Anna-Maria Pippich
Wintersemester 2023/24 Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Vorkurs Mathematik
Blatt 8

Besprechung der Lösungen am 28.09.2023 in den Übungen

Hinweis: Sie dürfen bei Ihren Beweisen die bewiesenen Aussagen aus den Vorlesungen und auch folgende Aussage als bekannt voraussetzen:

> *Satz (Division mit Rest)*: Es seien a, b natürliche Zahlen mit $b \neq 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen q, $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < b$ mit $a = q \cdot b + r$.

Aufgabe 1

Es seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$ derart, dass die Zahl $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + 1$ durch 3 teilbar ist. Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

(a) Keine der Zahlen a_1, a_2, a_3 ist durch 3 teilbar.

(b) Mindestens eine der Zahlen $a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1$ ist durch 3 teilbar.

(c) *Bonusaufgabe:* Zeigen Sie, dass analoge Aussagen gelten, wenn Sie k ($k \in \mathbb{N}$) Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ betrachten, so dass die Zahl $a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2

Stellen Sie die folgenden Ausdrücke in Baumform dar:

(i) $(\{1,3,5\} \cup ((\{2,4,6\} \setminus (\{1,2,3\} \cup \{5,6,7\})) \cap \{1,4,5\})) \cap (((\{2,4\} \cup \{5,6\}) \setminus \{2,6\}) \setminus \{1,3,5\})$.

(ii) $(((\{1\} \cup \{2\}) \cup \{3\}) \cup \{4\}) \setminus (\{1,2,3,4\} \setminus (\{1,2,3\} \setminus (\{1,2\} \setminus \{1\})))$.

Um welche Mengenoperation handelt es sich jeweils?

Aufgabe 3

Es seien A und B Aussagen. Stellen Sie die folgenden Ausdrücke in Baumform dar:

(i) $(A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow B))) \Rightarrow ((B \wedge A) \wedge (B \Rightarrow A))$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : (x \cdot y = 0) \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.

Um welchen Aussagetyp handelt es sich jeweils?

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe)

Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid und Aufgabe 1(c), um zu zeigen, dass es sogar in der folgenden Menge

$$2 + 3 \cdot \mathbb{N} := \{2 + 3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{5, 8, 11, \dots\}$$

natürlicher Zahlen unendlich viele Primzahlen gibt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ in der Menge $2 + 3 \cdot \mathbb{N}$ gibt, und betrachten Sie die natürliche Zahl

$$a := 3 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_n - 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1(c), dass es dann eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ gibt mit $p|a$ und $p \in 2 + 3 \cdot \mathbb{N}$.