6.2 Wege in Graphen

Definition 7.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1.) Ein Weg (Kantenzug) der Länge k in G ist eine Folge

$$W =_{df} (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

mit $v_0, \ldots, v_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ sowie $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Der Knoten v_0 heißt Anfangsknoten von W.

Der Knoten v_k heißt Endknoten von W.

Die Knoten $v_1, \ldots, v_{k-1}$ heißen innere Knoten von W.

Ein Weg mit $u \in V$ als Anfangsknoten und $v \in V$ als Endknoten heißt (u,v)-Weg.

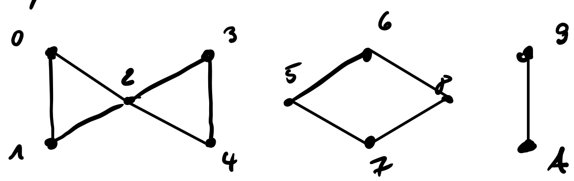
(2.) Ein Pfad in G ist ein knotendisjunkter Weg in G, d.h. alle Knoten auf dem Weg sind pw. verschieden.

(3.) Ein Kreis in G ist ein Weg mit gleichem Anfangs- und Endknoten.

(4.) Ein einfacher Kreis in G ist ein Kreis der Länge $k \geq 3$, bei dem alle innere Knoten pw. verschieden und verschieden zum Anfangs- und Endknoten sind.

Bemerkung: statt $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ auch $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ mit $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Beispiel: Graph G

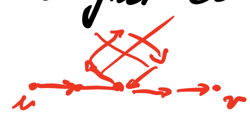


- $(0,1,2)$ Pfad d. Länge 2
- $(0,2,3,4,2,1)$ Weg d. Länge 5; kein Pfad
- $(5,6,5,7)$ Weg d. Länge 3; kein Pfad
- $(2,3,4,5,6)$ kein Weg
- (0) Weg
- $(0,1,2,0)$ einfacher Kreis d. Länge 3
- $(0,0)$-Weg $(0,2,3,4,2,1,0)$ ist Kreis, kein einfacher Kreis

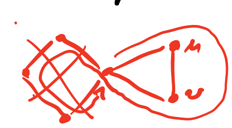
Proposition 8.

Es seien $G=(V,E)$ ein Graph, $u,v \in V$ Knoten.

(1.) Gibt es einen (u,v)-Weg in G, so gibt es einen (u,v)-Pfad in G.



(2.) Liegt die Kante $\{u,v\}$ auf einem kantendisjunkten Kreis, so liegt $\{u,v\}$ auf einem einfachen Kreis in G.



Beweis: ÜA ∎

Definition 9.

Es seien $G=(V,E)$ ein Graph und $C \subseteq G$ ein induzierter Teilgraph.

(1.) G heißt **zusammenhängend**, falls für jedes Paar v. Knoten $u,v \in V$ ein (u,v)-Pfad in G existiert.

(2.) $C \subseteq G$ heißt (Zusammenhangs)komponente v. G, falls $G[C]$ zshgd. und knotenmaximaler induzierter Teilgraph mit dieser Eigenschaft ist.

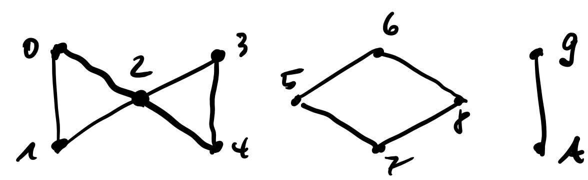
Bemerkungen:

(1) Jeder Knoten $v \in V$ liegt in einer Komponente, denn $G[\{v\}]$ zshgd.

(2) Komponenten C_1, C_2 sind entweder identisch oder (Knoten-)disjunkt.

(3) $G=(V,E)$ lässt sich beschreiben mittels Komp. $V_1, \ldots, V_k$ mit $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $G[V_i]$ zshgd.

Beispiel:



zshgd. TG: $G[\{0,1,2,3,4\}]$, $G[\{5,6,7,8\}]$ und $G[\{9,k\}]$

Satz 10.

Jeder Graph $G=(V,E)$ enthält mindestens $|V|-|E|$ Zusammenhangskomponenten.

Beweis: (vollständige Induktion über $m = |E|$)

Für $m \in \mathbb{N}$ müssen wir folgende Aussage zeigen:

Alle Graphen $G=(V,E)$ mit m Kanten enthalten mindestens $|V|-m$ Komponenten.

(IA) $m=0$: Dann bildet jeder Knoten v. $G=(V,E)$ mit $|E|=0$ eine eigene Komp. Mithin enthält G genau

$$|V| = |V| - 0 = |V| - m \text{ Komp.}$$

(IS) $m>0$: Es sei $G=(V,E)$ mit $|E|=m$ beliebig; insbesondere gibt es Kante $e \in E$. Wähle feste Kante $e \in E$ und betrachte $G-e =_{def} (V, E \setminus \{e\})$, $E' =_{def} E \setminus \{e\}$. Es gilt $|E'| = m-1$.
Nach (IV) enthält $G-e$

$$\geq |V| - |E'| = |V| - (m-1) = |V| - m + 1$$

Komp. Beim Einfügen v. $e = \{u,v\}$ in $G-e$ zwei Fälle:

1\. Fall: Knoten $u, v \in V$ liegen in einer Komp. v. $G-e$, dann enthalten G, $G-e$ die gleiche Anz. v. Komp.

2\. Fall: Knoten $u, v \in V$ liegen in verschiedenen Komp. v. $G-e$. Dann ist Anzahl d. Komp. v. G um 1 kleiner als die von $G-e$

Insgesamt enthält G:

$$\geq (\text{Anzahl Komp. v. } G-e) - 1 \overset{(IV)}{\geq} |V| - m + 1 - 1 = |V| - m \qquad \blacksquare$$

<u>Korollar 11.</u>

Für jeden zshgd. Graphen $G=(V,E)$ gilt $|E| \geq |V| - 1$.

<u>Beweis:</u> zshgd. Graph besteht aus genau einer Komp. Nach Satz 10 gilt: $1 \geq |V| - |E|$. D.h. $|E| \geq |V| - 1$. $\blacksquare$

6.3 Kreisfreie Graphen

Untersuchen kreisfreie Graphen nur für ungerichteten Fall: Bäume und Wälder

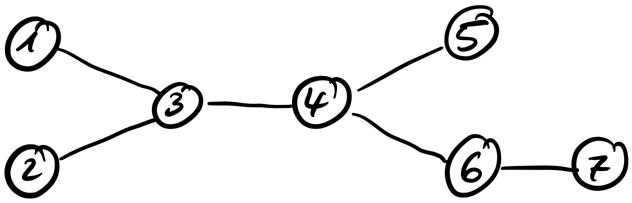
<u>Definition 12.</u>

(1.) Ein **Baum** ist ein zshgd., kreisfreier Graph (d.h. ohne einfache Kreise)

(2.) Ein Wald ist ein Graph, dessen Komp. Bäume sind.

(3.) Ein Blatt eines Baumes ist ein Knoten v mit $d(v)=1$.

Beispiel:



Blätter: 1, 2, 5, 7

Lemma 13.

Jeder Baum $T=(V,E)$ mit $|V|\geq 2$ enthält mindestens zwei Blätter.