Spezialfall: Induktion über die Struktur von $\mathbb{N}$ (vollständige Induktion von $n-1$ nach n)

Proposition: Für alle nat. Zahlen n gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: Induktion von $n-1$ nach n

(IA): $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^0 \cdot 0^2 = 0$

$$= (-1)^0 \cdot \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

(IS): $n>0$: D.h. $n = (n-1)+1$. Wir nehmen an, die Aussage gilt bereits für $n-1$ (IV)

Somit gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot k^2 + (-1)^n n^2$$

$$\overset{(IV)}{=} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + (-1)^n \cdot n^2$$

$$= (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n^2\right)$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{2n^2 - (n-1) \cdot n}{2}\right)$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{n \cdot (2n - (n-1))}{2}\right)$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{n \cdot (2n - n + 1)}{2}\right)$$

$$= (-1)^n \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right) \qquad \square$$

2. Elementare Logik

2.1 Aussagen

Definition 1 Eine (mathematische) Aussage ist ein sprachlicher Ausdruck (Satz) dem eindeutig der Wahrheitswert „wahr" oder „falsch" zugeordnet werden kann

Beschreibung

$X =_{def}$ „Beschreibung"

Beispiele:

① $A =_{def}$ „Zu jeder nat. Zahl gibt es eine Primzahl, die größer ist" ist eine wahre Aussage

② $B =_{def}$ „Zu jeder nat. Zahl gibt es eine Primzahl, die kleiner ist" ist eine falsche Aussage

③ $C =_{def}$ „Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen" ist eine Aussage; Wahrheitswert offen (Goldbachsche Vermutung)

④ $D =_{def}$ „Diese Aussage ist falsch" ist keine Aussage: Ist D wahr, so ist D falsch; Ist D falsch, so ist D wahr

2.2 Logische Verknüpfungen

- Aussagen mittels log. Operationen verknüpfen
- unverknüpfte Aussagen heißen Elementaraussagen (oder aussagenlog. Variablen)
- verknüpfte Aussagen heißen zusammengesetzte Aussagen (oder aussagenlog. Formeln)