Fortsetzung Beweis v. Satz 18:

Nachweis d. Bijektivität durch Angabe d. Umkehrabb.:
Für Wort $t = t_1 \dots t_{n-2}$ gehe wie folgt vor:

(1) $S := \emptyset$, $E := \emptyset$
(2) **for** $i := 1$ **to** $n-2$ **do**
(3) $\quad s_i := \min [n] \setminus (S \cup \{t_i, \dots, t_{n-2}\})$
(4) $\quad E := E \cup \{ \{s_i, t_i\} \}$
(5) $\quad S := S \cup \{s_i\}$
(6) $E := E \cup \{ [n] \setminus S \}$ ∎

6.4 Planare Graphen

Definition 19.

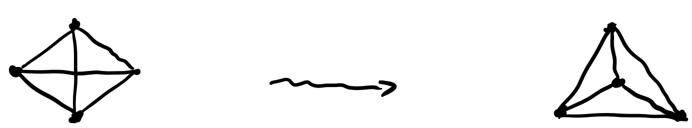
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1.) G heißt **planar** (oder plättbar), falls G so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten überschneiden.

(2.) G heißt **eben**, falls G planar ist und in einer kreuzungsfreien Darstellung (Einbettung in der Ebene) gegeben ist.

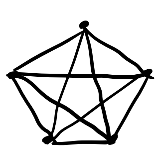
Beispiele:

K^4



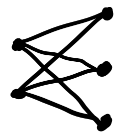
planar

K^5

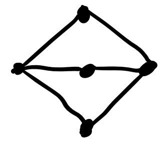


nicht planar

$K_{2,3}$

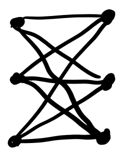


$\rightsquigarrow$



planar

$K_{3,3}$

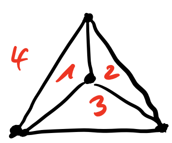


nicht planar

Es sei $G = (V,E)$ ein ebener Graph.
Ein **Gebiet** (Facette) ist ein Teil d. Ebene, der entsteht, wenn die Ebene entlang der Kanten zerschnitten würde.

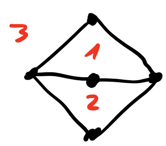
__Beispiele:__

K^4:



4 Gebiete (3 innere, 1 äußeres)

$K_{2,3}$:



3 Gebiete (2 innere, 1 äußeres)

__Satz 20.__ (Eulersche Polyederformel)

Es sei $G = (V,E)$ ein zshgd. ebener Graph. Es sei F die Menge d. Gebiete v. G. Dann gilt:

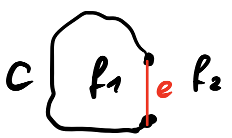
$$|F| = |E| - |V| + 2$$

__Beweis:__ (Induktion)

Verwenden Exzess v. G: $ex(G) =_{def} |E| - |V| + k$, wobei k die Anzahl d. Komp. v. G ist. Da G zshgd. ist, gilt $ex(G) = |E| - |V| + 1 \geq 0$.

(IA) Es sei $G=(V,E)$ ein ebener Graph mit $ex(G)=0$, d.h. $|E|=|V|-1$. Somit ist G ein Baum. Da G keine Kreis enthält, gibt es genau ein Gebiet. D.h. $1=|E|-|V|+2$.

(IS) Es sei $G=(V,E)$ ein ebener Graph mit $ex(G)>0$. Somit ist G kein Baum. D.h. es gibt einen einfachen Kreis C in G. Es sei e eine bel. Kante auf C.



Kante e trennt Gebiet f_1 links v. e vom Gebiet f_2 rechts v. e.

Es sei $G' =_{def} G-e$ der ebene Graph, der aus G entsteht, wenn e entfernt wird. Dann gilt $ex(G')=ex(G)-1$. Dann verschmelzen f_1 und f_2 in G' zu einem Gebiet.

Somit:

$$|F| = \overbrace{|F|-1}^{\text{Anz. Gebiete v. } G'} + 1$$

$$\overset{(IV)}{=} \underbrace{|E|-1}_{\text{Kanten v. } G'} - |V| + 2 \quad + 1$$

$$= |E| - |V| + 2 \qquad \blacksquare$$

<u>Satz 21.</u>

Für jeden planaren Graph $G=(V,E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt:

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$$

<u>Beispiel:</u>

1. K^5 ist nicht planar, denn: $10 \nleq 3 \cdot 5 - 6 = 9$
2. $K_{3,3}$ erfüllt $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$, ist aber nicht planar.