Bezeichnung:

$a \in A \quad (a \notin A)$: a ist (kein) Element von A

$A \subseteq B \quad (A \nsubseteq B)$: A ist (keine) Teilmenge von B

$B \supseteq A \quad (B \nsupseteq A)$: B ist (keine) Obermenge von A

$A = B \quad (A \neq B)$: A und B sind gleich (verschieden)

$A \subset B \quad (A \not\subset B)$: A ist (keine) echte TM von B

$B \supset A \quad (B \not\supset A)$: B ist (keine) echte OM von A

Bedeutung d. Bez. mittels Logik (über einem Univ.)

$a \in A =_{def}$ „a gehört zur Menge A" $\quad (a \notin A =_{def} \neg (a \in A))$

$A \subseteq B =_{def} (\forall a)[a \in A \rightarrow a \in B] \quad (A \nsubseteq B =_{def} \neg (A \subseteq B))$

$B \supseteq A =_{def} A \subseteq B \quad (B \nsupseteq A =_{def} \neg (B \supseteq A))$

$A = B =_{def} A \subseteq B \land B \subseteq A \quad (A \neq B =_{def} \neg (A = B))$

$A \subset B =_{def} A \subseteq B \land A \neq B \quad (A \not\subset B =_{def} \neg (A \subset B))$

$B \supset A =_{def} A \subset B$

Beispiele:

1.) $A \nsubseteq B \equiv \neg (A \subseteq B)$

$\equiv \neg (\forall a)[a \in A \rightarrow a \in B]$

$\equiv (\exists a)[\neg (a \in A \rightarrow a \in B)]$

$\equiv (\exists a)[\neg (a \notin A \lor a \in B)]$

$\equiv (\exists a)[a \in A \land a \notin B]$

2.) Betrachten Mengen (als Teilmengen nat. Zahlen):

$A =_{def} \{ n \mid n \text{ ist gerade} \}$

$B =_{def} \{ n \mid n^2 \text{ ist gerade} \}$

Es gilt: $A = B$

$\boxed{\subseteq}$ Es sei $n \in A$, d.h. n ist gerade. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Damit gilt:

$$n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k^2)$$

Also ist n^2 gerade, d.h. $n \in B$

$\boxed{\supseteq}$ Es sei $n \in B$, d.h. n^2 ist gerade. Kontraposition:
Da $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$
gilt, folgt n ist gerade. D.h. $n \in A$.

(3.) Russellsches Paradoxon:

$$Y =_{def} \{ X \mid X \notin X \}$$

$$Y \in Y \Rightarrow Y \notin Y$$
$$Y \notin Y \Rightarrow Y \in Y$$

Weitere Begrifflichkeiten:

- eine Menge A heißt leer gdw. A enthält kein Element aus Univ. (logisch: $(\forall a)[a \notin A]$)

  In jedem Univ. gibt es genau eine leere Menge

  Bezeichnung: $\emptyset$ steht für leere Menge (in einem Univ.)
- $|A|$ ($\#A$, $\|A\|$) ist d. Anzahl d. Elemente v. A bzw. Kardinalität von A
- Ist $|A| < \infty$, so heißt A endliche Menge, sonst unendliche Menge; Menge mit $|A| = 1$ heißt Einermenge

Beachte: $\mathbb{N} =_{def} \{ |A| \mid A \text{ ist endliche Menge} \}$

3.2 Rechnen mit Mengen

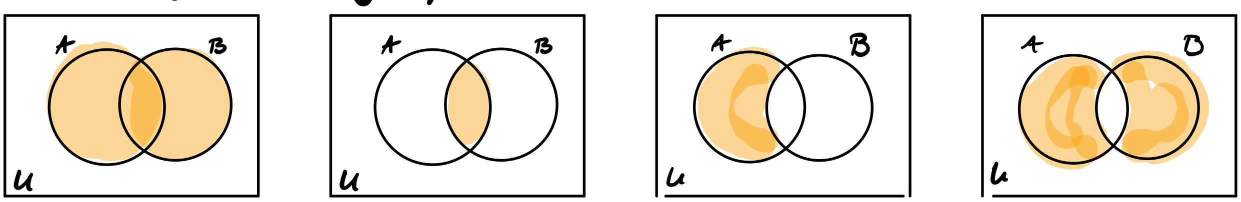
Es seien A und B zwei Mengen (über Univ. U)

- **Vereinigung**: $A \cup B =_{def} \{ x \in U \mid x \in A \lor x \in B \}$
- **Durchschnitt**: $A \cap B =_{def} \{ x \in U \mid x \in A \land x \in B \}$
- **Differenz**: $A \setminus B =_{def} \{ x \in U \mid x \in A \land x \notin B \}$
- **Symmetrische Differenz**:

  $A \triangle B =_{def} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

  $(= \{ x \in U \mid x \in A \oplus x \in B \})$
- **Komplement**: $\bar{A} =_{def} U \setminus A \quad (= \{ x \in U \mid x \notin A \})$

Darstellung v. Mengenoperationen:



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$ $\quad$ $A \triangle B$

Beispiele: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

- $A \setminus B = \{7, 11\}$
- $(A \setminus B) \cap B = \{7, 11\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \emptyset$

Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** gdw. $A \cap B = \emptyset$.

Beachte: Alle Rechenregeln d. Aussagenlogik übertragen sich auf Mengen, z.B.:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \overline{B}$:

  $$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \quad \text{(De Morgan)} \\ &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\ &= \bar{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \overline{B}$
- $A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$ $\quad (A \vee \neg A \equiv w)$

  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $\quad (A \wedge \neg A \equiv f)$
- $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \bar{A}$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{aligned}A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{A \cap B} \\ &= A \cap (\bar{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A \setminus B\end{aligned}$$