Lemma 13.

Jeder Baum $T=(V,E)$ mit $|V| \geq 2$ enthält mindestens zwei Blätter.

Beweis: Es sei $e \in E$ bel. Kante. Laufe v. Endknoten durch Baum, bis es keine Kante mehr gibt, über die der aktuelle Knoten wieder verlassen werden kann (ohne Zurückgehen). Da T ein Baum ist, wird kein Knoten doppelt besucht. Somit Läufe enden und gefundene Knoten sind Blätter. Da e zwei Endknoten besitzt, gibt es mindestens zwei Blätter. ∎

Lemma 14.

Es sei $T=(V,E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ und $v \in V$ ein Blatt. Dann ist der Graph $T' = T[V \setminus \{v\}]$ ein Baum.

Beweis: Durch Wegnahme von Knoten und Kanten können keine neuen Kreise entstehen; somit T' kreisfrei, da T kreisfrei. Da T zshgd. ist, gibt es Pfad P in T zwischen $x,y \in V \setminus \{v\}$. Innere Knoten v. P sind Knoten u mit $d_T(u) \geq 2$. Somit liegt v nicht auf P. D.h. P existiert auch in T'! Damit ist T' zshgd. ∎

Satz 15.

Für jeden Baum $T=(V,E)$ gilt $|E| = |V|-1$.

Beweis: (vollst. Induktion über $n=|V|$)

(IA) $n=1$: Dann gilt $|E|=0$ und folglich $|E|=|V|-1$.

(IS) $n>1$: Es sei $T=(V,E)$ bel. Baum mit $|V|=n \geq 2$ Knoten. Dann gibt es Blatt $v \in V$ mit $\{u,v\} \in E$. Betrachte Baum $T' =_{\text{def}} T[V \setminus \{v\}]$ (Lemma 14). T' besitzt $n-1$ Knoten und nach (IV) $n-2$ Kanten. Durch Einfügen

v. $\{u,v\}$ in T' erhöht sich Kantenzahl um 1 und Knotenzahl um 1. Somit gilt:

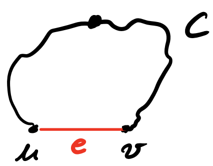
$$|V| = |V\setminus\{v\} \cup \{v\}| = (n-1)+1 = n$$
$$|E| = |E\setminus\{\{u,v\}\} \cup \{\{u,v\}\}| = (n-2)+1 = n-1 \qquad \blacksquare$$

Lemma 16.

Es seien $G=(V,E)$ ein zshgd. Graph und C ein einfaches Kreis in G. Dann gilt für alle auf C liegenden Kanten e:

$$G-e =_{def} (V, E\setminus\{e\}) \text{ ist zshgd.}$$

Beweis: (Widerspruch) Es sei $e=\{u,v\}\in E$ auf C.
Annahme: $G-e$ nicht zshgd, d.h. u und v liegen in versch. Komp. v. $G-e$. Da aber e auf einf. Kreis C in G liegt, d.h.



es gibt einen Pfad $u \to s \to v$ in G, der e nicht enthält.
Somit ex. (u,v)-Pfad in $G-e$. ↯ $\blacksquare$

Ein Graph $T=(V_T,E_T)$ heißt Spannbaum eines Graphen $G=(V,E)$, falls T ein Baum mit $V_T=V$ und $E_T\subseteq E$ ist.

Satz 17.

Jeder zshgd. Graph $G=(V,E)$ enthält einen Spannbaum.

Beweis: Für $|V|=1$ gilt die Aussage.
Es sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $|V|\geq 2$. Definiere Folge $E_0, E_1, \dots$ von Kantenmengen wie folgt:

(1.) $E_0 =_{def} E$

(2.) $E_i =_{def} E_{i-1} \setminus \{e_i\}$, wobei $e_i \in E_{i-1}$ ist bel. Kante auf einf. Kreis in (V, E_{i-1}); falls einf. Kreis nicht ex., $E_i =_{def} E_{i-1}$

Es gilt: $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_i \supseteq \dots \supseteq E_m = E_{m+1} = \dots$, $m = |E|$. Nach Lemma 16 ist (V, E_m) zshgd. und kreisfrei, da höchstens m Kanten entfernt werden können. D.h. $T = (V, E_m)$ ist Spannbaum v. G. $\blacksquare$

Satz 18. (Cayley)

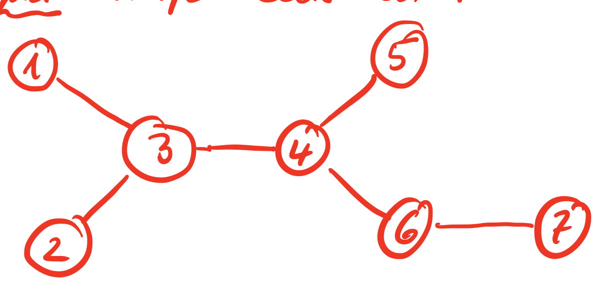
Für $n \geq 2$ Knoten gibt es genau n^{n-2} markierte Bäume.

Beweis: Konstruieren eine Bijektion zwischen Menge d. Bäume mit n Knoten und $\{1, \dots, n\}^{n-2}$. Betrachte folgende Abb. φ für $T = (V, E)$, $V \subseteq [n]$.

$$\varphi(T) =_{def} \varepsilon \qquad \text{falls } |V| = 2$$
$$\varphi(T) =_{def} v \cdot \varphi(T') \qquad \text{falls } |V| > 2$$

mit:
- $u = \min\{x \mid x \text{ Blatt in } T\}$
- $\{u, v\} \in E$
- $T' = T[V \setminus \{u\}]$

Beispiel: Prüfer-Code von T:



$$\begin{aligned}\varphi(T) &= 3\varphi(T') \\ &= 33\varphi(T'') \\ &= 334\varphi(T''') \\ &= 3344\varphi(T^{(4)}) \\ &= 33446\varphi(T^{(5)}) \\ &= 33446\varepsilon \\ &= 33446\end{aligned}$$