# 5.3 Binomialkoeffiziansen

• Auzaul kombination von le kugeln aus n kugeln lutzpricht  $\binom{h}{k}$ : Binomialkoeffizient

Für u, k & IN definieren wir:

$$\binom{h}{k} = a_{i} \frac{h!}{k! (u-k)!} \quad \text{wit} \quad \binom{h}{k} = 0 \quad \text{fur kely}$$

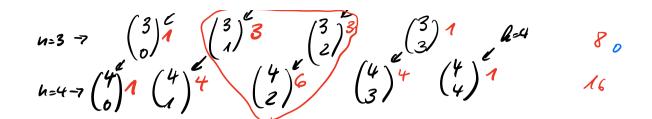
OffensionHide: 
$$\binom{h}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Panit Erweiterung auf hegative Werk von k: (h) = af 0
für REZIN

Sale 7. (Poscalsches Dreiect)

Für heN+, keN gilt  $\binom{u}{k} = \binom{h-1}{k-1} + \binom{h-1}{k}$ 

Lafbau des Pascalsohen Dreiects:



Bevers: (Kombinatorisch)

103

126

143

luisspretieren Gleich. als Bestimmung d. Kardinalitaiten
v. Mongen auf Euci Verschiedene Weise (Doppelles Abseida).
Es sei nent, ken. Definieren hengen familien:

$$F = a_{i+} \mathcal{P}_{k} \left( \mathcal{E}_{1,...,n} \mathcal{G}_{j} \right) = \begin{cases} \mathcal{E}_{a_{1},...,a_{k}} \middle| a_{i} \in \mathcal{E}_{1,...,n} \mathcal{G}_{j}, a_{i} \neq a_{i} \\ \mathcal{F}_{i+} = a_{i+} \mathcal{F}_{i} \middle| A \in \mathcal{F}_{j}, A \in \mathcal{F}_{j} \end{cases}$$

$$F_{+} = a_{i+} \mathcal{F}_{i} \middle| A \in \mathcal{F}_{i}, A \in \mathcal{F}_{j} \middle| A \in \mathcal{F}_{j}, A \in \mathcal{F}_{j} \middle| A \in \mathcal{$$

Es gilt:  $F = F_+ \cup F_-$  sowie  $F_+ \cap F_- = \emptyset$ . Nach Summeuregel:  $|F| = |F_+| + |F_-|$ 

komb. lutespretation v. F. F+, F\_:

- . F entspricht Zichen v. le Kugelu aus le Kugelu, o. E., o. R.
- Ft entsportat Zichen v, le-1 kugeln aus u-1 kugeln 0.2., o.R. (kugel 1 liegt nicht in lorne)
- J\_ entsprient Ziehen V. le kugeln aus 4-1 kugeln,
  o. 2., o. R. (da kugel 1 hieut gezogen werden dast)

Wir exhalten: 
$$|F| = {h \choose k}, |F_{+}| = {h-1 \choose k-1}, |F_{-}| = {h-1 \choose k}$$

lusgesaut: 
$$\binom{h}{k} = \binom{h-1}{k-1} + \binom{h-1}{k}$$

Sale 8. (Binomial Hocoran)

160\_

Für alk aber und now gilt

$$(a+b)^h = \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} a^{h-k} b^k$$

Eures: Chambinatorisch) tusmultiplizien v. (a+6)" ergibt:

$$(a+b)^{h} = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a$$
  
 $+ a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot b$   
 $+ a \cdot a \cdot \dots \cdot b \cdot a$   
 $+ a \cdot a \cdot \dots \cdot b \cdot b$ 

Oh. Jedes Summand bestent aus n Faktoren; sind k
Faktoren davan b, so sind (n-k) olavan a; dies entspricht a h-k b e. Anzant Produkte a h-k b entspricht
lider v. k kugeln (Faktoren b) aus n kugeln (tresantheit d. Faktoren) o. 2., o. R.; d.h. (h) uada Sak-6.
Somit gilt:

$$(a+b)^{h} = \sum_{k=0}^{h} {h \choose k} a^{h-k} b^{k}$$

#### Koroller 9.

Für alle nell gilt: 
$$\sum_{k=0}^{n} {n \choose k} = 2^{n}$$

$$2'' = (1+1)'' = \frac{1}{2} \binom{4}{k} 1^{k-k} 1^{k} = \frac{1}{2} \binom{4}{k}$$

#### korollor 10.

### Beweis Nada Sake 8 gilt:

$$0 = (1-1)^{h} = \frac{h}{2} \binom{h}{k} 1^{h-k} (-1)^{k} = \frac{h}{2} (-1)^{k} \binom{h}{k} \blacksquare$$

## Sah M. (Voudermondesolve Identitét)

Für kiminen gilt:

$$\binom{h+m}{k} = \frac{k}{j=0} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$$

Beweis: klar (n France, m Moinner, Gerappengrobe le)