5.5 Weitere Abzählprinzipien

1. Das Inklusions-Exklusionsprinzip:

Verallg. d. Summenregel auf nicht-disj. Mengen.

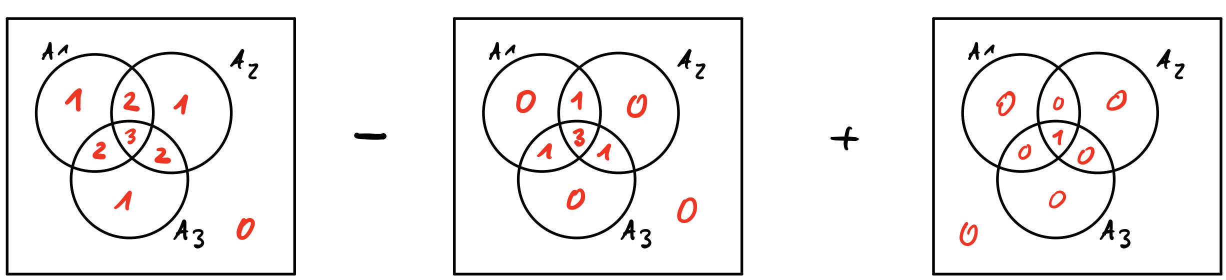
Satz 16. (Inklusion-Exklusion)

Es seien $A_1, \dots, A_n$ endl. Mengen. Dann gilt:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|K|} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} A_k \right|$$

Beispiele:

- $n=2$: $|A_1 \cup A_2| = \overset{\{1\}}{|A_1|} + \overset{\{2\}}{|A_2|} - \overset{\{1,2\}}{|A_1 \cap A_2|}$
- $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \overset{\{1\}}{|A_1|} + \overset{\{2\}}{|A_2|} + \overset{\{3\}}{|A_3|}$
$$- \overset{\{1,2\}}{|A_1 \cap A_2|} - \overset{\{1,3\}}{|A_1 \cap A_3|} - \overset{\{2,3\}}{|A_2 \cap A_3|}$$
$$+ \overset{\{1,2,3\}}{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|}$$



Beweis: Bestimmen, wie oft jedes Element auf beiden Seiten d. Gleichung gezählt wird. Es sei $x \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

- Linke Seite: x wird in $\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$ nur einmal gezählt
- Rechte Seite: Müssen zeigen, dass x auch nur einmal gezählt wird. Es sei $\ell =_{\text{def}} |\{j \mid x \in A_j\}|$; o.B.d.A. komme x in $A_1, \dots, A_\ell$ vor. Dann gilt:

  (i) Für $\emptyset \neq K \subseteq \{1,\dots,\ell\}$ trägt x genau $(-1)^{1+|K|}$ zur rechten Seite bei

  (ii) Für alle anderen Menge K trägt x genau 0 zur rechten Seite bei

  Somit folgt für Beitrag von x zur rechten Seite:

$$\sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\dots,\ell\}} (-1)^{1+|K|} = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{1+k}$$

$$= - \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{k}$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{k}}_{=0 \ (\text{Kor. } 10)} = 1$$

■

<u>Beispiel</u>: Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 2 und 100? Bestimmen dazu die zusammengesetzten Zahlen zwischen 2 und 100 mit Hilfe d. Inkl.-Exkl.

Es sei $A =_{\text{def}} \{2, 3, \dots, 100\}$.
Eine Zahl $m \in A$ ist zusammengesetzt, falls $m = p \cdot n$ für geeignete $p, n \in A$, wobei p eine Primzahl mit $p \leq \sqrt{100} = 10$ ist.
D.h. es genügt $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ und $p_4 = 7$ zu betrachten.

Für $i \in \{1,2,3,4\}$ definieren wir

$$A_i =_{def} \{ x \in A \mid (\exists n \in A)[x = p_i \cdot n] \}$$

($A_i \hat{=}$ Menge der Vielfachen von p_i in A)

Damit gilt:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ist Menge d. zusammeng. Zahlen in A
- Kardinalitäten d. Schnittmengen:

$$|A_i| = \left\lfloor \frac{100}{p_i} \right\rfloor - 1 \qquad (\text{da } p_i \notin A_i)$$

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| = \left\lfloor \frac{100}{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}} \right\rfloor \qquad \text{für } k \in \{2,3,4\}$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 4$$

Nach Satz 16 gilt:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - 1 \right)$$

$$- \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor \right)$$

$$+ \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \right)$$

$$- \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor$$

$$= 49 + 32 + 19 + 13 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0$$

$$= 74$$

D.h. es gibt $99 - 74 = 25$ Primzahlen zwischen 2 und 100.

2. Der Schubfachschluss

Satz 17. (Schubfachschluss)

Es seien A, B endl. Mengen mit $|A| > |B| > 0$ und $f: A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $|f^{-1}(\{y\})| > 1$.

Beweis: (Kontraposition)

Gilt $|f^{-1}(\{y\})| \leq 1$ für alle $y \in B$, so ist f injektiv (Lemma 4.18).
Mithin gilt $|A| \leq |B|$ (Satz 4.18) ■