Beispiel:

In jeder Menge P von n Personen gibt es immer zwei Personen, die die gleiche Anzahl v. Personen in P kennen.
(Annahme: „kennen" ist symmetrische Relation)

Begr.: Es seien $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ und $f: P \to \{0, 1, \dots, n-1\}$ Fkt., die Person p_i Anzahl bekannter Personen zuordnet.
Wegen $|P| = |\{0, \dots, n-1\}| = n$ kann Satz 17 nicht direkt angewendet werden. Fallunterscheidung:

(i) Es gibt $p \in P$ mit $f(p) = 0$: Dann gilt $f(q) \neq n-1$ für alle $q \in P \setminus \{p\}$. D.h. $f(P) \subseteq \{0, 1, \dots, n-2\}$

(ii) Für alle $p \in P$ gilt $f(p) \neq 0$: D.h. $f(P) \subseteq \{1, \dots, n-1\}$

Insgesamt: $|f(P)| < |P|$. Nach Satz 17 gilt Aussage.

Satz 18.

Es seien A, B endl., nicht-leere Mengen und $f: A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit

$$|f^{-1}(\{y\})| \geq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil$$

Beweis: (Widerspruch)
Angenommen es gilt $|f^{-1}(\{y\})| \leq \left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1$ für alle $y \in B$.

Dann folgt:

$$|A| = \sum_{y \in B} |f^{-1}(\{y\})| \leq \sum_{y \in B} \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right.$$

$$= |B| \cdot \left(\left\lceil \frac{|A|}{|B|} \right\rceil - 1 \right)$$

$\lceil \frac{n}{m} \rceil \leq \frac{n+m-1}{m}$ $\longrightarrow$

$$\leq |B| \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{|A|+|B|-1}{|B|} - 1}_{= \frac{|A|+|B|-1-|B|}{|B|}} \Bigg)$$

$$= |B| \cdot \frac{|A|-1}{|B|} = |A|-1 \quad \lightning$$

D.h. es gibt $y \in B$ mit $|f^{-1}(\{y\})| \geq \lceil \frac{|A|}{|B|} \rceil$ $\blacksquare$

<u>Beispiel:</u>

In jeder Menge v. 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich alle untereinander kennen, oder 3 Personen, die sich alle nicht kennen. (Annahme: „kennen" ist symmetrische Relation)

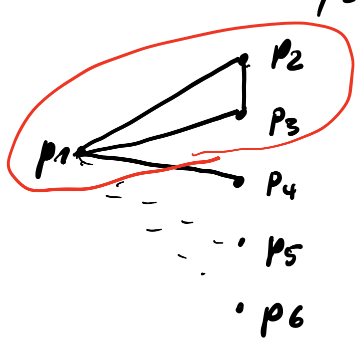
<u>Begr.:</u> Es sei $P = \{p_1, \dots, p_6\}$. Betrachte p_1 und die Funktion $f : \{p_2, \dots, p_6\} \to \{$„bekannt", „nicht bekannt"$\}$, die jeder Person $p_2, \dots, p_6$ zuordnet, ob p_1 Person kennt.

Nach Satz 18: $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ Personen „bekannt" (mit p_1) oder „nicht bekannt" (mit p_1).

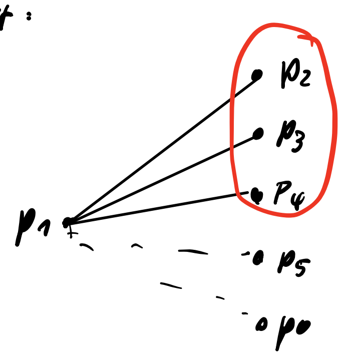
O.B.d.A. seien 3 Personen mit p_1 bekannt (sonst: vertausche „kennen" und „nicht kennen") und zwar p_2, p_3, p_4.

Fallunterscheidung:

(1.) Es gibt zwei Personen in $\{p_2, p_3, p_4\}$, die sich kennen.



(2.) p_2, p_3, p_4 kennen sich alle nicht, d.h. 3 Personen kennen sich nicht:



6. Graphentheorie

Graphen sind kombinatorische Strukturen zur Beschreibung binärer Relationen.

6.1 Ungerichtete Graphen

Definition 1.

Ein **Graph** G ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine endl., nicht-leere Menge von **Knoten** (oder **Ecken**) ist und E eine Teilmenge aller zweielementigen Teilmengen von V ist:

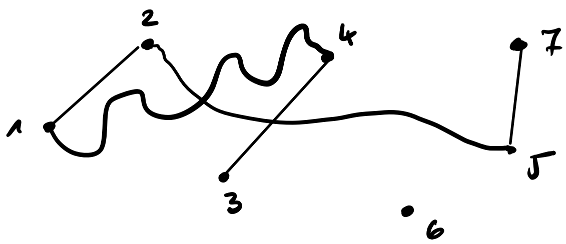
$$E \subseteq \mathcal{P}_2(V) =_{def} \{ \{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v \}$$

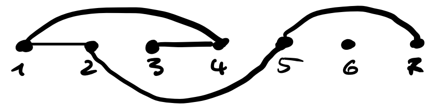
Die Elemente von E heißen **Kanten**

Graph $G = (V, E)$ kann wie folgt veranschaulicht werden:

- Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ wird durch Punkte dargestellt
- Für Kante $e = \{v_i, v_j\} \in E$ verbinde v_i und v_j mit Linie

Beispiel: $G=(V,E)$, $V=\{1,\dots,7\}$, $E=\{\{1,2\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{5,7\}\}$





Unterscheiden *markierte* und *unmarkierte* Graphen. Bei markierten Graphen (s.o.) stehen Knotennamen neben Knoten; bei unmarkierten Graphen lassen wir Knotennamen weg.

Definition 2.

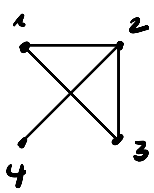
Es seien $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ Graphen. Dann heißt G *isomorph* zu G', $G \cong G'$, falls es eine bijektive Fkt. $\varphi: V \to V'$ gibt mit

$$\{u,v\} \in E \iff \{\varphi(u),\varphi(v)\} \in E'$$

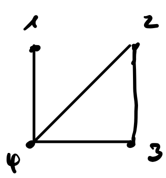
für alle $u,v \in V$. Die Abb. φ heißt (Graph-) *Isomorphismus*.

Beispiel: $G=(V,E)$, $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$

$G'=(V',E')$, $V'=\{1,2,3,4\}$, $E'=\{\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$



G



G'

$$\varphi: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \end{array}$$

Mögliche Kanten in G (6 Stck.):

- $\{1,2\} \in E$ $\qquad$ $\{\varphi(1),\varphi(2)\} = \{2,4\} \in E'$
- $\{1,3\} \in E$ $\qquad$ $\{\varphi(1),\varphi(3)\} = \{2,3\} \in E'$
- $\{1,4\} \notin E$ $\qquad$ $\{\varphi(1),\varphi(4)\} = \{1,2\} \notin E'$

- $\{2,3\} \in E$ $\qquad \{\varphi(2), \varphi(3)\} = \{3,4\} \in E'$
- $\{2,4\} \in E$ $\qquad \{\varphi(2), \varphi(4)\} = \{1,4\} \in E'$
- $\{3,4\} \notin E$ $\qquad \{\varphi(3), \varphi(4)\} = \{1,3\} \notin E'$

D.h. $\{u,v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'$

D.h. $G \cong G'$