Anna-Maria Pippich
Wintersemester 2023/24

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Vorkurs Mathematik
Blatt 5

Besprechung der Lösungen am 25.09.2023 in den Übungen

Aufgabe 1

Wir sagen, dass eine natürliche Zahl b eine natürliche Zahl a teilt, in Zeichen: $b \mid a$, wenn es eine natürliche Zahl c mit $a = b \cdot c$ gibt. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

(i) $\forall a \in \mathbb{N} \, \exists b \in \mathbb{N} : b \mid a.$

(ii) $\exists b \in \mathbb{N} \, \forall a \in \mathbb{N} : b \mid a.$

(iii) $\forall b \in \mathbb{N} \, \exists a \in \mathbb{N} : b \mid a.$

(iv) $\exists a \in \mathbb{N} \, \forall b \in \mathbb{N} : b \mid a.$

Aufgabe 2

Negieren Sie folgende Aussagen zunächst (mündlich) umgangssprachlich:

(i) Für jede natürliche Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m mit $m > n$.

(ii) Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass es eine natürliche Zahl m mit $m > n$ gibt.

(iii) Für alle natürlichen Zahlen n und alle natürlichen Zahlen m gilt $m > n$.

(iv) Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass für alle natürlichen Zahlen m die Ungleichung $m > n$ gilt.

(v) Für jede natürliche Zahl a und jede natürliche Zahl c gibt es eine natürliche Zahl b mit $a = b + c$.

(vi) Es gibt eine natürliche Zahl a, so dass für jede natürliche Zahl c eine natürliche Zahl b mit $a = b + c$ existiert.

Schreiben Sie dann die Aussagen und ihre Negationen jeweils auch mit Quantoren auf. Welche dieser Negationen sind wahr?

Aufgabe 3

In einem sagenumwobenen Zoologiebuch steht geschrieben:

> Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig.
> Es gibt sowohl dorige als auch undorige Kalupen.

Welche der folgenden Schlüsse können über die beschriebene Fauna gezogen werden?

(i) Es gibt sowohl gebrochselte als auch ungebrochselte Kalupen.

(ii) Es gibt gebrochselte Kalupen.

(iii) Alle nicht dorigen Kalupen sind unfoberant.

(iv) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

(v) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie (wie in der Vorlesung), dass für Mengen M, N, O gilt:

  (i) $M \cup N = N \cup M$,

  (ii) $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$,

  (iii) $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$.

(b) Zeigen Sie, dass für Mengen M, N, U mit $M, N \subseteq U$ gilt:

  (i) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$,

  (ii) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$.

  Hierbei bezeichnet A^c das Komplement $U \setminus A$ der Teilmenge $A \subseteq U$ bzgl. U.