Korollar 22.

Ist f eine bijektive Fkt., so ist f^{-1} eine bijektive Fkt.

Definition 23.

Eine Fkt. f heißt **invertierbar** (bzw. **umkehrbar**), falls f^{-1} eine Funktion ist.

Korollar 24.

Eine Fkt. f ist invertierbar gdw. f ist bijektiv.

Wichtige Operation auf Fkt.: **Hintereinanderausführung** (alternativ: Verkettung, Superposition, Komposition)

Für Funktionen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ definieren wir die Fkt. $g \circ f: A \to C$ wie folgt für alle $x \in A$:

$$(g \circ f)(x) =_{def} g(f(x))$$

Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Beispiele: Wir betrachten folg. Fkt. $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) =_{def} x^2 \quad , \quad g(x) =_{def} 2^x$$

Dann gilt:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

D.h. es gilt $g \circ f \neq f \circ g$ (z.B. $\underbrace{(g \circ f)(3) = 2^9 = 512}_{\substack{(3,512) \in g \circ f \\ (3,512) \notin f \circ g}} \neq \underbrace{64 = 2^6 = (f \circ g)(3)}_{\substack{(3,64) \in f \circ g \\ (3,64) \notin g \circ f}}$)

Für eine Menge A heißt $id_A : A \to A : x \mapsto x$ Identitätsfunktion auf A.

Proposition 25.

Es sei $f: A \to B$ eine bijektive Fkt. Dann gilt:

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

$\blacksquare$

Proposition 26.

Es seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ bel. Funktionen.

(1.) Sind f, g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

(2.) Sind f, g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(3.) Sind f, g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

$\blacksquare$

5. Kombinatorik

5.1 Grundregeln des Abzählens

Lemma 1. (Gleichheitsregel; Lemma 4.19.(3))

Es seien A und B endliche Mengen. Es gibt genau dann eine bijektive Fkt. $f: A \to B$, wenn $|A| = |B|$ gilt.

Lemma 2. (Summenregel)

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

Beweis: Alle Elemente von $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ werden links und rechts genau einmal gezählt, da jedes El. zu genau einer Menge A_j gehört. $\blacksquare$

Lemma 3. (Produktregel)

Es seien $A_1, \dots, A_n$ endl. Mengen. Dann gilt:

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{j=1}^{n} |A_j|$$

Beweis: (Induktion über n) Dürfen annehmen, dass $A_j \neq \emptyset$ für alle j gilt.

(IA) $n=1$: offensichtlich

(IS) $n>1$: Es seien $A_1, \dots, A_n$ endl. Mengen. Definiere

$$A^* =_{def} A_1 \times \dots \times A_{n-1}$$

$$B_y =_{def} \{ (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^* \} \quad \text{für } y \in A_n$$

Es gilt:

(i) $\{ B_y \mid y \in A_n \}$ ist Partition v. $A_1 \times \dots \times A_n$

(ii) Für jedes $y \in A_n$ ist die Fkt.

$$f_y : B_y \to A^* : (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

eine bij. Fkt., d.h. $|B_y| = |A^*|$ für alle $y \in A_n$ (nach Gleichheitsregel)

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|A_1 \times \dots \times A_n| &= \Big| \bigcup_{y \in A_n} B_y \Big| && \text{(wegen (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} |B_y| && \text{(Lemma 2, (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} |A^*| && \text{(wegen (ii))} \\
&= |A^*| \cdot \sum_{y \in A_n} 1 \\
&= |A^*| \cdot |A_n| \\
&\overset{(IV)}{=} \left(\prod_{j=1}^{n-1} |A_j| \right) \cdot |A_n| = \prod_{j=1}^{n} |A_j| \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 4. (Potenzregel)

Es seien A und B endl. Mengen mit $|A|=m$ und $|B|=n$. Dann existieren genau n^m Funktionen $f: A \to B$.

Beweis: Dürfen annehmen: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. o.B.d.A. sei $A = \{1, \dots, m\}$ (wegen Lemma 1). Jeder Fkt. $f: A \to B$ kann eineindeutig ein Tupel $(f(1), f(2), \dots, f(m)) \in B^m$ (Wertetabelle) zugeordnet werden. Außerdem entspricht jedes Tupel $(y_1, \dots, y_m) \in B^m$ einer Fkt. $f: A \to B: j \mapsto y_j$. Somit ist Zuordnung bijektiv. Nach Gleichheits- und Produktregel gilt:

$$|\{f \mid f: A \to B\}| \overset{L.1}{=} |B^m| \overset{L.3}{=} |B|^m = n^m \quad \blacksquare$$

Beispiel: Wie viele boolesche Fkt. mit n Variablen gibt es?
Antwort: $|\{f \mid f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}| = 2^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$

Korollar 5.

Für endl. Mengen A mit $|A|=n$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweis: Konstruieren Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und $\{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$. Für Menge $B \in \mathcal{P}(A)$ definiere charakteristische Funktion

$$c_B: A \to \{0,1\}: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Die Zuordnung $B \mapsto c_B$ ist bijektiv. Nach Potenz- und Gleichheitsregel gilt: $|\mathcal{P}(A)| = |\{f \mid f: A \to \{0,1\}\}| = 2^n \quad \blacksquare$