

# Regionale und lokale Systeme von Höhenkurven für gleichaltrige Waldbestände

Abteilung für Forstliche Biometrie und Informatik der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen

(Mit 4 Abbildungen und 1 Tabelle)

Von B. SLOBODA, D. GAFFREY und N. MATSUMURA<sup>1)</sup>

(Angenommen Februar 1993)

## SCHLAGWÖRTER - KEY WORDS

Bestandeshöhenkurve; Bestandeswachstum; Einheitshöhenkurve; Höhenkurvensystem; MICHAIOFF-Funktion; Richtungsfeld.

Stand height-diameter curve; stand growth; unit height-diameter curve; system of height-diameter curves; MICHAIOFF-function; drift field.

## 1. EINLEITUNG

Zur zeitlichen Fortschreibung einzelner Baumschäfte eines Bestandes benötigt man als Mindestinformation die Dynamik der Brusthöhendurchmesser  $d$  und der Höhen  $h$  der Einzelbäume. Bei einem Übergang des Bestandes vom Alter  $t_0$  in ein Alter  $t$  haben wir die Situation vor uns, daß infolge des Wachstums eine näherungsweise ellipsenartige, zweidimensionale  $(d, h)$ -Verteilung mit den arithmetischen Mittelwerten  $d_m$  und  $h_m$  wandert (Abb. 1). Es ist weiter sinnvoll, auch die Veränderung der bedingten Erwartungen  $E(H|D = d) = F(d)$  mit  $H$  = Höhe,  $D$  = Brusthöhendurchmesser bzw. der Varianzen

$$\text{Var}(H|D = d) = \sigma^2(d) \sim \text{const.},$$

die sich gemäß des Wachstums ebenfalls bewegen, zu betrachten.

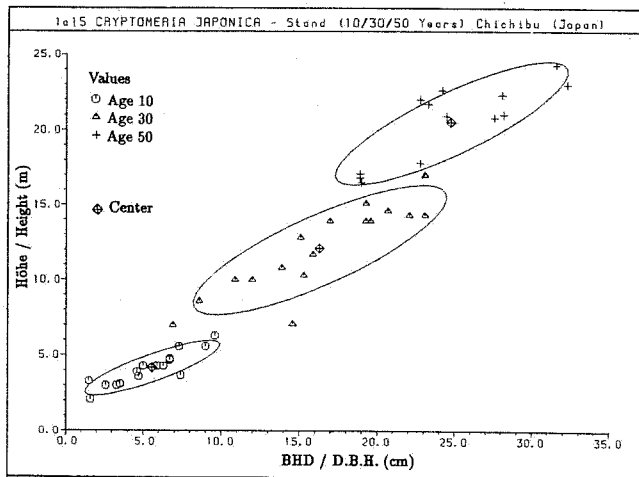


Abb. 1

Dynamik einer ellipsenartigen  $(d, h)$ -Verteilung in Abhängigkeit vom Alter  $t$

Dynamics of an elliptical  $(d, h)$ -distribution in dependence to age  $t$

Die Kurven  $F(d)$  nennen wir Bestandeshöhenkurven. In der Praxis ist eine Reihe von Ansätzen für  $F(d)$  bekannt (siehe z. B. PRODAN, 1965). Besonders einfach und interessant ist die sogenannte MICHAIOFF-Gleichung (MICHAIOFF, 1943) (Abb. 2a und 2b):

$$h = 1,3 + \beta_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta_1}{d}\right\}. \quad (1)$$

Die Vorteile sind hier:

1. Sie ist sehr einfach, da sie nur 2 Parameter besitzt und erfüllt die Bedingungen nach KORF-PRODAN:  
 $f(0) = 1,3$ ;  $f(\infty) = \text{const.}$
2. Sie ist ausreichend flexibel, d. h. sie „schmiegt“ sich den Daten gut an.
3. Nach Transformation von (1) mit  $\ln(h - 1,3) = \ln \beta_0 - \frac{\beta_1}{d}$  lassen sich  $\beta_0$  und  $\beta_1$  (näherungsweise) linear schätzen.

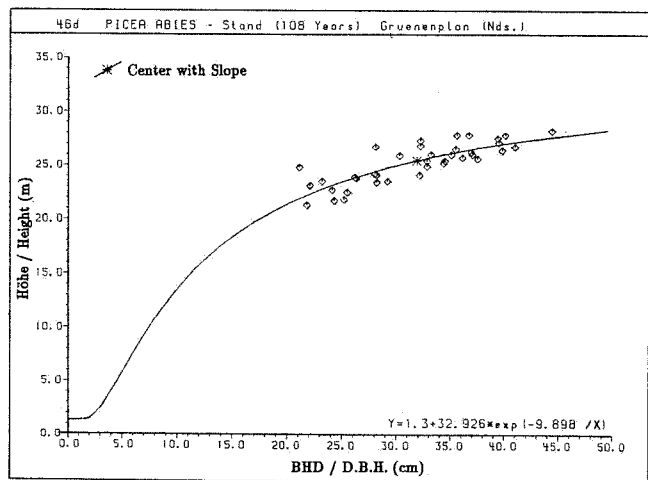


Abb. 2a

MICHAIOFF-Bestandeshöhenkurve eines 108jährigen Fichten-Bestandes

MICHAIOFF-height-diameter curve of an 108 years old spruce stand

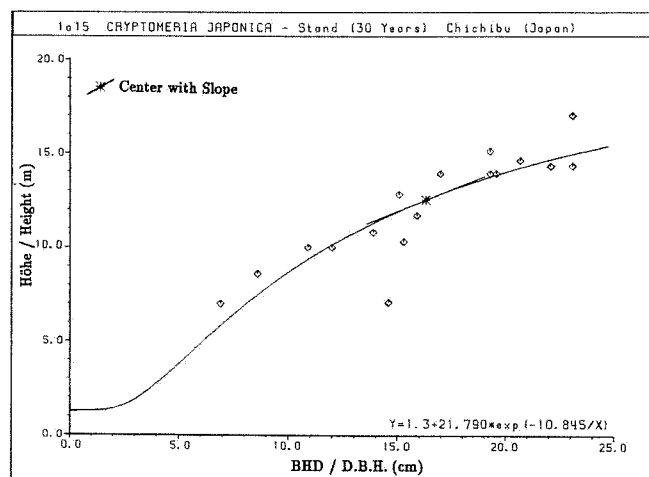


Abb. 2b

MICHAIOFF-Bestandeshöhenkurve eines 30jährigen Cryptomeria-Bestandes

MICHAIOFF-height-diameter curve of an 30 years old Cryptomeria stand

<sup>1)</sup> Dr. N. MATSUMURA, Forest Management Shikoku Research Center, Asakura Tei 915, Kochi 780, Japan.

Ausgehend von diesem Typ einer Bestandeshöhenkurve wird ein baumartenindividuelles Einheitshöhenkurvensystem für gleichaltrige (Rein)bestände entwickelt, dessen Parameter regional (z. B. bezogen auf das Gebiet eines Forstamtes) oder aber lokal (für einen einzelnen Bestand) bestimmt werden können.

Das regionale System von Einheitshöhenkurven ermöglicht es, für eine gegebene Baumart in jedem Bestand des jeweiligen Gebietes eine Bestandeshöhenkurve durch Schätzung des (arithmetischen) Mittelstammes aufzustellen. Die Anpassung erfolgt anhand von  $(d, h)$ -Verteilungen ausgewählter Bestände unterschiedlichen Alters aus dieser Region („zeitliches Nebeneinander“). Unter einer „Region“ wird ein Gebiet verstanden, in dem relativ homogene Wuchsbedingungen herrschen, so daß z. B. keine (großen) Ertragsniveauunterschiede vorkommen.

Das lokale Einheitshöhenkurvensystem wird für einen einzelnen Bestand durch dessen Bestandeshöhenkurven zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  definiert („zeitliches Nacheinander“), so daß eine Höhenkurve zu einem späteren Zeitpunkt  $t_{n+1}$  mit Hilfe des Mittelstammes geschätzt werden kann. Die Zeitreihendaten der Verteilungen sind durch Dauerbeobachtung oder Stammanalysen zu gewinnen.

## 2. DATENMATERIAL

Das für die Modellüberprüfung verwendete Datenmaterial zur Erstellung eines regionalen Höhenkurvensystems umfaßt 52  $(d, h)$ -Verteilungen von Fichtenreinbeständen im Alter von 15 bis 143 Jahren aus dem Ith-/Hils-Bergland (Forstamt Grünenplan, Niedersachsen). Die Aufnahme erfolgte 1986 (GAFFREY, 1988).

Die Daten für bestandesindividuelle, lokale Höhenkurvensysteme stammen aus dem University Forest of Chichibu (Japan) und wurden 1987 vom dortigen Laboratory of Forest Management durch Stammanalysen gewonnen. Bearbeitet und bereitgestellt wurden sie von MATSUMURA. Untersucht wurden hier je 3 Bestände von *Cryptomeria japonica* und *Chamaecyparis obtusa*.

## 3. BESTIMMUNG DER PARAMETER $\beta_0$ UND $\beta_1$ FÜR DAS HÖHENKURVENSYSTEM

Eine Bestandeshöhenkurve zeichnet sich durch ihre Form, die Positionierung des Schwerpunktes und die Steigung im Mittelpunkt der Punktvolke aus (KORF, 1953; WOLF, 1957; PRODAN, 1965; KORF und WOLF, 1973; SUZUKI, 1983) (Abb. 2a und 2b).

Im weiteren wird (1) durch  $h = h - 1,3$  vereinfacht:

$$h = \beta_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta_1}{d}\right\}. \quad (2)$$

Entsprechend wird der Mittelwert  $h_m$  definiert mit  $h_m = h_m - 1,3$ .

Die Parameter  $\beta_0$  und  $\beta_1$  werden durch die Koordinaten des Schwerpunktes  $(d_m, h_m)$  bzw.  $(d_m, h_m)$  sowie der Steigung der Höhenkurve in ihm festgelegt. Hängt man die Kurve in diesem Mittelpunkt ein, so ergibt sich

$$h_m = \beta_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta_1}{d_m}\right\},$$

d. h. für  $\beta_0$  folgt:

$$\beta_0 = h_m \cdot \exp\left\{\frac{\beta_1}{d_m}\right\}. \quad (3)$$

Schließlich erhält man für  $h$

$$h = h_m \cdot \exp\left\{-\beta_1 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_m}\right)\right\}. \quad (4)$$

Zur Bestimmung von  $\beta_1$  wird  $h$  gemäß (2) nach  $d$  abgeleitet:

$$\frac{dh}{dd} = h' = \beta_0 \cdot \exp\left\{-\frac{\beta_1}{d}\right\} \cdot \frac{\beta_1}{d^2}$$

bzw.

$$h' = h \cdot \frac{\beta_1}{d^2}. \quad (5)$$

Bezeichnet man die Steigung der Höhenkurve in  $(d_m, h_m)$  mit  $h'_m$ , so gilt für  $\beta_1$ :

$$\beta_1 = \frac{h'_m \cdot d_m^2}{h_m}. \quad (6)$$

Daraus folgt, daß die Parameter der Höhenkurve  $\beta_0$  und  $\beta_1$  durch das, ein zeitloses Richtungsfeld beschreibendes, Zahlentripel  $(d_m, h_m, h'_m)$ , das die Lage des Mittelpunktes und die Steigung in ihm beschreibt (Abb. 2a und 2b), festgelegt sind gemäß

$$\beta_0 = h_m \cdot \exp\left\{\frac{\beta_1}{d_m}\right\} \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{h'_m \cdot d_m^2}{h_m}.$$

## 4. REGIONALE UND LOKALE EINHEITSHÖHENKURVENSYSTEME

Die Datenanalyse für die Fichtenkollektive wie auch für die japanischen Bestände zeigen, daß zwischen  $h'_m$  und  $d_m, h_m$  eine relativ straffe Regressionsbeziehung vom Typ

$$h'_m = \frac{dh_m}{dd_m} = \alpha(d_m, h_m) \quad (7)$$

besteht (Abb. 3a und 3b). Da

$$h = h_m \cdot \exp\left\{-\beta_1 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_m}\right)\right\}$$

und gemäß (6)

$$\beta_1 = \frac{h'_m \cdot d_m^2}{h_m}$$

ist, so gilt

$$h = h_m \cdot \exp\left\{-\frac{h'_m d_m^2}{h_m} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_m}\right)\right\} \quad (8)$$

und schließlich:

$$h = h_m \cdot \exp\left\{-\alpha(d_m, h_m) \cdot d_m^2 \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_m}\right)\right\}. \quad (9)$$

Mit (9) liegt jetzt ein zweiparametriges System der Einheitshöhenkurven, determiniert durch  $(d_m, h_m)$ , vor. Nunmehr muß die Form der Funktion  $\alpha(d_m, h_m)$  präzisiert werden.

Für diese Funktion wird folgende Hypothese angenommen:

$$\frac{h'_m}{h_m} = S(d_m) = \frac{a_0}{d_m} + \frac{a_1}{d_m^2}. \quad (10)$$

Falls von den untersuchten Kollektiven in einer Region sehr viele Bestände einen sehr starken mittleren Durchmesser aufweisen, kann es u. U. erforderlich sein, (10) um einen Parameter zu erweitern:

$$\frac{h'_m}{h_m} = S(d_m) = \frac{a_0}{d_m - a_2} + \frac{a_1}{(d_m - a_2)^2}. \quad (10')$$

Da (10') sich auf Ausnahmefälle beschränkt, wird im weiteren (10) zugrunde gelegt.

Die Konstruktion der Größe  $h'_m/h_m$ , d. h. der relativen Steigung (relativer, laufender Zuwachs), hat danach einen „hyperbelähnli-

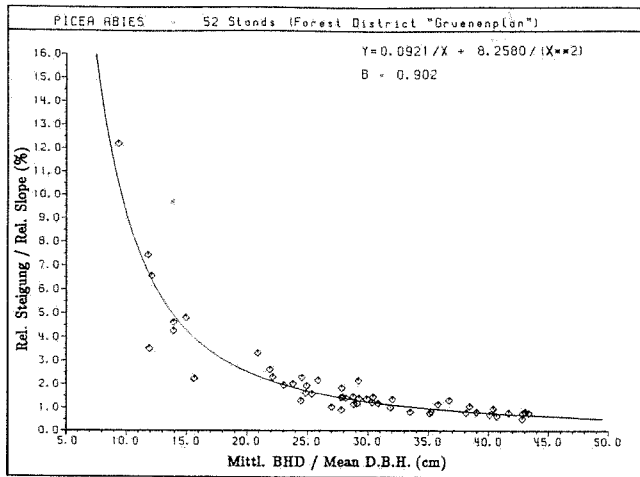


Abb. 3a

Parameterbestimmung für regionales Höhenkurvensystem  
(52 Fichtenbestände, Forstamt Grünenplan)  
Determination of parameters for a regional height-diameter  
curve system

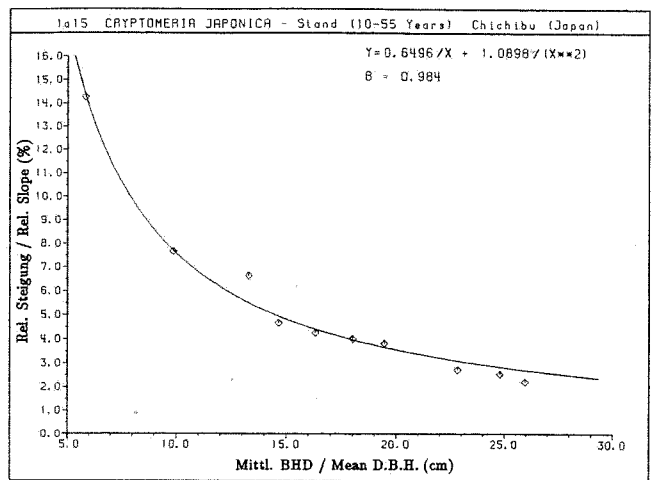


Abb. 3b

Parameterbestimmung für lokales Höhenkurvensystem  
(Cryptomeria-Bestand, Chichibu, Japan)  
Determination of parameters for a local height-diameter  
curve system

chen" Verlauf. Für den Ausgleich wird die prozentuale, relative Steigung verwendet (Abb. 3a und 3b):

$$\frac{h'_m}{h_m} \cdot 100 = \left( \frac{a_0}{d_m} + \frac{a_1}{d_m^2} \right) \cdot 100. \quad (11)$$

Ersetzt man in (8) die relative Steigung im Schwerpunkt  $h'_m/h_m$  durch die in (10) definierte Funktion  $S(d_m)$ , so erhält man

$$h = h_m \cdot \exp \left\{ - \left( \frac{a_0}{d_m} + \frac{a_1}{d_m^2} \right) \cdot d_m^2 \cdot \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_m} \right) \right\}. \quad (12)$$

Vereinfacht man den Exponenten und macht die anfängliche Substitution mit  $b = h + 1,3$  rückgängig, so stellt die Lösung

$$h = 1,3 + (h_m - 1,3) \cdot \exp \left\{ a_0 \cdot \left( 1 - \frac{d_m}{d} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ a_1 \cdot \left( \frac{1}{d_m} - \frac{1}{d} \right) \right\} \quad (13)$$

die Gleichung für eine Einheitshöhenkurve dar, die durch die Vorgabe eines Mittelpunktes ( $d_m, h_m$ ) fixiert wird.

Durch einen optischen und rechnerischen Vergleich der Bestandeshöhenkurven mit den entsprechend eingehängten Einheitshöhen-

kurven wird das regionale wie auch das lokale Modell verifiziert (Abb. 4a und 4b). Wird für den Vergleich als quantitative Maßzahl die Reststreuung der Residuen um die jeweilige Höhenkurve (als Variationskoeffizient, bezogen auf die arithmetische Mittelhöhe) verwendet, so liegen für die untersuchten Fichtenbestände die Variationskoeffizienten für die eingehängten Einheitshöhenkurven durchschnittlich um 0,5 % und maximal um 2,5 % höher (GAFFREY, 1988). Bei lokalen Höhenkurvensystemen sind die Ergebnisse ähnlich gut (Tab. 1).

Das vorgestellte Höhenkurvensystem erweist sich auch dann als geeignet, wenn die Parameter großräumig definiert werden. So führte ein Einheitshöhenkurvensystem für die Roteiche, basierend auf Versuchsflächendaten der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt, zu guten Ergebnissen (NAGEL, 1991).

Schließlich besteht die Möglichkeit, das Höhenkurvensystem aus einem Anfangsmittelpunkt ( $d_m^0, h_m^0$ ) zu einem Zeitpunkt  $t_0$  fortzuschreiben, wenn ein zeitloses Richtungsfeld vorliegt, das die Bewegung der Schwerpunkte ( $d_m^t, h_m^t$ ) beschreibt. Somit könnte für einen

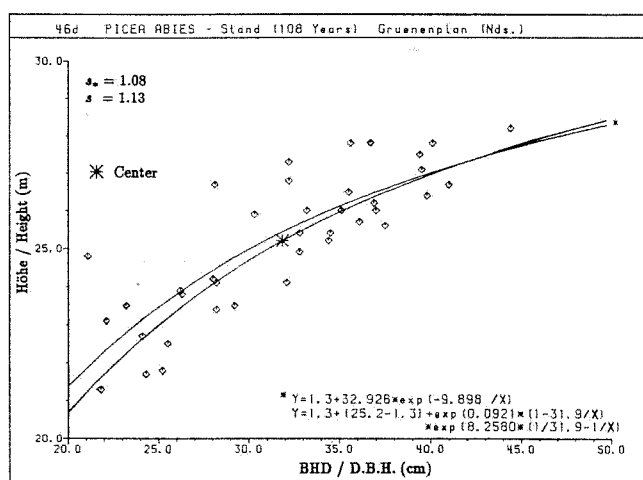


Abb. 4a

Vergleich einer Bestandeshöhenkurve (\*) mit eingehängter  
regionaler Einheitshöhenkurve  
Comparison of a stand height-diameter curve (\*) with an  
adjusted regional unit height-diameter curve

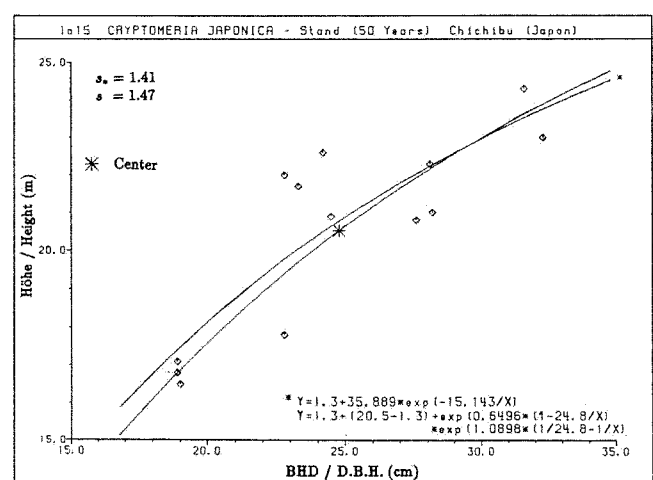


Abb. 4b

Vergleich einer Bestandeshöhenkurve (\*) mit eingehängter  
lokaler Einheitshöhenkurve  
Comparison of a stand height-diameter curve (\*) with an  
adjusted local unit height-diameter curve

Tab. 1

Vergleich von Bestandes- und Einheitshöhenkurven anhand der Residuenstreuung  
Comparison of stand and unit height-diameter curve by their residual variance

	Regionales EHK-System	Lokale EHK-Systeme					
	<i>Picea abies</i>	<i>Cryptomeria japonica</i>			<i>Chamaecyparis obtusa</i>		
	Forstamt Grünenplan	6a1	1a13	1a15	3a11	6a1	1a13
Anzahl	52	7	5	10	9	8	6
Alter	15–143	10–40	15–35	10–55	10–50	10–45	10–35
Differenz der Variationskoeffizienten für die Residuenstreuung ( $\Delta v$ %)							
Differences in C. V. of residual variance							
Minimum	0,09	0,16	0,19	0,27	0,19	0,09	0,27
Maximum	2,49	2,40	0,47	0,97	1,42	1,64	1,89
$\emptyset$	0,51	1,49	0,30	0,62	0,64	0,48	0,79

EHK = Einheitshöhenkurve (unit height-diameter curve).

Bestand eine Höhenkurve zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  mit minimalem Aufwand geschätzt werden.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG

Zur Beschreibung des Wachstums von Baumschäften in einem Bestand bedarf es der Kenntnis über die Bewegung der zweidimensionalen Verteilung von Brusthöhendurchmesser und Höhen der Einzelbäume (Abb. 1). Zur Schätzung der Höhen eines gleichaltrigen Reinbestandes wird die MICHAÏLOFF-Gleichung als Bestandeshöhenkurve verwendet (Abb. 2). Basierend auf diesem Funktionstyp wird – für ein Gebiet mit homogenen Wuchsverhältnissen – ein regionales, zeitunabhängiges Höhenkurvensystem aufgestellt. Seine Parameter ergeben sich aus den Daten von Beständen, die aus dieser Region ausgewählt werden (Abb. 3a). Für einen beliebigen Bestand erfolgt die individuelle Einhängung in die Einheitshöhenkurve durch seinen arithmetischen Mittelstamm (Abb. 4a). Analog zu diesem regionalen Ansatz kann ein lokales Höhenkurvensystem für einen einzelnen Bestand anhand seiner bisherigen individuellen Entwicklung beschrieben werden (Abb. 3b). Zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt die Schätzung der Bestandeshöhenkurve gleichfalls über seinen Mittelstamm (Abb. 4b).

## 6. Summary

Title of the paper: *Regional and local systems of height-diameter curves for even-aged stands.*

The description of the development of tree taper curves within a stand requires knowledge concerning the movement of the two dimensional distribution of diameter at breast height and height of individual trees (fig. 1). To estimate the height of an even-aged pure stand the MICHAÏLOFF-equation is used as a stand height-diameter curve (fig. 2). Based on this function – for homogenous areas within respect to growth – a regional time independent height-diameter curve system is set up. Its parameters are calculated by data of stands which are sampled from this region (fig. 3a). For any given stand the individual adjustment of the unit height-diameter curve is performed by its average stem (fig. 4a). Analogous to this regional approach a local height-diameter system for a single stand is described by means of its previous individual development (fig. 3b). The estimation of the stand height-diameter curve is also done via the average stem (fig. 4b).

## 7. Résumé

Titre de l'article: *Systèmes régionaux et locaux de courbes de hauteurs pour des peuplements forestiers équiennes.*

Pour décrire la croissance des fûts dans un peuplement il est nécessaire de savoir comment évoluent le diamètre à hauteur de poitrine et la hauteur des individus (Fig. 1). Pour estimer les hauteurs d'un peuplement équienne, on a utilisé l'équation de MICHAÏLOFF comme courbe des hauteurs du peuplement (Fig. 2). En se basant sur ce type de fonction, on a construit – pour une région présentant des conditions de croissance homogènes – un système de courbes de hauteur régional indépendant du temps. Ses paramètres sont obtenus à partir des données collectées dans des peuplements choisis dans la région en cause (Fig. 3a). Pour un peuplement donné, l'entrée dans le système de courbes de hauteur est déterminé par l'arbre moyen, – moyenne arithmétique – (Fig. 4a). Par analogie à ce qui a été fait au plan régional, on peut décrire, localement cette fois, un système de courbes de hauteur valable pour un peuplement donné d'après le développement des individus qui a en lieu jusqu'alors (Fig. 3b). L'estimation de la courbe de hauteur à une date ultérieure dépend également de l'arbre moyen de ce peuplement (Fig. 4b).

J. M.

## 8. Literatur

- GAFFREY, D.: Forstamts- und bestandesindividuelles Sortimentierungs-Programm als Mittel zur Planung, Aushaltung und Simulation. Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1988
- KORF, V.: Dendrometrie (tschechisch). SZN Praha, 1953
- KORF, V. und WOLF, J.: Dendrometrie (tschechisch). SZN Praha, 1973
- MICHAÏLOFF, I.: Zahlenmäßiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven. Forstwissenschaftliches Centralblatt und Tharandter Forstliches Jahrbuch 6, 273–279, 1943
- NAGEL, J.: Einheitshöhenkurvenmodell für Roteiche. Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung 162 (1), 16–18, 1991
- PRODAN, M.: Holzmeßlehre. Frankfurt am Main, 1965
- SLOBODA, B.: Zur Darstellung von Wachstumsprozessen mit Hilfe von Differentialgleichungen erster Ordnung. Mitteilungen der Baden-Württembergischen Forstlichen Versuchsanstalt, Heft 32, 1971
- SUZUKI, T.: Beiträge zur biometrischen Modellbildung in der Forstwirtschaft. Schriften aus der Forstlichen Fakultät der Universität Göttingen und der Niedersächsischen Forstlichen Versuchsanstalt 76, 1983
- University Forest in Chichibu and Laboratory of Forest Management: Records on the Stem Analyses in the Tokyo University Forest in Chichibu. Miscellaneous Information, the Tokyo University Forests 25, 161–204, 1987
- WOLF, J.: Zeitberücksichtigendes und zeitloses Richtungsfeld der Entwicklung. Acta Univ. Agric. et Silv. Brno Číslo 1, 1957