
Vorkurs Mathematik
Blatt 11

Besprechung der Lösungen am 04.10.2023 in den Übungen

Aufgabe 1

Gegeben seien die beiden folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f: \{1, 2, 3, 4\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & f(1) &:= 4, & f(2) &:= 3, & f(3) &:= 4, & f(4) &:= 3; \\ g: \{1, 2\} &\rightarrow \{1, 2, 3, 4\}, & g(1) &:= 3, & g(2) &:= 4. \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Zielbereich von f bzw. g sowie die Bilder $\text{Bild}(f)$ und $\text{Bild}(g)$ an.
- (b) Bestimmen Sie $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(4)$ sowie $g^{-1}(1)$, $g^{-1}(2)$, $g^{-1}(3)$, $g^{-1}(4)$.
- (c) Es seien $A := \{1, 2\}$ und $B := \{3, 4\}$. Bestimmen Sie $f(A)$, $g(A)$, $f(B)$, und, falls möglich, $g(B)$. Bestimmen Sie weiter $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ und $g^{-1}(B)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch die Zuordnung $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- (a) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(2)$ von $\{2\}$ unter f .
- (b) Für welche reelle Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ besteht das Urbild $f^{-1}(\alpha)$ aus einem Element bzw. aus zwei Elementen? Wann gilt $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Bilder der folgenden Funktionen:

- (i) $f_1: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $f_1(1) := 3$, $f_1(2) := 1$;
- (ii) $f_2: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 3$;
- (iii) $f_3: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$;
- (iv) $f_4: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 2x - 3y$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -3x^2 - 12x - 9$.

- (i) Bestimmen Sie $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(6)$ und $f^{-1}(-9)$.
- (ii) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$, wobei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- (iii) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -9\})$.
- (iv) Bestimmen Sie $f^{-1}\left(f(\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\})\right)$.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe)

Finden Sie eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$.