
Vorkurs Mathematik
Blatt 7

Besprechung der Lösungen am 27.09.2023 in den Übungen

Hinweis: Wie in der Vorlesung dürfen Sie bei Ihren Beweisen folgende Aussagen als bekannt voraussetzen:

Lemma von Euklid: Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$:

$$p \mid a \cdot b \Rightarrow (p \mid a \vee p \mid b).$$

Satz: Die Zahl π ist irrational, d.h. es gilt $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

- (a) Die Zahl $7\pi + 6$ ist eine irrationale Zahl.
- (b) Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$ irrational. Dann ist auch die Zahl $a \cdot \alpha + b$ irrational.

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

- (a) $-5 \notin \{7m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
- (b) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie folgende Aussagen mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

- (a) Es sei $p \in \mathbb{P}$. Die Zahl \sqrt{p} ist eine irrationale Zahl.
- (b) Die Zahl $18\sqrt{11} - 39$ ist eine irrationale Zahl.

Aufgabe 4 (Bonusaufgabe)

Zeigen Sie die folgende Aussage mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

$$\{3x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \cap \{3x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \emptyset.$$