Proposition 3.

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $x, y \in A$.
Dann gilt:

(1.) Ist $(x,y) \in R$, so gilt $[x]_R = [y]_R$.

(2.) Ist $(x,y) \notin R$, so gilt $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

$\left((x,y) \notin R \rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset \right) \equiv \left([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \rightarrow (x,y) \in R \right)$

Beweis: Wir zeigen die Aussagen einzeln:

(1.) Es gelte $(x,y) \in R$, d.h. $y \in [x]_R$. Für $z \in [y]_R$, d.h. $(y,z) \in R$, gilt $(x,z) \in R$, d.h. $z \in [x]_R$, wegen Transitivität v. R. D.h. $[y]_R \subseteq [x]_R$. Wegen Symmetrie gilt auch $[x]_R \subseteq [y]_R$. D.h. $[x]_R = [y]_R$

(2.) Kontraposition: Es gelte $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, d.h. es gibt $z \in A$ mit $z \in [x]_R$ und $z \in [y]_R$, d.h. $(x,z) \in R$ und $(y,z) \in R$ bzw. $(z,y) \in R$ (wegen Symmetrie). Wegen Transitivität gilt $(x,y) \in R$. ∎

Definition 4.

Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation.
Eine Menge $K \subseteq A$ heißt Repräsentantensystem von R, falls folg. Bed. erfüllt sind:

(1.) Für alle $k_1, k_2 \in K$ mit $k_1 \neq k_2$ gilt $(k_1, k_2) \notin R$

(2.) $A = \bigcup_{k \in K} [k]_R$

Beispiele: Kongruenz „$\equiv$ mod 8" auf $\mathbb{Z}$

- $\{8, 17, 10, 19, -4, 13, 6, -1\}$ ist Repräsentantensystem
- $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ist Repräsentantensystem

Korollar 5.

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $K \subseteq A$ ein Repräsentantensystem v. R. Dann bilden die Äquivalenzklassen v. K, d.h.

Grundmenge → Relation →

$$A/R =_{def} \{ [k]_R \mid k \in K \}$$

Proposition 6.

Es sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Partition von A. Dann ist die Relation $R \subseteq A \times A$ mit

$$(x,y) \in R \iff_{def} (\exists X \in \mathcal{F})[x \in X \wedge y \in X]$$

eine Äquivalenzrelation, mit $A/R = \mathcal{F}$

Beweis: Wir überprüfen d. Eigenschaften v. Äquivalenzrel. für R:

(1.) R ist reflexiv: da $\mathcal{F}$ Part. v. A, gibt es für jedes $x \in A$ ein $X \in \mathcal{F}$ mit $x \in X$, d.h. $(x,x) \in R$

(2.) R ist transitiv: Es seien $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$, d.h. es gibt $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ mit $x,y \in X_1$ und $y,z \in X_2$. Mithin gilt $y \in X_1 \cap X_2$, d.h. X_1, X_2 nicht disjunkt. Da $\mathcal{F}$ Part. v. A, gilt also $X_1 = X_2$. Somit gilt $x,z \in X_1 = X_2$, d.h. $(x,z) \in R$

(3.) R ist symmetrisch: klar ∎

4.3 Ordnungsrelationen

Definition 7.

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

(3.) antisymmetrisch $\iff_{def} (\forall a,b \in A)[((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \rightarrow b = a]$

(4.) linear (total) $\iff_{def} (\forall a,b \in A)[a \neq b \rightarrow ((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)]$

<u>Beispiele:</u> $A = \{0,1,2\}$

Relation	refl. (1)	trans. (2)	antisym. (3)	linear (4)
$\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$	w	w	w	w
$\{(0,0), (0,1), (2,0), (1,1), (1,2), (2,2)\}$	w	f	w	w
$\{(0,0), (0,1), (2,0), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$	w	f	f	w
$\{(0,1), (1,2), (0,2)\}$	f	w	w	w
$\{(0,0), (0,1), (1,1), (2,2)\}$	w	w	w	f

2. $R =_{def} \{(m,n) \mid m \leq n\} \subseteq \mathbb{N}^2$; $m \leq n \Leftrightarrow_{def} (\exists c \in \mathbb{N})[n = m + c]$

- R ist reflexiv: $n + 0 = n$, d.h. $n \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- R ist transitiv: Gilt $k \leq m$ und $m \leq n$, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $m = k + c_1$ und $n = m + c_2$; somit gilt $n = k + \underbrace{c_1 + c_2}_{\in \mathbb{N}}$, d.h. $k \leq n$ für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$
- R ist antisymmetrisch: Gilt $m \leq n$ und $n \leq m$, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $n = m + c_1$ und $m = n + c_2$; somit gilt $n = n + c_1 + c_2$, d.h. $c_1 = c_2 = 0$, d.h. $n = m$
- R ist linear: $n - m \in \mathbb{N}$ oder $m - n \in \mathbb{N}$