Universität Konstanz

Diskrete Mathematik und Logik – Q&A Woche 6

Bastian Goldlücke
Uni Konstanz, 04.12.23

Inhalt der Q&A Woche 6:

Selbststudium aus Woche 5

Skript Kapitel 4.2 – 4.3
Video E09, E10

- Kapitel 4.2: Äquivalenzrelationen
- Kapitel 4.3: Ordnungsrelationen

Übungsblatt Woche 6

Erinnerung: wird in den Übungsgruppen bearbeitet, freiwille Abgabe am Freitag.

- Äquivalenzrelationen
- Kongruenz
- Halbordnungen

4.2: Äquivalenzrelationen

Spezieller Typ von Relation

- Erinnerung: Relation ist Teilmenge R des Kreuzproduktes AxA
- Zwei Elemente a,b stehen in Relation, wenn (a,b) in R liegt
- Eine Äquivalenzrelation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch
- Paradebeispiele Kongruenz modulo n (Übungsaufgabe), Gleichheit von Zahlen, syntaktische und semantische Äquivalenz aus RSN

Gleichbedeutend mit einer Partition der Menge A

- Zerlegung in Äquivalenzklassen (Menge aller Elemente, die äquivalent zueinander sind)
- Aus jeder Äquivalenzklasse kann man einen Vertreter wählen, um ein Repräsentantensystem zu bekommen

4.3: Ordnungsrelationen

Weiterer spezieller Typ Relation

- reflexiv, transitiv, antisymmetrisch, linear (bzw. total), dann heißt es “totale Ordnung” oder “lineare Ordnung”, und die Menge mit der Relation “(total oder linear) geordnet”
- Kanonisches Beispiel: “kleiner gleich” oder “größer gleich” (die “lineare Ordnung” auf den reellen Zahlen, bzw. dem Zahlenstrahl)

- Halbordnung (siehe Übungsblatt): nur reflexiv, transitiv, antisymmetrisch
- Kanonische Beispiele: Mengeninklusion „ist Teilmenge von“, Teilbarkeit „ist Teiler von“

4.3: Supremum und Infimum

Definiert für mindestens Halbordnungen

- Infimum und Supremum: größte untere bzw. kleinste obere Schranke einer Teilmenge K von einer halbgeordneten Grundmenge A

- Infimum und Supremum müssen in A liegen, aber nicht notwendig in K !

- Infimum und Supremum sind stets eindeutig bestimmt, falls sie existieren.

- Bemerkung: In den reellen Zahlen mit der linearen Ordnung hat jede beschränkte Menge Infimum und Supremum, im allgemeinen ist das falsch, da sich untere / obere Schranken nicht notwendig vergleichen lassen.

4.3: Minimum und Maximum

Definiert für mindestens Halbordnungen

- Minimum und Maximum: Falls Infimum oder Supremum innerhalb der Teilmenge K liegen, nennt man es das Minimum bzw. Maximum der Menge.
- Alternative Definition: Ein Element in K, welches echt kleiner bzw. größer als alle anderen Elemente ist.
- Minimum und Maximum müssen nicht existieren, aber falls sie existieren, sind sie eindeutig.
- Kanonische Beispiele: Intervalle in den reellen Zahlen (abgeschlossen, offen, haboffen)

4.3: Minimale und Maximale Elemente

Definiert für mindestens Halbordnungen

- Minimales oder Maximales Element: Ein Element, das innerhalb einer Teilmenge K von einer Grundmenge A kein kleineres (oder größeres) Element besitzt.

- Man beachte den subtilen Unterschied zu dem Minimum, bzw. Maximum einer Menge, insbesondere kann K mehrere minimale oder maximale Elemente besitzen.

- Falls man es mit einer totalen Ordnung zu tun hat, gibt es in jeder Menge nur höchstens ein minimales oder maximales Element, welches dann automatisch das Minimum oder Maximum ist (falls es existiert)