<u>Schreibweisen v. Permutationen:</u>

(i) <u>Matrixschreibweise:</u>

Permutation $\pi : [n] \to [n]$ wird als $2 \times n$ - Matrix geschrieben:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel:</u> $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) <u>Tupelschreibweise:</u>

Im Prinzip genügt zweite Zeile d. Matrixschreibweise:

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$$

(iii) <u>Zyklenschreibweise:</u>

Betrachten für $x \in [n]$ iterierte Hintereinanderausführung von π auf x, d.h. die Folge

$$\begin{aligned} \pi^0(x) &=_{\text{def}} x \\ \pi^1(x) &=_{\text{def}} \pi(x) \\ \pi^2(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi(x)) \\ &\vdots \\ \pi^k(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi^{k-1}(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für jedes $x \in [n]$ gibt es dann ein minimales $0 < k \le n$ mit $\pi^k(x) = x$.

<u>Beispiel:</u> Für $\pi = (\overset{\substack{1\\ \downarrow}}{4}, \overset{\substack{2\\ \downarrow}}{1}, \overset{\substack{3\\ \downarrow}}{6}, \overset{\substack{4\\ \downarrow}}{2}, \overset{\substack{5\\ \downarrow}}{5}, \overset{\substack{6\\ \downarrow}}{3})$ gilt:

- $\pi^0(1) = 1$, $\pi^1(1) = 4$, $\pi^2(1) = \pi(4) = 2$, $\pi^3(1) = \pi(2) = 1$
- $\pi^0(2) = 2$, $\pi^1(2) = 1$, $\pi^2(2) = 4$, $\pi^3(2) = 2$
- $\pi^0(3) = 3$, $\pi^1(3) = 6$, $\pi^2(3) = 3$

- $\pi^0(4)=4$, $\pi^1(4)=2$, $\pi^2(4)=1$, $\pi^3(4)=4$
- $\pi^0(5)=5$, $\pi^1(5)=5$
- $\pi^0(6)=6$, $\pi^1(6)=3$, $\pi^2(6)=6$

Folge $x, \pi(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{k-1}(x)$ mit minimalem $k>0$, sodass $\pi^k(x)=x$, heißt Zyklus der Länge k und wird als $(x\ \ \pi(x)\ \ \pi^2(x)\ \ \dots\ \ \pi^{k-1}(x))$ geschrieben.

Beispiel: $\pi=(4,1,6,2,5,3)$ enthält Zyklen $(1\ 4\ 2)$, $(3\ 6)$, (5).

Jede Permutation kann als Produkt v. Zyklen geschrieben werden, indem Zyklen konkateniert werden.

Beachte: Schreibweise nicht eindeutig; insb. kann Zyklus d. Länge k auf genau k Arten geschrieben werden

Beispiel:
$$\begin{aligned}(4,1,6,2,5,3) &= (1\ 4\ 2)(3\ 6)(5)\\ &= (4\ 2\ 1)(6\ 3)(5)\\ &= (5)(2\ 1\ 4)(6\ 3)\end{aligned}$$

Anzahl d. Zyklen f. Permutationen liegt zwischen 1, wie in $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$, und n, wie in $(1)(2)\cdots(n)$.

Es sei $\left[{n \atop k}\right]$ (manchmal auch $s_{n,k}$) die Anzahl d. Perm. von n Elementen mit genau k Zyklen. Dann gilt also
$$\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$$
Die Zahlen $\left[{n \atop k}\right]$ heißen Stirling-Zahlen erster Art.

Sonderfälle:
- $k>n$: $\left[{n \atop k}\right]=0$ (Perm. kann höchstens n Zyklen enth.)

- $n > 0$: $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ (einen Zyklus muss es geben)
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} =_{def} 1$

Satz 15. (Stirling-Dreieck erster Art)
Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Beweis: (kombinatorisch)
Es sei π eine Perm. v. $[n]$ mit k Zyklen. Dann kann π auf zwei Arten aus Perm. v. $[n-1]$ entstehen:

(i) Hinzufügen v. Zyklus (n) zu Perm. mit $k-1$ Zyklen
(ii) Einfügen v. n in einen der Zyklen einer Perm. mit k Zyklen

Beide Fälle sind disjunkt. Anzahl d. Möglichkeiten:

(i) $1 \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

(ii) $(n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ (für Einf. in Zyklus d. Länge t gibt es t Möglichkeiten)

Insgesamt: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ $\blacksquare$

Beispiel: Es gibt 6 Perm. v. $[4] = \{1,2,3,4\}$ mit 3 Zyklen

$(1)(2\ 3)(4)$	$(1\ 4)(2)(3)$
$(2)(1\ 3)(4)$	$(1)(2\ 4)(3)$
$(3)(1\ 2)(4)$	$(1)(2)(3\ 4)$

Aufbau Stirling-Dreieck erster Art:

$$\begin{array}{lllllllll}
n=0 \to & & & & & 1 & & & \\
n=1 \to & & & & 0 & 1 & & & \\
n=2 \to & & & 0 & 1 & 1 & & & \\
n=3 \to & & 0 & 2 & 3 & 1 & & & \\
n=4 \to & 0 & 6 & 11 & 6 & 1 & & & \\
n=5 \to & 0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 & &
\end{array}$$

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$, $k=5$

$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} (n-1)!$

Anmerkung:

Stirling-Zahlen stellen Zshg. zwischen Monomen x^n und fallenden Faktoriellen $x^{\underline{n}}$ her:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

5.5 Weitere Abzählprinzipien

1. Das Inklusions-Exklusionsprinzip:

Verallg. d. Summenregel auf nicht-disj. Mengen.

Satz 16. (Inklusion-Exklusion)

Es seien $A_1, \dots, A_n$ endl. Mengen. Dann gilt:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{1+|K|} \cdot \left| \bigcap_{k \in K} A_k \right|$$

Beispiele:

- $n=2$: $$|A_1 \cup A_2| = \overset{\{1\}}{|A_1|} + \overset{\{2\}}{|A_2|} - \overset{\{1,2\}}{|A_1 \cap A_2|}$$

- $n=3$: $$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \overset{\{1\}}{|A_1|} + \overset{\{2\}}{|A_2|} + \overset{\{3\}}{|A_3|} \\ &\quad - \overset{\{1,2\}}{|A_1 \cap A_2|} - \overset{\{1,3\}}{|A_1 \cap A_3|} - \overset{\{2,3\}}{|A_2 \cap A_3|} \\ &\quad + \overset{\{1,2,3\}}{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|} \end{aligned}$$