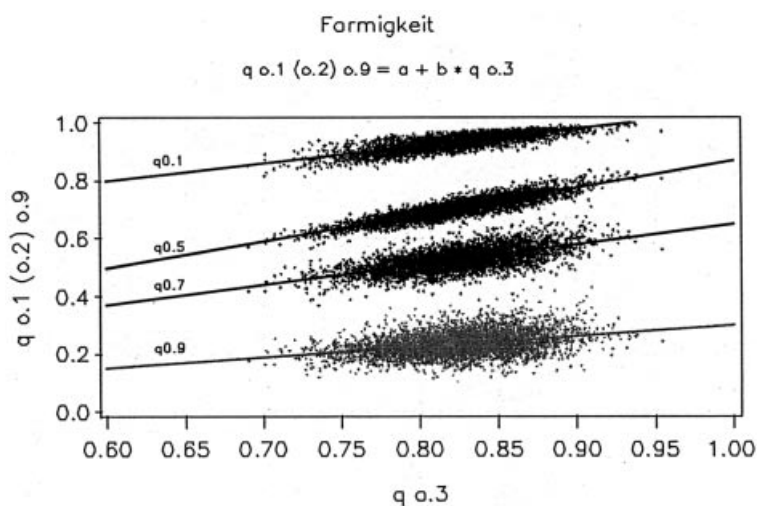


Abb. 3. Lineare Regression  $q_x = a_x + b_x q_{0.3}$  für  $x = 0.1 (0.2) 0.9$ .

Fig. 3. Linear regression  $q_x = a_x + b_x q_{0.3}$  für  $x = 0.1 (0.2) 0.9$ .

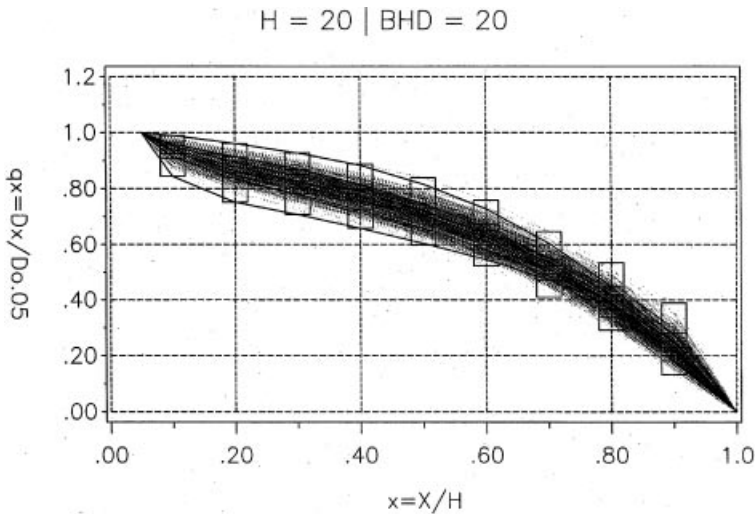


Abb. 4. Rangerhaltung und Formquotientenverteilung.

Fig. 4. Form rankings and distribution.

$$(1) q_x = a_x + b_x q_{0.3} + \varepsilon, x = 0.1 \text{ (0.2) } 0.9$$

mit  $y$ -Schnittpunkten  $a_x$  und Steigungskoeffizienten  $b_x$ , die von der Lage  $x$  im Schaft abhängen. Durchweg positive Steigungen bedeuten, dass die gesamte Ausbauchungsreihe von einem Baum mit einem hohen  $q_{0.3}$ -Wert im Mittel über der Ausbauchungsreihe von Bäumen mit geringeren  $q_{0.3}$ -Werten liegen. Diese Eigenschaft wird Rangerhaltung genannt. Zur Schaftspitze hin abfallende Steigungswerte, verbunden mit einem Anstieg der Residualstreuung, sind ein Indiz dafür, dass das Prinzip der Rangerhaltung im oberen Schaftbereich verloren geht. Besonders deutlich kommt die Rangerhaltung in Abbildung 4 zum Ausdruck. Dort sind die Ausbauchungsreihen von Fichten mit einem BHD von  $20 \pm 2.5$  cm und einer Höhe von  $20 \pm 2.5$  m zusammen mit den Mittelwertkurven von Bäumen aus dem oberen ( $>80\%$ ) mittleren ( $60\%-80\%$ ,  $40\%-60\%$ ,  $20\%-40\%$ ) und dem unteren Bereich ( $0\%-20\%$ ) der  $q_{0.3}$ -Verteilung aufgetragen. Die Mittelwertkurven sind durch eine verstärkte Linienführung hervorgehoben. Dick eingezeichnet sind auch die Ausbauchungsreihe der Bäume mit dem niedrigsten und dem höchsten  $q_{0.3}$ -Wert. An den Stellen  $x = 0.1$  (0.1) 0.9 ist die Spanne  $\text{MAX}(q_x) - \text{MIN}(q_x)$  als Box eingezeichnet. In den Boxen sind zudem die  $\alpha$ -Perzentile der Formquotientenverteilung für  $\alpha = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$  markiert. Im unteren und mittleren Schaftbereich ist eine ausgeprägte Staffelung der Mittelwertkurven analog zu den Perzentilwerten zu beobachten. Im Gipfelbereich geht die Differenzierung der Mittelwertkurven verloren. Das Prinzip der Rangerhaltung ist somit im Bereich, wo die Masse und der Wert des Baumes akkumuliert sind, wirksam. In der Spitze hingegen ist die Rangerhaltungseigenschaft nur noch mit Einschränkungen gültig. Die Ausbauchungsreihe des Baumes mit dem maximalen  $q_{0.3}$  Wert verläuft beispielsweise im Gipfelbereich unterhalb der Mantellinie von Bäumen mit einem niedrigeren  $q_{0.3}$ -Wert. Aus der Abbildung 4 ist außerdem zu erkennen, dass bei großräumigen Inventuren auch innerhalb einer festen Durchmesser-Höhenstufe mit einer beachtliche Formenvielfalt gerechnet werden muss.

## 2.2 Grundgleichungen und assoziierte Schaftformen – BHD, d7-Äquivalenz

Aus den separat angepassten Formgleichungen (1) lassen sich die echten Formquotienten mittels Interpolation für eine beliebige Lage  $x_0 \in [0,1]$  im Schaft berechnen (PRODAN 1965).



Die linearen Schaftformmodellen (SLOBODA 1984, SLOBODA et al. 1998) basieren ebenfalls auf dem methodische Ansatz (1). Dort werden an Stelle der Interpolation die Regressionskoeffizienten  $a_x$  und  $b_x$  in einem zweiten Schritt durch hochgradige Polynomfunktionen ausgeglichen und zu einer globalen Schaftformfunktion zusammengesetzt. Der Modellansatz (1) und die in den Abbildungen 3 und 4 dargestellten Sachverhalte sind auch das Fundament für die in der BWI verwendeten Schaftformgleichungen, bei denen für einen Baum mit den Dimensionsdaten ( $d_{0,05*h}$ ,  $d_{0,3*h}$ ,  $h$ ) der Erwartungswert  $E q_x$  für den echten Formquotienten an einer beliebigen Stelle  $x = X/h$ ,  $0 \leq X \leq h$  gemäß

$$\begin{aligned} (2) \quad E q_x &= E[d_X / d_{0,05*h} \mid X; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] \\ &= A(X, h) + B(X, h) * (d_{0,3*h} / d_{0,05*h}) \\ &:= a(x) + b(x) * q_{0,3} \end{aligned}$$

berechnet wird. Hierbei sind der y-Schnittpunkt  $a(x)$  und der Steigungskoeffizient  $b(x)$  Funktionen von  $x$ , deren Typ zu spezifizieren ist, um die Funktionsparameter anhand von Messreihen kalibrieren zu können. Die statistische Theorie zu dieser Problemstellung wird in HASTIE und TIBSHIRANI (1993) umfassend dargestellt. Werden für  $a(x)$  und  $b(x)$  Splinefunktionen mit festen Knotenpunkten gewählt, ist die Regressionsfunktion (2) ein einfacher „Tensor-Produkt-Spline“, dessen Koeffizienten in einem linearen Regressionsmodell numerisch stabil und effizient nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden können (DIERCKX 1993, KÜBLIN 1987). Mit diesem Modellansatz wird die bewährte Tradition einer segmentierten Beschreibung der baumindividuellen Schaftform fortgesetzt, da sich der Tensor-Produkt-Spline (2) für feste Durchmesser und Höhenwerte ( $d_{0,05*h}$ ,  $d_{0,3*h}$ ,  $h$ ) auf eine einfache Splinefunktion in der Variablen  $x$  reduziert. Für die BWI Schaftformgleichungen wurde die Modellgleichung (2) um Produktterme  $c(x) * d_{0,05*h}$  und  $d(x) * h$  erweitert, was theoretisch und numerisch problemlos möglich ist. Die Basis für die Schätzung der Schaftform bei den BWI Probestämmen ist somit das Regressionsmodell für den echten Formquotienten

$$\begin{aligned} (3a) \quad E q_x &:= E[d_X / d_{0,05*h} \mid X; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] \\ &:= a(x) + b(x) * q_{0,3} + c(x) * d_{0,05*h} + d(x) * h =: E[q_x \mid X; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] \end{aligned}$$

mit  $q_{0,3} = d_{0,3*h} / d_{0,05*h}$  und kubischen Splinefunktionen  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  und  $d(x)$  zu den Knotenpunkten 0,3, 0,5, 0,7 und 0,9. Der Erwartungswert des Durchmessers an der Stelle  $X$  wird durch

$$(3b) \quad E d_X = E [d_X \mid X; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] = E q_x * d_{0,05*h}$$

mit  $x = X/h$  berechnet. Für die Modellkalibrierung wurden die Splinekoeffizienten je Baumart nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Normierungsbedingungen der Form

$$(3c) \quad E [d_X \mid X = 0,05*h; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] = d_{0,05*h}$$

$$(3d) \quad E [d_X \mid X = 0,30*h; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] = d_{0,3*h}$$

$$(3e) \quad E [d_X \mid X = h; (d_{0,05*h}, q_{0,3}, h)] = 0$$

wurden als lineare Restriktion für die Splinekoeffizienten formuliert und in die Modellanpassung einbezogen. Die resultierenden Schaftkurven werden damit durch die Eingangsgrößen  $d_{0,05*h}$ ,  $d_{0,3*h}$  und in der Schaftspitze durch den Wert 0 gezwungen.

Während sich die Verwendung von Bezugsdurchmessern  $d_{0,05*h}$  und  $d_{0,3*h}$  an einer bezüglich der Baumhöhe fixierten relativen Lage für die Modellbildung als vorteilhaft erweist, ist die Erfassung dieser Größen, verglichen mit der Messung von Durchmessern an einer festen Stelle,  $d_{1,3m}$  und  $d_{7m}$  beispielsweise, erheblich aufwändiger und damit

teurer. Bei der BWI I wurde an den starken Probebäumen ( $20 \text{ cm} \leq d_{1.3m}$ ) ein oberer Durchmesser in 7 m Höhe gemessen. Um die Formgleichungen (3) für die Voluminierung und Sortierung der BWI-Probeebäume nutzen zu können, wurden die relativen Bezugsdurchmesser  $d_{0.05*h}$  und Formquotienten  $q_{0.3}$  aus den Messgrößen  $d_{1.3m}$ ,  $d_{7m}$  und der Baumhöhe  $h$  aus den Normierungsgleichungen:

$$(3c)^{\#} \quad E[d_X | X = 1.3 \text{ m}; (d_{0.05*h}^{\#}, q_{0.3}^{\#}, h)] = d_{1.3m}$$

$$(3d)^{\#} \quad E[d_X | X = 7.0 \text{ m}; (d_{0.05*h}^{\#}, q_{0.3}^{\#}, h)] = d_{7m}$$

$$d_{0.3*h}^{\#} = q_{0.3}^{\#} * d_{0.05*h}^{\#}$$

iterativ bestimmt und die Lösungen  $d_{0.05*h}^{\#}$ ,  $q_{0.3}^{\#}$  und  $d_{0.3*h}^{\#}$  in die Grundgleichungen (3a/b) eingesetzt

$$\begin{aligned} (3a)^{\#} \quad E^{\#} q_x &= E[d_X / d_{0.05*h}^{\#} | X; (d_{0.05*h}^{\#}, q_{0.3}^{\#}, h)] \\ &= a(x) + b(x) * q_{0.3}^{\#} + c(x) * d_{0.05*h}^{\#} + d(x) * h \\ &=: E^{\#}[q_x | X; (d_{1.3m}, d_{7m}, h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3b)^{\#} \quad E^{\#} d_X &= E[d_X | X; (d_{0.05*h}^{\#}, q_{0.3}^{\#}, h)] = E^{\#} q_x * d_{0.05*h}^{\#} \\ &=: E^{\#}[d_X | X; (d_{1.3m}, d_{7m}, h)] \end{aligned}$$

Das Normierungsverfahren (3c/d)<sup>#</sup> für die relativen Bezugsdurchmesser gewährleistet, dass die über das Regressionsmodell (3a/b)<sup>#</sup> vorhergesagten Erwartungswerte mit den gemessenen Durchmesserwerten  $d_{1.3m}$ ,  $d_{7m}$  übereinstimmen. Die berechneten Größen  $d_{0.05*h}^{\#}$ ,  $d_{0.3*h}^{\#}$  und  $q_{0.3}^{\#}$  werden als  $d_{1.3m}$ ,  $d_{7m}$  – äquivalente oder assoziierte Durchmesser bzw. Formquotienten bezeichnet. Im BWI Volumen- und Sortenprogramm BDAT (KUBLIN und SCHARNAGL 1988) werden die assoziierten Formparameter automatisch bestimmt.

### 3 Einheitsschaftform – Regionalisierung

#### 3.1 Massentafel – Äquivalenz

Mit dem oberen Durchmesser ist es möglich, bei großräumig angelegten Inventuren wie z. B. der BWI die Formenvielfalt innerhalb einer Durchmesser-Höhenstufe genauer zu beschreiben (Abbildung 4). In diesem Sinne können die Größen  $d_{0.3*h}$ ,  $d_{7m}$  vor allem aber der Formquotient  $q_{0.3}$  bzw.  $q_{0.3}^{\#}$  als über das  $h/d$ -Verhältnis hinausgehende Formfaktoren interpretiert werden. Bei fehlendem oberem Durchmesser  $d_{7m}$  ist die Bestimmungsgleichung (3d)<sup>#</sup> für den  $q_{0.3}^{\#}$  nicht mehr anwendbar. Für die Durchmesserprognosen nach (3a/b)<sup>#</sup> ist  $q_{0.3}^{\#}$  durch einen anderen Wert zu ersetzen, der die mittleren Formverhältnisse innerhalb einer  $h/d$ -Stufe beschreibt. In BDAT wird der  $d_{0.05*h}$  und der  $q_{0.3}$  intern so bestimmt, dass der  $d_{1.3m}$  interpoliert wird und das über die integrierte Schaftform berechnete Volumen mit dem einer vorgegebenen Massentafel übereinstimmt

$$(3c)^{MT} \quad E[d_X | X = 1.3; (d_{0.05*h}^{MT}, q_{0.3}^{MT}, h)] = d_{1.3m}$$

$$h(d = 7 \text{ cm})$$

$$(3d)^{MT} \quad \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \left[ E[d_{\tilde{x}} | \tilde{X}; (d_{0.05}^{MT}, q_{0.3}^{MT}, h)] \right]^2 d\tilde{X} = \text{Massentafelvolumen}(d_{1.3m}, h)$$

Die Lösung  $q_{0.3}^{MT}$  wird als **Massentafel äquivalenter**  $q_{0.3}$  bezeichnet. In Umkehrung des Rangerhaltungsprinzips ermöglicht dieses Verfahren die Konstruktion von lokal angepassten Schaftformgleichungen, wenn unterstellt wird, dass Volumenunterschiede zwischen zwei Massentafeln auf lokale Formigkeitsverhältnisse zurück zu führen sind. Unter-



schiedliche Formigkeitsverhältnisse lassen sich dann mit dem Rangerhaltungsprinzip hinreichend durch lokale Abweichungen in den echten Formquotienten  $q_{0,3}$  erklären. Der mit Hilfe der regionalen Massentafel ausgewählte Formquotient  $q_{0,3}^{MT}$  legt dann fest, ob für die Beschreibung der Mantellinie eines Baumes mit dem Durchmesser  $d_{1,3m}$  und der Höhe  $h$  eine abformige, vollformige oder eher eine mittlere Schaftkurve aus dem Spektrum der Schaftformen (vgl. Abbildung 4) ausgewählt wird.

Bei regionalen Inventuren, bei denen wegen der hohen Kosten auf die Messung eines oberen Durchmessers an den Probestämmen verzichtet wird, können der Vorrat und die Sortimente beispielsweise mit Massentafel äquivalenten Schaftformgleichungen

$$\begin{aligned} (3a)^{MT} \quad E^{MT} q_x &= E [d_x / d_{0,05}^{MT} \mid X; (d_{0,05}^{MT}, q_{0,3}^{MT}, h)] \\ &= a(x) + b(x) * q_{0,3}^{MT} + c(x) * d_{0,05}^{MT} + d(x) * h \\ &=: E^{MT} [q_x \mid X; (d_{1,3m}, h)] \end{aligned}$$

$$(3b)^{MT} \quad E^{MT} d_x = E^{MT} q_x * d_{0,05}^{MT}$$

bestimmt werden. In BDAT sind für ein breites Durchmesser-Höhen-Spektrum Tabellen mit  $q_{0,3}^{MT}$  Werten hinterlegt. Im Hinblick auf eine möglichst unverzerrte Schätzung der Vorrats- und Sortenstruktur sind bei kleinräumigen Inventuren, assoziierte Formparameter  $d_{0,05}^{MT}$ ,  $q_{0,3}^{MT}$ , die aus  $(3c/d)^{MT}$  mit regionalen Massentafeln berechnet wurden, globalen Formparametern vorzuziehen.

### 3.2 Regionale Formtarife

Bei Inventuren auf Bestandes- und Betriebsebene muss damit gerechnet werden, dass sich die lokalen Wuchsverhältnisse in einer vom Mittelwert mehr oder weniger abweichenden Schaftformausrprägung niederschlagen und zu verzerrten Vorrats- und Sortenschätzungen führen. Für die Konstruktion von lokal angepassten Schaftformgleichungen kann an einem Teil der Probestämme ein oberer Durchmesser ( $d_{7m}$ ) gemessen und daraus ein Tarif  $\hat{d}_{7m} = T(d_{1,3m}, h)$  abgeleitet werden. Für Probestämme, an denen kein oberer Durchmesser gemessen wurde, werden die assoziierten Formparameter  $d_{0,05}^T$  und  $q_{0,3}^T$  mit den Normierungsgleichungen  $(3c/d)^{\#}$  berechnet, wobei der  $d_{7m}$  durch den Tarifwert  $\hat{d}_{7m}$  ersetzt wird. Eingesetzt in  $(3a/b)^{\#}$  ergeben sich daraus die Schätzgleichungen

$$\begin{aligned} (3a)^T \quad E^T q_x &= a(x) + b(x) * q_{0,3}^T + c(x) * d_{0,05}^T + d(x) * h \\ &= E [q_x \mid X; (d_{1,3m}, \hat{d}_{7m}, h)] =: E^T [q_x \mid X; (d_{1,3m}, h)] \end{aligned}$$

$$(3b)^T \quad E^T d_x = E^T q_x * d_{0,05}^T =: E^T [d_x \mid X; (d_{1,3m}, h)]$$

für die Formquotienten bzw. die Durchmesser an der Stelle X im Schaft.

Alternativ dazu können für jeden Baum mit einem oberen Durchmesser die assoziierten Größen  $d_{0,05}^{\#}$  und  $q_{0,3}^{\#}$  aus den Normierungsgleichungen  $(3c/d)^{\#}$  berechnet und der Mittelwert  $\bar{q}_{0,3}^{\#}$  als lokale Ausprägung der Schaftform aufgefasst werden. Für Bäume ohne  $d_{7m}$  kann dann mit dem mittleren Formquotienten  $\bar{q}_{0,3}^{\#}$ , dem  $d_{1,3m}$  und der Höhe ein assoziierter  $\bar{d}_{0,05}^{\#}$  nach  $(3c)^{\#}$  berechnet werden. Damit stehen für jeden Probestamm die Eingangsgrößen für eine baumindividuelle Durchmesserschätzung nach  $(3a/b)^{\#}$  zur Verfügung. Bei einem ausreichend großen Kollektiv von Probestämmen mit  $d_{7m}$  kann der mittlere Formquotient  $\bar{q}_{0,3}^{\#}$  auch durch einen Tarifwert  $\hat{q}_{0,3}^{\#} = T(d_{1,3m}, h)$  ersetzt werden. Die Tariffunktion wird auf der Basis der Probestämme mit gemessenem  $d_{7m}$  kalibriert.

### 3.3 Einheitsschaftform – BWI

Bei großräumig angelegten Inventuren, bei denen keine oberen Durchmesser erfasst werden, ist die Verwendung von Massentafel äquivalenten Formquotienten problematisch. Das Hauptproblem besteht darin, hinreichend repräsentative Massentafeln zu finden. Bei den Auswertungen zur BWI I stellte sich diese Problematik lediglich für die schwachen Proebäume ( $d_{1.3m} < 20$  cm). Bei der Wiederholungsinventur (BWI 2) hingegen fehlt in den alten Bundesländern der obere Durchmesser bei allen Proebäumen, wodurch die Notwendigkeit, die mittleren Formverhältnisse bundesweit repräsentativ abzubilden, zwingender wird. Aus diesem Zwang heraus und aufgrund der Tatsache, dass mit der BWI I aktuelle und repräsentative Messdaten vorliegen, die das gesamte Spektrum der Stammformen im Bereich der alten Bundesländer abdecken, wurde ein alternativer Lösungsansatz entwickelt und aus den Inventurdaten ein nichtlineares Regressionsmodell für den mittleren Formquotient  $q_{0.3}$  innerhalb einer Durchmesser-Höhenstufe abgeleitet.

Auf eine formelmäßige Darstellung der Zusammenhänge verzichtet. In den Abbildungen 5a/b ist für die starken Fichten aus der BWI I die Verteilung der assoziierten Formquotienten  $q_{0.3}^{\#}$  innerhalb einer Durchmesser-Höhenstufe als Boxplot dargestellt. Die jeweiligen Klassenmittelwerte sind mit einer Linie verbunden. Innerhalb einer Höhenstufe fallen die Mittelwerte der  $q_{0.3}$ -Verteilung zu den stärkeren Durchmesserklassen hin ab (Abbildung 5a). In Abhängigkeit von den Baumhöhen ist ein umgekehrter Trend zu beobachten. Die Gesamtregression für den mittleren Formquotienten ist die mathematische Überlagerung von monotonen Trendfunktionen, welche die partiellen Abhängigkeiten in Abbildung 5a/b beschreiben. Die mit den BWI Daten angepasste Regressionsfunktion ist in der Abbil-

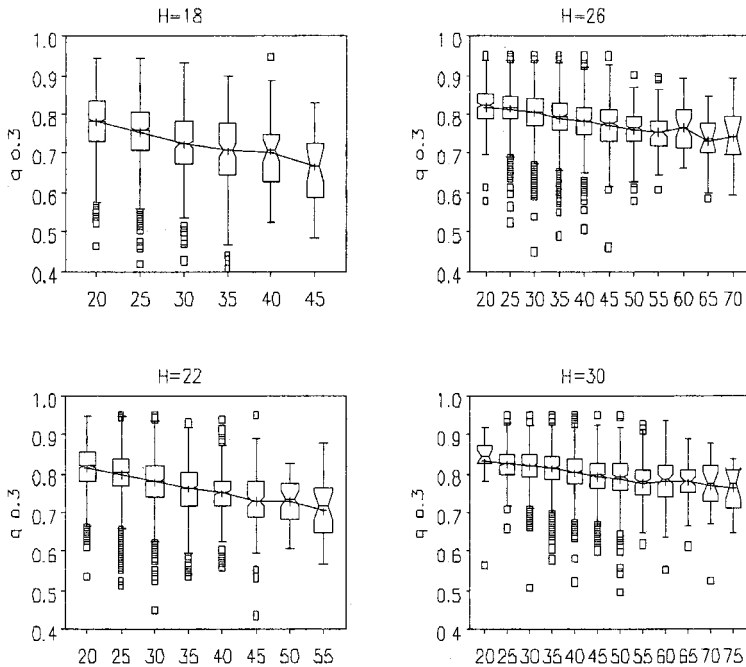


Abb. 5a.  $q_{0.3}$  – Verteilung als Boxplots – (a)  $MW [q_{0.3}] = MW (d_{1.3m} | h)$  (b)  $MW [q_{0.3}] = MW (h | d_{1.3m})$ .

Fig. 5a. Boxplots with the  $q_{0.3}$  – distribution – (a)  $mean [q_{0.3}] = mean (d_{1.3m} | h)$  (b)  $mean [q_{0.3}] = mean (h | d_{1.3m})$ .

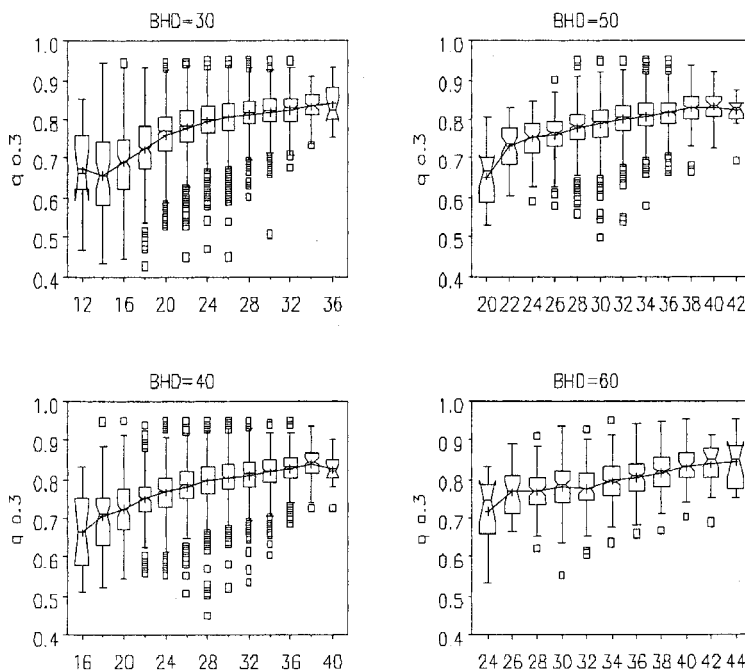


Abb. 5b.  $q_{0.3}$  – Verteilung als Boxplots – (a)  $MW [q_{0.3}] = MW (d_{1.3m} | h)$  (b)  $MW [q_{0.3}] = MW (h | d_{1.3m})$ .

Fig. 5b. Boxplots with the  $q_{0.3}$  – distribution – (a)  $mean [q_{0.3}] = mean (d_{1.3m} | h)$  (b)  $mean [q_{0.3}] = mean (h | d_{1.3m})$ .

dung 6 über einem regulären Gitter für den  $d_{1.3m}$  und die Höhe dargestellt. Die mittleren Abweichungen von Messwerten sind in den stark belegten Durchmesser- und Höhenstufen ( $n \geq 10$ ) als Dreiecke dargestellt. Ein nach oben gerichtetes Dreieck markiert eine positive Abweichung. Negative Residuen werden mit der Spitze nach unten angezeigt. Insgesamt ist über das ganze Durchmesser- und Höhenspektrum eine gute Modellanpassung zu beobachten. Der aus dem Gesamtmodell (Tarif) ermittelte Formquotient

$$(3d)^{BWI} \quad q_{0.3}^{BWI} = T^{BWI}(d_{1.3m}, h)$$

wird im folgenden als **BWI äquivalenter  $q_{0.3}$**  bezeichnet. Der assoziierte  $d_{0.05 \cdot h}$  wird damit über die Normierungsgleichung

$$(3c)^{BWI} \quad E [d_X | X = 1.3; (d_{0.05 \cdot h}^{BWI}, q_{0.3}^{BWI}, h)] = d_{1.3m}$$

bestimmt. Dieser Wert in Verbindung mit dem  $q_{0.3}^{BWI}$  und der Baumhöhe ergibt schließlich die Schaftformgleichungen

$$(3a)^{BWI} \quad E^{BWI} q_x = a(x) + b(x) \cdot q_{0.3}^{BWI} + c(x) \cdot d_{0.05 \cdot h}^{BWI} + d(x) \cdot h \\ =: E^{BWI} [q_x | X; (d_{1.3m}, h)]$$

$$(3b)^{BWI} \quad E^{BWI} d_X = E^{BWI} q_x \cdot d_{0.05 \cdot h}^{BWI} =: E^{BWI} [q_x | X; (d_{1.3m}, h)]$$

mit denen bei der BWI 2 das Derbholz- und das Sortenvolumen für die Probebäume auf der Basis von  $d_{1.3m}$  und Höhe berechnet wird.

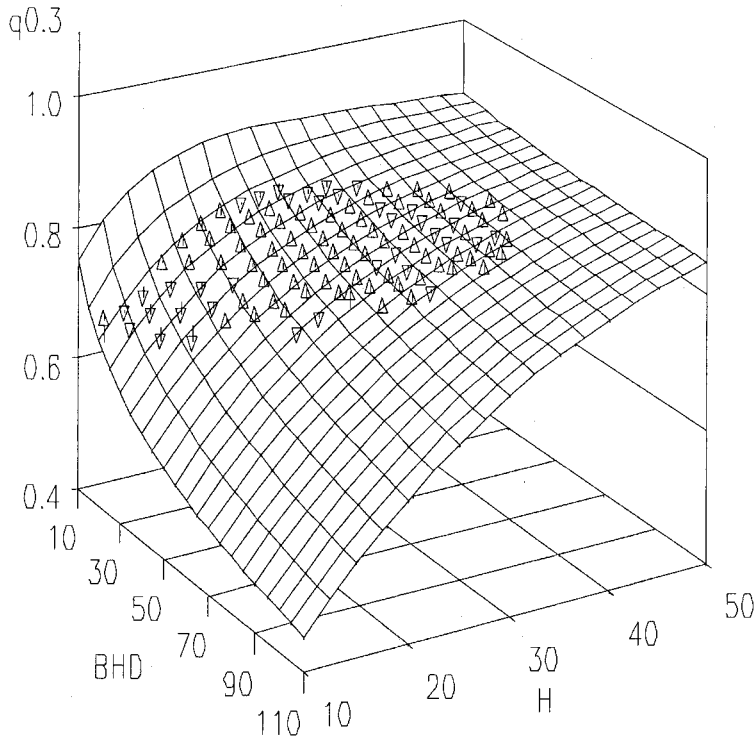


Abb. 6. BWI – Äquivalenz – Gesamtregression und Modellanpassung – Mittlere residuale Abweichungen innerhalb einer Durchmesser-Höhenklassen sind als Dreiecke dargestellt.

Fig. 6. Regression function with BWI equivalent form ratios  $q_{0.3}$ -model fit: residual mean deviation within a diameter/height class are plotted as triangles.

### 3.4 BWI Formigkeitsstufen – $q_{0.3}$ -Verteilung

Die assoziierten Formquotienten  $q_{0.3}^{\#}$  der BWI Probestämme mit oberem Durchmesser sind näherungsweise symmetrisch um das Klassenmittel verteilt, was aus den Boxplots in den Abbildungen 5a/b ersichtlich ist. Eine genauere Analyse der Verteilung zeigt außerdem, dass sich die empirische Formquotienten-Verteilung innerhalb einer Durchmesser-Höhenstufe durch eine Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu = T^{\text{BWI}}(d_{1.3m}, h)$  und einer vom Mittelwert  $\mu$  abhängigen Varianz  $\sigma^2 = \sigma^2(\mu(d_{1.3m}, h))$  approximieren lässt, vgl. Abbildung 7. Damit lassen sich sämtliche Perzentile der  $q_{0.3}$ -Verteilung in Abhängigkeit von  $d_{1.3m}$  und  $h$  über die Summenfunktion der Normalverteilung berechnen. Diese Perzentilwerte sind der Schlüssel für eine einfache Klassifizierung der Schaftformen in abformig, voll- und mittelformig. Als Klassengrenzen werden das 25 % und 75 % Perzentil verwendet. Ist für eine Region aus früheren Untersuchungen bekannt, dass das Stammholzvolumen bei fester Stärke und Höhe ( $d_{1.3m}, h$ ) tendenziell unter dem anderer Regionen oder dem mittleren Volumen aus der BWI liegt, sollten für Volumen- und Sortenkalulationen abformige Schaftformen verwendet werden. Hierzu muss bei Bäumen ohne oberen Durchmesser an Stelle von  $q_{0.3}^{\text{BWI}}$  lediglich das 12.5 % Perzentil der  $q_{0.3}$ -Verteilung in die Gleichungen  $(3a/d)^{\text{BWI}}$  eingesetzt werden. Die Probestämme einer Befundeinheit werden alle derselben Formigkeitsstufe zugeordnet. Eine Differenzierung nach Durch-

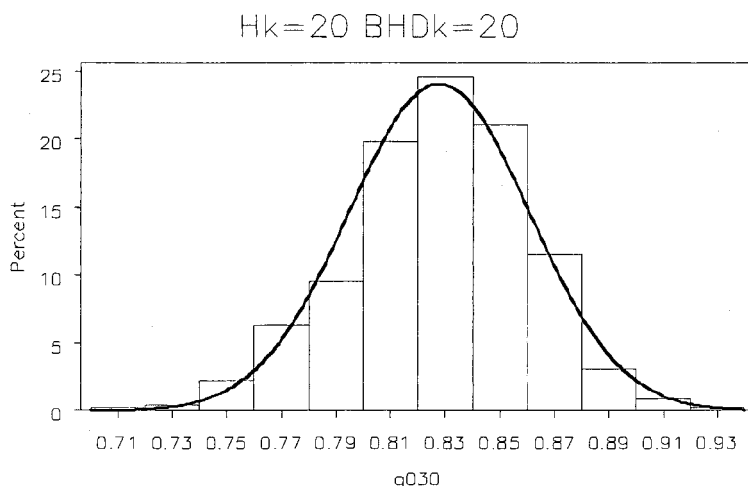


Abb. 7. Normalapproximation der Formquotienten Verteilung.

Fig. 7. Normal approximation of the form ratio distribution.

messer und Höhe ist nicht notwendig, da die Abhängigkeit von der Stammdimension bereits über die Definition der Formigkeitsstufe implizit berücksichtigt ist.

Feinere Formabstufungen sind mit den Perzentilwerten theoretisch kein Problem, in der Praxis aber nur dann sinnvoll, wenn Informationen (Probebäume mit oberem Durchmesser, Inventurdaten etc.) und Programme zur Verfügung stehen, die eine Eingruppierung eines Bestandes oder eines Betriebs in vordefinierten Stufen unterstützen. Bei dem an der Forstlichen Versuchs- und Forschungsanstalt Baden-Württemberg entwickelten Kalkulationsprogramm HOLZERnte können regionale Formausprägungen durch sehr eng definierte Formigkeitsstufen, 5 % Perzentile der  $q_{0.3}^{\#}$ -Verteilung, bei der Sorten- und Wertkalkulation berücksichtigt werden. Die Auswahl der Formigkeitsstufe wird durch ein Programm unterstützt, das für ein Kollektiv von Probebäumen, an denen ein oberer Durchmesser gemessen wurde, die assoziierte  $q_{0.3}$ -Verteilung nach  $(3c/d)^{\#}$  berechnet. Für die Modellkalkulation am Gesamtbestand kann dann die  $q_{0.3}$ -Stufe mit der stärksten Belegung verwendet werden.

#### 4 Anwendungsbeispiele

Im Zusammenhang mit der ersten Bundeswaldinventur wurden von der Forstlichen Versuchs- und Forschungsanstalt Baden-Württemberg für die Hauptbaumarten Schaftformgleichungen (3a-e) abgeleitet und in das BWI-Unterprogramm BDAT integriert. Mit BDAT werden auf Grund der Eingangsgrößen Baumhöhe,  $d_{1.3m}$  und  $d_{7m}$  die assoziierten Größen  $d_{0.05 \cdot h}^{\#}$  und  $q_{0.3}^{\#}$  aus  $(3c/d)^{\#}$  berechnet und in die Schaftformgleichungen eingesetzt. Für die baumindividuelle Sortierung kann bei fehlendem  $d_{7m}$  wahlweise auf Massentafel oder BWI äquivalente Werte  $d_{0.05 \cdot h}^{MT}$ ,  $q_{0.3}^{MT}$  bzw.  $d_{0.05 \cdot h}^{BWI}$ ,  $q_{0.3}^{BWI}$  zurückgegriffen werden. Neben Schaftformgleichungen sind in BDAT Rindenabzugswerte und Informationen über praxisübliche Sortiervarianten implementiert. Die Schaftformgleichungen in BDAT ermöglichen über Stammkennziffern, X-Holzabschnitte, Begrenzung von Zopfstärken und Maximalhöhen für die Stammholzaufarbeitung eine sehr flexible an Form- und Qualitätskriterien orientierte Sortenaufgliederung der Probebäume (KUBLIN und SCHARNAGL 1988). Im Zuge der BWI 2 wurde BDAT durch eine Aushaltungsvariante, bei der im

Stammholzbereich eine Fixlänge oder eine Serie von Abschnitten fester Länge ausgeformt werden kann, ergänzt.

Die neue Programmversion von BDAT wurde zusammen mit den überarbeiteten Formgleichungen und anderen Algorithmen als Dynamic-Link-Library (DLL) in eine Programmbibliothek mit dem Namen *BDATPro* integriert. *BDATPro* umfasst neben BDAT eigenständige Unterprogramme zur Berechnung von Durchmessern, Derbholz- und Abschnittsvolumen sowie Rindenstärken. Die Unterprogramme können über fest definierte Schnittstellen aufgerufen werden. Die Bestimmung lokal angepasster Formquotienten nach  $(3c/d)^{MT}$  mit einer regionalen Volumentafel wird ebenso unterstützt wie die Berechnung von Perzentilwerten zu gegebenen Formquotienten, d. h. *BDATPro* ermöglicht standardmäßig eine einfache und flexible Berechnung von regionalen Formigkeitsstufen. Als DLL kann *BDATPro* wahlweise von Anwendungen, die in unterschiedlichen 32-bit Programmiersprachen geschrieben sind, z. B. Visual Fortran, Visual C/C++, MASM und Visual Basic Version 5.0+, genutzt werden. In *Visual Basic for Applications* (VBA) eingebunden, steht *BDATPro* für die Makro-Programmierung innerhalb der Office-Pakete MS EXCEL und MS ACCESS für ein breites Spektrum von Problemlösungen zur Verfügung.

**Beispiel 1 – Schaftkurven und Sortierung:**

Mit dem in der Abbildung 8 dargestellten EXCEL-Tabellenblatt können baumartenspezifische Schaftkurven aufgrund der Dimensionsdaten ( $d_{1,3m}$ , h) berechnet und grafisch dargestellt werden. Bei der Formigkeit kann zwischen BWI oder Massentafel Äquivalenz gewählt werden. Mit der Vorgabe einer Stammholzlänge und eines Grenzzopfes, wird, beginnend am Stockende, ein Stammholzabschnitt vorgegebener Länge und daran anschließend ein weiterer Abschnitt bis zum Grenzzopf ausgehalten. Für den Gesamtstamm wird das Derbholzvolumen und die Derbholzgrenze berechnet. Das Sortierergebnis wird abschnittsweise mit Länge, Mitten- und Zopfdurchmesser sowie Volumen notiert und grafisch markiert. Unter Verwendung einer BWI äquivalenten Schaftform ergibt sich damit für eine Fichte mit einem  $d_{1,3m}$  von 50 cm und einer Höhe von 30 m ein Derbholzvolumen (mR) von 2.454 fm. Die Derbholzgrenze von 7 cm wird in einer Höhe von 27.3 m

BA	$D_{1,3m}$	H	Form	Derbholz	Länge	Durchmesser mR		Volumen	
Fi	50	30,0	BWI		m	Mitte	Zopf	mR	oR
Stock:		Länge	0,30		27,3	33,6	7,0	2,454	2,206
Stammholz:		Länge	20,0		20,0	36,8	24,4	2,127	
Abschnitt:		DZ mR	15		4,1	20,0	15,0	0,128	

**Schaftkurve**

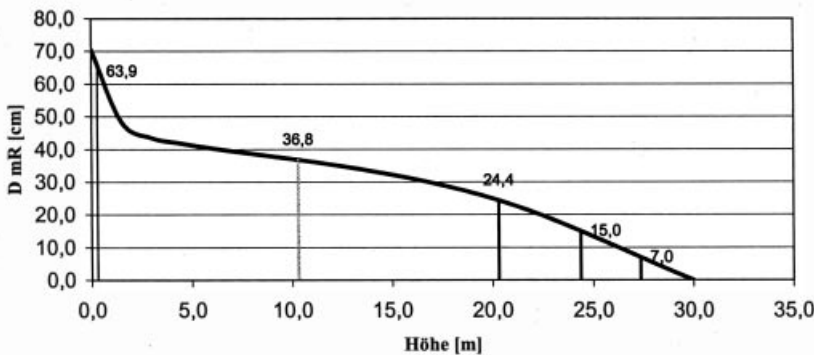


Abb. 8. Schaftkurven und Sortierung.  
Fig. 8. Taper equations and assortment.



erreicht. Für das 20 m lange Stammholzstück werden 2.127 fm berechnet. Bei einem Grenzzopf von 15 cm kann im oberen Stammteil noch ein 4.1 m langer Abschnitt von 0.128 fm ausgehalten werden. Bei Veränderungen der Baum- und Sortierparameter wird die Grafik und das Sortierergebnis durch Aufruf der entsprechenden VBA-Makros und BDAT-Prozeduren automatisch aktualisiert.

Beispiel 2 – Formigkeitsstufen:

Mit dem in der in der Abbildung 9 dargestellten EXCEL-Tabellenblatt kann für Probebäume, an denen neben dem  $d_{1.3m}$  und der Höhe der  $d_{7m}$  gemessen wurde, der assoziierte Formquotient  $q_{0.3}^{\#}$  berechnet werden. Durch einen Vergleich mit dem 25 % und dem 75 % Perzentil der  $q_{0.3}^{\#}$ -Verteilung kann der Probebaum in eine von drei Formigkeitsstufen (ab-, mittel- oder vollformig) eingestuft werden. Eine 30 m hohe Fichte mit einem  $d_{1.3m}$  von 50 cm und einem  $d_{7m}$  von 44 cm hat demnach einen  $q_{0.3}^{\#}$ -Wert von 0.869. Dieser liegt mit einem Perzentilwert von 93 % über dem 75 %-Perzentil der  $q_{0.3}^{\#}$ -Verteilung in der Durchmesser-Höhenstufe, weshalb der Probebaum im BWI-Vergleich als vollformig (v) eingestuft wird. Bei den BWI Probebäumen der Baumart Fichte, an denen ein oberer Durchmesser gemessen wurde, liegen in dieser Dimensionsklasse ca. 50 % der assoziierten  $q_{0.3}^{\#}$ -Werte zwischen 0.743 und 0.821. Der mittlere Formquotient ist 0.782. Die den Perzentilkurven entsprechenden Derbholzvolumen sind 2.257, 2.454 und 2.665 fm mR. In der Grafik wird die baumindividuelle Schaftkurve zusammen mit dem dreigeteilten Formenspektrum (a, m, v) der Durchmesser – Höhenstufe dargestellt. Bei Inventuren können mit diesem Tabellenblatt die Messwerte von Probebäumen mit oberem Durchmesser visuell auf Plausibilität überprüft werden.

BA	D <sub>1.3m</sub>	D <sub>7m</sub>	H	Formigkeit		Percentile			
				Stufe	q <sub>0.3</sub> <sup>#</sup>	25%	50%	75%	q <sub>0.3</sub> <sup>#</sup>
Fi	50	44	30,0	v	0,869	0,743	0,782	0,821	
				93%	2,944	2,257	2,454	2,665	Derbholz

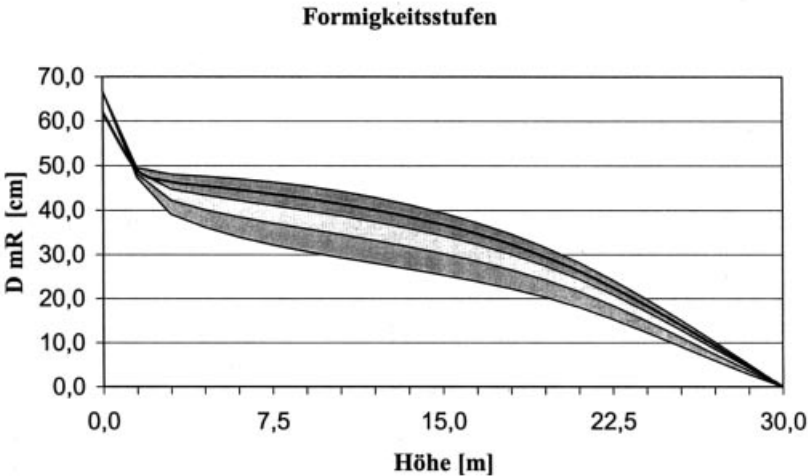


Abb. 9. Formigkeitsstufen.  
Fig. 9. Form classes.

5 Diskussion und Ausblick

Für die Erfassung der Vorrats- und Sortenstruktur am stehenden Holz werden Schaftformmodelle gebraucht. Die im Rahmen der ersten Bundeswaldinventur an der Forst-

lichen Versuchs- und Forschungsanstalt Baden-Württemberg entwickelten Schaftformgleichungen bauen unmittelbar auf den Formuntersuchungen von PRODAN, KRENN, HOHENADL u. a. auf und verbinden deren Lösungsansätze mit der bewährten Tradition einer segmentierten Schaftformbeschreibung mit Splinefunktionen. Die Grundform der Schaftformgleichungen ist ein Tensor-Produkt-Spline, mit dem die echten Formquotienten an einer beliebigen Stelle  $X$  im Schaft über die Eingangsgrößen  $d_{0,05 \times h}$ , Höhe und  $q_{0,3}$  berechnet werden. Die Grundgleichung kann als lineares Regressionsmodell mit lageabhängigen Regressionskoeffizienten aufgefaßt werden. Deshalb können die Regressionskoeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Standardsoftware in einem Schritt kalibriert werden. Eine mehrphasige Anpassung oder ein Rückgriff auf hochgradige Polynomfunktionen ist nicht notwendig. Aus praktischer Sicht ist die Anpassung eines Gesamtmodells vorteilhaft, da Messreihen mit unterschiedlichsten Formaten, absolute und relative Sektionen, regelmäßige oder ungleiche Meßabstände, simultan in die Kalibrierung einbezogen werden können. Demgegenüber werden bei den linearen Schaftformmodellen für den ersten Anpassungsschritt Formquotienten aus einer festen relativen Lage im Schaft benötigt, die durch separate Regressionsgleichungen ausgeglichen werden. Bei der anschließenden Zusammenfassung der Einzelregressionen zu einem Gesamtmodell muss mit Abstimmungsproblemen gerechnet werden. Die Einbettung des Grundmodells in die klassische Theorie der linearen Regression eröffnet ein umfangreiches Methodenspektrum zum Testen einzelner Parameter und ermöglicht darüber hinaus theoretisch gut fundierte Genauigkeitsangaben für die Durchmesserprognosen.

Die Verwendung von relativen Größen als Prädiktoren ist aus der Sicht der Modellbildung vorteilhaft. Kostengünstiger und damit in der Inventurpraxis häufiger ist die Erfassung von Durchmesserwerten an festen absoluten Lagen im Schaft,  $d_{1,3m}$  und  $d_{7m}$  beispielsweise. Mit der automatischen Berechnung von assoziierten Durchmessern auf der Basis von Normierungsgleichungen wird in BDAT eine operationale Schnittstelle zwischen dem Grundmodell und den praktischen Erfordernissen von Großrauminventuren geschaffen. Eine theoretische Lösung des Problems mit modifizierten Grundgleichungen wird in KUBLIN (1985) diskutiert. Umfangreiche Untersuchungen zu der Anpassungsgüte der Modellalternativen führten jedoch dazu, die Lösung mit den assoziierten Durchmessern anderen Modellvarianten vorzuziehen.

Die Grundgleichungen sind für die Beschreibung eines breitgefächerten Formenspektrums ausgelegt. Die Formvariabilität in einer festen Durchmesser-Höhenstufe wird durch einen oberen Durchmesser bzw. durch den  $q_{0,3}$  erfasst. Der  $q_{0,3}$ , aufgefasst als zusätzlicher und über den  $h/d$ -Wert hinausgehender Formparameter, eröffnet eine Reihe von Möglichkeiten, die Ausgangsgleichungen an spezielle Problemstellungen anzupassen. Regionale Formigkeitsverhältnisse können einfach und flexibel über  $d_{7m}$ - oder  $q_{0,3}$ -Tarife in die Berechnung der Vorrats- und Sortenstruktur einbezogen werden. Die Tarife werden mit Probestämmen, an denen ein oberer Durchmesser gemessen wurde oder mit Hilfe von regionalen Massentafeln, die die Formigkeitsverhältnisse im Inventurgebiet widerspiegeln, angepasst. Auf regionaler Ebene genügen in der Regel einfache Tariffunktionen, bei denen der  $d_{7m}$  oder der  $q_{0,3}$  in einem linearen Regressionsmodell aus dem  $d_{1,3m}$  und der Stammhöhe geschätzt wird (REBOLLO 1996). Das hat den Vorteil, dass die Tariffanpassung mit Standardsoftware, die auch in den gängigen Tabellenkalkulationsprogrammen implementiert sind, durchgeführt werden kann. Einfache Tariffunktionen sind unproblematisch, solange die Kalibrierungsdaten das gesamte Formenspektrum in der analysierten Befundeinheit abbilden. Je größer das Einsatzgebiet eines Tarifs desto schwieriger wird es, eine geeignete Tariffunktion festzulegen und ein repräsentatives Datenmaterial für die Anpassung zu finden. Für die Auswertung der BWI 2 wurde aus den Probestämmen der Erstaufnahme je Baumart ein Einheitstarif für die mittlere Schaftform abgeleitet und in die Auswertungsprogramme *BDATPro* integriert.

Eine für die forstliche Praxis sehr einfache lokale Anpassung für die Schaftformgleichungen ermöglichen die Formigkeitsstufen, die ebenfalls aus den BWI-Daten abgeleitet wurden. Durch eine gutachtliche Einschätzung der Formverhältnisse oder gestützt auf eine Stichprobe von Bäumen, an denen ein oberer Durchmesser gemessen wurde, wird ein Bestand oder ein Betrieb einer Formigkeitsstufe zugeordnet. Diese wird dann bei der Volumen- und Sortenberechnung durch einen pauschalen Zu- oder Abschlag auf den  $q_{0,3}$ -Wert der Einheitsschaftform in Rechnung gestellt. In *BDATPro* und in *HOLZERnte* sind Entscheidungshilfen für die Festlegung der Formigkeitsstufen implementiert. Zusätzlich können aus den BWI-Daten lokal angepasste Formigkeitsstufen für flexibel festzulegende Befundeinheiten, Wuchsgebiete, Höhenlagen, Altersklassen u.a.m. abgeleitet werden. In Brandenburg wurden im Zuge der Einführung eines Holzerntekalkulationsprogramms für den Revierförster-PC die in *HOLZERnte* implementierten Regionalisierungsmöglichkeiten anhand der Kiefer auf der Basis von 827 Sektionsstämmen überprüft. Dabei konnte mit der regionalen Formigkeitsstufe +4 (vollformige Schäfte) gegenüber der Einheitsschaftform eine wesentliche Verbesserung bei der Schätzung des Schaftholzvolumens festgestellt werden (DEGENHARDT 2002). Die mit regionalisierten Einheitsschaftformen erzielbaren Genauigkeitsgewinne sollten im Hinblick auf künftige Inventurdesigns auch für andere Regionen und Baumarten genauer analysiert und für die Rationalisierung von Inventurverfahren eingesetzt werden.

### Literatur

- ALTHERR, E. (1963) : Untersuchungen über die Schaftform, Berindung und Sortimentanfall bei der Weißtanne. *AFJZ* 134, 4, 5/6.
- BEHRE, C. E. (1923): Preliminary notes on study of tree form. *Journ. For.*
- DE BOOR, C. (1978): A practical guide to splines. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 27. Springer, New York.
- DEGENHARDT, A. (2002): Einführung eines Holzerntekalkulationsprogramms für den Revierförster-PC. Abschlussbericht IT-Projektgruppe „Holzerntekalkulation“, Landesforstanstalt Eberswalde
- DIERCKX, P. (1993): Curve and Surface Fitting with Splines. Clarendon Press, Oxford.
- HASTIE, T. and TIBSHIRANI, R. (1993): Varying-coefficient Models. *J. R. Statist. Soc. B.* 55, No. 4, 757–796.
- HOHENADL, W. (1936) : Die Bestandesmessung. *Forstw. Cbl.*, 55.
- HÖJER, A. G. (1903): Tallens och granens tillväxt. Stockholm.
- HRADETZKY, J. (1976): Analyse und Interpretation statistischer Abhängigkeiten. *Mitt. der FVA*, Heft 76.
- KRENN, K.; PRODAN, M. (1944): Die Bestimmung der echten Schaftholzformzahl und Ausbauchungsreihe aus dem echten Formquotienten. *Mitt. d. Akad. d. dtsh. Fw.*, Bd. 8.
- KRÜNITZ J. G. (1781): *Ökonomische Encyklopaedie*, Berlin.
- KUBLIN, E. (1985): Das Konzept der Volumenermittlung für die Bundeswaldinventur. In: PELZ, D. R.; CUNIA, T. (eds.): *Nationale Forstinventuren in Europa*. *Mitt. der Abt. f. Forstl. Biometrie, Univ. Freiburg*, 1985–3, 223–237.
- KUBLIN, E. (1987): Grenzen der klassischen Regressionsmodelle. *Mitt. FVA Bad.-Württbg.*, H. 134, 158 S.
- KUBLIN, E.; SCHARNAGL, G. (1988): Verfahrens- und Programmbeschreibung zum BWI-Unterprogramm BDAT. *FVA Bad.-Württbg.*, Freiburg, 87 Seiten.
- LAHTINEN, A.; LAASASNAHO, J. (1979): On the construction for taper curves by using spline functions. *Commun. Inst. For. Fenn.* 95, 8, S. 1–63.
- METZGER, K. (1893) : Der Wald als maßgebender Faktor für das Wachstum der Bäume. *Münchener Forstl. Hefte*, H. 3.
- METZGER, K. (1894): Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statischen Gesetzen. *Münchener Forstl. Hefte*, Heft 5, 6, 7.
- OSUMI, S. (1959): Studies on the stem form of the forest trees. *Journ. Jap. For. Soc.*, 12.
- PRESSLER, M.; KUNZE, M. (1873): *Die Holzmeßkunde in ihrem ganzen Umfange*. Bd. 1 und 2, Berlin.
- PRODAN, M. (1965): *Holzmeßlehre*. Sauerländer, Frankfurt/M. 644 S.
- PRODAN, M. (1965): *Holzmeßlehre*. Sauerländer, Frankfurt/M. 644 Seiten.
- REBOLLO, A. B. C. (1996): Application of sorting and cubing program BDAT on all-aged trees: A case study for spruce and fir on the Kreuzberg municipal forest. Diplomarbeit an der Forstlichen Fakultät der LMU München, Freising, 92 Seiten.

- RIEMER, T.; GADOW, K. V.; SLOBODA, B. 1995: Ein Modell zur Beschreibung von Baumschäften. Allg. Forst- und J.-Ztg. 166(7), 144–147.
- ROIKO-JOKELA, P. 1976: Die Schaftform der Fichte und die Bestimmung der Sortimentanteile am stehenden Baum. Mitt. d. EAFV, Heft 52, S. 1–84.
- SABOROWSKI, J.; SLOBODA, B.; JUNGE, A. (1981): Darstellung von Schaftformen durch kubische Spline-Interpolationen und Reduktion der Stützstellenzahl. Forstarchiv 52, 127–130.
- SLOBODA, B. (1977): Spline und BITTERLICH'sche Interpolation bei der Wiedergabe der Baumform. Beiträge zur Zuwachsforschung 3, Mitt. D. FBVA Wien 120.
- SLOBODA, B. (1984): Bestandesindividuelles biometrisches Schaftformmodell zur Darstellung und zum Vergleich von Formigkeit und Sortimentenausbeute sowie Inventur. DVFö Sektion Ertragskunde, Neustadt a. d. Weinstraße, 4/1–4/36.
- SLOBODA, B.; GAFFREY, D.; MATSUMARA, N. (1998): Erfassung individueller Baumschaftformen und ihrer Dynamik durch Spline-Funktionen und Verallgemeinerung durch lineare Schaftformmodelle. Allg. Forst- und J. Ztg., 169. Jg., 2, 29–38.
- SMALIAN, H. L. (1837): Beitrag zur Holzmesskunst. Stralsund.
- SPÄTH, H. (1973): Spline Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. R. Oldenburg Verlag, München.

*Anschrift des Verfassers:* Dr. EDGAR KUBLIN, FVA Baden-Württemberg, Abt. Biometrie und Informatik, Wonnhaldestraße 4, D-79100 Freiburg, E-Mail: Edgar.Kublin@Forst.BWL.de