Irrationalität

Ulli Wagner, OHG Tuttlingen

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Aus Standards 6:

Leitidee Zahl – Variable – Operation

Die Schülerinnen und Schüler können

Zahlbereiche erkunden
(3) Eigenschaften *natürlicher Zahlen* untersuchen (einfache *Primzahlen* erkennen, Primfaktoren bestimmen, die Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 5, 6, 9, 10 anwenden)
(9) erläutern, dass zwischen zwei verschiedenen *rationalen Zahlen* stets beliebig viele weitere *rationale Zahlen* liegen
(10) *Brüche* in *Dezimalzahlen* (abbrechend oder periodisch) und abbrechende *Dezimalzahlen* in *Brüche* umwandeln

Kommentar

Bereits in den Klassen 5 und 6 müssen Zahlbereichserweiterungen für die Schüler nachvollziehbar durchgeführt werden. Dabei sollte auch altersgemäß auf das Permanenzprinzip eingegangen werden. Die Schüler sollen also erkennen, dass der neue Zahlbereich leistungsfähiger ist, aber dennoch alle bekannten Regeln und Gesetze weiter gelten.
Für besonders wichtig halte ich aber auch, den Schülern ein „Gefühl“, ja sogar ein Staunen über die neuen Zahlen zu vermitteln. Das kann über historische Bezüge oder auch über die Eigenschaften der Zahlen geschehen. Zentral ist dabei auch die neue (!) obige Forderung (9) des Bildungsplans, die nicht als nüchterne Tatsache abgearbeitet werden sollte. Die Dichtheit der rationalen Zahlen ist zusammen mit der Identifizierung als abbrechende oder periodische Dezimalzahlen der Aufhänger für die Irrationalität. Nichts an der Irrationalität ist beeindruckend, wenn nicht vorher die enorme Mächtigkeit der rationalen Zahlen „gefühlt“ wurde.

In Standards 8:

Leitidee Zahl – Variable – Operation

Die Schülerinnen und Schüler können

Mit Wurzeln umgehen
(11) den Zusammenhang zwischen *Wurzelziehen* und *Quadrieren* erklären
(12) den Wert der *Quadratwurzel* einer Zahl in einfachen Fällen mithilfe benachbarter *Quadratzahlen* abschätzen
(13) Zahlterme mit *Quadratwurzeln* vereinfachen, auch durch teilweises *Wurzelziehen*
(14) anhand eines Beispiels erklären, dass im Allgemeinen $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ ist, aber $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ist
• 2.1 Argumentieren und Beweisen 2 • 2.5 Kommunizieren 1, 3, 6
(15) die Definition der *Wurzel* auch zur Bestimmung von Kubikwurzeln anwenden
Zahlbereichserweiterungen untersuchen
(16) anhand geeigneter Beispiele die Unvollständigkeit der *rationalen Zahlen* beschreiben und die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung auf *reelle Zahlen* begründen
• 2.5 Kommunizieren 1, 3
(17) Beispiele für *irrationale Zahlen* angeben
(18) ein iteratives Verfahren zur Bestimmung einer *Wurzel* durchführen
• 2.4 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 4, 6, 9 • MB Informationstechnische Grundlagen

Kommentar

Neu gegenüber dem alten Bildungsplan sind zunächst die explizit aufgeführten Fähigkeiten des teilweisen Wurzelziehens, des Durchführens eines iterativen Verfahrens und des Angebens irrationaler Zahlen (womit nicht nur Wurzeln gemeint sind). Außerdem sollen die Regeln des Wurzelrechnens nicht nur beherrscht, sondern auch an einem Beispiel erklärt werden können, die Zahlbereichserweiterung auf reelle Zahlen soll nicht nur als notwendig erkannt sondern auch begründet werden. Alle diese Änderungen sind im grundlegenden und mittleren Niveau nicht verlangt und damit charakteristisch für das erweiterte Niveau und damit für das Gymnasium.

Prozessbezogene Kompetenzen

Argumentieren und Beweisen

Die Schülerinnen und Schüler können

Fragen stellen und Vermutungen begründet äußern

1. in mathematischen Zusammenhängen Vermutungen entwickeln und als mathematische Aussage formulieren;
2. eine Vermutung anhand von Beispielen auf ihre Plausibilität prüfen oder anhand eines Gegenbeispiels widerlegen;
3. bei der Entwicklung und Prüfung von Vermutungen Hilfsmittel verwenden (zum Beispiel Taschenrechner, Computerprogramme);

mathematische Argumentationen (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise) nachvollziehen und entwickeln

8. mathematische Verfahren und ihre Vorgehensweisen erläutern und begründen;
9. beim Erläutern und Begründen unterschiedliche Darstellungsformen verwenden (verbal, zeichnerisch, tabellarisch, formalisiert);
10. Beweise nachvollziehen und wiedergeben;
11. bei mathematischen Beweisen die Argumentation auf die zugrunde liegende Begründungsbasis zurückführen;
12. ausgehend von einer Begründungsbasis durch zulässige Schlussfolgerungen eine mehrschrittige Argumentationskette aufbauen;
13. Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen und Beweise führen;
14. Beziehungen zwischen mathematischen Sätzen aufzeigen.

.

Kommentar

Beim beispielhaften Erläutern der Rechenregeln für Wurzeln und dem Abgrenzen gegenüber unzulässigen Umformungen arbeiten die Schüler im Sinne der Teilkompetenzen 1.,2., 3. und 8.
Auch wenn der Beweis der Irrationalität von Wurzeln nach Bildungsplan nicht aktiv von den Schülern beherrscht werden muss, scheint es mir unerlässlich, dass dieser Beweis im gymnasialen Unterricht stattfindet. Die Schüler sollten diesen mindestens nachvollziehen (10.), es ist aber auch auf vielfältige Weise möglich und sinnvoll, sie hier (teil-)selbständig arbeiten und entdecken zu lassen (12. und 13.).

Vorbereitung

(1) Rationale Zahlen liegen dicht

Zwischen zwei beliebigen Brüchen gibt es unendlich viele weitere Brüche (Klasse 6 und Wiederholung in Klasse 8).

Dies ist durch fortgesetztes Erweitern leicht einsichtig zu machen, in seiner Aussage aber gewaltig. Analog lässt sich auch leicht erläutern, dass zwischen zwei abbrechenden Dezimalzahlen (wie 2,516 und 2,517) unendlich viele Zahlen liegen.

(2) Brüche stellen zwei Arten von Dezimalzahlen dar

Brüche stellen entweder abbrechende oder periodische Dezimalzahlen dar (Klasse 6 und Wiederholung in Klasse 8).

Es ist sinnvoll, schon früh die Brüche als Dezimalzahlen darzustellen und diese Darstellung durch händische Division herzustellen. Die Einsicht in die beiden möglichen Darstellungen erfolgt automatisch. Die Frage nach der Bruch-Struktur abbrechender Dezimalzahlen vertieft die Einsichten in Teiler und Stellenwerte.

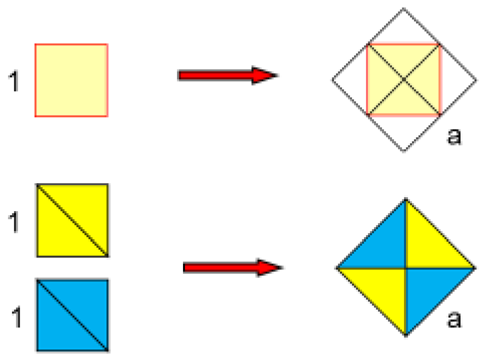
(3) Außer Brüchen gibt es weitere Dezimalzahlen

Es gibt weitere Dezimalzahlen, die weder abbrechend noch periodisch sind, also nicht als Brüche dargestellt werden können.

Hier sollte man spielerisch neue Dezimalzahlen erkennen und entdecken lassen.

Dabei sollte altersgemäß immer wieder darauf verwiesen werden, dass sich bereits „sehr, sehr viele“ Bruchzahlen auf dem Zahlenstrahl drängen.

Zugang: Quadratverdoppelung



Das große Quadrat hat den Inhalt 2.
Wie groß ist seine Seitenlänge a?

Näherungsverfahren

(1) Intervallverfahren

Liefern durch fortgesetztes Quadrieren die Einsicht, dass eine irrationale Wurzel nicht mit irgendeiner Ziffer enden kann (sie könnte dann aber immer noch periodisch sein). Sind am Zahlenstrahl einsichtig und gut nachvollziehbar und auf andere Probleme (z.B. Logarithmus übertragbar). Sind recht schwerfällig (auch im TR).

a) Intervallhalbierung

Einstieg: Ich denke mir eine zweistellige Zahl, die Du mit möglichst wenigen Versuchen erraten sollst. Ich sage Dir jeweils, ob Du zu hoch oder zu tief liegst. Klares Vorgehen, aber sehr langsam.

$1 < \sqrt{2} < 2$ denn $1^2 < 2 < 2^2$

$1 < \sqrt{2} < 1{,}5$ denn $1^2 < 2 < 1{,}5^2$

$1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$ denn $1{,}25^2 < 2 < 1{,}5^2$

…

b) Intervallverfeinerung

Intervall wird in Zehntelschritten quadriert und es werden die beiden Zahlen, deren Quadrate gerade noch unter bzw. über 2 liegen als neue Grenzen eines Intervalls gewählt. Nun wird das Verfahren in Hundertstelschritten wiederholt. Mit mehr Grips etwas schneller und damit schülerfreundlicher, aber weniger anschaulich.

$1 < \sqrt{2} < 2$ denn $1^2 < 2 < 2^2$

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ denn $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ denn $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$

…

(2) Heron

Näherung erfolgt geometrisch und sehr schnell (auch mit TR). Einsichten am Zahlenstrahl und durch Quadrieren von Näherungswerten bleiben verborgen.

Vorgehen:

Gesucht wird ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 2 und damit der Seitenlänge $\sqrt{2}$.

Dazu nähert man flächengleiche Rechtecke (mit den Seiten x_n und y_n) durch Mittelwertbildung immer weiter an das Quadrat an.

0.Schritt: $x_0 = 1;\ y_0 = 2$

1.Schritt: $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ (Mittelwert) $y_1 = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}\overline{3}$ (Flächengleichheit)

2.Schritt: $x_1 = \frac{1{,}5+1{,}\overline{3}}{2} = 1{,}41\overline{6}$ $y_1 = \frac{2}{1{,}41\overline{6}} = 1{,}411764...$

Insgesamt beruht das Heronverfahren zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ auf der rekursiven Formel $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, die auch leicht im Taschenrechner eingebbar ist.

Für andere Wurzeln ergeben sich auch im zweiten Schritt noch „einfachere“ Zahlen:

	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$
x_0	1	1	1
x_1	2	3	4
x_2	1,75	$2,\overline{3}$	2,875
x_3	1,732142857…	2,23095238…	2,654891304…

Die Formel ist auch ein Spezialfall des Newton-Verfahrens (Spiralcurricularität: Aufgreifen in Oberstufe möglich): $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 2$

Nullstellen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

Auf diese Weise kann man auch eine Näherungsformel für $\sqrt[k]{a}$ als Nullstelle von $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^k - \mathrm{a}$ herleiten: $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$

Manche höhere Wurzel lässt sich auch mit einer einfachen Übertragung der Heron-formel näherungsweise berechnen: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$

Allerdings konvergiert diese Formel langsamer und ab fünften Wurzeln oft gar nicht. Definiert man die rechte Seite der Formel als Funktion $\varphi(x)$, so ist die Konvergenz nur für $|\varphi'(x_0)| < 1$ garantiert.

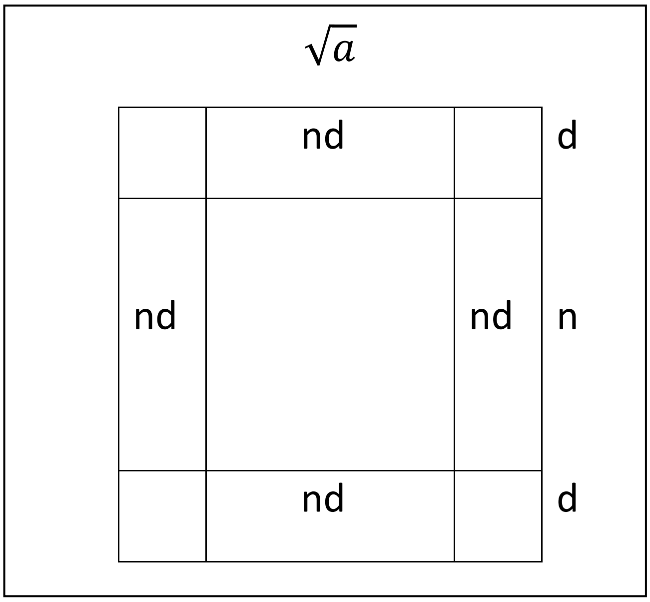
Beide Formeln lassen sich wieder als Mittelwertbildung diesmal beim Herstellen eines k-dimensionalen Würfel interpretieren. Die einfache Formel verändert dabei eine Kantenlänge und passt die anderen durch Volumengleichheit an. Die schnellere Formel verändert dabei gleich k-1 Kanten gleichzeitig und passt die letzte durch Volumengleichheit an. Der Mittelwert wird dann als gewichtetes Mittel berechnet.

(3) Babylonische Wurzelnäherung

Historisch bedeutsam und dadurch auch historische Ausflüge möglich. Inhaltliche Ausflüge und Rückgriffe möglich (andere Zahlsysteme, 60 als besondere Zahl). Weniger gut nachvollzieh- und durchführbar (Binnendifferenzierung?!).

Vorgehen für $\sqrt{a}$:

- Wähle (nahe) Quadratzahl n^2 und zeichne zwei zentrumsgleiche Quadrate mit Seitenlängen $\sqrt{a}$ und n und deren Differenz ist $2d = \sqrt{a} - n$
- Die Rahmenfläche r wird durch die vier Rechtecke angenähert: $r \approx 4nd$
- Also ist $\sqrt{a} = n + 2d \approx n + \frac{r}{2n}$ und $r = a - n^2$

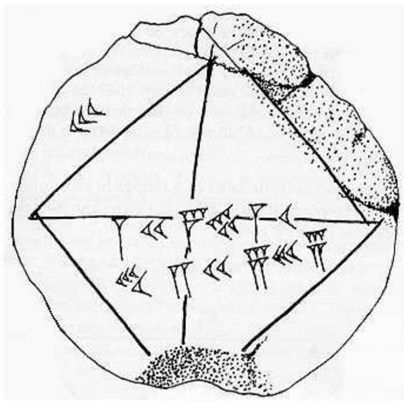


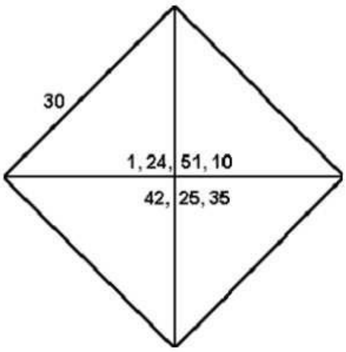
Dieses Verfahren lässt sich auch iterieren und ist dabei nicht auf ganzzahlige n oder auf solche, deren Quadrat kleiner als a ist, beschränkt:

Für $\sqrt{2}$ gilt n=1 und r=1 und damit: $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$

Und weiter n=1,5 und r=-0,25 und damit: $\sqrt{2} \approx 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}41\overline{6}$

Mit diesem Verfahren haben die Babylonier $\sqrt{2}$ in ihrem 60er-System verblüffend genau ermittelt und das ca. 1000 Jahre vor Pythagoras:





Übersetzung: $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414212963$

Die Zahlen darunter stellen dann eine ebenso gute Näherung der halben Diagonalenlänge dar.

Beweisverfahren:

(1) Vorentlastung: Widerspruchsbeweis

Der ohnehin nicht einfache Beweis der Irrationalität sollte dadurch vorentlastet werden, dass das Prinzip des Widerspruchs an einem Alltagsbeispiel erläutert wird:

Annahme: Daniel ist ein netter Schüler (man geht von einem fiktiven (?) Querulant aus)

Also ist Daniel nett zu Menschen

Lehrer sind auch Menschen (das wird durchaus dann heftig diskutiert)

Also ist Daniel nett zu Lehrern

Widerspruch!

Es bietet sich an, den Widerspruchsbeweis auf ein Beispiel aus der Mathematik anzuwenden, dem Nichtabbrechen der Primzahlfolge. Hier werden nicht nur Begriffe aus den Standards 6 wiederaufgegriffen, das spätere Vorgehen bei der Irrationalität von $\sqrt{2}$ wird durch etwas einfachere Zusammenhänge vorbereitet.

Annahme: es gibt eine größte Primzahl p

Dann definieren wir die Zahl $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$

Dann ist m durch keine Primzahl teilbar (Rest ist stets 1)

Dann ist m entweder selbst eine Primzahl größer als p oder durch eine Zahl größer als p teilbar, die selbst Primzahl ist

Widerspruch: p ist nicht die größte Primzahl!

Anmerkung: Ausprobieren ist lehrreich!

2+1 prim, $2 \cdot 3 + 1$ prim, $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ prim, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ prim

aber: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 59 \cdot 509$

(2) Teilerwiderspruch nach Euklid

a) Klassisch

Weitere Vorentlastung:

Ist p^2 gerade, so ist auch p gerade

formal: $(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) = 2n$

$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 = 2n + 1$

Oder besser durch Ausprobieren mit allen Endziffern:

$0^2 = 0;\ 2^2 = 4;\ 4^2 = 16;\ 6^2 = 36;\ 8^2 = 64$

also gerade Endziffer liefert wieder gerade Endziffer

$1^2 = 1;\ 3^2 = 9;\ 5^2 = 25;\ 7^2 = 49;\ 9^2 = 81$

also ungerade Endziffer liefert wieder ungerade Endziffer (dies ist entscheidend für den folgenden Beweis)

Der Beweis:

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei der Bruch vollständig gekürzt ist

Also $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$

Also p^2 gerade und damit (s.o.) p gerade

Also $p = 2r$

Also $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$

Also $q^2 = 2r^2$

Also q^2 gerade und damit (s.o.) q gerade

Widerspruch zur Annahme!

Anmerkungen:

Dieser Beweis lässt sich so auch mit $\sqrt{5}$ und mit $\sqrt{10}$ durchführen.

Man sollte aber auch zum Kontrast zeigen, dass und warum er mit $\sqrt{4}$ nicht funktioniert (weil aus p^2 durch vier teilbar nur p gerade folgt).

b) Allgemeiner mit Primfaktoren

Weitere Vorentlastung: Die Anzahl gleicher Primfaktoren wird beim Quadrieren verdoppelt durch Ausprobieren.

Gleiches Vorgehen bis $2q^2 = p^2$

Nun hat man links eine ungerade Anzahl des Primfaktors 2 und rechts eine gerade: Widerspruch!

Dieser Beweis lässt sich mit allen Wurzeln durchführen.

c) Schülerfreundlicher (?) mit gekürztem Bruch

Weitere Vorentlastung: Das Quadrat eines gekürzten Bruches ist auch gekürzt durch Ausprobieren.

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei der Bruch vollständig gekürzt ist

Weil 1<$\sqrt{2}$<2 gilt: q>1

Dann ist $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ auch ein vollständig gekürzter Bruch mit Nenner>1

Widerspruch!

(3) Unendlicher Abstieg nach Fermat

a) Klassisch (nicht für die Schule)

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p, q die kleinstmöglichen natürlichen Zahlen sind

Also $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$

Damit ist $p^2 > q^2$ und somit $p > q$, wir definieren: $n = p - q < q$ natürlich

Wegen $(2q)^2 > 2q^2 = p^2$ ist $2q > p$, wir definieren: $m = 2q - p < p$ natürlich

Dann gilt: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, denn $mq = (2q-p)q = 2q^2 - pq = p^2 - pq$

und $np = (p-q)p = p^2 - pq = mq$

Also waren p, q nicht kleinstmöglich, es lassen sich kleinere konstruieren

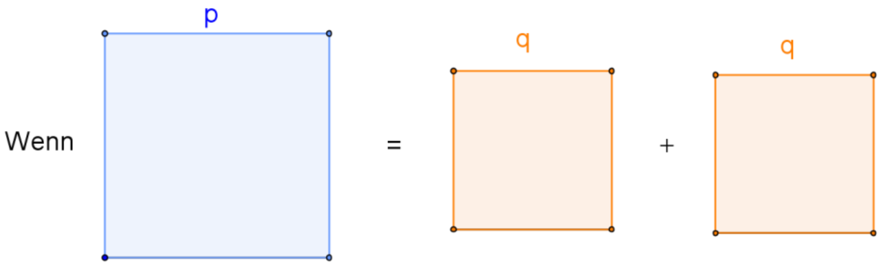
Widerspruch!

Man kann auch konkret schülerfreundlicher rechnen:

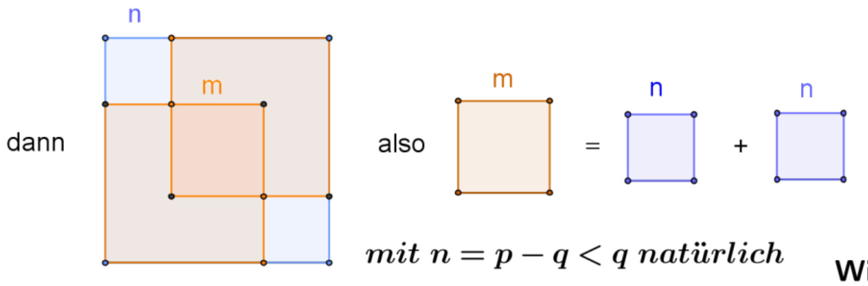
$$\frac{m}{n} = \frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2-1^2} = \sqrt{2}$$

Oder Nachrechnen: $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$ (?) also $2-\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}$ (!)

Der Beweis und v.a. das „Entstehen“ der Zahlen m und n lässt sich auch anschaulich durchführen:



$$mit\ p, q\ natürlich\ und\ kleinstmöglich$$



$$mit\ n = p - q < q\ natürlich$$

Widerspruch!

$$und\ m = p - 2n = p - 2(p - q) = 2q - p < p\ natürlich$$

Dies kann mit dem Schülermaterial von R. Ordowski im Aufgabenteil („Spielsteine“) im Unterricht thematisiert werden.

Eine weitere Möglichkeit über DIN-Formate und durch Falten bietet das Material von C.Messner („Papierfalten“).

Von R. Ordowski stammt auch die Möglichkeit, diesen Beweis durch eine Dreieckskonstruktion zu veranschaulichen („Dreieck“).

Eine weitere noch einfachere Dreieckskonstruktion bedient sich der Ähnlichkeit von Dreiecken und ist ebenfalls im Aufgabenteil („Ähnlichkeit“).

b) In Kombination mit Euklid

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei der Bruch vollständig gekürzt ist

Also $2 = \frac{p^2}{q^2}$ oder $2q^2 = p^2$

Einerseits gilt: $p^2 > q^2$

Andererseits gilt:
p^2 gerade und damit p gerade
Also $p = 2r$
Also $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$
Also $q^2 = 2r^2$

Damit gilt: $q^2 > r^2$...

Also gibt es eine unendlich absteigende Folge: $q^2 > r^2 > s^2 > \cdots$
Widerspruch!

Aufgabenteil

Auf den folgenden Seiten finden sich beispielhaft Aufgabentypen für das Beschriebene sowie Möglichkeiten zur methodischen Umsetzung bei einem (teil-)selbständigen Beweisen der Irrationalität von $\sqrt{2}$.

Sowohl bei den Sternchenaufgaben zum Umgang mit Wurzeln als auch bei den vielfältigen Beweismethoden ist ein binnendifferenzierendes Vorgehen angedacht.

Zum Umgang mit Wurzeln: Sternchenaufgaben

★

1. Bestimmen

   a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt{1600}$ c) $\sqrt{0{,}49}$ d) $\sqrt{2{,}89}$

2. Abschätzen mit ganzen Zahlen

   a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{90}$ d) $\sqrt{150}$

3. Vereinfachen

   a) $\sqrt{3}+3\sqrt{3}$ b) $\left(\sqrt{12}\right)^2$ c) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$ d) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

★ ★

4. Abschätzen

   a) $\sqrt{2550}$ b) $\sqrt{1000}$ c) $\sqrt{0{,}3}$ d) $\sqrt{\frac{12}{7}}$

5. Vereinfachen

   a) $\sqrt{5}+\sqrt{20}$ b) $\sqrt{(-8)^2}$ c) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}$ d) $\frac{\sqrt{32}}{2}$

6. Rechengesetze nachweisen

   a) Weise mit den Zahlen 9 und 16 nach, dass das Produkt zweier Wurzeln als eine Wurzel aus dem Produkt geschrieben werden kann.
   b) Weise mit den Zahlen 9 und 16 nach, dass die Summe zweier Wurzen nicht als eine Wurzel aus der Summe geschrieben werden kann.
   c) Zeige durch Vereinfachen aber ohne Rechengesetz, dass $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}$

★ ★ ★

7. Vereinfachen

   a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}-2\sqrt{7}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}}$

8. Rechenregeln

   a) Weise mit den Zahlen 15 und 20 durch Abschätzen nach, dass die Summe zweier Wurzeln nicht als eine Wurzel aus der Summe geschrieben werden kann.
   b) Für welche Zahlen a gilt die Regel $\sqrt{a^2}=a$ nicht?
   Wie muss man für diese Zahlen die Regel abändern?

Mögliche Fragestellungen zur Vorbereitung:

1. Brüche zwischen Brüchen

   a) Gib einen (zwei, fünf, zehn,…) Brüche an, die zwischen $\frac{9}{11}$ und $\frac{10}{11}$ liegen.
   b) Erkläre, wie man immer weitere Brüche zwischen $\frac{9}{11}$ und $\frac{10}{11}$ finden kann.
   c) Begründe damit, wie viele Brüche es zwischen diesen beiden Brüchen gibt.

2. Zahlen zwischen Dezimalzahlen

   a) Gib eine (zwei, fünf, zehn,…) Zahlen an, die zwischen 2,516 und 2,517 liegen.
   b) Erkläre, wie man immer weitere Zahlen zwischen 2,516 und 2,517 findet.
   c) Begründe damit, wie viele Zahlen es zwischen diesen beiden gibt.

3. Dezimaldarstellungen von Brüchen

   a) Ermittle durch Division die Dezimaldarstellung der ersten 10 Stammbrüche. Was fällt auf?
   b) Begründe, warum die berechneten Dezimalzahlen entweder abbrechen müssen die Rechnung „geht auf“) oder sich ab einer Zahl ständig wiederholen („periodisch“ sind).
   c) Versuche bei den folgenden Brüchen ohne Rechnung vorherzusehen, ob sie abbrechende oder periodische Dezimalzahlen darstellen, überprüfe dann durch Rechung: $\frac{2}{11}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{11}{20}, \frac{5}{4}, \frac{10}{12}, \frac{13}{100}, \frac{5}{8}, \frac{7}{14}$
   d) Begründe, welche Brüche als Dezimalzahlen abbrechen und welche nicht.

4. Dezimalzahlen, die nicht abbrechen und nicht periodisch sind

   a) Begründe, warum es sich hier nicht um Brüche (also abbrechende oder periodische Dezimalzahlen) handelt:
      0,12345678910111213…
      0,101001000100001000000…
      jede weitere Nachkommastelle der Zahl wird gewürfelt
   b) Finde selbst Dezimalzahlen, die nicht abbrechen und nicht periodisch sind.

Mögliche Fragestellungen zum Beweisen: Vorentlastungen

1. Multipliziere Primzahlen miteinander und addiere anschließend Eins.
   a) Probiere dies zunächst mit zwei Primzahlen.
   Was kann man über die Teiler des Ergebnisses sagen?
   Welche Teiler kommen nicht in Frage?
   b) Multipliziere jeweils aufsteigend immer eine Primzahl mehr, also
   $2 \cdot 3 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1; 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$
   Ist das Ergebnis immer eine Primzahl? Welche Teiler kommen in Frage?

2. Was passiert mit Teilern von Zahlen, wenn die Zahlen quadriert werden?
   a) Quadriere alle möglichen Endziffern einer Zahl und ermittle damit welche Endziffern sich dabei ergeben.
   Begründe, welche Aussagen Du nun nachgewiesen hast:
   - Ist eine Zahl gerade, so ist auch ihr Quadrat gerade.
   - Ist eine Zahl ungerade, so ist auch ihr Quadrat ungerade.
   - Ist das Quadrat einer Zahl gerade, so ist die Zahl vor dem Quadrieren auch gerade.
   - Ist eine Zahl durch 3, 4, 5, 10 teilbar, so ist auch ihr Quadrat durch 3, 4, 5, 10 teilbar.
   - Ist das Quadrat einer Zahl durch 3,4, 5, 10 teilbar, so ist die Zahl vor dem Quadrieren auch durch 3,4, 5, 10 teilbar.
   - Erkläre, was hiermit gezeigt wird: $(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2) = 2n$
   - Und hiermit: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 = 2n + 1$

   b) Stelle die Primfaktorzerlegung für verschiedene Zahlen her.
   Quadriere die Zahlen und stelle die Primfaktorzerlegung erneut her.
   Was stellst Du fest? Kannst Du eine Regel formulieren?
   c) Weise nach: $\frac{128}{16}$ ist eine natürliche Zahl, $\frac{22}{3}$ aber nicht.

   Warum kann man dann ohne große Rechnung sagen, dass $\left(\frac{22}{3}\right)^2$, $\left(\frac{22}{3}\right)^3$,… auch keine natürlichen Zahlen sein können?

Beweismethoden

1. Vorbeweisen (z.B. an der Tafel) ohne Mitschreiben aber Mitdenken:
   Anschließend unsichtbar machen und selbstständig „Nachbeweisen“ lassen.
   Dies bedient die prozessbezogene Kompetenz 10 beim Argumentieren und Beweisen: „Beweise nachvollziehen und wiedergeben“

2. Beweispuzzle:
   Einzelne Zeilen des Beweises zerschneiden, mischen und wieder zusammenlegen lassen (Buchstaben ergeben Lösungssatz, aber englisch und von unten nach oben, was selten frühzeitig erkannt wird).

3. Lückentext:
   Die vorgefertigten Lücken im Beweis werden von den Schülern ausgefüllt.

4. Kombination und Binnendifferenzierung
   Die drei Methoden lassen sich sehr gut kombinieren und binnendifferenzierend einsetzen:

   - Das Vorbeweisen kann der erste Schritt vor einem Beweispuzzle oder einem Lückentext sein. Das Nachbeweisen erfolgt dann mithilfe einer dieser beiden Methoden. Die Gruppe kann hier auch geteilt werden. Gute Schüler beweisen ohne Hilfen, die anderen erhalten Puzzle und/oder Lückentexte (damit werden die Methoden als gestufte Hilfen eingesetzt).

   - Auch das Beweispuzzle kann als gestufte Hilfe vorbereitet werden. Je nach Schülerklientel werden nicht alle Schnitte zwischen den Beweiszeilen vorgenommen.

   - Schließlich kann auch der Lückentext auf viele binnendifferenzierende Weisen eingesetzt werden: Mit mehr oder weniger Lücken, zusätzlich verschnitten mit mehr oder weniger Lücken (deshalb sind hier auch Schnittlinien und Buchstaben eingezeichnet, die ohne Zerschneiden natürlich sinnlos sind).

Beweispuzzle: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Annahme: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.	S
Also gilt: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,	D
wobei $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.	I
Nach Quadrieren der Gleichung gilt: $2 = \frac{p^2}{q^2}$	K
Nach Multiplizieren mit 2 gilt: $2q^2 = p^2$	T
Also ist p^2 gerade	C
und damit auch p gerade.	E
Somit kann man schreiben: $p = 2r$	F
Einsetzen ergibt: $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$	R
Durch 2 dividieren ergibt: $q^2 = 2r^2$	E
Also ist q^2 gerade	P
und damit auch q gerade.	E
Widerspruch: p und q gerade,	R
also $\frac{p}{q}$ nicht vollständig gekürzt.	A
Also Annahme falsch, Gegenteil richtig:	E
$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl!	W

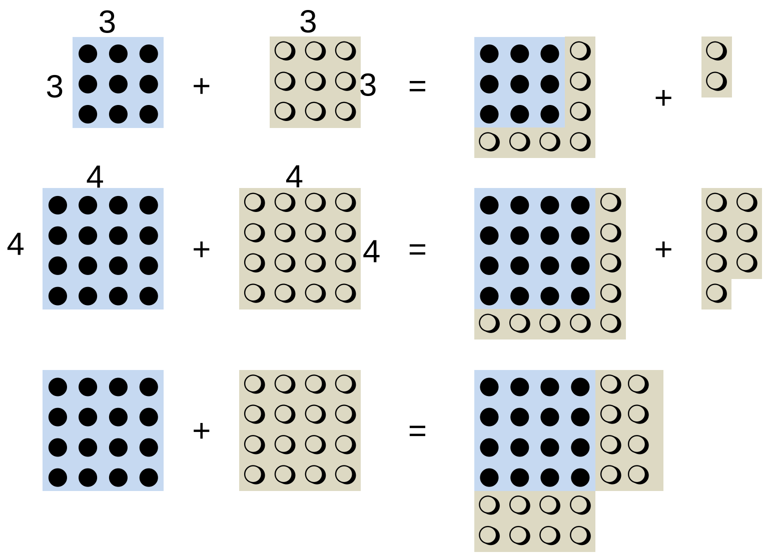
Lückentext: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Annahme: $\sqrt{2}$ ist eine ____________ Zahl.	S
Also gilt: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,	D
wobei $\frac{p}{q}$ vollständig ___________ ist.	I
Nach _____________ der Gleichung gilt: $2 = \frac{p^2}{q^2}$	K
Nach _____________ mit 2 gilt: $2q^2 = p^2$	T
Also ist p^2 gerade	C
und damit auch __ gerade.	E
Somit kann man schreiben: $p = 2r$	F
Einsetzen ergibt: $2q^2 = (\underline{\quad})^2 = 4\underline{\quad}^2$	R
Durch __ dividieren ergibt: $q^2 = 2r^2$	E
Also ist __ gerade	P
und damit auch __ gerade.	E
Widerspruch: p und q _______,	R
also $\frac{p}{q}$ _____ vollständig _________.	A
Also Annahme ________, ___________ richtig:	E
$\sqrt{2}$ ist _______ ____________ Zahl!	W

Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist.

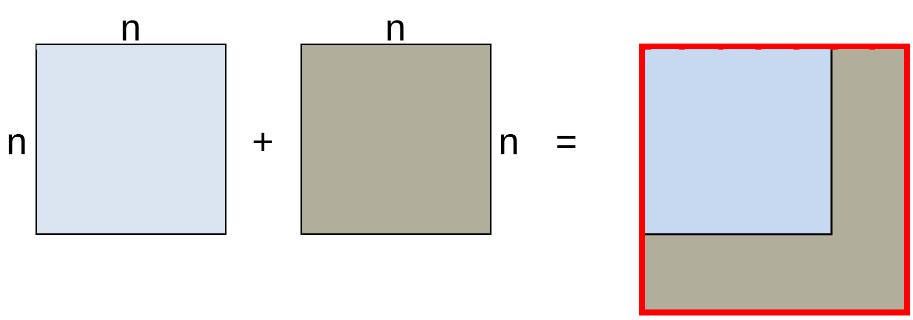
(Ein genetischer Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$)-

(1) Martin versucht mit Spielsteinen zu überprüfen, ob es eine natürliche Zahl n gibt, für die $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl sein kann. Unten siehst Du seine Versuche für $n = 3$ und $n = 4$. Erkläre sein Vorgehen.
(*$2 \cdot n^2 = n^2 + n^2$, Ergänzen des ersten Quadrats durch die Steine des zweiten.*)

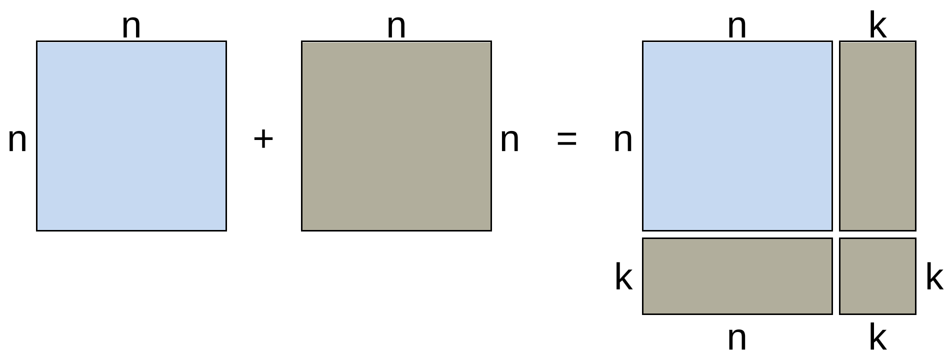


(2) Für n=3 und für n=4 ist das Doppelte von n^2 offenbar keine Quadratzahl. Für welche n klappt es?
Angenommen, Martin hätte beim schrittweisen Probieren tatsächlich eine natürliche Zahl n gefunden, bei der $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl ist.
Für alle natürlichen Zahlen kleiner als n hätte es noch nicht geklappt. D.h. diese Zahl n ist die kleinste mit der Eigenschaft, dass $2 \cdot n^2$ eine Quadratzahl ist.
Wie müsste dann das Ergebnis bei Martins Vorgehen aussehen?
Ergänze die Figur. (Steine sind jetzt nicht eingezeichnet.)

(*Rot umrahmte Figur finden lassen.)*

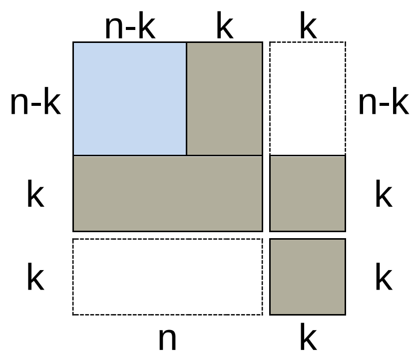


(3) Die blau und braun gefärbten Flächen enthalten gleich viele Spielsteine bzw. haben den gleichen Flächeninhalt.
Begründe, dass in der Figur $k < n$ sein muss.



(3) Überlege, wie man zu dieser Figur kommt.
Begründe damit, dass $2k^2$ eine Quadratzahl sein muss.

(*Wegen der Flächengleichheit muss gelten* $2k^2 = (n-k)^2$)



(4) Aus der Annahme, dass n die kleinste Zahl ist, bei der $2n^2$ eine Quadratzahl ist, würde folgen, dass es eine noch kleinere Zahl k gibt, für die $2k^2$ eine Quadratzahl ist. Widerspruch!

Es gibt daher keine natürliche Zahl n, für die $2n^2$ eine Quadratzahl ist!

Andere Argumentationsschiene:

Hat man eine natürliche Zahl n gefunden, für die $2n^2$ eine Quadratzahl ist, so gibt es dazu immer eine natürliche Zahl $n_1<n$ mit dieser Eigenschaft.

Zu n_1 gibt es mit der gleichen Überlegung eine Zahl $n_2 < n_1$ mit dieser Eigenschaft… usw. .
Man erhält eine unendliche Folge $n > n_1 > n_2 > n_3 > ...$ natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Dies aber nicht möglich, da es nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als n gibt.

(5) Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$:

Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Daraus folgt: $n = \sqrt{2} \cdot m$, und daraus: $n^2 = 2m^2$.

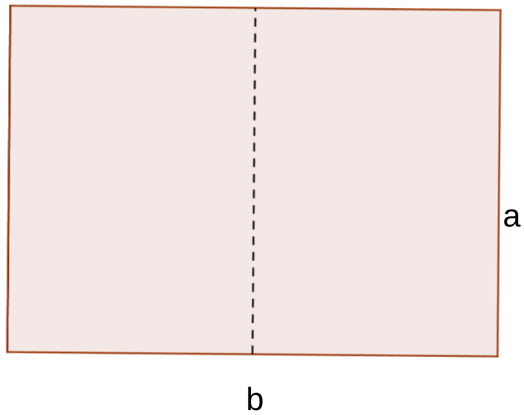
$2m^2$ kann aber keine Quadratzahl sein.

Also ist die Annahme falsch und $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

Nach Jahnke, T.: Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist.
In: JMD 1983,

Papierfalten mit DIN –Blättern

(Ein genetischer Weg zur Irrationalität von $\sqrt{2}$)



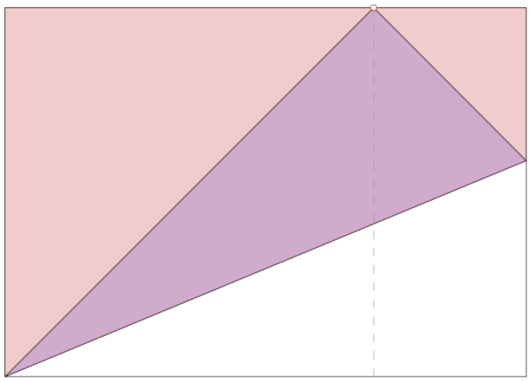
1. Vorüberlegung
Rechtecke im **DIN** – Format haben die folgende Eigenschaft:
Halbiert man ein solches Rechteck parallel zur kürzeren Seite a, so sind die beiden Teilrechtecke **ähnlich** zum Ausgangsrechteck.
Begründe, dass für das Seitenverhältnis gilt:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

(DIN S)
Info: Ein **DIN A0** Rechteck hat den Flächeninhalt 1 m^2.
Durch fortwährende Halbierung kommt man zu DIN A1, DIN A2, usw.
Wie groß sind jeweils die Seitenlängen?

---

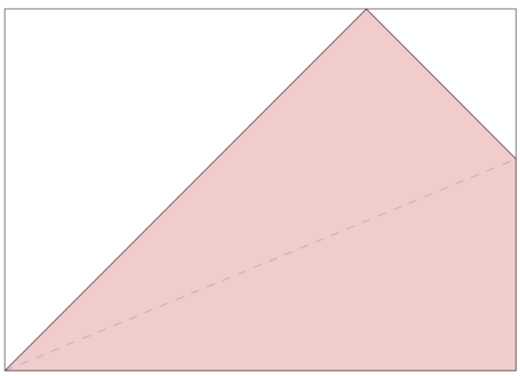
2. Falt-Test mit einem DIN A4 –Blatt



a) Bestimme durch Falten die Winkelhalbierende des Winkels links unten.
Sie muss gleich lang sein, wie die längere Seite des Blattes (Warum?)
Überprüfe dies durch Falten (s. Figur).

b) Begründe, dass das rechtwinklige Dreieck links oben gleichschenklig ist.

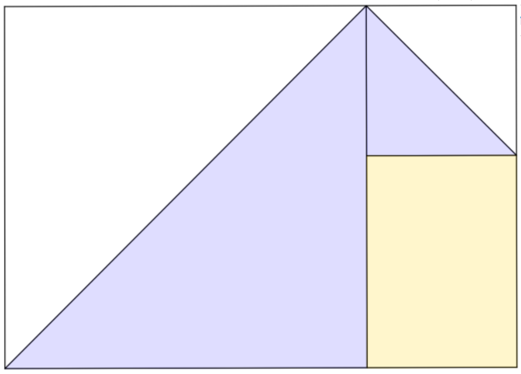
c) Begründe dass das rechtwinklige Dreieck rechts oben auch gleichschenklig ist.
Falte es um die Hypotenuse.

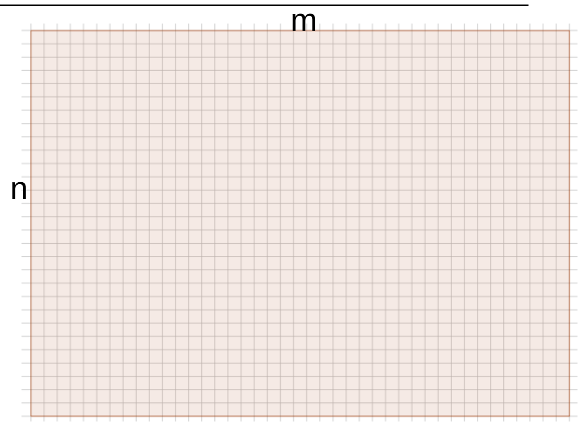


3. Falte nun das DIN- Blatt auf. Du siehst ein besonderes Viereck, nämlich?

Welche Seiten dieses Vierecks sind gleich lang?

4. Wenn nun die beiden rechtwinkligen Dreiecke gefaltet werden wie abgebildet, so bleibt ein Restrechteck übrig.
Begründe, dass es ebenfalls DIN – Format hat.

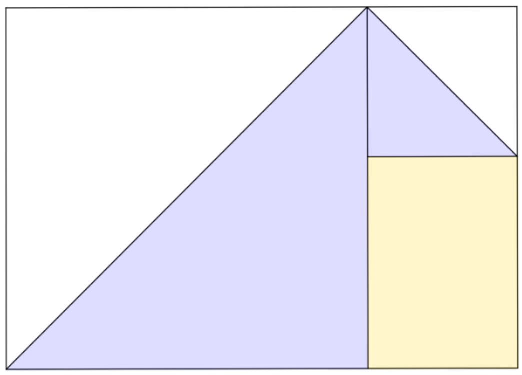




5. Wir nehmen mal an, dass man das DIN A4 - Blatt mit lauter gleich großen quadratischen Karos randlos bedrucken kann.
Im Bild siehst Du das für 29 mal 41 Karos, und es scheint gut zu passen.
Falls es nicht ganz genau stimmt, nehmen wir an, dass es mit kleineren Quadraten in entsprechend größerer Zahl klappen würde, z.B. mit
n mal m quadratischen Karos, wobei wir annehmen, dass **n und m die kleinsten natürliche Zahlen** sind, für die das möglich ist.

---

6. Das so bedruckte Blatt denken wir uns wie in Nummer 4 in zwei Quadrate und ein ebenfalls DIN-förmiges Rest-Rechteck zerlegt



a) Begründe, dass das linke Quadrat dabei randlos mit Karos überdeckt wird.

b) Begründe, dass auch das rechte Quadrat randlos mit Karos überdeckt wird.

c) Begründe, dass das **Restrechteck (gelb)** randlos mit Karos überdeckt wird.

Das Restrechteck kann mit n_1 mal m_1 Karos ausgelegt werden, wobei $n_1 < n$ und $m_1 < m$ gilt.
Dann hätte man aber das Ausgangsrechteck schon mit n_1 mal m_1 größeren Karos auslegen können!

Widerspruch, da n und m die kleinsten Zahlen mit dieser Eigenschaft waren.
Folgerung: Das DIN A4 Blatt lässt sich nicht randlos mit quadratischen Karos bedrucken!

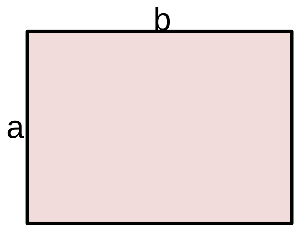
Andere Argumentationslinie: (DIN_B)

Hat man natürliche Zahlen n und m gefunden, für die sich das DIN A4 Blatt mit quadratischen Karos randlos bedrucken lässt, so gibt es dazu immer natürliche Zahlen $n_1 < n$ und $m_1 < m$ mit dieser Eigenschaft.

Zu n_1, m_1 gibt es mit der gleichen Überlegung Zahl $n_2 < n_1$ und $m_2 < m_1$ mit dieser Eigenschaft… usw. .

Man erhält unendliche Folge $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$ und $m > m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$ natürlicher Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Dies aber nicht möglich, da es nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als n und nur endlich viele natürliche Zahlen kleiner als m gibt.



Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$:

- Bei einem DIN – Blatt gilt für die Seitenlängen $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$.

Angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

- Dann muss sich $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen lassen: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$,

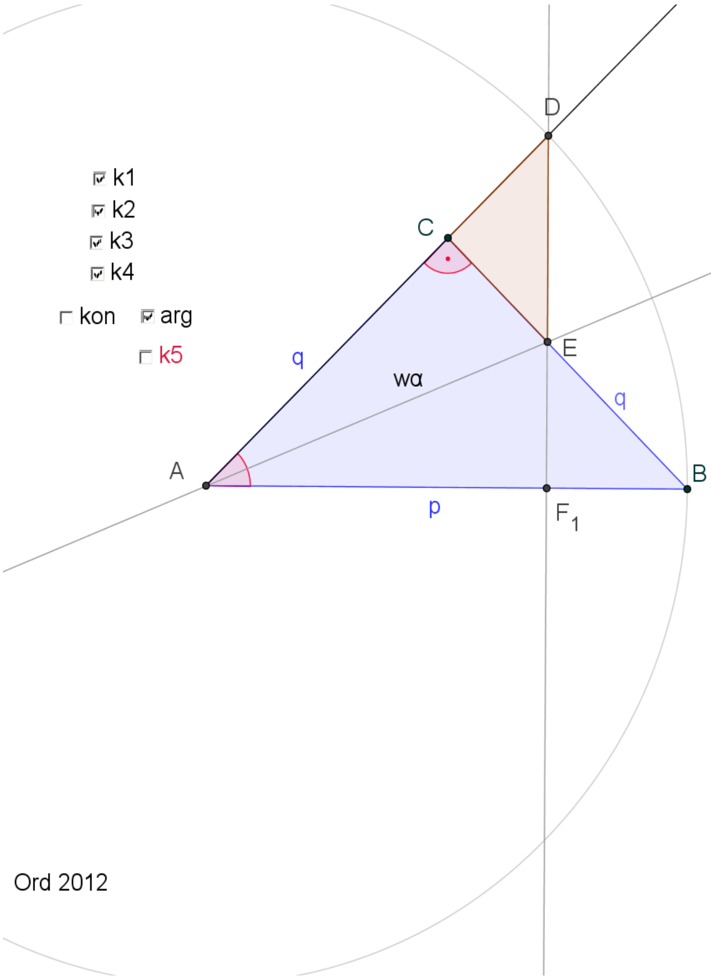
  wobei m und n natürliche Zahlen sind.

- Dann könnte man aber ein DIN – Blatt herstellen mit den Seitenlängen $b = m\,\mathrm{LE}$ und $a = n\,\mathrm{LE}$ und dieses Blatt randlos mit n mal m quadratischen Karos mit der Seitenlänge 1 LE überdecken.

Dies aber nicht möglich. **Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.**

Quelle: Christian .Messner

Dreieck:



Ord 2012

(1) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig.
Es gilt (z.B. nach dem Satz von Pythogras):

$$p^2 = 2q^2 \; bzw. \;\; \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (q < p < 2q)$$

Angenommen p und q sind natürliche Zahlen.
Dann können wir für unser Dreieck annehmen, dass p und q bereits die kleinstmöglichen Werte haben.
(Andernfalls wird der Bruch soweit wie möglich gekürzt.)

(2) Bestimme auf dem Strahl AC den Punkt D mit
$\overline{AD} = \overline{AB} = p \;\; \Rightarrow \;\; \overline{CD} = p - q$.

(3) Die Winkelhalbierende von α schneidet BC in E.

(4) Das Dreieck EDC geht bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden in das Dreieck EBF über.
Die beiden kongruenten Dreiecke sind gleichschenklig rechtwinklig . Warum?
Wie lang sind die Seiten im Dreieck EDC?

Es gilt:

$$\overline{ED}^2 = 2\overline{CE}^2 \; bzw. \;\; \sqrt{2} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CE}}$$

$$\overline{CE} = \overline{CD} = p - q$$

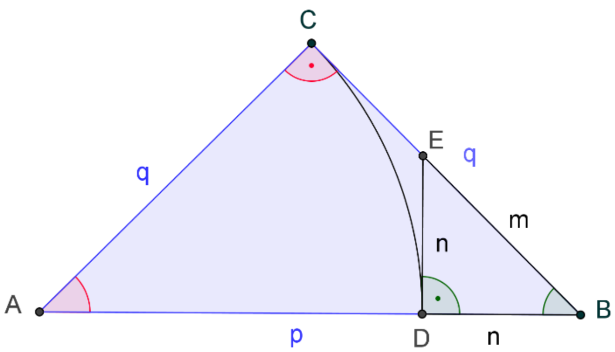
$$\overline{ED} = \overline{EB} = q - \overline{CE} = q - (p - q) = 2q - p$$

Die Seitenlängen des gl. rechtw. Dreiecks EDC sind somit ebenfalls natürliche Zahlen, wobei:

$$p - q < q \;\; (da \; p < 2q) \;\; und \;\; 2q - p < p \;\; (da \; 2q < 2p)$$

Widerspruch!

Ähnlichkeit:



U.Wagner 2016

(1) Das Dreieck ABC ist gleichschenklig rechtwinklig. Es gilt:

$$p^2 = 2q^2 \; bzw. \;\; \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (q < p < 2q)$$

Angenommen p und q sind kleinstmögliche natürliche Zahlen.

(2) Das Dreieck BDE ist ebenfalls gleichschenklig rechtwinkling (da ähnlich zm Dreieck ABC). Es gilt:

$$m^2 = 2n^2 \;\; bzw \; \sqrt{2} = \frac{m}{n} \;\; (n < m < 2n).$$

(3) Nach Zeichnung gilt: $n = p - q < q \; natürlich$

(4) Da die Dreiecke ABC und BDE ähnlich sind: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

$$also \; m = \frac{p}{q} n = \frac{p}{q}(p - q) = \frac{p^2}{q} - p$$

$$= \frac{p^2}{q^2} q - p = 2q - p < p \;\; natürlich$$

Widerspruch!