Definition 11.

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$.
Ein Element $a \in K$ heißt minimal (bzw. maximal) in K, falls für alle $b \in K$ gilt:

Ist $b \leq_R a$ (bzw. $a \leq_R b$), so ist $a = b$.

Beispiel: $A =_{def} \mathbb{N}$, $R =_{def} \{ (m,n) \mid m \mid n \} \subseteq A \times A$ für

$K_1 =_{def} \mathbb{N}$

$K_2 =_{def} \mathbb{N} \setminus \{1\}$

gilt:

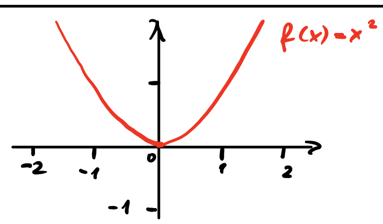
- Menge d. minimalen El. v. K_1: $\{1\}$
- Menge d. minimalen El. v. K_2: Primzahlen

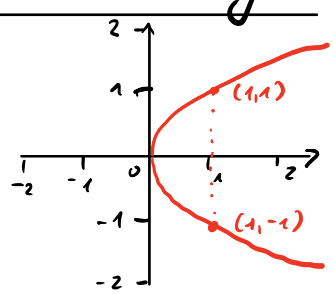
Proposition 12.

Es seien $R \subseteq A \times A$ ein Ordnung und $K \subseteq A$.
Ist $a \in K$ minimal (bzw. maximal) in K, so ist a ein Minimum (bzw. Maximum) von K.

Beweis: (nur für Minimalität)
Es sei $a \in K$ ein minimales Element. Für $b \in K$ gilt $a \leq_R b$ oder $b \leq_R a$ wegen Linearität. Gilt $b \leq_R a$, so folgt $a = b$. Somit gilt für alle $b \in K$, $a \leq_R b$. D.h. a ist Minimum. ∎

4.4 Funktionen und Abbildungen





Menge der Kurvenpunkte:

$\{(x,y) \mid y = x^2\}$

Funktion

Menge der Kurvenpunkte:

$\{(y,x) \mid y = x^2\}$

$= \{(x,y) \mid y = \sqrt{x}$ oder $y = -\sqrt{x}\}$

keine Funktion

Definition 13.

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

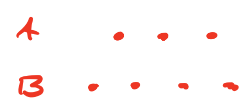
(1.) linkstotal $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x,y) \in R]$

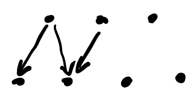
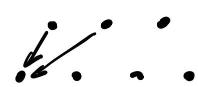
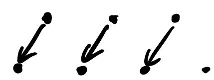
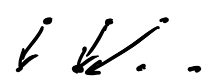
(2.) rechtseindeutig $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $(\forall x \in A)(\forall y,z \in B)[((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R) \rightarrow y = z]$

(3.) rechtstotal $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $(\forall y \in B)(\exists x \in A)[(x,y) \in R]$

(4.) linkseindeutig $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ $(\forall x,y \in A)(\forall z \in B)[((x,z) \in R \wedge (y,z) \in R) \rightarrow x = y]$

Beispiele: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$



Relation		(1)	(2)	(3)	(4)
$\{(1,1), (1,2), (2,2)\}$		f	f	f	f
$\{(1,1), (2,1)\}$		f	w	f	f
$\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$		w	w	f	w
$\{(1,1), (2,2), (3,2)\}$		w	w	f	f
$\{(1,1), (1,2)\}$		f	f	f	w
existiert nicht		w	w	w	w

Definition 14.

Es sei $R \subseteq A \times B$ eine binäre Relation.

(1.) R heißt (totale) Funktion (bzw. Abbildung), falls R linkstotal und rechtseindeutig ist.

(2.) R heißt partielle Funktion, falls R rechtseindeutig ist.

Beispiele:

1. $\{(1,1), (2,2), (3,2)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ Fkt.
2. $\{(1,1), (2,1)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\}$ partielle Fkt.;
   $\{(1,1), (2,1)\} \subseteq \{1,2\} \times \{1,2,3,4\}$ totale Fkt.
3. $\{(x,y) \mid y = |x|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ Fkt.
4. $\{(y,x) \mid y = |x|\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ keine Fkt.
5. Methode

```
int gcd (int x; int y) {
   if (y==0) return x;
   if (y>x) return gcd (y,x);
   return gcd (y, x % y);
}
```

ist eine partielle Fkt. als TM v. $\text{int}^2 \times \text{int}$, denn:
$-1 \% -2 = -1$ (in Java) und
$gcd(-1,-2) = gcd(-2,-1) = gcd(-1,-2) = \ldots$
terminiert nicht; deshalb gibt es kein $z \in \text{int}$ mit
$((-1,-2), z) \in gcd$

Das nachfolgende Material wurde nachträglich eingefügt, da wir es in der Vorlesung nicht wie geplant geschafft haben!

Bemerkung: Für $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ sagen wir: R ist k-stellige Fkt., falls $R \subseteq B \times C$ mit $B = A_1 \times \cdots \times A_k$ und $C = A_{k+1} \times \cdots \times A_n$ eine Fkt. ist.

(Mathematische) Schreibweisen:

- Fkt. häufig klein geschrieben: $f \subseteq A \times B$

- statt $f \subseteq A \times B$ auch $f: A \to B$; statt $(a,b) \in f$ auch $f(a) = b$
- kompakt: $f: A \times B : a \mapsto f(a)$, z.B. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$
- Für Funktionen f heißt A **Definitionsbereich**, B **Wertebereich**

Definition 15.

Es seien $f: A \to B$ eine Funktion, $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$.

(1.) Die Menge $f(A_0) \subseteq B$ ist definiert als

$$f(A_0) =_{def} \{ b \mid (\exists a \in A_0)[f(a) = b] \} = \{ f(a) \mid a \in A_0 \}$$

und heißt **Bild(menge)** von A_0 unter f.
Die Elemente von $f(A_0)$ heißen **Bilder** von A_0 unter f.

(2.) Die Menge $f^{-1}(B_0) \subseteq A$ ist definiert als

$$f^{-1}(B_0) =_{def} \{ a \mid (\exists b \in B_0)[f(a) = b] \} = \{ a \mid f(a) \in B \}$$

und heißt **Urbild(menge)** von B_0 unter f.
Die Elemente von $f^{-1}(B_0)$ heißen **Urbilder** von B_0 unter f.

Beispiele:

(1.) $f =_{def} \{ (1,1), (2,2), (3,2) \} \subseteq \overbrace{\{1,2,3\}}^{A} \times \overbrace{\{1,2,3,4\}}^{B}$

- Bilder: $f(\{1\}) = \{1\}$
  $f(\{1,2\}) = \{1,2\}$
  $f(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$
- Urbilder: $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$
  $f^{-1}(\{1,2\}) = \{1,2,3\}$
  $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$

(2.) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$

- Bilder: $f([-1,1]) = f(\{-1,0,1\}) = \{0,1\} = [0,1]$

- Urbilder: $f^{-1}(\{2\}) = \{-2, 2\}$

$f^{-1}([2,4]) = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$

$= [-4, -2] \cup [2, 4]$

ganzzahlige Intervalle