1. Arithmetik

1.1 Zahlenbereiche

1. Natürliche Zahlen:

- $\mathbb{N}$ ist die Menge d. natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, 3, \ldots$
- a ist Abk. für $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{-mal}}$
- a^n ist Abk. für $\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$
- 0 ist nat. Zahl (in Math. sehr häufig nicht); unterschiedliche Schreibweisen:

	0 ist nat. Zahl	0 ist keine nat. Zahl
Informatik	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}_+$
Mathematik	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}$

Rechenregeln:

Es seien k, n, m nat. Zahlen ($k, n, m \in \mathbb{N}$)

1. $\left.\begin{aligned} (k+n)+m &= k+(n+m) \\ (k\cdot n)\cdot m &= k\cdot(n\cdot m) \end{aligned}\right\}$ Assoziativgesetze

2. $\left. k\cdot(n+m) \underset{\text{Ausmult.}\ \longrightarrow}{\overset{\longleftarrow\ \text{Ausklammern}}{=}} k\cdot n + k\cdot m \right\}$ Distributivgesetz

3. $\left.\begin{aligned} n+m &= m+n \\ n\cdot m &= m\cdot n \end{aligned}\right\}$ Kommutativgesetze

4. $n + 0 = n$

$n \cdot 1 = n$ } neutrale Elemente

5. $n \cdot 0 = 0$

Potenzrechenregeln:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3. $a^n b^n = (ab)^n$

   (insbesondere: $a^0 =_{def} 1$)

(2.) Ganze Zahlen:

- $\mathbb{Z}$ ist die Menge d. ganzen Zahlen: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
- in $\mathbb{Z}$ können Gleichungen d. Form $x + a = b$ gelöst werden
- $-a$ ist Abk. für:

$$-\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{a\text{-mal}} = (-1)+(-1)+\dots+(-1) = (-1)\cdot a$$

Rechenregeln:

1.–5. übertragen sich von $\mathbb{N}$

6. $n + (-n) = 0$ } inverses Element

(3.) Rationale Zahlen

- $\mathbb{Q}$ ist die Menge d. rationalen Zahlen, d.h. die Menge d. Brüche $\frac{p}{q}$ mit $q \neq 0$ sowie p, q ganze Zahlen
- in $\mathbb{Q}$ können Gleichungen d. Form $qx - p = 0$
- äquivalente Def. v. $\mathbb{Q}$:
  - (i) p ganze Zahl, q nat. Zahl, $q \neq 0$
  - (ii) p nat. Zahl, q ganze Zahl, $q \neq 0$

Dezimalschreibweise:

- $\frac{1}{2} = 0{,}5$ — Periodenlänge 0
- $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$ — Periodenlänge 1
- $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$ — Periodenlänge 6
- $\frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$ — schließlich periodisch

Beachte: Dezimalschreibweise nicht eindeutig, z.B. $1 = 0{,}\overline{9}$

Rechenregeln:

1.–6. übertragen sich von $\mathbb{Z}$

7. $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = 1$ für $p \neq 0, q \neq 0$ } inverses El. für $\cdot$

Schreibweise:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{p}{q}} =_{\text{def}} \frac{q}{p}$$

4. Reelle Zahlen

- $\mathbb{R}$ ist d. Menge aller reellen Zahlen, d.h. die Menge aller endlichen und unendl. Dezimalzahlen.

Beispiele:

1. Jede rationale Zahl ist reell; r ist rational gdw. r ist schließlich periodisch
2. $\pi = 3{,}141582\ldots$ irrational und transzendent
3. $e = 2{,}7182818\ldots$ irrational und transzendent
4. $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ irrational aber algebraisch

⑤ Irrationalität von $\pi + e$ offen

Rechenregeln:

1.–7. übertragen v. $\mathbb{Q}$ (mit $r \cdot \frac{1}{r} = 1$ für $r \neq 0$)

Logarithmus:

- in $\mathbb{R}$ können Gl. d. Form $a^x = b$ für alle pos. nat. Zahlen a, b gelöst werden:

$$\log_a b =_{\text{def}} x$$

- es gilt: $a^{\log_a b} = b$ und $\log_a a^b = b$
- mit Hilfe d. Potenzrechenregeln ergibt sich:

(i) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

(ii) $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

$$\log_a (bc) = \log_a \left(a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c}\right) = \log_a a^{\log_a b + \log_a c} = \log_a b + \log_a c$$

Anordnungsaxiome:

1. Es gilt entweder $a = b$, $a < b$ oder $a > b$ — Trichotomiegesetz
2. Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ — Transitivität
3. Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ — Monotonie d. Add.
4. Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$ — Monotonie d. Mult.

Beispiel: Für welche x gilt $12x + 7 \leq 17x - 13$?

NR:

$$\begin{aligned} & 12x + 7 \leq 17x - 13 && \mid +13 \\ \Leftrightarrow\ & 12x + 20 \leq 17x && \mid -12x \\ \Leftrightarrow\ & 20 \leq 5x && \mid \cdot \tfrac{1}{5} \\ \Leftrightarrow\ & 4 \leq x \end{aligned}$$

z.z. Für alle $x \geq 4$ gilt $12x+7 \leq 17x-13$

Es gilt: $12x+7 \leq \underbrace{12x+7+5\underbrace{(x-4)}_{\geq 0}}_{\geq 0} = 17x-13$

5. Komplexe Zahlen:

- $\mathbb{C}$ ist d. Menge d. komplexen Zahlen, d.h. Menge d. Zahlenpaare (a,b), wobei a,b reelle Zahlen sind, mit folg. Oper.:

  (i) Addition: $(a,b) + (c,d) =_{def} (a+c, b+d)$

  (ii) Multiplikation: $(a,b) \cdot (c,d) =_{def} (ac-bd, ad+bc)$

- in $\mathbb{C}$ können Nullstellen f. Polynome bestimmt werden.

Schreibweise: mit $i =_{def} (0,1)$

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \boxed{a + bi} \\
&= (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) \\
&= (a,0) + (b\cdot 0 - 0\cdot 1, b\cdot 1 + 0\cdot 0) \\
&= (a,0) + (0,b)
\end{aligned}
$$

- i steht für imaginäre Einheit: i „=" $\sqrt{-1}$

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} 1+x^2 &= (1,0) + (a,b)\cdot(a,b) \\
&= (1,0) + (a^2-b^2, 2ab)
\end{aligned}
$$

D.h. $0 = 1 + a^2 - b^2$, $0 = 2ab$

D.h. $a = 0$, $b = \pm 1$; $x = 0 \pm i = \pm i$

- es gilt: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

Rechenregeln:

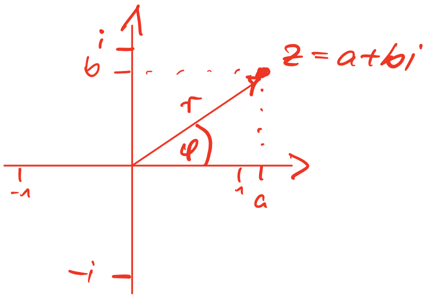
1.–7. übertragen sich von $\mathbb{R}$

Formeln:

(1.) $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

(2.) $e^{i\pi} + 1 = 0$

(3.) $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$



$a = r \cdot \cos\varphi$

$b = r \cdot \sin\varphi$

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$z = r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\varphi^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}\right)$$

$$= r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!}\varphi^{2n+1}\right)$$

$$= r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\varphi^n\right)$$

$$= r e^{i\varphi}$$