**Satz 21.**

Für jeden planaren Graph $G=(V,E)$ mit $|V|\geq 3$ gilt:

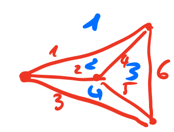
$$|E| \leq 3|V|-6$$

Beweis: (Doppeltes Abzählen)

Es sei $G$ als ebener Graph gegeben. Wir betrachten einen maximal planaren Graphen $G' \supseteq G$ auf derselben Knotenmenge (einen vollständig triangulierten Graphen), $|E'| \geq |E|$. Dann gilt:

(i) Jede Kante v. $G'$ begrenzt 2 Gebiete

(ii) Jedes Gebiet wird von 3 begrenzt




Wir betrachten eine $n\times m$-Matrix mit $n$ Zeilen für die Gebiete und $m$ Spalten für die Kanten, d.h. $n=|F|$, $m=|E'|$ sowie

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$a_{ij} =_{def} \begin{cases} 1 & \text{falls Gebiet } i \text{ v. Kante } j \text{ begrenzt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$3|F| = \sum_{i=1}^{n} 3 \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{m} 2 = 2|E'|$$

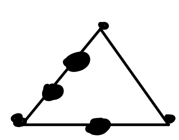
Mithin gilt nach Satz 20:

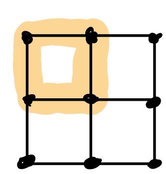
$$2|E'| = 3(|E'|-|V|+2)$$

also: $|E'| = 3|V|-6$. Damit folgt: $|E| \leq 3|V|-6$ ■

Eine **Unterteilung** eines Graphen $G=(V,E)$ entsteht dadurch, dass Kanten $e\in E$ durch neue knotendisjunkte Pfade $p_e$ ersetzt werden.

Beispiel: Unterteilung von $K^3$:





**Satz 22.** (Kuratowski)

Ein Graph $G$ ist genau dann planar, wenn $G$ keine Unterteilung des $K^5$ oder $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält. ■

## 6.5 Färbungen

**Definition 23.**

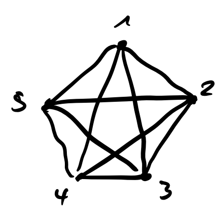
Es sei $G=(V,E)$ ein (ungerichteter) Graph.

(1.) Eine **Knotenfärbung** von $G$ mit $k$ Farben ist eine Abb. $c: V \to \{1,\dots,k\}$ mit $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u,v\} \in E$.

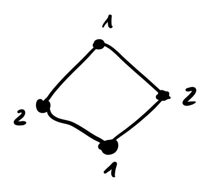
(2.) Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ von $G$ ist die minimale Anzahl $k$ von Farben, sodass eine Knotenfärbung v. $G$ mit $k$ Farben existiert.

Beispiele:

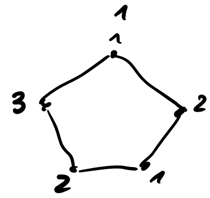
1. $K^n$ benötigt $n$ Farben:




2. $C_{2n}$ benötigt 2 Farben




3. $C_{2n+1}$ benötigt 3 Farben




4. Die bipartiten Graphen sind genau die Graphen, die mit zwei Farben färbbar sind.
5. Bäume sind mit 2 Farben färbbar.

Ohne Beweis:

**Satz 24.** (Vierfarbensatz)

Für jeden planaren Graphen $G$ ist $\chi(G) \leq 4$. ∎

**Definition 25.**

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1.) Eine **Kantenfärbung** von $G$ mit $k$ Farben ist eine Abb. $c: E \to \{1, \dots, k\}$ mit $c(e) \neq c(f)$ für alle Kanten $e, f \in E$ mit $e \cap f \neq \emptyset$.

(2.) Der **chromatische Index** $\chi'(G)$ von $G$ ist die minimale Anzahl $k$ von Farben, sodass Kantenfärbung von $G$ mit $k$ Farben existiert.

**Satz 26.** (Vizing)

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, wobei $\Delta(G)$ der max. Grad eines Knoten v. $G$ ist. ∎