⑤ z.z. Für alle n gilt $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot k = n$

$E(n-1): \sum_{k=0}^{2(n-1)} (-1)^k \cdot k = \sum_{k=0}^{2n-2} (-1)^k k = n-1$

(IA) $n=0$: $\sum_{k=0}^{2\cdot 0} (-1)^k k = (-1)^0 \cdot 0 = 0 = 0$

(IS) $n>0$: $\underbrace{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k}_{k=0,1,\dots,2n} = \underbrace{(-1)^{2n} \cdot 2n}_{k=2n} + \underbrace{(-1)^{2n-1} \cdot (2n-1)}_{k=2n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2n-2} (-1)^k \cdot k}_{k=0,1,\dots,2n-2}$

$\overset{(IV)}{=} (-1)^{2n} \cdot 2n + (-1)^{2n-1} \cdot (2n-1) + n-1$

$= 2n - (2n-1) + n-1$

$= n$

⑥ z.z. Für alle n gilt $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

$E(n-1): \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot k! = ((n-1)+1)! - 1 = n! - 1$

(IA) $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} k \cdot k! = 0 \cdot 0! = 0 = (0+1)! - 1$

(IS) $n>0$: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = n \cdot n! + \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot k!$

$\overset{(IV)}{=} n \cdot n! + n! - 1$

$= (n+1) n! - 1$

$= (n+1)! - 1$

⑦ z.z. Für alle n gilt $(n+1)! \geq 2^n$

(IA) $n=0$: $(0+1)! = 1 \geq 1 = 2^0$ T_2

(IS) $n>0$: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ T_1

$\overset{(IV)}{\geq} \underbrace{(n+1)}_{\geq 2} \cdot 2^{n-1}$ T_3

$\geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

T_4 T_5

⑧ z.z. Für alle n gilt $\log(n+1) \leq n$ IV: $\log n \leq n-1$

(IA) $n=0$: $\log(0+1) = 0 \leq 0$

(IS) $n>0$: $\log(n+1) \leq \log(2n)$

$$= 1 + \log n$$

$$\overset{(IV)}{\leq} 1 + n-1 = n$$

⑨ z.z. Alle nat. Zahlen sind gleich

zeigen dazu:

(B) Für alle nat. Zahlen m, a, b gilt:

Ist $\max(a,b)=m$, so gilt $a=b$

Beweis von (B): (Induktion über m)

(IA) $m=0$: Ist $\max(a,b)=0$, so gilt $a=b$

(IS) $m>0$: Ist $\max(a,b)=m$, so ist $\max(a-1,b-1)=m-1$.

Nach (IV) gilt $a-1=b-1$, also $a=b$ □

Es seien nun a, b bel. nat. Zahlen. Es sei $m=\max(a,b)$.
Wegen (B) sind alle nat. Zahlen gleich m.

3.2 Allgemeine Form der vollständigen Induktion

Methode: Für Eigenschaft E und ein n_0

(IA) Erfüllen $0, 1, \ldots, n_0$ die Eigenschaft E und

(IS) folgt für alle $n>n_0$ die Gültigkeit von E für n aus der Tatsache, dass alle $m<n$ die Eigenschaft E erfüllen (IV),

so erfüllen alle nat. Zahlen die Eigenschaft E.

Beispiele:

1. z.z. Für alle $n \geq 4$ gilt $n! \geq 2^n$, d.h. $n_0 = 4$

(IA) Für $n = 0, 1, 2, 3$ muss nichts gezeigt werden, d.h. Aussage ist richtig

$n = 4$: $4! = 24 \geq 16 = 2^4$

(IS) $n > 4$: $n! = n\,(n-1)!$ $\qquad$ IV: $(n-1)! \geq 2^{n-1}$

$$\overset{(IV)}{\geq} \underbrace{n}_{\geq 5 \geq 2} \cdot 2^{n-1}$$

$$\geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

2. (Fibonacci-Folge)

Definiere $F_0 =_{def} 1$, $F_1 =_{def} 2$; $F_n =_{def} F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$

Folge beginnt mit: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

z.z: Für alle n gilt $F_n \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

(IA) $n = 0$: $F_0 = 1 \geq 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0$

$n = 1$: $F_1 = 2 \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1$

(IS) $n > 1$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\overset{(IV)}{\geq} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right)}_{= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$