Universität Konstanz

Vorkurs Mathematik

Handouts zur Vorlesung

Wintersemester 2023/24

Anna Pippich

Fachbereich Mathematik und Statistik

Version: 22. September 2023

Diese Notizen entstehen im Wintersemester 2023/24 parallel zum *Vorkurs Mathematik* an der Universität Konstanz. Die vorliegenden Notizen sind nur für die Hörerinnen und Hörer des Vorkurses gedacht.

Gefundene Tippfehler gerne an *anna.pippich@uni-konstanz.de* melden.

Inhaltsverzeichnis

1. Aussagen und Mengen

In der ersten Woche des Vorkurses haben wir uns insbesondere die Parallele zwischen Aussagenlogik (1.1) und Mengenlehre (1.2) klargemacht. Bindeglied zwischen beiden Bereichen sind die Aussageformen sowie All- und Existenzaussagen (1.3).

1.1 Aussagen

Definition 1.1.1 Als *Aussage* bezeichnet man in der Logik einen Ausdruck, der entweder wahr (w bzw. 1) oder falsch (f bzw. 0) sein kann. Dies nennt man den Wahrheitswert der Aussage.

Elementarverknüpfungen von Aussagen:

Definition 1.1.2 Es seien A und B Aussagen. Dann definiert man

(i) $\neg A$ („nicht-A"): das Gegenteil von A (*Negation*)

(ii) $A \vee B$ („A oder B"): die Aussage, dass von A, B mindestens eine wahr ist (*Adjunktion*),

(iii) $A \wedge B$ („A und B"): die Aussage, dass A, B beide wahr sind (*Konjunktion*),

(iv) $A \Longrightarrow B$ („A impliziert B"): die Aussage $(\neg A) \vee B$ (*Implikation*),

(v) $A \Longleftrightarrow B$ („A äquivalent B"): die Aussage $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ (*Äquivalenz*).

Zugehörige Wahrheitswerttabellen:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Bemerkung: Zwei Aussagen A, B heißen (logisch) äquivalent, wenn $(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$ gilt. Man sagt auch „A gilt genau dann, wenn B gilt" oder „A ist notwendig und hinreichend für B".

Wir haben die drei folgenden Sätze bewiesen.

Satz 1.1.3 — Grundregeln für Adjunktion und Konjunktion. Für beliebige Aussagen A, B, C gilt:

(i) $A \vee A \iff A, \quad A \wedge A \iff A$ (*Idempotenz*)

(ii) $A \vee B \iff B \vee A, \quad A \wedge B \iff B \wedge A$ (*Kommutativität*)

(iii) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$
$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$ (*Assoziativität*)

(iv) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (*Distributivität*)

Satz 1.1.4 — Regeln von DE MORGAN. Für beliebige Aussagen A, B gilt:

(i) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

(ii) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$

Satz 1.1.5 — Kontraposition. Für beliebige Aussagen A, B gilt:

(i) $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$

(ii) $(A \iff B) \iff ((\neg A) \iff (\neg B))$

1.2 Mengen

Definition 1.2.1 Eine *Menge* M ist eine Ansammlung von Objekten, ihrer Elemente, wobei nur zählt, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht. Das heißt, dasselbe Element kann nicht mehrfach zu einer Menge gehören, und auf die Reihenfolge kommt es nicht an. Man sagt, dass x ein Element von M bzw. kein Element von M ist, kurz: $x \in M$ bzw. $x \notin M$, falls x zu M bzw. nicht zu M gehört.

Bemerkung: Beispiele. Gleichheit von Mengen (später).

Definition 1.2.2 Es seien M, N, U Mengen. Dann definiert man
$U \setminus M$ („U ohne M“) $:= \{x : x \in U \wedge x \notin M\}$ (*Differenzmenge*)
$M \cup N$ („M vereinigt N“) $:= \{x : x \in M \vee x \in N\}$ (*Vereinigungsmenge*)
$M \cap N$ („M geschnitten N“) $:= \{x : x \in M \wedge x \in N\}$ (*Schnittmenge*)
$M \subset N$ („M Teilmenge N“) als die Aussage, dass alle $x \in M$ auch $x \in N$ erfüllen (*Enthaltensein*)
$M = N$ („M identisch N“) als die Aussage $(M \subset N) \wedge (N \subset M)$ (*Gleichheit*)

Bemerkung:

(i) Man schreibt $\varnothing$ oder $\{\}$ für die “leere Menge”, die gar kein Element enthält.

(ii) Falls $M \subset U$ und klar ist, welches U gemeint ist, schreibt man oft kurz M^c für $U \setminus M$ (*Komplement von M bzgl. U*).

(iii) Hiermit sind $M \cup M^c = U$ und $M \cap M^c = \varnothing$.

Bemerkung:

(i) „$\subset$“ schließt „$=$“ als Möglichkeit mit ein

(ii) Weitere Schreibweisen: „$\subseteq$“ und „$\subseteqq$“ bedeuten dasselbe wie „$\subset$“

(iii) Weitere Schreibweise: „$M \subsetneqq N$“ heißt $M \subset N \wedge M \neq N$

Wir haben die drei folgenden Sätze bewiesen.

Satz 1.2.3 — Grundregeln für Vereinigung und Durchschnitt. Für beliebige Mengen M, N, O gilt:

(i) $M \cup M = M, \ \ M \cap M = M$ (*Idempotenz*)

(ii) $M \cup N = N \cup M, \ \ M \cap N = N \cap M$ (*Kommutativität*)

(iii) $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O, \ \ M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$ (*Assoziativität*)

(iv) $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O),$ $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ (*Distributivität*)

Satz 1.2.4 — Regeln von de Morgan. Für beliebige Mengen U und $M, N \subset U$ gilt:

(i) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$

(ii) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$

Satz 1.2.5 — Kontraposition. Für beliebige Mengen U und $M, N \subset U$ gilt:

(i) $(M \subset N) \iff (N^c \subset M^c)$

(ii) $(M = N) \iff (M^c = N^c)$

1.3 Aussageformen, All- und Existenzaussagen

Bindeglied zwischen Aussagenlogik und Mengenlehre sind die Aussageformen.

Definition 1.3.1 Eine *Aussageform* bzgl. einer Grundmenge U ist etwas von der Form $A(x)$, das durch Einsetzen eines beliebigen $x \in U$ zu einer Aussage wird.

■ **Beispiel 1.3.2** $U :=$ Menge aller Menschen, $A(x) := x$ studiert in Konstanz. ■

Die Angabe einer Menge durch „*Aussonderung*“ benutzt Aussageformen, etwa

$$M := \{x \in U : A(x)\}.$$

Mit Aussageformen kann man All- und Existenzaussagen bilden:

Definition 1.3.3 (i) $\forall x \in U : A(x)$ heißt: $A(x)$ ist wahr für alle $x \in U$. (“Allaussage”)

(ii) $\exists x \in U : A(x)$ heißt: $A(x)$ ist wahr für (mindestens) ein $x \in U$. (“Existenzaussage”)

Bemerkung:

(i) $\forall$ bzw. $\exists$ wird auch als *Allquantor* bzw. *Existenzquantor* bezeichnet.

(ii) Man schreibt manchmal statt „$\forall$“ auch „$\bigwedge$“, und statt „$\exists$“ auch „$\bigvee$“.

(iii) Ferner schreibt man „$\exists!$“ für „es gibt genau ein“.

Die Negation von Existenz- bzw. Allaussagen geht wie folgt:

Satz 1.3.4 — Regeln von de Morgan.

(i) $\neg(\exists x \in U : A(x)) \iff \forall x \in U : (\neg A(x))$

(ii) $\neg(\forall x \in U : A(x)) \iff \exists x \in U : (\neg A(x))$

Beachte die Parallele zwischen $\cup, \cap$ und $\vee, \wedge$ und $\exists, \forall$, insbesondere in den Regeln von de Morgan (1.1.4, 1.2.4, 1.3.5): Negation stellt die Verknüpfungssymbole “auf den Kopf”.