4 Relationen

Relationen beschreiben die Beziehungen zwischen Mengen und sind somit der eigentliche Gegenstand der Mathematik.

4.1 Kreuzprodukt

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Das Kreuzprodukt (oder kartesisches Produkt) von $A_1, \ldots, A_n$ ist definiert als:

$$A_1 \times \cdots \times A_n =_{\text{def}} \{\ (a_1, \ldots, a_n) \mid \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } a_i \in A_i\ \}$$

Die Elemente von $A_1 \times \cdots \times A_n$ heißen n-Tupel (mit speziellen Benennungen für feste n: Paare für $n = 2$, Tripel für $n = 3$, Quadrupel für $n = 4$).

Im Gegensatz zu Mengen sind Tupel geordnet (und damit eine Formalisierung von Listen): Für zwei n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(a'_1, \ldots, a'_n)$ gilt

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \iff \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } a_i = a'_i$$

Sind alle Mengen gleich, so schreibt man:

$$A^n =_{\text{def}} \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$$

Beispiele: Folgende Mengen verdeutlichen die Kreuzproduktkonstruktion.

- Mit $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$ gilt $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- Mit $A = \{5, 7\}$ und $n = 3$ gilt

$$\begin{aligned} A^3 &= \{5, 7\} \times \{5, 7\} \times \{5, 7\} \\ &= \{(5, 5, 5), (5, 5, 7), (5, 7, 5), (5, 7, 7), (7, 5, 5), (7, 5, 7), (7, 7, 5), (7, 7, 7)\} \end{aligned}$$

- $\emptyset \times A = \emptyset$ (Beachte: Die rechte leere Menge ist die Menge in der kein Paar enthalten ist)
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreibt den dreidimensionalen Raum

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Eine Menge $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt n-stellige Relation.

Beispiel: Eine relationale Datenbank ist eine Sammlung von Tabellen mit einer gewissen Struktur. Eine Tabelle wiederum ist eine (extensionale Darstellung einer) Relation. Beispielsweise sei folgender Auszug einer Tabelle gegeben:

Vorname	Name	Geburtsdatum
Max	Mustermann	07.07.1987
Erika	Mustermann	12.09.1955
John	Smith	05.05.1965
Lyudmila	Dyakovska	02.04.1976
Karsten	Brill	27.10.1980
Timnit	Gebru	13.05.1983
Robert	Palfrader	11.11.1968
Ruth Maria	Renner	27.09.1980
Leslie	Valiant	28.03.1949
Harvey	Elliott	04.04.2003
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir fassen die Tabelle als Teilmenge eines Kreuzproduktes auf. Dazu seien:

$$\begin{aligned} A_1 &=_{\text{def}} \text{Menge aller Vornamen in der Tabelle} \\ A_2 &=_{\text{def}} \text{Menge aller Namen in der Tabelle} \\ A_3 &=_{\text{def}} \text{Menge aller Geburtsdaten in der Tabelle} \end{aligned}$$

Dann ist $(\texttt{Max}, \texttt{Mustermann}, 07.07.1987) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ und die Menge aller Zeilen der Tabelle ist eine Relation $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$.

Eine Relation $R \subseteq A_1 \times A_2$ heißt binäre Relation. Gilt $A_1 = A_2 = A$, so sprechen wir von einer binären Relation auf A. Binäre Relationen R werde auch in Infix-Notation geschrieben:

$$xRy \iff_{\text{def}} (x, y) \in R$$

Der Ausdruck „xRy“ steht dabei für die Leseweise: „x steht in Relation R zu y.“

Beispiele: Wir betrachten binäre Relationen über der Menge $A = \mathbb{N}$.

- $R_1 =_{\text{def}} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $R_2 =_{\text{def}} \{(0,0), (2,3), (5,1), (5,3)\}$
- $R_3 =_{\text{def}} \{\ (n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\ \} = \{(0,0), (0,1), (1,1), (0,2), \ldots\}$
- $R_4 =_{\text{def}} \{\ (n_1, n_2) \mid n_1 \text{ teilt } n_2\ \} = \{(1,2), (2,4), (2,6), (7,0), \ldots\}$
- $R_5 =_{\text{def}} \{\ (n_1, n_2) \mid 2 \text{ teilt } |n_1 - n_2|\ \} = \{(0,2), (2,2), (1,1), (3,1), \ldots\}$
- $R_6 =_{\text{def}} \{\ (n_1, n_2) \mid 2n_1 = n_2\ \} = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$

Die Relationen R_3 und R_4 sind Ordnungsrelationen. Relation R_5 ist eine Äquivalenzrelation. Relation R_6 ist eine Funktion.

In den folgenden Abschnitten wenden wir uns den im Beispiel erwähnten Relationentypen systematisch zu.

4.2 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen extrahieren den mathematischen Gehalt von Objekten, die wir als im Wesentlichen gleich ansehen können. Dafür werden die folgenden Begriffe benötigt.

Definition 4.1

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

1. reflexiv $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a \in A)[(a, a) \in R]$
2. transitiv $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a, b, c \in A)[((a, b) \in R \land (b, c) \in R) \to (a, c) \in R]$
3. symmetrisch $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a, b \in A)[(a, b) \in R \to (b, a) \in R]$
4. Äquivalenzrelation $\iff_{\text{def}}$ R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch

Bei einer Äquivalenzrelation R verwenden wir statt $(a, b) \in R$ die Infix-Schreibweise $a \sim_R b$ (oder $a \approx_R b$, $a \equiv_R b$).

Beispiele: Wir überprüfen die Eigenschaften für folgende endliche Relationen über der Menge $A = \{0, 1, 2\}$:

Relation	reflexiv	transitiv	symmetrisch	Äquivalenzrelation
$\{ (0,1), (1,0), (0,2), (2,0) \}$			X	
$\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (2,2) \}$	X		X	
$\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2) \}$	X	X	X	X
$\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \}$		X	X	
$\{ (0,0), (0,1), (1,1), (2,2) \}$	X	X		

Wir wollen die Intuitivität des Äquivalenzrelationenbegriff an komplexeren Relationen verdeutlichen.

Beispiele: Folgende Beispiele sind typisch für die Bildung von Äquivalenzrelationen.

- Es seien $A =_{\text{def}}$ Menge aller (logischen) Aussagen und

$$R =_{\text{def}} \{ (H, H') \mid H \leftrightarrow H' \text{ ist eine Tautologie} \} \subseteq A \times A.$$

  Dann ist R eine Äquivalenzrelation, denn es gelten folgende Aussagen (z.B. mittels Überprüfung durch Wertetabellen):

  - R ist reflexiv: $H \leftrightarrow H$ ist eine Tautologie für alle Aussagen H
  - R ist transitiv: Sind $H \leftrightarrow H'$ und $H' \leftrightarrow H''$ Tautologien, so ist auch $H \leftrightarrow H''$ eine Tautologie (wegen doppelter Anwendung der Kettenschlussregel)

- R ist symmetrisch: Ist $H \leftrightarrow H'$ eine Tautologie, so ist auch $H' \leftrightarrow H$ eine Tautologie.

- Es sei f beliebige Funktion mit Argumenten aus einer Menge A. Dann ist die Relation

$$R_f =_{\mathrm{def}} \{ (x, y) \mid f(x) = f(y) \} \subseteq A \times A$$

ganz offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Zum Beispiel ergeben sich für spezielle Funktionen folgende Äquivalenzrelationen:

  - Auf der Menge $A =_{\mathrm{def}} \mathbb{Z}$ sei die Funktion $f_n(x) = \mathrm{mod}(x, n)$ mit Funktionswerten in der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ definiert. Dann schreiben wir auch $x \equiv y \bmod n$ für $(x, y) \in R_{f_n}$ und sagen „x ist kongruent y modulo n“.
  - Auf der Menge A aller Wörter eines Wörterbuches (wobei alle Wörter nur aus Kleinbuchstaben bestehen und keine Umlaute enthalten) sei f als Funktion definiert, die jedes Wort auf den ersten Buchstaben abbildet. Zwei Wörter sind damit also äquivalent, wenn sie mit dem gleichen Buchstaben beginnen.

Definition 4.2

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $x \in A$ ein beliebiges Element. Dann heißt die Menge

$$[x]_R =_{\mathrm{def}} \{ y \mid (x, y) \in R \} \subseteq A$$

Äquivalenzklasse von x. Wir nennen x Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Beispiel: Wir betrachten die Kongruenz „ $\equiv \bmod 8$ “ auf den ganzen Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} [13]_\equiv &= \{ y \mid y \equiv 13 \bmod 8 \} \\ &= \{ y \mid \mathrm{mod}(y - 13, 8) = 0 \} \\ &= \{ \ldots, -11, -3, 5, 13, 21 \ldots \} \\ &= [5]_\equiv \end{aligned}$$

Proposition 4.3

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $x, y \in A$. Dann gilt:

1. Ist $(x, y) \in R$, so gilt $[x]_R = [y]_R$.
2. Ist $(x, y) \notin R$, so sind $[x]_R$ und $[y]_R$ disjunkt.

Beweis: Wir beweisen die Aussagen einzeln.

1. Es gelte $(x, y) \in R$, d.h. $y \in [x]_R$. Wegen der Transitivität von R gilt $(x, z) \in R$ für alle $z \in [y]_R$ (d.h. $(y, z) \in R$). Somit gilt $[y]_R \subseteq [x]_R$. Wegen der Symmetrie von R gilt $(y, x) \in R$. Somit können wir analog auch $[x]_R \subseteq [y]_R$ zeigen. Mithin gilt $[x]_R = [y]_R$.
2. Wir zeigen die Kontraposition der Aussage. Dazu gelte $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in A$ mit $z \in [x]_R$ und $z \in [y]_R$ bzw. $(x, z) \in R$ und $(y, z) \in R$. Wegen der Symmetrie von R gilt $(z, y) \in R$. Wegen der Transitivität gilt somit $(x, y) \in R$.

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Definition 4.4

Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Eine Menge $K \subseteq A$ heißt Repräsentantensystem von R, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 \neq k_2$ gilt $(k_1, k_2) \notin R$
2. $A = \bigcup_{k \in K} [k]_R$

Beispiel: Wir betrachten die Kongruenz „ $\equiv \mod 8$ “ auf den ganzen Zahlen.

- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist ein Repräsentantensystem
- $\{8, 1, 2, 19, -4, 13, 6, 7\}$ ist ebenfalls ein Repräsentantensystem

Die zu einem Repräsentantensystem gehörenden Äquivalenzklassen bilden eine Partition der Grundmenge.

Korollar 4.5

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $K \subseteq A$ ein Repräsentantensystem von R. Dann bilden die Äquivalenzklassen (der Elemente) von K eine Partition von A.

Beweis: Wegen $(k_1, k_2) \notin R$ für $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 \neq k_2$ (die erste Eigenschaft eines Repäsentantensystems) folgt aus Proposition 4.3:

$$[k_1]_R \cap [k_2]_R = \emptyset$$

Aus der zweiten Eigenschaft eines Repräsentantensystem folgt für K weiterhin

$$\bigcup_{k \in K} [k]_R = A.$$

Somit ist die Mengenfamilie $\{ [k]_R \mid k \in K \}$ eine Partition von A. Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Proposition 4.6

Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Partition von A. Dann ist die Relation $R \subseteq A \times A$ mit

$$(x, y) \in R \iff_{\text{def}} (\exists X \in \mathcal{F})[x \in X \wedge y \in X]$$

eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Wir überprüfen die Eigenschaften von Äquivalenzrelationen:

- R ist reflexiv: Für jedes $x \in A$ gibt es ein $X \in \mathcal{F}$ mit $x \in X$, da $\mathcal{F}$ eine Partition ist. Somit gilt $(x, x) \in R$.
- R ist transitiv: Es seien $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$. Dann gibt es $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in X_1$ sowie $y, z \in X_2$. Mithin gilt $y \in X_1 \cap X_2$. Also sind X_1 und X_2 nicht disjunkt. Da $\mathcal{F}$ eine Partition ist, gilt folglich $X_1 = X_2$. Somit gilt $x, z \in X_1$. Es folgt $(x, z) \in R$.
- R ist symmetrisch: Ist $(x, y) \in R$, so gilt $x, y \in X$ für ein geeignetes $X \in \mathcal{F}$. Also gilt auch $(y, x) \in R$.

Damit ist die Proposition bewiesen ■

4.3 Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen extrahieren den mathematischen Gehalt von natürlichen Ordnungen, wie sie beispielsweise beim Sortieren benötigt werden. Formal unterscheiden sie sich von Äquivalenzrelationen nur durch den Begriff der Antisymmetrie.

Definition 4.7

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

1. reflexiv $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a \in A)[(a, a) \in R]$
2. transitiv $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a, b, c \in A)[((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R]$
3. antisymmetrisch $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a, b \in A)[((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b]$
4. linear $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a, b \in A)[a \neq b \rightarrow ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)]$

Die Eigenschaft der Antisymmetrie wird anschaulicher, wenn für alle $a, b \in A$ die Kontraposition

$$a \neq b \rightarrow ((a, b) \notin R \vee (b, a) \notin R)$$

betrachtet wird. Mit anderen Worten darf für verschiedene Elemente a und b höchstens eines der Paare (a, b) oder (b, a) zu R gehören. Zu beachten ist weiterhin, dass die Eigenschaft der Antisymmetrie nicht die Negation der Symmetrie ist, wie sie im Abnschnitt über Äquivalenzrelationen eingeführt wird.

Beispiele: Wir überprüfen die Eigenschaften für folgende endliche Relationen über der Menge $A = \{0, 1, 2\}$:

Relation	reflexiv	transitiv	antisymmetrisch	linear
$\{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2) \}$	X	X	X	X
$\{ (0,0), (0,1), (2,0), (1,1), (1,2), (2,2) \}$	X		X	X
$\{ (0,0), (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2) \}$	X			X
$\{ (0,0), (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (2,2) \}$	X			
$\{ (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (2,2) \}$				
$\{ (0,1), (1,2), (0,2) \}$		X	X	X
$\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2) \}$	X	X		
$\{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (2,2) \}$	X	X	X	
$\{ (0,1), (1,2), (2,1), (2,0) \}$				X

Durch die Analyse der obigen Beispiele bekommt man ein technisches Gefühl für die Definitionen. Im Folgenden wollen wir auch die Intuitivität von Definition 4.7 durch weitere Beispiele verdeutlichen.

Beispiele: Die folgenden Beispiele repräsentieren im Allgemeinen unendliche Relationen.

- $R_1 =_{\text{def}} \{ (m,n) \mid m \leq n \} \subseteq \mathbb{N}^2$, wobei $m \leq n \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists c \in \mathbb{N})[n = m + c]$. Dann gilt:
  - R_1 ist reflexiv, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = n + 0$ bzw. $n \leq n$.
  - R_1 ist transitiv, denn gilt $k \leq m$ und $m \leq n$, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $m = k + c_1$ sowie $n = m + c_2$ und es gilt $n = k + (c_2 + c_1)$ bzw. $k \leq n$.
  - R_1 ist antisymmetrisch, denn gilt $m \leq n$ und $n \leq m$, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $n = m + c_1$ sowie $m = n + c_2$ und mit $n = n + c_1 + c_2$ folgt $c_1 = c_2 = 0$ und mithin $n = m$.
  - R_1 ist linear, denn $n - m \in \mathbb{N}$ oder $m - n \in \mathbb{N}$.

  R_1 besitzt mithin alle Eigenschaften von Definition 4.7.
- $R_2 =_{\text{def}} \{ (m,n) \mid m \text{ teilt } n \}$, wobei $m|n \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists c \in \mathbb{N})[n = c \cdot m]$. Dann gilt:
  - R_2 ist reflexiv, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = 1 \cdot n$ bzw. n teilt n.
  - R_2 ist transitiv, denn teilt k die Zahl m und teilt m die Zahl n, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $m = c_1 \cdot k$ sowie $n = c_2 \cdot m$ und es gilt $n = (c_2 \cdot c_1) \cdot k$ bzw. k teilt n.
  - R_2 ist antisymmetrisch, denn teilt m die Zahl n und teilt n die Zahl m, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $n = c_1 \cdot m$ sowie $m = c_2 \cdot n$ und mit $n = c_1 \cdot c_2 \cdot n$ folgt $c_1 = c_2 = 1$ und mithin $m = n$.
  - R_2 ist nicht linear, denn weder teilt 2 die Zahl 3 noch teilt 3 die Zahl 2.

  R_2 besitzt mithin alle Eigenschaften von Definition 4.7 außer der Linearität.
- $R_3 =_{\text{def}} \{ (A,B) \mid A \subseteq B \} \subseteq \mathcal{P}(X)^2$ für eine Grundmenge X. Dann gilt:
  - R_3 ist reflexiv, denn es gilt $A \subseteq A$ für alle $A \subseteq X$.
  - R_3 ist transitiv, denn gilt $A \subseteq B$, d.h. $(\forall a \in A)[a \in B]$, und gilt $B \subseteq C$, d.h. $(\forall a \in B)[a \in C]$, so gilt nach dem Kettenschluss auch $(\forall a \in A)[a \in C]$, d.h. $A \subseteq C$.
  - R_3 ist antisymmetrisch, denn mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt $A = B$.

- R_3 ist nicht linear, falls $|X| \geq 2$: Es seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$, dann gilt $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$.

R_3 besitzt mithin alle Eigenschaften von Definition 4.7 außer der Linearität.

Definition 4.8

Es sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation über A.

1. R heißt Halbordnung (oder partielle Ordnung), falls R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
2. R heißt Ordnung (oder totale bzw. lineare Ordnung), falls R eine Halbordnung und zusätzlich linear ist.
3. Ist R eine Halbordnung, so heißt das Paar (A, R) halbgeordnete Menge (oder partiell geordnete Menge).
4. Ist R eine Ordnung, so heißt das Paar (A, R) geordnete Menge (oder total bzw. linear geordnete Menge).

Beispiele (Fortsetzung): Für die drei Relationen aus obigem Beispiel gilt:

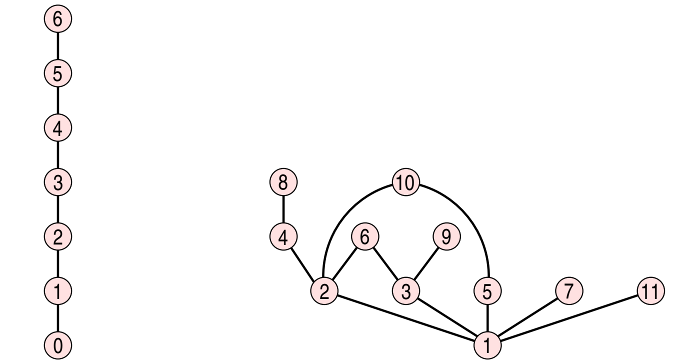
- R_1 ist eine Ordnung; wir schreiben die geordnete Menge als $(\mathbb{N}, \leq)$.
- R_2 ist eine Halbordnung; wir schreiben die halbgeordnete Menge als $(\mathbb{N}, |)$.
- R_3 ist eine Halbordnung für jede Menge X; wir schreiben die halbgeordnete Menge als $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Endliche Halbordnungen lassen sich durch Hasse-Diagramme graphisch darstellen. Diese Diagramme sind wie folgt für eine halbgeordnete Menge (A, R) definiert:

- Elemente der Grundmenge A werden durch Punkte (Knoten) in der Ebene dargestellt.
- Ist $(x, y) \in R$ für $x \neq y$, so wird der Knoten y oberhalb von Knoten x gezeichnet.
- Genau dann, wenn $(x, y) \in R$ für $x \neq y$ gilt und es kein $z \notin \{x, y\}$ mit $(x, z) \in R$ und $(z, y) \in R$ gibt, werden x und y durch eine Linie (Kante) verbunden.

Bei dieser Darstellungsform werden jene Paare einer Halbordnung nicht dargestellt, deren Zugehörigkeit zur Relation sich wegen der Transitivität sowieso aus den anderen Paaren ergeben würde. Eine derart vollständig reduzierte Relation heißt auch transitive Reduktion einer Halbordnung.

Beispiele: Die folgende Abbildung zeigt Hasse-Diagramme für die beiden endlichen, halbgeordneten Mengen $(\{0, 1, \ldots, 6\}, \leq)$ und $(\{1, \ldots, 11\}, |)$:



$(\{0, 1, \ldots, 6\}, \leq)$ $\qquad$ $(\{1, \ldots, 11\}, |)$

Im Folgenden verwenden wir $x \leq_R y$ für $(x, y) \in R$, falls R eine Halbordnung ist.

Definition 4.9

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$.

1. Ein Element $a \in K$ heißt Minimum (bzw. Maximum) von K, falls $a \leq_R b$ (bzw. $b \leq_R a$) für alle $b \in K$ gilt.
2. Ein Element $a \in A$ heißt untere Schranke (bzw. obere Schranke) von K, falls $a \leq_R b$ (bzw. $b \leq_R a$) für alle $b \in K$ gilt.
3. Ein Element $a \in A$ heißt Infimum (bzw. Supremum) von K, falls a eine untere Schranke (bzw. obere Schranke) von K ist und $b \leq_R a$ (bzw. $a \leq_R b$) für alle unteren Schranken (bzw. oberen Schranken) b von K gilt.

Der Unterschied zwischen einer unteren Schranke von K und einem Minimum von K liegt darin, dass die untere Schranke nicht zur Menge K gehören muss, was für das Minimum verlangt ist. Gleiches gilt natürlich auch für obere Schranken von K und einem Maximum von K. Darüber hinaus sind Minima, Maxima, Infima und Suprema stets eindeutig, falls sie überhaupt existieren.

Proposition 4.10

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$. Existiert das Minimum (Maximum, Infimum, Supremum) von K, so ist es eindeutig.

Beweis: (nur für das Minimum) Es seien $a, a' \in K$ Minima von K. Dann gilt $a \leq_R a'$, da a ein Minimum von K ist, und es gilt $a' \leq_R a$, da a' ein Minimum von K ist. Wegen der Antisymmetrie von $\leq_R$ gilt $a = a'$. Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Die Eindeutigkeit dieser Elemente ermöglicht uns spezielle Notationen einzuführen:

$$\begin{aligned}
\min(K) &\quad \text{steht für das Minimum von } K \\
\max(K) &\quad \text{steht für das Maximum von } K \\
\inf(K) &\quad \text{steht für das Infimum von } K \\
\sup(K) &\quad \text{steht für das Supremum von } K
\end{aligned}$$

Anschaulich ist das Infimum die größte untere Schranke und das Supremum die kleinste obere Schranke. Im Allgemeinen müssen Minimum, Maximum, Infimum und Supremum nicht existieren.

Beispiele: Folgende Beispiele verdeutlichen die Begriffsbildungen.

- $\min(\emptyset)$ und $\max(\emptyset)$ existieren für keine Halbordnung.
- Es sei $A =_{\text{def}} \mathbb{Q}$ und $R =_{\text{def}} \{ (m, n) \mid m \leq n \}$. Für die Mengen

$$\begin{aligned}
K_+ &=_{\text{def}} \{ x \mid 0 < x \} && \subseteq A \\
K_- &=_{\text{def}} \{ x \mid x < 0 \} && \subseteq A
\end{aligned}$$

gelten die folgenden Aussagen:

  - $\min(K_+)$ und $\min(K_-)$ existieren nicht
  - $\max(K_+)$ und $\max(K_-)$ existieren nicht
  - Die Menge der unteren Schranken von K_+ ist $K_- \cup \{0\}$
  - Die Menge der unteren Schranken von K_- ist $\emptyset$
  - Die Menge der oberen Schranken von K_+ ist $\emptyset$
  - Die Menge der oberen Schranken von K_- ist $K_+ \cup \{0\}$
  - $\inf(K_+) = \max(K_- \cup \{0\}) = 0$
  - $\inf(K_-)$ existiert nicht
  - $\sup(K_+)$ existiert nicht
  - $\sup(K_-) = \min(K_+ \cup \{0\}) = 0$
- Wir setzen das vorangehende Beispiel fort. Bei veränderter Grundmenge $A =_{\text{def}} \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sowie unverändertem R, K_+ und K_- gelten die folgenden Aussagen:
  - Die Menge der unteren Schranken von K_+ ist K_-
  - $\inf(K_+)$ existiert nicht, da K_- kein Maximum besitzt
- Für $A =_{\text{def}} \{0, 1, \dots, 10\}$ und $R =_{\text{def}} \{\, (m, n) \mid m \leq n \,\} \subseteq A \times A$ gelten folgende Aussagen:
  - $\inf(\emptyset) = 10$
  - $\sup(\emptyset) = 0$

Definition 4.11

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$. Ein Element $a \in K$ heißt minimal (bzw. maximal) in K, falls für alle $b \in K$ gilt: Ist $b \leq_R a$ (bzw. $b \geq_R a$), so ist $a = b$.

Beispiel: Es seien $A =_{\text{def}} \mathbb{N}$ und $R =_{\text{def}} \{\, (m, n) \mid m \text{ teilt } n \,\} \subseteq A \times A$. Für

$$K_1 =_{\text{def}} \mathbb{N} \quad \text{und} \quad K_2 =_{\text{def}} \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

gelten die Aussagen:

- Die Menge der minimalen Elemente von K_1 ist $\{1\}$
- Die Menge der minimalen Elemente von K_2 ist die Menge der Primzahlen

Proposition 4.12

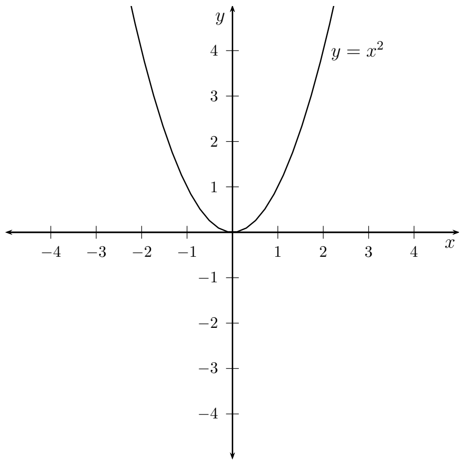
Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung und $K \subseteq A$. Ist $a \in K$ minimal (bzw. maximal) in K, so ist a ein Minimum (bzw. Maximum) von K.

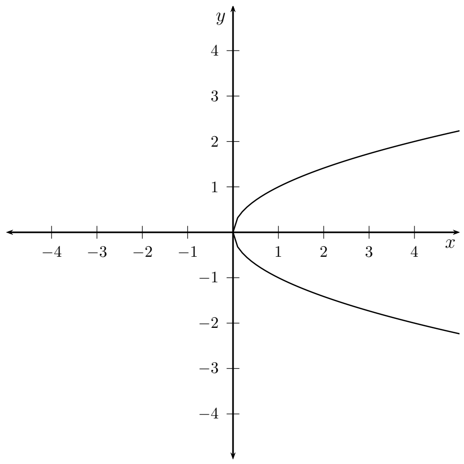
Beweis: (nur für die Minimalität) Es sei $a \in K$ ein minimales Element. Für $b \in K$ gilt $a \leq_R b$ oder $b \leq_R a$ wegen der Totalität von R. Gilt $b \leq_R a$, so folgt $a = b$ (bzw. $a \leq_R b$) wegen der Minimalität von a. Somit gilt in jedem Fall $a \leq_R b$ für alle $b \in K$. Somit ist a das Minimum von K. Damit ist die Proposition bewiesen. ■

4.4 Funktionen und Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir Begriffe ein, die Funktionen, oder synomym Abbildungen, als spezielle Relationen zwischen Mengen von Argumenten und Mengen von Werten charakterisieren.

Beispiel: Das folgende Beispiel soll den relationalen Zugang zur Beschreibung von Funktionen verdeutlichen. Die linke Seite der folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Funktion $f(x) =_{\text{def}} x^2$:





Die Funktion $f(x)$ ist dabei extensional über die Menge der Punkte (x, y), die auf der Kurve liegen, festgelegt. Die intensionale Darstellung der Menge der Kurvenpunkte ist also

$$\{\ (x, y) \mid y = x^2\ \} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Wird die Reihenfolge in den Paaren (bzw. die Achsen des Koordinatensystems) vertauscht, so erhalten wir die auf der rechten Seite dargestellte Kurve und als Menge der Kurvenpunkte:

$$\{\ (y, x) \mid y = x^2\} = \{\ (x, y) \mid y = \sqrt{x} \text{ oder } y = -\sqrt{x}\ \}$$

Diese Menge beschreibt keine Funktion, da für alle $x > 0$ zwei Zuordnungen von Werten existieren.

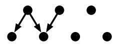
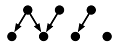
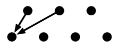
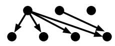
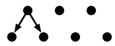
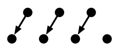
Folgende Eigenschaften extrahieren den relationalen Gehalt des anschaulichen Funktionsbegriffs.

Definition 4.13

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

1. linkstotal $\Longleftrightarrow_{\text{def}} (\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x, y) \in R]$
2. rechtseindeutig $\Longleftrightarrow_{\text{def}}$
   $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)[((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R) \rightarrow y = z]$
3. rechtstotal $\Longleftrightarrow_{\text{def}} (\forall y \in B)(\exists x \in A)[(x, y) \in R]$
4. linkseindeutig $\Longleftrightarrow_{\text{def}}$
   $(\forall x, y \in A)(\forall z \in B)[((x, z) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow x = y]$

Beispiele: Wir überprüfen die Eigenschaften für folgende Relationen über $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$:

Relation		linkstotal	rechtseindeutig	rechtstotal	linkseindeutig
$\{ (1,1), (1,2), (2,2) \}$					
$\{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,3) \}$		X			
$\{ (1,1), (2,1) \}$			X		
$\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4) \}$				X	
$\{ (1,1), (1,2) \}$					X
$\{ (1,1), (2,2), (3,2) \}$		X	X		
$\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \}$				X	X
$\{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$		X	X		X

Definition 4.14

Es sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation.

1. R heißt (totale) Funktion, falls R linkstotal und rechtseindeutig ist.
2. R heißt partielle Funktion, falls R rechtseindeutig ist.

Beispiele: Wir diskutieren an folgenden Relationen die Funktionenbegriffe.

- Die Relation $R =_{\text{def}} \{ (1,1), (2,2), (3,2) \} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ ist eine Funktion.
- Die Relation $R =_{\text{def}} \{ (1,1), (2,1) \} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ ist eine partielle Funktion. Fassen wir R jedoch als Teilmenge von $\{1,2\} \times \{1,2,3,4\}$ auf, so ist R eine Funktion.
- Die Relation $R =_{\text{def}} \{ (x,y) \mid y = |x| \} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ist eine Funktion.
- Die Relation $R =_{\text{def}} \{ (y,x) \mid y = |x| \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ist keine Funktion.
- Die folgende Methode einer in Java implementierten Klasse

```
int gcd(int x, int y) {
    if (y==0) return x;
    if (y>x) return gcd(y,x);
    return gcd(y,x%y);
}
```

  ist eine partielle Funktion als Teilmenge von $\texttt{int}^2 \times \texttt{int}$, wobei wir gcd als Relation $\{ (x,y,z) \mid z = \texttt{gcd}(x,y) \}$ auffassen.

In Java gilt $\text{mod}(-1,-2) = -1$, d.h. (-1) % (-2) wird zu -1 ausgewertet. Damit wird beim Methodenaufruf $\texttt{gcd}(-1,-2)$ erst rekursiv $\texttt{gcd}(-2,-1)$ und dann wieder $\texttt{gcd}(-1,-2)$ aufgerufen. Somit terminiert $\texttt{gcd}(-1,-2)$ nicht, und es gibt folglich kein $z \in \texttt{int}$ mit $(-1,-2,z) \in \texttt{gcd}$. Die Methode ist also nicht linkstotal. Die Rechtseindeutigkeit ist gegeben (wenn der verwendete Java-Compiler und die verwendete *Java Virtual Machine* korrekt sind).

Bisher haben wir Funktionen als binäre Relationen $R \subseteq A \times B$ eingeführt und damit streng genommmen lediglich einstellige Funktionen definiert. Dies ist jedoch keine inhaltliche Einschränkung, da die Mengen A und B hinreichend kompliziert werden können. Dennoch vereinbaren wir Folgendes: Es sei $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ eine n-stellige Relation. Dann heißt R eine k-stellige Funktion, falls die binäre Relation $R \subseteq B \times C$ mit $B = A_1 \times \cdots \times A_k$ und $C = A_{k+1} \times \cdots \times A_n$ eine Funktion ist. Die Begriffsbildung für partielle Funktionen überträgt sich entsprechend.

Für Funktionen werden üblicherweise eigene Schreibweisen verwendet (wie im letzten der obigen Beispiele):

- Funktionen werden häufig klein geschrieben: $f \subseteq A \times B$.
- Statt $f \subseteq A \times B$ schreiben wir auch $f : A \to B$; statt $(a, b) \in f$ schreiben wir auch $f(a) = b$.
- Kompakt notieren wir eine Funktion als $f : A \to B : a \mapsto f(a)$; für den dritten Fall in den obigen Beispielen schreiben wir also z.B. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$.

Bild- und Urbildmengen

Wichtige Begriffe zur Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen sind die Bild- und Urbildmengen.

Definition 4.15

Es seien $f : A \to B$ eine Funktion, $A_0 \subseteq A$ und $B_0 \subseteq B$.

1. Die Menge $f(A_0) \subseteq B$ ist definiert als

$$f(A_0) =_{\text{def}} \{ \ b \mid (\exists a \in A_0)[f(a) = b] \ \} \qquad {}_{\text{def}}= \ \{ \ f(a) \mid a \in A_0 \ \}$$

   und heißt Bild(menge) von A_0 unter f. Die Elemente von $f(A_0)$ heißen Bilder von A_0 unter f.

2. Die Menge $f^{-1}(B_0) \subseteq A$ ist definiert als

$$f^{-1}(B_0) =_{\text{def}} \{ \ a \mid (\exists b \in B_0)[f(a) = b] \ \} \qquad {}_{\text{def}}= \ \{ \ a \mid f(a) \in B_0 \ \}$$

   und heißt Urbild(menge) von B_0 unter f. Die Elemente von $f^{-1}(B_0)$ heißen Urbilder von B_0 unter f.

Beispiele: Wir verdeutlichen Bilder und Urbilder exemplarisch.

- Es sei die Funktion $f =_{\text{def}} \{ \ (1,1),(2,2),(3,2) \ \} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ gegeben. Unter anderem können folgende Bildmengen gebildet werden:

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &= \{1\} \\ f(\{1,2\}) &= \{1,2\} \\ f(\{1,2,3\}) &= \{1,2\} \end{aligned}$$

Beispiele für Urbildmengen sind unter anderem:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{1\} \\ f^{-1}(\{1,2\}) &= \{1,2,3\} \\ f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

- Es sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$ gegeben. Die Bildmenge das ganzzahligen Intervalls $[-1, 1]$ unter f ist:

  $$f([-1,1]) = f(\{-1,0,1\}) = \{0,1\}$$

  Die Urbildmengen zu $\{2\}$ und $[2, 4]$ unter f sind wie folgt:

  $$\begin{aligned} f^{-1}(\{2\}) &= \{-2,2\} \\ f^{-1}([2,4]) &= \{-4,-,3,-2,2,3,4\} \end{aligned}$$

Proposition 4.16

Es seien A und B endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gilt:

$$|A| = \sum_{b \in B} \left| f^{-1}(\{b\}) \right|$$

Beweis: Da f eine Funktion ist, bildet die Mengenfamilie $\{ f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B \}$ eine Partition von A. Damit folgt

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})|$$

und die Proposition ist bewiesen. ■

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Funktionen werden danach klassifiziert, welche Eigenschaften sie zusätzlich zur Linkstotalität und Rechtseindeutigkeit erfüllen.

Definition 4.17

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

1. surjektiv $\Longleftrightarrow_{\text{def}}$ f ist rechtstotal
2. injektiv $\Longleftrightarrow_{\text{def}}$ f ist linkseindeutig
3. bijektiv $\Longleftrightarrow_{\text{def}}$ f ist rechtstotal und linkseindeutig

Beispiele: Folgende Funktionen verdeutlichen die Begriffsbildung.

- Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x^3$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

- Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto -x$ ist bijektiv.

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus den Definition der Funktioneneigenschaften. Der Beweis bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Lemma 4.18

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gilt:

1. f ist surjektiv $\iff (\forall b \in B)\left[\ \left|f^{-1}(\{b\})\right| \geq 1\ \right]$
2. f ist injektiv $\iff (\forall b \in B)\left[\ \left|f^{-1}(\{b\})\right| \leq 1\ \right]$
3. f ist bijektiv $\iff (\forall b \in B)\left[\ \left|f^{-1}(\{b\})\right| = 1\ \right]$

Während das vorangegangene Lemma eine Charakterisierung der Eigenschaften für eine konkrete Funktion angibt, stellt Theorem 4.19 eine Beziehung zwischen Mengen mit Hilfe von Funktioneneigenschaften her. Das durch das Theorem beschriebene Abzählprinzip ist eine fundamentale Technik beim Lösen kombinatorischer Fragestellungen.

Theorem 4.19

Es seien A und B nicht-leere, endliche Mengen. Dann gilt:

1. Es gibt eine surjektive Funktion $f : A \to B \iff |A| \geq |B|$
2. Es gibt eine injektive Funktion $f : A \to B \iff |A| \leq |B|$
3. Es gibt eine bijektive Funktion $f : A \to B \iff |A| = |B|$

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenzen im Block.

$\Leftarrow$: Es seien $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ endliche Mengen. Wir definieren eine Funktion $f : A \to B$ wie folgt für $a_i \in A$:

$$f(a_i) =_{\text{def}} \begin{cases} b_i & \text{falls } i \leq m \\ b_1 & \text{falls } i > m \end{cases}$$

Dann gelten folgende Aussage in Abhängigkeit von A und B:

1. Ist $|A| \geq |B|$, d.h. $n \geq m$, so ist f surjektiv
2. Ist $|A| \leq |B|$, d.h. $n \leq m$, so ist f injektiv
3. Ist $|A| = |B|$, d.h. $n = m$, so ist f bijektiv

$\Rightarrow$: Es sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Ist f surjektiv, so gilt nach Proposition 4.16 und Lemma 4.18.1:

$$|A| = \sum_{b \in B} \left|f^{-1}(\{b\})\right| \geq \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

2. Ist f injektiv, so gilt nach Proposition 4.16 und Lemma 4.18.2:

$$|A| = \sum_{b \in B} \left|f^{-1}(\{b\})\right| \leq \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

3. Ist f bijektiv, so gilt nach Proposition 4.16 und Lemma 4.18.3:

$$|A| = \sum_{b \in B} \left|f^{-1}(\{b\})\right| = \sum_{b \in B} 1 = |B|$$

Damit ist das Theorem bewiesen ■

Theorem 4.20

Es seien A und B endliche Mengen mit $|A| = |B| > 0$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist surjektiv
2. f ist injektiv
3. f ist bijektiv

Die logische Struktur des Theorems besagt, dass entweder alle Aussagen gelten oder keine.

Beweis: Wir zeigen die paarweise Äquivalenz aller Aussagen über einzelne Implikationen.

- 3. $\Rightarrow$ 1.: Ist f bijektiv, so ist f surjektiv (nach Definition).
- 3. $\Rightarrow$ 2.: Ist f bijektiv, so ist f injektiv (nach Definition).
- 1. $\Rightarrow$ 3.: Es sei f surjektiv, d.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| \geq 1$ (nach Lemma 4.18.1). Dann gilt nach Proposition 4.16 und der Voraussetzung:

  $$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \geq |B| = |A|$$

  Somit gilt $|f^{-1}(\{b\})| = 1$ für alle $b \in B$. Folglich ist f bijektiv (nach Lemma 4.18.3).
- 2. $\Rightarrow$ 3.: Es sei f injektiv, d.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| \leq 1$ (nach Lemma 4.18.2). Dann gilt nach Proposition 4.16 und der Voraussetzung:

  $$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \leq |B| = |A|$$

  Somit gilt $|f^{-1}(\{b\})| = 1$ für alle $b \in B$. Folglich ist f bijektiv (nach Lemma 4.18.3).

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Invertierbarkeit

Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ definieren wir die Umkehrrelation $R^{-1} \subseteq B \times A$ wie folgt:

$$R^{-1} =_{\text{def}} \{\ (y, x) \mid (x, y) \in R\ \}$$

Die folgende Proposition ist einfach an Hand der Definitionen einzusehen.

Proposition 4.21

Es sei R eine binäre Relation. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. R ist linkstotal $\iff$ R^{-1} ist rechtstotal
2. R ist rechtseindeutig $\iff$ R^{-1} ist linkseindeutig
3. R ist rechtstotal $\iff$ R^{-1} ist linkstotal
4. R ist linkseindeutig $\iff$ R^{-1} ist rechtseindeutig

Korollar 4.22

Ist f eine bijektive Funktion, so ist die Umkehrrelation f^{-1} eine bijektive Funktion.

Definition 4.23

Eine Funktion f heißt invertierbar (umkehrbar), falls die Umkehrrelation f^{-1} eine Funktion ist.

Korollar 4.24

Eine Funktion f ist genau dann invertierbar, wenn f bijektiv ist.

Hintereinanderausführung

Eine wichtige Operation auf Funktionen ist die Hintereinanderausführung (oder auch Verkettung, Superposition oder Komposition in anderen Zusammenhängen): Für Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ definieren wir die Funktion $g \circ f : A \to C$ wie folgt für alle $x \in A$:

$$(g \circ f)(x) =_{\text{def}} g(f(x))$$

Beispiele: Wir beleuchten im Folgenden Aspekte der Hintereinanderausführung exemplarisch.

- Für die beiden Funktionen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \mapsto 2^x$ gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = 2^{(x^2)} = 2^{x^2}\\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}\end{aligned}$$

  Mithin gilt $g \circ f \neq f \circ g$, denn wir erhalten $(g \circ f)(3) = 2^9 = 512$ und $(f \circ g)(3) = 2^6 = 64$.

- Wodurch unterscheiden sich Klassen- und Instanzenmethoden in Java (ohne Nebeneffekte) mathematisch? Zur Veranschaulichung sei dazu eine Methode `method` einerseits als Klassenmethode

```
public static int method (int x, int y)
```

  und andererseits als Instanzenmethode

```
public int method (int x, int y)
```

  deklariert. Im ersten Fall beschreibt die Methode eine Funktion

$$\texttt{method} : \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}.$$

  Im zweiten Fall dagegen wird eine Funktion

$$\texttt{method} : S \times \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int}$$

  beschrieben, wobei S für die Menge der verfügbaren Speicheradressen steht. Bei der Instanziierung eines Objektes `obj` aus der entsprechenden Klasse ordnet die *Java Virtual Machine* eine Adresse $s(\texttt{obj}) \in S$ zu, d.h. die Instanzenmethode wird dann zu einer Funktion

$$\texttt{obj.method} : \texttt{int} \times \texttt{int} \to \texttt{int} : (x, y) \mapsto \texttt{method}(s(\texttt{obj}), x, y)$$

  als Hintereinanderausführung der Funktionen s und `method`.

Proposition 4.25

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Funktionen.

1. Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
2. Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.
3. Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

Beweis: Wir zeigen die Aussagen einzeln.

1. Es seien f und g injektive Funktionen. Wir müssen zeigen, dass $g \circ f$ linkseindeutig ist. Dazu seien $x, y \in A$ beliebig mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \in C$. Da g injektiv ist, folgt aus $g(f(x)) = g(f(y))$ die Gleichheit $f(x) = f(y)$. Da auch f injektiv ist, folgt aus $f(x) = f(y)$ wiederum die Gleichheit $x = y$. Mithin ist $g \circ f$ linkseindeutig und also injektiv.

2. Es seien f und g surjektive Funktionen. Wir müssen zeigen, dass $g \circ f$ rechtstotal ist. Es sei $x \in C$ beliebig. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$ mit $y \in g^{-1}(\{x\}) \subseteq B$, d.h. $g(y) = x$. Da auch f surjektiv ist, gibt es ein $z \in A$ mit $z \in f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$, d.h. $f(z) = y$. Insgesamt erhalten wir also

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(y) = x.$$

   Somit gilt $|(g \circ f)^{-1}(\{x\})| \geq 1$ für alle $x \in C$. Mithin ist $g \circ f$ surjektiv (nach Lemma 4.18.1).

3. Direkte Folgerung aus der ersten und der zweiten Aussage dieser Proposition.

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Für eine Menge A heißt die Funktion $\mathrm{id}_A : A \to A : x \mapsto x$ Identitätsfunktion von A.

Proposition 4.26

Es sei $f : A \to B$ eine bijektive Funktion. Dann gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

Beweis: Es genügt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ zu zeigen (da wir f und f^{-1} vertauschen können). Es gilt $f^{-1} \circ f : A \to A$ wegen $f : A \to B$ und $f^{-1} : B \to A$. Außerdem gilt $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$, da f bijektiv ist. Somit gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$, d.h. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Damit ist die Proposition bewiesen. ■