2.6 Beweise

Beweis = endliche Folge v. allgemeingültigen Implikation (Regeln), die auf wahren Anfangsaussagen (Prämissen) basieren und zu einer Zielaussage (Folgerung) führen, die damit als wahr nachgewiesen wird.

Universelle Beweisregeln:

1. Abtrennungsregel (Modus ponens)
   Ist A wahr und ist $(A \to B)$ wahr, so ist B wahr.
   (Korrektheit der Regel: $(A \land (A \to B)) \to B$ allgem.)

2. Fallunterscheidung
   Sind $(A \to B)$ und $(\neg A \to B)$ wahr, so ist B wahr
   (Korrektheit der Regel: $((A \to B) \land (\neg A \to B)) \to B$ allgem.)

3. Kettenschluss
   Sind $(A \to B)$ und $(B \to C)$ wahr, so ist $(A \to C)$ wahr
   (Korrektheit: $((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$ allgem.)

4. Kontraposition
   Ist $(A \to B)$ wahr, so ist $(\neg B \to \neg A)$ wahr
   (Korrektheit: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ allgem.)

5. Indirekter Beweis (Beweis mittels Widerspruch)
   Sind $(A \to B)$ und $(A \to \neg B)$ wahr, so ist $\neg A$ wahr
   (Korrektheit: $((A \to B) \land (A \to \neg B)) \to \neg A$ allgem.)

Spezielle Beweisregeln:

(6.) **Spezialisierung (Substitution)**

Ist $(\forall x)[A(x)]$ wahr, so ist $A(y)$ wahr, falls y nicht im WB eines Quantors in $A(x)$ vorkommt.

(Bsp.: $(\forall x)(\exists y)[x<y]$; $A(y) = (\exists y)[y<y]$)

(Korrektheit: $(\forall y)[(\forall x)[A(x)] \to A(y)]$ wahr)

(7.) **Vollständige Induktion**

Es sei $A(n)$ eine Aussageform mit freier Var. n über $\mathbb{N}$.
Sind $A(0)$ und $A(n-1) \to A(n)$ für alle $n>0$ wahr,
so ist $A(n)$ für alle n wahr

Satz 13.

Es sei $A(n)$ eine Aussageform mit Var. n über $\mathbb{N}$.
Dann ist die Aussage

$$\left(A(0) \wedge (\forall n; n>0)[A(n-1) \to A(n)] \right) \longrightarrow (\forall n)[A(n)]$$

wahr.

Beweis: (Widerspruch)

Es gelte $A(0)$ und $A(n-1) \to A(n)$ für alle $n>0$.
Angenommen es gibt n, sodass $A(n)$ nicht gilt.
Dann gibt es ein kleinstes n_0 mit dieser Eigenschaft,
d.h. es gilt: $\neg A(n_0) \wedge (\forall n; n<n_0)[A(n)]$

Fallunterscheidung:

1. Fall $n_0 = 0$: Dann gilt $\neg A(0)$ ↯

2. Fall $n_0 > 0$: Dann gilt: $\neg A(n_0) \wedge A(n_0 - 1)$

$$\equiv \neg (A(n_0) \vee \neg A(n_0-1))$$

$$\equiv \neg (A(n_0-1) \rightarrow A(n_0))$$ ↯ ∎

3. Mengen

3.1 Aussagen über Mengen

Eine **Menge** A besteht aus pw. verschiedenen Objekten (d.h. mehrfaches Vorkommen v. Objekten wird ignoriert, i. Ggs. zu Listen als Datenstruktur)

Unterscheiden zwei Formen d. Darst. von Mengen:

- **Extensionale Darstellung** (nach Umfang):

  $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$

  (Beachte: Reihenfolge spielt keine Rolle; i. Ggs. zu Listen)
- **Intensionale Darstellung** (nach Inhalt):

  $A = \{a \mid a \text{ besitzt Eigenschaft } E\} = \{a \mid E(a)\}$

Beispiele:

① $\{3,5,7,11\} = \{11,5,7,3\}$

② $\{3,5,7,11\} = \{3,3,3,5,5,7,11,11\}$

3. $\{3, 5, 7, 11\} = \{a \mid 2 < a < 12 \land a \text{ ist Primzahl}\}$