5 Kombinatorik

Der Schwerpunkt in diesem einführenden Kapitel über Kombinatorik liegt auf dem Abzählen endlicher Mengen.

Beispiel: Wie viele verschiedene logische Gatter mit 2 Eingängen (Fan-in) und 1 Ausgang (Fan-out) gibt es? Die folgende Übersicht gibt alle 16 möglichen booleschen Funktionen an, die sich durch logische Gatter berechnen lassen (siehe auch Kapitel 2):

Nr.	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	Name(n)	Formel (mit Literalen)
f_0^2	0	0	0	0	Kontradiktion, 0	$x_1 \wedge \neg x_1$
f_1^2	0	0	0	1	Konjunktion, AND	$x_1 \wedge x_2$
f_2^2	0	0	1	0	Inhibition von x_1	$x_1 \wedge \neg x_2$
f_3^2	0	0	1	1	Identität von x_1	x_1
f_4^2	0	1	0	0	Inhibition von x_2	$\neg x_1 \wedge x_2$
f_5^2	0	1	0	1	Identität von x_2	x_2
f_6^2	0	1	1	0	Antivalenz, XOR	$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$
f_7^2	0	1	1	1	Disjunktion, OR	$x_1 \vee x_2$
f_8^2	1	0	0	0	Peirce-Funktion, NOR	$\neg x_1 \wedge \neg x_2$
f_9^2	1	0	0	1	Äquivalenz	$(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$
f_{10}^2	1	0	1	0	Negation von x_2	$\neg x_2$
f_{11}^2	1	0	1	1	Replikation	$x_1 \vee \neg x_2$
f_{12}^2	1	1	0	0	Negation von x_1	$\neg x_1$
f_{13}^2	1	1	0	1	Implikation	$\neg x_1 \vee x_2$
f_{14}^2	1	1	1	0	Sheffer-Funktion, NAND	$\neg x_1 \vee \neg x_2$
f_{15}^2	1	1	1	1	Tautologie, 1	$x_1 \vee \neg x_1$

Mit Hilfe einfacher Grundregeln des Abzählens lassen sich die Anzahlen für logische Gatter mit n Eingängen bestimmen.

5.1 Grundregeln des Abzählens

Lemma 5.1 (Gleichheitsregel; Theorem 4.19.3)

Es seien A und B endliche Mengen. Es gibt genau dann eine Bijektion $f : A \to B$, wenn $|A| = |B|$ gilt.

Lemma 5.2 (Summenregel)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

Beweis: Wegen der paarweisen Disjunktheit der Mengen kommt jedes Element aus $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ in genau einer Menge A_j vor. ■

Lemma 5.3 (Produktregel)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{j=1}^{n} |A_j|$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über die Anzahl n der Mengen.

- Induktionsanfang $n = 1$: Offensichtlich.
- Induktionsschritt $n > 1$: Es sei seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Wir setzen

$$\begin{aligned} A^* &=_{\text{def}} A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \\ B_y &=_{\text{def}} \{\, (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A^* \,\} \qquad \text{für } y \in A_n \end{aligned}$$

Für die so definierten Mengen gelten folgende Eigenschaften:

(i) Die Mengenfamilie $\{\, B_y \mid y \in A_n \,\}$ ist eine Partition von $A_1 \times \cdots \times A_n$.

(ii) Für jedes $y \in A_n$ ist die Funktion

$$f_y : B_y \to A^* : (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

eine Bijektion, d.h. $|B_y| = |A^*|$ für alle $y \in A_n$ (nach Lemma 5.1).

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|A_1 \times \cdots \times A_n| &= \left|\bigcup_{y \in A_n} B_y\right| && \text{(nach Eigenschaft (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} |B_y| && \text{(nach Lemma 5.2 und Eigenschaft (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} |A^*| && \text{(nach Lemma 5.1 und Eigenschaft (ii))} \\
&= |A^*| \cdot |A_n| \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n-1} |A_j|\right) \cdot |A_n| && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \prod_{j=1}^{n} |A_j|
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Lemma 5.4 (Potenzregel)

Es seien A und B endliche Mengen mit $|A| = m$ und $|B| = n$. Dann existieren genau n^m Funktionen $f : A \to B$.

Beweis: Nach Lemma 5.1 dürfen wir $A = \{1, \ldots, m\}$ ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen. Jeder Funktion $f : A \to B$ kann nun eineindeutig (injektiv) ein Tupel $(f(1), \ldots, f(m)) \in B^m$ zugeordnet werden. Außerdem entspricht jedes Tupel (die Wertetabelle) $(y_1, \ldots, y_m) \in B^m$ einer Funktion $f : A \to B : j \mapsto y_j$. Damit ist die Zuordnung sowohl injektiv als auch surjektiv, also eine Bijektion. Aus Lemma 5.1 und Produktregel (Lemma 5.3) folgt somit

$$|\{\ f \mid f : A \to B\ \}| = |B^m| = |B|^m = n^m.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Beispiel: Wie viele logische Gatter mit n Eingängen bzw. boolesche Funktionen mit n Variablen gibt es? Die Antwort lautet $|\{\ f \mid f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\ \}| = 2^{2^n}$. (Für $n = 2$ ergeben sich gerade die am Anfang des Kapitels gelisteten 16 Funktionen.)

Korollar 5.5

Für endliche Mengen A mit $|A| = n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweis: Wir konstruieren eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und der Menge der Funktionen $f : A \to \{0, 1\}$. Dazu definieren wir für eine Menge $B \in \mathcal{P}(A)$ die Funktion:

$$c_B : A \to \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Diese Zuordnung ist offensichtlich eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und der Menge der Funktionen $f : A \to \{0, 1\}$. Nach der Potenzregel (Lemma 5.4) und Lemma 5.1 gilt folglich

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{ f \mid f : A \to \{0, 1\} \}| = 2^n.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Die im Beweis von Korollar 5.5 angegebenen Funktionen haben einen Namen: Für eine Menge $B \subseteq A$ heißt c_B die charakteristische Funktion von B.

5.2 Urnenmodelle

Urnenmodelle stellen ein exemplarisches Szenario für kombinatorische Problemstellungen dar. Die einfachste Situation ist die folgende: In *einer* Urne (daher: einfache Urnenmodelle) liegen *n unterscheidbare* Kugeln, von den *k* Kugel gezogen werden dürfen. Die zu beantwortende Frage ist dann: Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese *k* Kugeln zu ziehen? Zur Präzisierung des Szenarios werden Unterschiede danach gemacht, ob

- die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eine Rolle spielt,
- gezogene Kugeln wieder zurückgelegt werden.

Damit ergeben sich vier verschiedene Szenarios.

Beispiele: Wir geben für vier Beispiele die Szenarien an:

- Die Anzahl der Ziehungen der Lotto-Zahlen „6 aus 49“ entspricht der Anzahl der Ziehungen von 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge.
- Die Anzahl der vierstelligen PIN-Codes entspricht der Anzahl der Ziehungen von 4 Kugeln aus einer Urne mit 10 Kugeln (Ziffern) mit Zurücklegen und mit Reihenfolge.
- Die Anzahl der Siegerehrungen mit Gold-, Silber- und Bronzemedaillen bei einem Wettkampf mit 8 Startern entspricht dem Ziehen von 3 Kugeln aus einer Urne mit 8 Kugeln ohne Zurücklegen und mit Reihenfolge.
- Die Anzahl verschiedener Stimmenverteilungen auf 3 zur Wahl stehenden Kandidaten mit 100 Wählern entspricht dem Ziehen von 100 Kugeln aus einer Urne mit 3 Kugeln mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge.

Theorem 5.6

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln auszuwählen, ist durch folgende Tabelle gegeben:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge	n^k	$(n)_k =_{\text{def}} \dfrac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\dbinom{n+k-1}{k}$	$\dbinom{n}{k} =_{\text{def}} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Die im Theorem mitdefinierten Größen $(n)_k$ und $\binom{n}{k}$ heißen fallende Faktorielle von n der Länge k sowie Binomialkoeffizient („n über k“).

Beweis: Wir beweisen alle Fälle einzeln, aber aufeinander aufbauend:

1. Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge: Für die erste gezogene Kugel gibt es n Möglichkeiten, für die zweite gezogene Kugel gibt es ebenfalls n Möglichkeiten unabhängig davon, welche Kugel vorher gezogen wurde. Für die k-te gezogene Kugel gibt es weiterhin n Möglichkeiten unabhängig davon, welche Kugeln vorher gezogen wurden. Insgesamt gibt es damit

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \;\cdots\; \cdot n}_{k-\text{mal}} = n^k$$

Möglichkeiten. (Alternativ: Eine Ziehung entspricht einer Funktion $f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$, wobei $f(i)$ die Nummer der im i-ten Versuch gezogenen Kugel angibt. Nach Potenzregel gibt es n^k Funktionen, nach Gleichheitsregel mithin n^k Ziehungen.)

2. Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge: Für die erste gezogene Kugel gibt es n Möglichkeiten, für die zweite gezogene Kugel gibt es $n-1$ Möglichkeiten. Für die k-te gezogene Kugel ($k \leq n$) gibt es mithin noch $n-k+1$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es damit

$$n \cdot (n-1) \cdot \;\cdots\; \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$$

Möglichkeiten.

3. Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge: Mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Auswahlmöglichkeiten. Wenn die Reihenfolge keine Rolle mehr spielt, zählen alle Auswahlfolgen, bei denen die gleichen k Kugeln gezogen wurden, nur noch als eine Auswahlmöglichkeit. Dies sind gerade $k!$ viele. Damit gibt es insgesamt

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Möglichkeiten.

4. Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge: Da jede Kugel mehrmals gezogen werden kann, die Reihenfolge jedoch keine Rolle spielt, ist nur wichtig, wie oft eine Kugel gezogen wird. Es sei also $(a_1, \dots, a_n)$ ein Tupel mit den entsprechenden Anzahlen, wobei a_j gerade angibt, wie oft die Kugel j gezogen wird. Für ein Anzahltupel $(a_1, \dots, a_n)$ muss nun gelten:

   (i) $a_j \in \{0, \dots, k\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

(ii) $a_1 + \dots + a_n = k$

Wir müssen nun zählen, wie viele derartige Tupel es geben kann. Dazu repäsentieren wir die Tupel in einer anderen Weise, die es uns ermöglicht, das Szenario zu wechseln. Wir verwenden k-mal das Symbol $*$ und $(n-1)$-mal das Symbol $|$. Ein Anzahltupel $(a_1, \dots, a_n)$ kann nun als Symbolfolge

$$\underbrace{**\dots*}_{a_1}|\underbrace{**\dots*}_{a_2}|\dots|\underbrace{**\dots*}_{a_n}$$

aufgeschrieben werden. Umgekehrt entspricht auch jede Symbolfolge, die k-mal das Symbol $*$ und $(n-1)$-mal das Symbol $|$ enthält, einem Anzahltupel mit obigen Eigenschaften.Die Zuordnung ist also bijektiv. Statt Anzahltupel zu zählen, können wir nach der Gleichheitsregel also auch Symbolfolgen zählen. Die Anzahl möglicher Symbolfolgen zu bestimmen, entspricht aber gerade dem Ziehen von k Positionen für das Symbol $*$ aus $n+k-1$ möglichen Positionen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Mithin gibt es insgesamt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiele: Wir geben für die obigen vier Beispiele die Anzahlen an:

- Die Anzahl der Ziehungen der Lotto-Zahlen „6 aus 49“ entspricht der Anzahl der Ziehungen von 6 Kugeln aus einer Urne mit 49 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Somit gibt es $\binom{49}{6} = 13.983.816$ verschiedene Ziehungen (bzw. Lottoscheine).
- Die Anzahl der vierstelligen PIN-Codes entspricht der Anzahl der Ziehungen von 4 Kugeln aus einer Urne mit 10 Kugeln (Ziffern) mit Zurücklegen und mit Reihenfolge. Somit gibt es $10^4 = 10.000$ verschiedene PIN-Codes.
- Die Anzahl der Siegerehrungen mit Gold-, Silber- und Bronzemedaillen bei einem Wettkampf mit 8 Startern entspricht dem Ziehen von 3 Kugeln aus einer Urne mit 8 Kugeln ohne Zurücklegen und mit Reihenfolge. Somit gibt es $(8)_3 = 336$ verschiedene Siegerehrungen.
- Die Anzahl verschiedener Stimmenverteilungen auf 3 zur Wahl stehenden Kandidaten mit 100 Wählern entspricht dem Ziehen von 100 Kugeln aus einer Urne mit 3 Kugeln mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Somit gibt es $\binom{102}{100} = 5.151$ verschiedene Wahlausgänge.

Urnenmodelle treten oft gemischt auf.

Beispiele: Folgende Beispiele sollen das Zusammenspiel der kombinatorischen Szenarien verdeutlichen:

- Wir wollen Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ mit verschiedenen Eigenschaften zählen:
  1. Es gibt 3^n Wörter der Länge n ohne weitere Einschränkungen.
  2. Es gibt $3^n - 3$ Wörter der Länge n, die mindestens 2 verschiedene Buchstaben enthalten. (Es gibt 3 Wörter mit nur einem einzigen Buchstaben.)
  3. Es gibt $\binom{3k}{k}\binom{2k}{k}$ Wörter der Länge $n = 3k$, in denen jeder Buchstabe genau gleich oft vorkommt. (Zuerst werden unter den $3k$ verfügbaren Positionen k Positionen für den Buchstaben a gewählt, dann unter übrigen $2k$ Positionen k Positionen für b; somit müssen die restlichen k Positionen mit c besetzt werden.)
- Wir wollen die Anzahl unterschiedlicher Beflaggungen für die Siegerehrung (Gold-Silber-Bronze) für einen 100m-Lauf mit 8 Teilnehmern in einem internationalen Wettkampf bestimmen, wobei jeweils zwei Teilnehmer aus einem Land kommen sollen:

$$\underbrace{\binom{4}{3}\cdot 3!}_{\text{alle Flaggen verschieden}} + \underbrace{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 2}_{\text{zwei Flaggen gleich}} + \underbrace{0}_{\text{alle Flaggen gleich}} = 24 + 36 + 0 = 60$$

Alternativ kann die Anzahl so bestimmt werden, dass von allen Beflaggungen mit 4 Fahnen genau 4 ausscheiden, da keine Fahne dreimal vorkommen kann. Mithin ergibt sich wiederum $4^3 - 4 = 60$.

- Die Studierenden Alice und Bob wollen versuchen, die folgende kombinatorische Aufgabe zu lösen: Über einem k-elementigen Alphabet werden Wörter der Länge n mit $n \geq k$ gebildet. Wie viele Wörter gibt es, in denen jeder Buchstaben mindestens einmal vorkommt?

  Bob argumentiert wie folgt. Da jeder Buchstabe mindestens einmal vorkommen muss, gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Buchstaben auf n Positionen zu verteilen. Die restlichen $n - k$ freien Positionen können beliebig mit Buchstaben belegt werden, was k^{n-k} Möglichkeiten sind. Damit ergeben sich insgesamt $\binom{n}{k}k^{n-k}$ Möglichkeiten. Alice erhebt Einspruch und besteht darauf, diese mit $k!$ zu multiplizieren, da jeder der $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten von oben genau $k!$ Buchstabenkombinationen entsprechen. Alice und Bob sind froh, die Aufgabe gelöst zu haben, und bestimmen die Lösung zu $k!\binom{n}{k}k^{n-k}$.

  Haben sie recht?

5.3 Binomialkoeffizienten

Aus dem vorangegangenen Abschnitt (Theorem 5.6) wissen wir, dass die Anzahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen (d.h. die Anzahl der Möglichkeiten aus n Kugeln k Kugeln ungeordnet ohne Zurücklegen zu ziehen) gerade dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ entspricht. Da Binomialkoeffizienten auch über die reine Kombinatorik hinaus wichtig sind, wollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften von Binomialkoeffizienten festhalten. Dazu definieren wir den Binomialkoeffzienten noch einmal explizit: Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{n}{k} =_{\text{def}} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = 0 \qquad \text{für } k > n.$$

Eine einfache, sofort einsichtige Beobachtung ist:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Damit lässt sich der Binomialkoeffizient konsistent auch für negative Werte für k definieren:

$$\binom{n}{k} =_{\text{def}} 0 \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

Theorem 5.7 (Pascalsches Dreieck)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Wir geben zwei Beweise für das Theorem an.

Beweis: (rechnerisch) Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich der Werte von k durch:

- Für $k = 0$ und $n > 1$ gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0}$.

- Für $0 < k < n$ rechnen wir aus:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

- Für $k = n$ und $n > 1$ gilt $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$.
- Für $k > n > 1$ gilt $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Damit ist das Theorem durch Nachrechnen bewiesen. ■

Beweis: (kombinatorisch) Wir interpretieren die Gleichung als Bestimmung der Kardinalität von Mengen auf zwei verschiedene Weisen. Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Mengenfamilien:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &=_{\text{def}} \{ \{a_1, \ldots, a_k\} \mid a_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\} \\
\mathcal{F}_+ &=_{\text{def}} \{ A \mid A \in \mathcal{F} \text{ und } 1 \in A\} \\
\mathcal{F}_- &=_{\text{def}} \{ A \mid A \in \mathcal{F} \text{ und } 1 \notin A\}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Mengenfamilien stehen für folgende Urnenmodelle:

- $\mathcal{F}$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen.
- $\mathcal{F}_+$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei Kugel 1 *immer* gezogen wird.
- $\mathcal{F}_-$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei Kugel 1 *nie* gezogen wird.

Nun gilt offensichtlich $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \cup \mathcal{F}_-$ sowie $\mathcal{F}_+ \cap \mathcal{F}_- = \emptyset$, also $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_+| + |\mathcal{F}_-|$ nach der Summenregel (Lemma 5.2). Nach Theorem 5.6 gilt:

$$|\mathcal{F}| = \binom{n}{k}, \qquad |\mathcal{F}_+| = \binom{n-1}{k-1}, \qquad |\mathcal{F}_-| = \binom{n-1}{k}$$

Mithin erhalten wir:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Damit ist das Theorem kombinatorisch bewiesen. ■

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 5.7 lässt sich leicht veranschaulichen und ist schon aus der Schule bekannt:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Ein weiteres Beispiel für die Anwendung von Theorem 5.6 ist das Binomialtheorem. Das Binomialtheorem kann durch vollständige Induktion über n bewiesen werden. Dies ist eine gute Übung zu Anwendung des Pascalschen Dreiecks. Wir geben einen kombinatorischen Beweis.

Theorem 5.8 (Binomialtheorem)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n \quad = \quad & \overbrace{a \cdot \ \cdots \ \cdot a \cdot a}^{n \text{ Faktoren}} + \\
& + a \cdot \ \cdots \ \cdot a \cdot b + \\
& + a \cdot \ \cdots \ \cdot b \cdot a + \\
& + a \cdot \ \cdots \ \cdot b \cdot b + \\
& \vdots \\
& + \underbrace{b \cdot \ \cdots \ \cdot b \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}
\end{aligned}
$$

Die Summanden können zusammengefasst werden zu Produkten von jeweils n Faktoren, von denen k Faktoren gerade b und $n-k$ Faktoren gerade a sind. Die Summanden sind also von der Form $a^{n-k}b^k$, da die Reihenfolge bei der Multiplikation keine Rolle spielt. Die Anzahl der Produkte $a^{n-k}b^k$ entspricht somit gerade dem Ziehen von k Kugeln (die Positionen für b im Produkt) aus n Kugeln (die Gesamtheit aller Positionen für Faktoren), d.h. $\binom{n}{k}$. Folglich gilt insgesamt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Korollar 5.9

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis: Nach dem Binomialtheorem gilt
$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$
Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Korollar 5.10

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis: Nach dem Binomialtheorem gilt
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$
Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Theorem 5.11 (Vandermondesche Identität)

Für $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Beweis: Es seien A und B disjunkte Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Für jedes $j \in \{0, \dots, k\}$ definieren wir die Mengenfamilie
$$\mathcal{X}_j =_{\text{def}} \{\, X \mid X \subseteq A \cup B, |X \cap A| = j \text{ und } |X \cap B| = k - j \,\}$$
Es gibt $\binom{n}{j}$ viele j-elementige Teilmengen von A und $\binom{m}{k-j}$ viele $(k-j)$-elementige Teilmengen von B. Damit gilt
$$|\mathcal{X}_j| = \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Wegen $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt nun

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} |\mathcal{X}_j| = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Wenn zum Beispiel in einer Vorlesung $n+m$ Studenten sitzen, n weibliche und m männliche, wie viele verschiedene Gruppen mit genau k Studenten gibt es dann? Dies lässt sich auf zwei Arten bestimmen:

- Ohne Berücksichtigung des Geschlechts erhalten wir $\binom{n+m}{k}$ Gruppen.
- Mit Berücksichtigung des Geschlechts zählen wir für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ alle Gruppen mit jeweils genau j weiblichen und genau $k-j$ männlichen Studenten, damit also insgesamt $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ Gruppen.

Da wir über dieselbe Menge von Studenten argumentieren, sind beide Anzahlen gleich.

5.4 Stirling-Zahlen

Stirling-Zahlen erster Art und Permutationen

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Eine Permutation von A ist eine bijektive Funktion $\pi : A \to A$. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit setzen wir stets $A = \{1, \ldots, n\}$ voraus. Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ notieren wir auch als $[n]$. Weiterhin definieren wir die Menge

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{\ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \ \text{ ist eine Permutation}\ \},$$

die sogenannte symmetrische Gruppe von n Elementen zur Namensgebung siehe das Kapitel über Algebraische Strukturen).

Theorem 5.12

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $|\mathcal{S}_n| = n!$.

Beweis: $|\mathcal{S}_n|$ entspricht dem Ziehen von n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Nach Theorem 5.6 gilt

$$|\mathcal{S}_n| = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Ohne Beweis geben wir folgendes Resultat über das Verhalten der Fakultätsfunktion an:

Theorem 5.13 (Stirlingsche Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

wobei $e = e^1 = 2,718281828459\ldots$ die Eulersche Zahl ist.

Permutationen können auf verschiedene Arten geschrieben werden. Im Folgenden behandeln wir drei Schreibweisen:

Matrixschreibweise: Dazu schreiben wir die Permutation $\pi : [n] \to [n]$ als $2 \times n$-Matrix der Form

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Da π bijektiv ist, kommen alle Werte $1, \dots, n$ in der zweiten Zeile vor.

Beispiel: Folgende Permutation ist in Matrixschreibweise gegeben:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tupelschreibweise: Im Prinzip genügt es, von der Matrixschreibweise lediglich die zweite Zeile zu übernehmen, d.h. Permutationen können angegeben werden in der Form

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \dots, \pi(n)).$$

Beispiel: $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ ist obige Permutation in Tupelschreibweise.

Zyklenschreibweise: Die Zyklenschreibweise entsteht, wenn wir für $x \in [n]$ die iterierte Hintereinanderausführung von π auf x betrachten. Dadurch entsteht eine Folge:

$$\begin{aligned} \pi^0(x) &=_{\text{def}} x, \\ \pi^1(x) &=_{\text{def}} \pi(x), \\ \pi^2(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi(x)), \\ &\vdots \\ \pi^k(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi^{k-1}(x)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Für jedes $x \in [n]$ gibt es dann ein minimales $0 < k \leq n$ mit $\pi^k(x) = x$.

Beispiel: Für die Permutation $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ gilt

$$\begin{array}{llll} \pi^0(1) = 1, & \pi^1(1) = 4, & \pi^2(1) = 2, & \pi^3(1) = 1; \\ \pi^0(2) = 2, & \pi^1(2) = 1, & \pi^2(2) = 4, & \pi^3(2) = 2; \\ \pi^0(3) = 3, & \pi^1(3) = 6, & \pi^2(3) = 3; & \\ \pi^0(4) = 4, & \pi^1(4) = 2, & \pi^2(4) = 1, & \pi^3(4) = 4; \\ \pi^0(5) = 5, & \pi^1(5) = 5; & & \\ \pi^0(6) = 6, & \pi^1(6) = 3, & \pi^2(6) = 6. & \end{array}$$

Eine Folge $x, \pi(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{k-1}(x)$ mit minimalem $k > 0$, so dass $\pi^k(x) = x$, heißt *Zyklus* der Länge k und wird als $(x\ \pi(x)\ \pi^2(x)\ \dots\ \pi^{k-1}(x))$ geschrieben.

Beispiel: $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ enthält die Zyklen $(1\ 4\ 2)$, $(3\ 6)$ und (5).

Jede Permutation kann als Produkt von Zyklen geschrieben werden, indem die Zyklen einfach hintereinander gesetzt werden. Die Schreibweise ist jedoch nicht eindeutig. Insbesondere kann jeder Zyklus der Länge k auf genau k Arten geschrieben werden.

Beispiel: Die Permutation $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ können wir als Produkt von Zyklen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}(4,1,6,2,5,3) &= (1\ 4\ 2)(3\ 6)(5)\\ &= (4\ 2\ 1)(6\ 3)(5)\\ &= (5)(2\ 1\ 4)(6\ 3)\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $(1\ 4\ 2) = (4\ 2\ 1) = (2\ 1\ 4)$.
Die Anzahl der Zyklen, aus der eine Permutation bestehen kann, liegt zwischen 1, wie in $(1\,2\,3\ \ldots\ n)$, und n, wie in $(1)(2)(3)\ldots(n)$. Im Folgende wollen wir die Anzahl der Permutationen mit genau k Zyklen genauer bestimmen.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei $\left[{n \atop k}\right]$ (manchmal auch $s_{n,k}$) geschrieben) die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit genau k Zyklen. Dann gilt also

$$\sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!.$$

Die Zahlen $\left[{n \atop k}\right]$ heißen Stirling-Zahlen erster Art. Folgende Sonderfälle sind zu beachten:

- Für $k > n$ gilt $\left[{n \atop k}\right] = 0$, da eine Permutation von n Elementen höchstens n Zyklen enthalten kann.
- Für $n > 0$ gilt $\left[{n \atop 0}\right] = 0$, da jede Permutation mindestens einen Zyklus enthält.
- Wir definieren $\left[{0 \atop 0}\right] =_{\text{def}} 1$.

Mit diesen Sonderfällen können wir wiederum eine Rekursionsvorschrift für die Berechnung der Stirling-Zahlen erster Art angeben.

Theorem 5.14 (Stirling-Dreieck erster Art)

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right].$$

Beweis: (kombinatorisch) Es sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit k Zyklen. Dann kann π auf zwei Arten aus einer Permutation aus $\mathcal{S}_{n-1}$ entstanden sein:

(i) Einfügen eines Zyklus (n) in Permutationen aus $\mathcal{S}_{n-1}$ mit $k-1$ Zyklen
(ii) Einfügen des Elementes n in einen der Zyklen einer Permutation aus $\mathcal{S}_{n-1}$ mit k Zyklen

Beide Fälle sind disjunkt. Für die Anzahl der Möglichkeiten, Permutationen mit k Zyklen auf diese zwei Arten zu erzeugen, ergibt sich jeweils:

(i) $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$
(ii) $(n-1) \cdot \left[{n-1 \atop k}\right]$ (denn für das Einfügen eines Elementes in einen Zyklus der Länge t gibt es t Möglichkeiten; Einfügen als erstes und Einfügen als letztes Element erzeugen den gleichen Zyklus)

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Um die Konstruktion aus dem Beweis von Theorem 5.14 zu verdeutlichen, betrachten wir die 6 Permutationen von 4 Elementen mit 3 Zyklen:

$$\begin{array}{ll} (1)(2\ 3)(\mathbf{4}) & (1\ \mathbf{4})(2)(3) \\ (1\ 2)(3)(\mathbf{4}) & (1)(2\ \mathbf{4})(3) \\ (1\ 3)(2)(\mathbf{4}) & (1)(2)(3\ \mathbf{4}) \end{array}$$

Die linken Permutationen entstehen aus den Permutationen (1)(2 3), (1 2)(3) und (1 3)(2) durch Einfügen des Einerzyklus (4). Die rechten Permutationen entstehen aus der Permutation (1)(2)(3) durch Einfügen von 4 in jeden Einerzyklus.

Um einen Eindruck von Wachstum der Stirling-Zahlen erster Art zu erhalten, können die Werte analog dem Pascalschen Dreieck angeordnet werden.

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 5.14 lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\ & & 0 & & 2 & & 3 & & 1 & & \\ & 0 & & 6 & & 11 & & 6 & & 1 & \\ 0 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Mit Permutationen, insbesondere mit der symmetrischen Gruppe, werden wir uns im Kapitel über algebraische Strukturen noch einmal ausführlich beschäftigen.

Stirling-Zahlen zweiter Art und Mengenpartitionen

In diesem Abschnitt wollen wir bestimmen, wie viele Möglichkeiten es gibt n-elementige Grundmengen in k nichtleere, disjunkte Komponenten zu zerlegen.

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Eine k-Partition $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ist eine k-elementige Familie von nichtleeren Teilmengen von A mit $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$.

Es sei $\left\{ n \atop k \right\}$ (manchmal auch: $S_{n,k}$) die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Grundmenge. Die Zahlen $\left\{ n \atop k \right\}$ heißen Stirling-Zahlen zweiter Art.

Beispiel: Die Studierenden Alice und Bob liegen falsch, wenn sie die Anzahl der Wörter der Länge n über einem k-elementigen Alphabet, in denen jeder Buchstabe mindestens einmal vorkommt, mit $k!\binom{n}{k}k^{n-k}$ angeben. Dabei werden diejenigen Wörter, in denen Buchstaben mehr als einmal vorkommen, mehrfach gezählt. Die korrekte Anzahl ist:

$$\left\{ n \atop k \right\} \cdot k!$$

Folgende Spezialfälle sind für die Stirling-Zahlen zweiter Art zu beachten:

- Für $k > n$ gilt $\left\{ n \atop k \right\} = 0$, da die n Elemente höchstens in n Komponenten liegen können.
- Für $k = 0$ gilt $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$, da die n Elemente in wenigstens einer Komponenten liegen müssen.
- Wir definieren $\left\{ 0 \atop 0 \right\} =_{\text{def}} 1$.

Wir können nun eine ähnliche rekursive Darstellung wie in Theorem 5.14 für die Stirling-Zahlen erster Art auch für die Stirling-Zahlen zweiter Art beweisen.

Theorem 5.15 (Stirling-Dreieck zweiter Art)

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}.$$

Beweis: (kombinatorisch) Es sei $\mathcal{F}$ eine k-Partition einer n-elementigen Menge. Dann kann $\mathcal{F}$ auf zwei Arten aus einer Partition einer $(n-1)$-elementigen Menge entstehen:

(i) Hinzufügen der Menge $\{n\}$ zu einer $(k-1)$-Partition von $n-1$ Elementen

(ii) Einfügen von n in einer der Mengen einer k-Partition von $n-1$ Elementen

Die Anzahl der Möglichkeiten k-Partitionen von n Elementen zu bilden, ist wie folgt:

(i) $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$

(ii) $k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$

Mithin gilt also:

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Wir geben wieder einen Eindruck für das Wachstum der Zahlen $\left\{ n \atop k \right\}$ gemäß Theorem 5.15.

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 5.15 lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 3 & & 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Interessieren wir uns nur für die Anzahl aller möglichen Partitionen einer Grundmenge A mit $|A| = n$, so kann man die Bell-Zahlen bestimmen:

$$B_n =_{\text{def}} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Insbesondere gibt B_n also die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf n Elementen an.

5.5 Weitere Abzählprinzipien

In diesem Abschnitt fassen wir drei weitere kombinatorische Prinzipien zusammen.

Doppeltes Abzählen

Wir haben bereits mehrfach kombinatorische Indentitäten durch Abzählen einer Menge auf unterschiedliche Weise gewonnen. Insbesondere wurden so das Pascalsche Dreieck und die Stirlingschen Dreiecke hergeleitet. Im Folgenden wollen wir dieses Beweisprinzip beim Bestimmen der Kardinalität von binären Relationen anwenden.

Lemma 5.16 (Doppeltes Abzählen)

Es sei $R \subseteq A \times B$ eine endliche Relation. Dann gilt

$$\sum_{a \in A} |\{\ b \in B \mid (a, b) \in R\ \}| = \sum_{b \in B} |\{\ a \in A \mid (a, b) \in R\ \}| = |R|.$$

Beweis: Jedes Paar $(a, b) \in R$ wird in beiden Summen genau einmal gezählt. ■

Beispiel: Wir wollen die Anzahl der Einsen in einer Matrix $A \in \{0, 1\}^{n \times m}$ zählen. Man beachte, dass jede binäre Relation $R \subseteq \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ durch eine Matrix A beschrieben werden kann mittels $(i, j) \in R \iff a_{i,j} = 1$. Konkret sei die folgende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\to 8 \\ \to 4 \\ \to 2 \\ \to 2 \\ \to 1 \\ \to 1 \\ \to 1 \\ \to 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & \rightarrow & 20 \end{array}$$

Im allgemeinen Fall einer Matrix $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit den Einträgen $a_{i,j}$ stehen in der letzten Spalte in der i-ten Zeile die Zeilensumme $\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$ und in der letzten Zeile in der j-ten Spalte die Spaltensumme $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$. Klarerweise muss die Summe über alle Zeilensummen stets gleich der Summe über alle Spaltensummen sein:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

Das Inklusion-Exklusions-Prinzip

Das Inklusion-Exklusions-Prinzip ist eine Verallgemeinerung der Summenregel (Lemma 5.2) auf beliebige, nicht notwendig paarweise disjunkte Mengen.

Theorem 5.17 (Inklusions-Exkusions-Prinzip)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{1+|K|} \left| \bigcap_{k \in K} A_k \right|$$

Beispiel: Wir wollen die Formel für kleine Anzahlen n entwickeln. Für $n = 2$ reduzieren sich die Ausdrücke in Theorem 5.17 zu folgender Identität:

$$|A_1 \cup A_2| \;=\; |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Für $n = 3$ reduzieren sich die Ausdrücke in Theorem 5.17 zu folgender Identität:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \;=\; |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Beweis: Wir bestimmen, wie oft jedes Element auf beiden Seiten der Gleichung gezählt wird. Es sei $x \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

- Linke Seite: Das Element x wird genau einmal gezählt.
- Rechte Seite: Wir müssen zeigen, dass x auch hier genau einmal gezählt wird. Dazu sei $\ell =_{\text{def}} |\{\, j \mid x \in A_j \,\}|$ die Anzahl der Mengen, in denen x vorkommt. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit komme x genau in den Mengen $A_1, \ldots, A_\ell$ vor. Dann gilt:
  - Für $\emptyset \neq K \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ wird x genau $(-1)^{1+|K|}$-mal gezählt.
  - Für alle anderen Menge K wird x gar nicht gezählt.

  Somit folgt für den Beitrag von x zur rechten Seite der Gleichung insgesamt:

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\ldots,\ell\}} (-1)^{1+|K|} &= \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{1+k} = -\sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{k} \\ &= 1 \qquad \text{(nach Korollar 5.10)} \end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Wir wollen an einem Beispiel verdeutlichen, wie der doch recht kompliziert wirkende Ausdruck auf der rechten Seite gewinnbringend angewendet werden kann.

Beispiel: Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 2 und 100? Um diese Frage zu beantworten, bestimmen wir die zusammengesetzten Zahlen zwischen 2 und 100 mit Hilfe des Inklusions-Exklusions-Prinzip. Es sei $A =_{\text{def}} \{2, \dots, 100\}$. Eine Zahl $x \in A$ ist zusammengesetzt, falls $x = p \cdot n$ für geeignete Zahlen $p, n \in A$ gilt, wobei p eine Primzahl mit $p \leq \sqrt{100} = 10$ ist. Damit kommen als Primzahlen nur $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ und $p_4 = 7$ in Frage. Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ betrachten wir die Menge der Vielfachen von p_i, d.h. die Menge

$$A_i =_{\text{def}} \{\ x \in A \mid (\exists n \in A)[x = p_i \cdot n]\ \}.$$

Damit gilt:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ist die Menge der zusammengesetzten Zahlen aus A
- Die Kardinalitäten der möglichen Schnittmengen sind

$$\begin{aligned}
|A_i| &= \left\lfloor \frac{100}{p_i} \right\rfloor - 1 \quad (\text{da } p_i \notin A_i) \\
\left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| &= \left\lfloor \frac{100}{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}} \right\rfloor \quad \text{für } k \in \{2, 3, 4\} \text{ und } 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4
\end{aligned}$$

Nach Theorem 5.17 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= \left(\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - 1 \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{105} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left\lfloor \frac{100}{210} \right\rfloor \\
&= 49 + 32 + 19 + 13 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0 \\
&= 74
\end{aligned}$$

Damit gibt es $99 - 74 = 25$ Primzahlen zwischen 2 und 100.

Der Schubfachschluss

Ein weiteres wichtiges Abzählprinzip, um die Existenz von Objekten zu beweisen, ist der Schubfachschluss (engl. *pigeonhole principle*).

Theorem 5.18 (Schubfachschluss)

Es seien A und B endliche Mengen mit $|A| > |B| > 0$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $|f^{-1}(y)| > 1$.

Beweis: (Widerspruch) Angenommen es gilt $|f^{-1}(y)| \leq 1$ für alle $y \in B$. Dann wissen wir aus dem letzten Semester, dass f eine injektive Funktion ist. Daraus folgt $|A| \leq |B|$. Dies ist ein Widerspruch zu $|A| > |B|$. Mithin war die Annahme falsch, und das Theorem ist beweisen. ■

Mit anderen Worten: Um $|A|$ Objekte in $|B|$ Schubfächer zu stecken, müssen sich in mindestens einem Schubfach 2 Objekte befinden (falls $|A| > |B|$ ist).

Beispiele: An folgenden Fällen wollen wir die Anwendung des Schubfachschlusses demonstrieren:

- Von 13 Personen feiern mindestens zwei Personen im gleichen Monat ihren Geburtstag.
- In jeder Menge P von mindestens zwei Personen gibt es immer mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Personen in P kennen. (Hierbei sei angenommen, dass „kennen" eine symmetrische Relation ist.)

  Zur Begründung: Es seien $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ die Personenmenge mit $n \geq 2$ Personen sowie $f : P \to \{0, \ldots, n-1\}$ eine Funktion, die der Person p_i die Anzahl ihrer Bekannten in P zuordnet. Wegen $|P| = |\{0, \ldots, n-1\}| = n$ kann Theorem 5.18 nicht direkt angewendet werden. Eine genauere Analyse ermöglicht jedoch die folgende Fallunterscheidung:

  (i) Es gibt ein $p \in P$ mit $f(p) = 0$. Wegen der Symmetrie der Bekanntschaftsrelation gibt es auch keine Person, die alle Personen in P kennt. Also gilt $f(q) \neq n-1$ für alle $q \in P$ und folglich $f(P) \subseteq \{0, \ldots, n-2\}$.

  (ii) Für alle $p \in P$ gilt $f(p) \neq 0$. Damit gilt $f(P) \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$.

  In beiden Fällen gilt also $|f(P)| < |P|$. Nach Theorem 5.18 folgt die Aussage.

Theorem 5.19 (Verallgemeinerter Schubfachschluss)

Es seien A und B endliche, nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann existiert ein $y \in B$ mit $|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$.

Beweis: (Widerspruch) Wir nehmen wiederum an, dass $|f^{-1}(y)| \leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1$ für alle $y \in B$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{y \in B} |f^{-1}(y)| \\
&\leq |B| \cdot \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right) \\
&\leq |B| \cdot \left(\frac{|A| + |B| - 1}{|B|} - 1 \right) \\
&= |B| \cdot \frac{|A| - 1}{|B|} \\
&= |A| - 1
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Mithin war die Annahme falsch, und das Theorem ist bewiesen. ■

Beispiel: Wir wollen wieder an zwei Beispielen den verallgemeinerten Schubfachschluss verdeutlichen.

- Von 100 Personen feiern mindestens 9 Personen im gleichen Monat ihren Geburtstag.

- In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich alle untereinander kennen, oder 3, die sich alle nicht kennen. (Hierbei nehmen wir wiederum an, dass „kennen“ eine symmetrische Relation ist.)

  Zur Begründung: Es sei $P = \{p_1, \ldots, p_6\}$ eine beliebige Personenmenge. Wir betrachten für die Person p_1 die Funktion

  $$f : \{p_2, \ldots, p_5\} \to \{\text{„bekannt“}, \text{„nicht bekannt“}\},$$

  die jeder Person $p_2, \ldots, p_5$ zuordnet, ob p_1 diese Person kennt. Nach Theorem 5.19 sind $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ Personen mit p_1 „bekannt“ oder 3 Personen mit p_1 „nicht bekannt“. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit seien 3 Personen mit p_1 bekannt (sonst vertauschen wir in nachfolgender Argumentation einfach „kennen“ und „nicht kennen“) und zwar p_2, p_3 und p_4. Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Personen p_2, p_3 und p_4:

  (i) Es gibt zwei Personen in $\{p_2, p_3, p_4\}$, die sich kennen. Diese beiden Personen kennen aber auch p_1. Somit gibt es also 3 Personen, die sich alle untereinander kennen.

  (ii) Die Personen p_2, p_3 und p_4 kennen sich nicht. Also gibt es 3 Personen, die sich untereinander nicht kennen.