Beweis: Wir zeigen lediglich die erste De Morgansche Regel $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ mittels Wertetabelle:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$		$(\neg A) \vee (\neg B)$	$\neg A$	$\neg B$
0	0	0	1	=	1	1	1
0	1	0	1	=	1	1	0
1	0	0	1	=	1	0	1
1	1	1	0	=	0	0	0

$\blacksquare$

Satz 7 kann f. algebr. Umformungen verwendet werden:

Beispiel: Vereinfache AF $C :=_{\text{def}} (A \wedge (A \to B)) \to B$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
C &\equiv (A \wedge (A \to B)) \to B \\
&\equiv (A \wedge ((\neg A) \vee B)) \to B && \text{AD Implikation} \\
&\equiv ((A \wedge (\neg A)) \vee (A \wedge B)) \to B && \text{Distributivgesetz} \\
&\equiv (f \vee (A \wedge B)) \to B && \text{tertium non datur} \\
&\equiv (A \wedge B) \to B && \text{Dominanzgesetz} \\
&\equiv \neg(A \wedge B) \vee B && \text{AD Implikation} \\
&\equiv ((\neg A) \vee (\neg B)) \vee B && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg A) \vee ((\neg B) \vee B) && \text{Assoziativgesetz} \\
&\equiv (\neg A) \vee w && \text{tertium non datur} \\
&\equiv w && \text{Dominanzgesetz}
\end{aligned}
$$

2.4 Aussageformen

Definition 8.

Eine Aussageform über den Universen $U_1, \dots, U_n$ ist ein Satz $A(x_1, \dots, x_n)$ mit den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$, der zu einer Aussage wird, wenn jedes x_i durch ein Objekt aus U_i ersetzt (belegt) wird.

Beispiele:

1. $A(x) =_{def}$ „x ist eine gerade Zahl" ist Aussageform über $\mathbb{N}$:
   $A(2)$ = „2 ist eine gerade Zahl" ist wahre Aussage
   $A(3)$ = „3 ist eine gerade Zahl" ist falsche Aussage

2. $C(x) =_{def}$ „$x < x+1$" ist Aussageform über:
   - $\mathbb{N}$: $C(n)$ immer wahr, egal welches n gewählt wird
   - Java-Klasse Integer: C(Integer.MAX_VALUE) ist falsch

3. $B(x,y) =_{def}$ „Das Wort x ist y Buchstaben lang" ist Aussageform über den Universen U_1 aller Wörter (über einem Alphabet) und U_2 aller nat. Zahlen:
   B(konstanz, 8) = „Das Wort konstanz ist 8 Buchstaben lang" ist eine wahre Aussage

Aussageformen können bel. log. verknüpft werden (Vor.: Variablen stimmen mit Universen überein): $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$

z.B. $H(x,y) =_{def} P(x) \to x \geq y$ mit $P(x) =_{def}$ „x ist Primzahl"

2.5 Aussagen mit Quantoren

Einsetzen konkreter Objekte aus Universum macht aus Aussageform eine Aussage.

Weitere Möglichkeit: Quantifizierung mittels Quantoren

Wichtigste Quantoren:

(1.) Existenzquantor: $\exists$ (manchmal auch: $\bigvee$)

(2.) Allquantor: $\forall$ (manchmal auch: $\bigwedge$)

Definition 9.

Es sei $A(x)$ eine Aussageform über Universum U:

(1.) $(\exists x)[A(x)]$ (gelesen: „Es gibt ein x, sodass $A(x)$ gilt")

ist wahr

$\Leftrightarrow_{def}$ es gibt ein u aus U, für das $A(u)$ wahr ist

(2.) $(\forall x)[A(x)]$ (gelesen: „Für alle x gilt $A(x)$")

ist wahr

$\Leftrightarrow_{def}$ für alle u aus U ist $A(u)$ wahr

Beispiele:

(1.) $A(x) =_{def}$ „x ist ungerade Zahl" sei Aussageform über $\mathbb{N}$

- $(\exists x)[A(x)]$ ist wahre Aussage, da $A(3) =$ „3 ist eine ungerade Zahl" wahr ist

- $(\forall x)[A(x)]$ ist falsche Aussage, da $A(2) =$ „2 ist eine ungerade Zahl" falsch ist

② $C(x) =_{def}$ „$x < x+1$" ist Aussageform über $\mathbb{N}$. Dann gilt:
$(\forall x)[C(x)] = (\forall x)[x < x+1]$ ist wahre Aussage

③ Es sei U ein endl. Universum mit Objekten $u_1, \dots, u_n$.
Dann gilt:

$$(\exists x)[A(x)] \equiv A(u_1) \vee A(u_2) \vee \dots \vee A(u_n) \quad \left(=_{def} \bigvee_{i=1}^{n} A(u_i)\right)$$

$$(\forall x)[A(x)] \equiv A(u_1) \wedge A(u_2) \wedge \dots \wedge A(u_n) \quad \left(=_{def} \bigwedge_{i=1}^{n} A(u_i)\right)$$

Definition 10.

Es sei $A(x_1, \dots, x_n)$ eine Aussageform mit n Variablen über Universen $U_1, \dots, U_n$.

(1.) $(\exists x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ und $(\forall x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ sind Aussageformen mit $n-1$ Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

(2.) In $(\exists x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ heißt $A(x_1, \dots, x_n)$ Wirkungsbereich des Quantors $\exists x_i$; analog ist $A(x_1, \dots, x_n)$ WB von $\forall x_i$ in $(\forall x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$.

Beispiele:

① $A(x) =_{def}$ „x ist eine ungerade Zahl" und $B(x,y) =_{def}$ „$x \cdot y$ ist eine ungerade Zahl" seien Aussageformen über $\mathbb{N}$:

- $C_x(y) =_{def} (\forall x)[A(x) \to B(x,y)]$ ist Aussageform mit freier Var. y
- $C_y(x) =_{def} (\forall y)[A(x) \to B(x,y)]$ ist Aussageform mit freier Var. x

Es gilt:

- $C_x(3) = (\forall x)[A(x) \to B(x,3)]$ ist wahr
- $C_y(3) = (\forall y)[A(3) \to B(3,y)]$ ist falsche Aussage, da $A(3)$ zwar wahr, aber $B(3,2)$ falsch ist.

Weiterhin:

- $(\exists y)(\forall x)[A(x) \to B(x,y)] = (\exists y)\overbrace{[(\forall x)\underbrace{[A(x) \to B(x,y)]}_{\text{WB v. } \forall x}]}^{\text{WB v. } \exists y}$ ist wahre Aussage
- $(\exists x)(\forall y)[A(x) \to B(x,y)]$ ist wahre Aussage
- $(\forall y)(\forall x)[A(x) \to B(x,y)]$ ist falsche Aussage
- $(\forall x)(\forall y)[A(x) \to B(x,y)]$ ist falsche Aussage

2. $A(x,y) =_{def}$ „$x<y$" sei Aussageform über $\mathbb{N}$:
   - $(\forall x)(\exists y)[x<y]$ (d.h. „für alle x gibt es ein y mit $x<y$") ist wahre Aussage, da $A(x, x+1)$ immer wahr ist
   - $(\exists y)(\forall x)[x<y]$ (d.h. „es gibt ein y, sodass $x<y$ für alle x gilt") ist falsche Aussage, da $A(y+1, y)$ immer falsch ist.

Bemerkung:

Namen f. Variablen nur innerhalb WB relevant, z.B. $(\exists x)(\forall x)[x<x]$ nicht korrekt; $(\exists x)[x<y] \wedge (\forall x)[x<y]$ korrekt, da WB

überschneidungsfrei.