Universität Konstanz

Diskrete Mathematik und Logik – Q&A Woche 3

Bastian Goldlücke
Uni Konstanz, 13.11.23

Inhalt der Q&A Woche 3:

Selbststudium aus Woche 2

Skript Kapitel 2.4-2.6
Video E04, E05

- Kapitel 2: Elementare Logik
  - 2.4: Aussageformen
  - 2.5: Aussagen mit Quantoren
  - 2.6: Beweise

Übungsblatt Woche 3

Erinnerung: wird in den Übungsgruppen bearbeitet, freiwille Abgabe am Freitag.

- Quantifizierte Aussagen interpretieren
- Quantifizierte Aussagen konstruieren
- Rechnen mit Aussageformen

2.4: Aussageformen

Eine Art Verallgemeinerung Boolescher Funktionen

Eingabe einer Aussageform sind Objekte aus einem „Universum“, Ausgabe ist eine Aussage (also eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist).

- Der Begriff “Universum” bezeichnet hier einfach salopp die Grundmenge der möglichen Eingaben der Aussageform. In der mathematischen Logik kann er auch streng definiert werden, um Konstruktionen auszuschliessen, die zu Widersprüchen führen, das machen wir nicht (z.B. “die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten”, die bekannte Russelsche Antinomie, ist in der Logik kein gültiges Universum).

2.4: Aussageformen

- Logische Äquivalenz von Aussageformen: bei jeder Eingabe ergeben beide Aussageformen eine Aussage mit dem gleichen Wahrheitswert (d.h. logisch Äquivalente Ausgaben)

- Aussageformen können “partiell” mit Eingaben befüllt werden, dann bleibt eine Aussageform mit entsprechend weniger freien Variablen übrig.

- Eine Boolesche Funktion aus RSN ist im Prinzip eine Aussageform über der Schaltalgebra als Universum, mit der Identifikation “wahr=0” und “falsch=1” in der Ausgabe.

2.5: Aussagen mit Quantoren

Erlauben einfache Formulierung von z.B. Existenz-, Nicht-Existenz-, Allgemeingültigkeits- oder Unerfüllbarkeitsaussagen.

Idee: Freie Variablen einer Aussageform werden durch den Quantor „quantifiziert“.

- Im Prinzip nur Kurzschreibweisen für logische Verknüpfungen mit eventuell unendlich vielen Termen (meist einer pro Element des Universums).
- Trotzdem etwas neues: in der Booleschen Algebra sind unendliche Ausdrücke nicht wohldefiniert.
- Universum, mit der Identifikation “wahr=0” und “falsch=1” in der Ausgabe.

2.6: Beweise

Universelle Beweisregeln erlauben, aus wahren Aussagen neue wahre Aussagen abzuleiten.

Die Universellen Beweisregeln können in der Booleschen Algebra bewiesen werden, indem dort gezeigt wird, daß sie allgemeingültig sind.

- Ein mathematischer Beweis startet also mit einem Pool von wahren Aussagen (Axiome und bereits bewiesene Sätze), und wendet dann eine Folge von gültigen Beweisregeln an, um die Korrektheit eines neuen Satzes zu beweisen.
- Auf diese Weise wird jede mathematische Theorie aus einer Menge von Axiomen und den universellen Beweisregeln sozusagen “aus dem Nichts” geschaffen.
- Diese Idee der vollständigen Formalisierung der Logik ist z.B. auch die Grundlage für automatische Beweissysteme.