6.6 Paarungen

Definition 27.

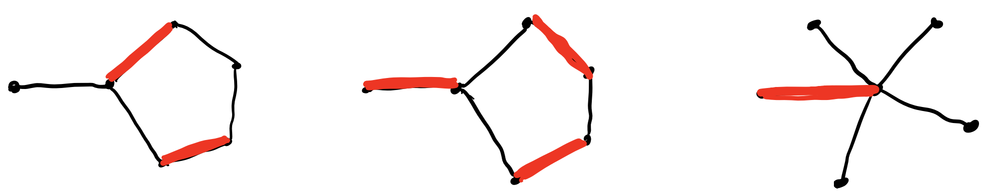
Es sei $G=(V,E)$ ein Graph.

(1.) Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching** (oder **Paarung**) in G, falls $e \cap f = \emptyset$ für alle Kanten $e,f \in M$ mit $e \neq f$ gilt.

(2.) Ein Matching $M \subseteq E$ heißt **perfekt**, falls $2|M| = |V|$ gilt.

M.a.W.: Ist M ein Matching in G, so ist jeder Knoten v zu höchstens einer Kante $e \in M$ inzident; gilt $v \in e$ für $e \in M$, so wird v von e **überdeckt**. Perfektes Matching überdeckt alle Knoten von G.

Beispiele:



perfekt

Erweitern Nachbarschaft $N_G(v)$ in $G=(V,E)$ auf $X \subseteq V$:

$$N_G(X) =_{def} \bigcup_{v \in X} N_G(v)$$

Insbesondere gilt: $N_G(A \cup B) = N_G(A) \cup N_G(B)$

Satz 28. (Hall; Heiratssatz)

Für einen bipartiten Graphen $G=(A \dot\cup B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M mit $|M|=|A|$, wenn $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq A$ gilt. ∎

Korollar 29.

Jeder k-reguläre, bipartite Graph G enthält ein perfektes Matching (und hat den chromatischen Index $\chi'(G)=k$).

Beweis: Es sei $G=(A \dot\cup B, E)$ ein k-regulärer, bipartiter Graph. Dann gibt es $k|A|=|E|$ Kanten von A nach B und $k|B|=|E|$ Kanten von B nach A. Mithin gilt $|A|=|B|$. Jedes Matching M mit $|M|=|A|$ ist perfekt.

Es sei $X \subseteq A$. Dann gibt es $k|X|$ Kanten in Nachbarschaft $N(X)$. Jeder Knoten $v \in N(X)$ ist adjazent zu $\leq k$ Knoten in X.

Somit gilt: $\underbrace{k|X|}_{\text{Kanten v. „links" n. „rechts"}} \leq \underbrace{k|N(X)|}_{\text{Kanten v. „rechts" n. „links"}}$ bzw. $|X| \leq |N(X)|$

Nach Satz 28 gibt es Matching M mit $|M|=|A|$. ∎