
Vorkurs Mathematik

Blatt 13

Besprechung der Lösungen am 06.10.2023 in den Übungen

Aufgabe 1

Gegeben seien die beiden folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f: \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & f(1) &:= 4, & f(2) &:= 3, & f(3) &:= 4, & f(4) &:= 3; \\ g: \{1, 2\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & g(1) &:= 3, & g(2) &:= 4. \end{aligned}$$

- (a) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.
- (b) Untersuchen Sie g auf Injektivität und Surjektivität.
- (c) Finden Sie eine Abbildung $h_1: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $g \circ h_1 = f$.
- (d) Finden Sie eine Abbildung $h_2: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $h_2 \circ g = \text{id}_{\{1,2\}}$.
- (e) Finden Sie eine Abbildung $h_3: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit $h_1 \circ h_3 = \text{id}_{\{1,2\}}$.

Aufgabe 2

Es seien A, B, C Mengen und $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
- (b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

Aufgabe 3

- (a) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Weiter seien $A_1, A_2 \subset X$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

- (b) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und zweier Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ an, in welchem $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

Aufgabe 4

- (a) Es seien X, Y Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie das folgende Injektivitätskriterium:

Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ die Gleichheit $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt.

- (b) Betrachten Sie nun die folgenden Abbildungen (wie in Aufgabe 1):

$$\begin{aligned} f: \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & f(1) &:= 4, & f(2) &:= 3, & f(3) &:= 4, & f(4) &:= 3; \\ g: \{1, 2\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & g(1) &:= 3, & g(2) &:= 4. \end{aligned}$$

Benutzen Sie das obige Injektivitätskriterium, um die Funktion f auf Injektivität zu untersuchen.

Bonusaufgabe: Benutzen Sie das obige Injektivitätskriterium, um die Funktion g auf Injektivität zu untersuchen.