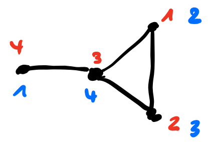
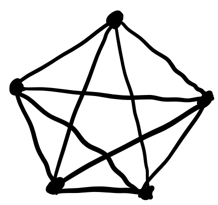
Mit nummerierten Graphen sind gleichzeitig alle isomorphen Graphen mitgemeint.

Beispiel: Graphen G, G' können nummeriert dargestellt werden:



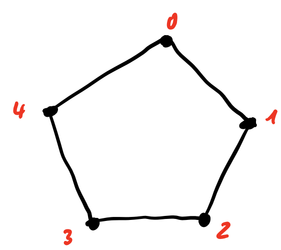
Wichtige Graphen bekommen eigene Namen:

1. **Vollständiger** Graph K^n mit n Knoten, d.h. alle Knoten sind verbunden:



K^5

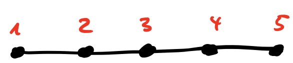
2. **Kreis** C_n mit n Knoten (n Kanten)



C_5

$$V = \{0, 1, \dots, n-1\}$$
$$E = \{ \{i,j\} \mid \mathrm{mod}(i+1, n) = j \}$$

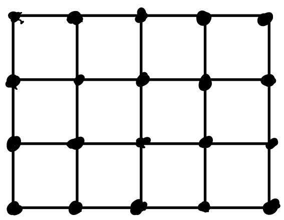
3. **Pfad** P_n mit $n+1$ Knoten und n Kanten



P_4

$$V = \{1, \dots, n\}$$
$$E = \{ \{i,j\} \mid |i-j| = 1 \}$$

④ **Gittergraph** $M_{m,n}$ mit m Zeilen, n Spalten:



$M_{4,5}$

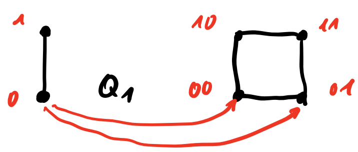
$V = \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$

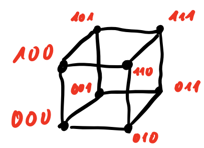
$E = \{\{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\} \mid |i_1-i_2| + |j_1-j_2| = 1\}$

⑤ **d-dimensionaler Hyperwürfel** Q_d mit

$V_d = \{0,1\}^d$

$E = \{\{(i_1,\dots,i_d),(j_1,\dots,j_d)\} \mid |\{r \mid i_r \neq j_r\}| = 1\}$





Q_3

Definition 3.

Es seien $G = (V,E)$ ein Graph und $v \in V$ Knoten.

(1.) Die **Nachbarschaft** $N_G(v)$ von v in G ist definiert als

$$N_G(v) =_{def} \{u \in V \mid \{u,v\} \in E\}$$

(2.) Der **Grad** $d_G(v)$ von v in G ist definiert als

$$d_G(v) =_{def} |N_G(v)|$$

Beispiel:

1. Für alle $v \in V$ in K^n gilt $d(v) = n-1$
2. Für alle $v \in V$ in C_n gilt $d(v) = 2$
3. Für alle $v \in V$ in Q_d gilt $d(v) = d$

Weitere Begriffe für Graphen $G=(V,E)$, Knoten $u,v\in V$, Kante $e\in E$:

- G heißt k-regulär $\Leftrightarrow_{def}$ für alle $v\in V$ gilt $d_G(v)=k$
- u und v adjazent (benachbart) $\Leftrightarrow_{def}$ $e=\{u,v\}\in E$
  (d.h. u,v Endknoten v. e)
- u und e inzident $\Leftrightarrow_{def}$ $u\in e$ (d.h. u Endknoten v. e)
- $e,f\in E$ inzident $\Leftrightarrow_{def}$ $e\cap f\neq\emptyset$

Proposition 4.

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ gilt

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E|$$

Beweis: Es sei $e=\{u,v\}\in E$. Wie oft trägt e zu beiden Seiten bei?

- Linke Seite: Für beide Knoten u,v trägt e jeweils 1 zum Grad bei, d.h. e wird doppelt gezählt
- Rechte Seite: e wird doppelt gezählt $\blacksquare$

Korollar 5.

Für jeden Graphen $G=(V,E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Beweis: Es sei $V_i =_{def} \{v\in V \mid \mathrm{mod}(d_G(v),2)=i\}$, d.h. V_0 enthält Knoten mit geradem Grad, V_1 enth. Knoten mit ungeradem Grad. Es gilt $V=V_0\cup V_1$, $V_0\cap V_1=\emptyset$. Somit gilt:

$$2|E| = \sum_{v\in V} d_G(v) = \sum_{v\in V_0} d_G(v) + \sum_{v\in V_1} d_G(v)$$

Damit rechte Summe gerade wird, muss $|V_1|$ gerade sein. $\blacksquare$

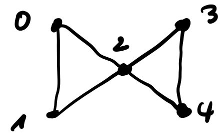
Definition 6.

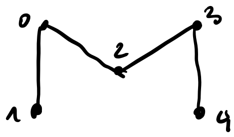
Es sei $G = (V_G, E_G)$ ein Graph.

(1.) Der Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt **Teilgraph** von G (symb.: $H \subseteq G$), falls $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$.

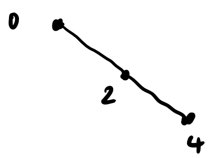
(2.) Der Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt **induzierter Teilgraph** (symb.: $H = G[V_H]$), falls $V_H \subseteq V_G$ und $E_H = E_G \cap \mathcal{P}_2(V_H)$ gilt.

Beispiel: Graph G:





TG v. G



ind. TG v. G

$G[\{0, 1, 3, 4\}]$