- typ. Probleme: Terminierung, Auflösung, Abschätzung bei rek. Def.

Beispiele:

① $\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$

② $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

③ $A(5,y) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}\ y\text{-mal}$

$A(5,2) \geq 2^2 = 4$

$A(5,3) \geq 2^{2^2} = 2^4 = 16$

$A(5,4) \geq 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65.536$

$A(5,5) \geq 2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{65.536} \approx 10^{19.660}$

1.4 Strukturelle Induktion

- beim rek. Def. zerlegen; beim ind. Def. Zusammensetzen
- typ. f. Konstruktionen v. Mengen
- Form:

  1. (IA) Legen Basiselemente fest
  2. (IS) Legen Operationen zur konstr. neuer Elemente aus bestehenden fest
  3. Nichts sonst ist ein Element dieser Menge.

Beispiele:

① nat. Zahlen:

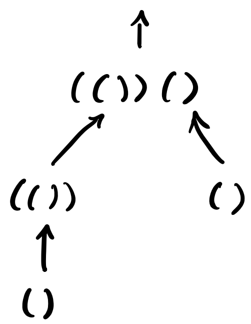
1. 0 ist eine nat. Zahl

2. Ist n eine nat. Zahl, so ist $n+1$ eine nat. Zahl
3. Nichts sonst ist eine nat. Zahl

2. Korrekte Klammerausdrücke

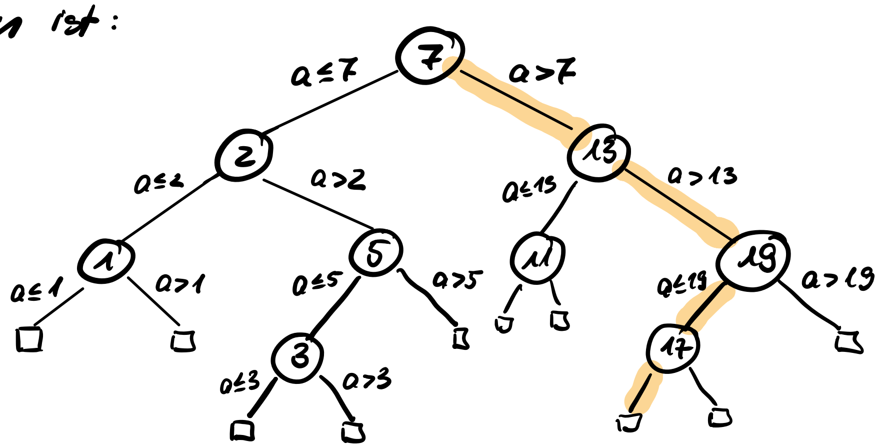
1. () ist korr. KA
2. Sind H_1, H_2 korr. KA, so sind (H_1) und $H_1 H_2$ korr. KA
3. Nicht sonst ist korr. KA

<u>Beispiel:</u> ((())()) korr. ;)(nicht korr.



Fallbeispiel: Suchbäume

- Datenstruktur zur Suche in geordneten Mengen
- wollen wissen, ob in 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 eine Zahl a enthalten ist:



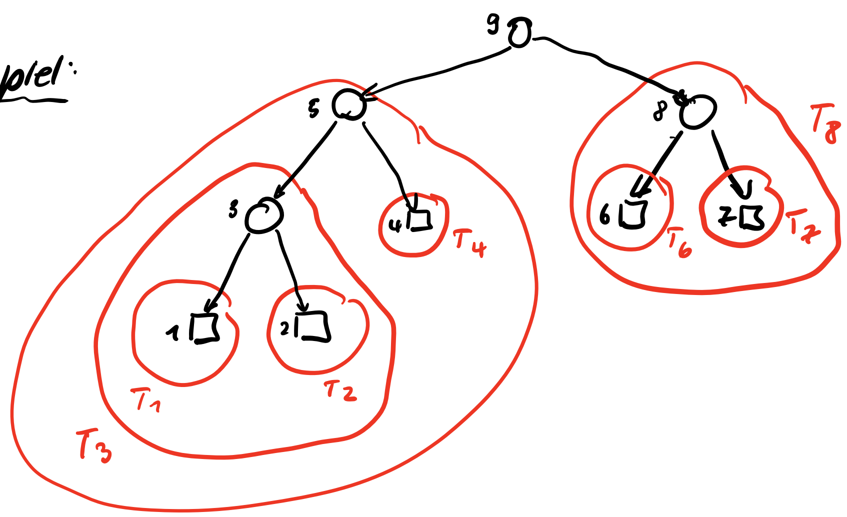
- kombinatorische Struktur: Volle, gewurzelte Binärbäume
- voller, gew. Binärbaum T besteht aus Knoten $(\circ, \square)$ und Verweise $(\rightarrow)$; ein Knoten r ist die Wurzel

  (IA) Für jedes r ist der Knoten r ein Baum, $\square$

  (IS) Sind T_1, T_2 Bäume mit Wurzeln r_1, r_2 und keinen gemeinsamen Knoten, so ist die Kollektion der Knoten und Kanten aus T_1 und T_2 sowie den neuen Kanten $r \rightarrow r_1, r \rightarrow r_2$ für $r \neq r_1, r_2$ ein Baum; r ist die neue Wurzel, $\circ$

  Nichts sonst ist ein voller, gew. Binärbaum

Beispiel:



- Wollen ind. Struktur d. Bäume benutzen, um Sachverhalte zu beweisen
- Knoten ohne ausgehende Kanten heißt Blatt, sonst innerer Knoten

Proposition.

Für einen vollen, gew. Binärbaum T seien n_T die Anzahl innerer Knoten und m_T die Anzahl der Blätter. Dann gilt stets

$$n_T = m_T - 1$$

Beweis: (Induktion über Aufbau d. Bäume)

(IA) Ist T ein Baum mit einem Knoten r, so gilt $m_T = 1$, $n_T = 0$

(IS) Es sei T ein Baum mit mehr als einem Knoten, Wurzel r. Dann gibt es Bäume T_1, T_2 mit Wurzeln r_1, r_2, aus denen T zusammengesetzt ist.
Insbesondere: Blätter bzw. innere Knoten v. T_1, T_2 sind auch Blätter bzw. innere Knoten v. T. Die Wurzel r ist innerer Knoten v. T.

Es gilt:

$$\begin{aligned} n_T &= n_{T_1} + n_{T_2} + 1 \\ &\overset{(IV)}{=} (m_{T_1} - 1) + (m_{T_2} - 1) + 1 \\ &= (m_{T_1} + m_{T_2}) - 1 \\ &= m_T - 1 \end{aligned}$$

∎