3.3 Rechnen mit unendlich vielen Mengen

Wir betrachten Teilmengen einer Grundmenge U.
Weiterhin sei I eine bel. (Index)Menge; für jedes $i \in I$ sei eine Menge $A_i \subseteq U$ gegeben:

$$\bigcup_{i \in I} A_i =_{def} \{ x \in U \mid (\exists i \in I)[x \in A_i] \}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i =_{def} \{ x \in U \mid (\forall i \in I)[x \in A_i] \}$$

Für $I = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ und $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Beispiele:

(1.) Es sei $U = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}_+ \; (= \mathbb{N} \setminus \{0\})$ und

$$A_k =_{def} \{ x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq \tfrac{1}{k} \}$$

Dann gilt:

$$\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \overset{A_1 \supseteq A_k}{=} \{ x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 1| \leq 1 \} \quad (= A_1)$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \}$$

$$_{def}= [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$\bigcap_{k \in I} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{-1, 1\}$$

(2.) $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$

(3.) $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$

3.4 Potenzmengen

Mengen v. Mengen sind (Mengen) Familien

Für widerspruchsfr. Formalisierung benutzen wir Potenzmengenbildung:

Die Potenzmenge einer Menge A ist def. als

$$\mathcal{P}(A) =_{def} \{ X \mid X \subseteq A \} \qquad (2^A, \wp A)$$

Proposition 1.

Es sei A eine bel. Menge.

(1.) $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$

(2.) $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$

(3.) Ist A endlich, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ ■

Beispiele:

1. $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
2. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
3. $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
4. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
5. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
6. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

$$= \{\underbrace{\emptyset, \{\emptyset\}}_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \text{ als TM}}, \{\{\emptyset\}\}, \overbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \text{ als El.}}\}$$

Teilmengen der Potenzmenge heißen Mengenfamilien.

Beispiel: Für Menge A, $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{P}_k(A)$ definiert:

$$\mathcal{P}_k(A) =_{def} \{ X \mid X \subseteq A, \ |X| = k \}$$

Für $|A| = n < \infty$ gilt: $\mathcal{P}(A) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(A)$

Definition 3.

Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt (ungeordnete) Partition von A, falls folg. Bedingungen erfüllt sind:

(1.) $B \cap C = \emptyset$ für alle $B, C \in \mathcal{F}$ mit $B \neq C$

(2.) $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = A$

Die Mengen $B \in \mathcal{F}$ heißen Komponenten der Partition.

Beispiele:

1. $\{ \mathbb{R}_{>0}, \{0\}, \mathbb{R}_{<0} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist eine Part. v. $\mathbb{R}$
2. $\{ \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist eine Part. v. $\mathbb{R}$
3. $\{ A, \bar{A} \} \subseteq \mathcal{P}(U)$ ist eine Part. v. U

4. Relationen

Relationen beschreiben die Bez. zwischen Mengen.

4.1 Kreuzprodukte

Es seien $A_1, \dots, A_n$ bel. Mengen.

Das Kreuzprodukt (kartesisches Produkt) von $A_1, \ldots, A_n$ ist def. als

$$A_1 \times \cdots \times A_n =_{def} \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } a_i \in A_i \}$$

Die Elemente von $A_1 \times \cdots \times A_n$ heißen n-Tupel (für $n=2$ Paare, für $n=3$ Tripel, für $n=4$ Quadrupel)

Beachte: n-Tupel sind geordnet, d.h.

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1', \ldots, a_n') \iff a_i = a_i' \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Sind alle Mengen gleich (d.h. $A_1 = \cdots = A_n = A$), so def. wir:

$$A^n =_{def} \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ Stück}}$$