Definition 4.

Es sei H eine Aussage.

(1.) H heißt erfüllbar, falls $I(H)=1$ für eine Bel. I

(2.) H heißt allgemeingültig (oder Tautologie), falls $I(H)=1$ für alle Bel. I

(3.) H heißt widerlegbar, falls $I(H)=0$ für eine Bel. I

(4.) H heißt unerfüllbar (oder kontradiktion), falls $I(H)=0$ für alle Bel. I

Beispiele:

1. w ist allgemeingültig; f unerfüllbar
2. $A \vee B$ ist erfüllbar und widerlegbar
3. $((A \to B) \to A) \wedge \neg A$ unerfüllbar
4. $(A \wedge (A \to B)) \to B$ allgemeingültig

Proposition 5.

Es sei H eine Aussage.

(1.) Ist H allgemeingültig, dann ist H erfüllbar.

(2.) H ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg H$ widerlegbar ist.

(3.) H ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg H$ unerfüllbar ist.

2.3 Rechnen mit logischen Verknüpfungen

Definition 6.

Zwei Aussagen A, B heißen genau dann (logisch) äquivalent, symbolisch: $A \equiv B$, wenn für alle Belegungen I gilt:

$$I(A) = I(B)$$

M.a.W.: $A \equiv B \Leftrightarrow_{def} (A \Leftrightarrow B)$ ist allgemeingültig

Beispiel: Wollen zeigen: $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv A \oplus (B \oplus C)$

Hilfsaussagen gemäß Aufbau d. Formeln:

$H_1 =_{def} B \Leftrightarrow C$

$H_2 =_{def} A \Leftrightarrow H_1$

$H_3 =_{def} B \oplus C$

$H_4 =_{def} A \oplus H_3$

Bestimmen Wertetabelle:

A	B	C	H_1	H_2	H_3	H_4	$H_2 \Leftrightarrow H_4$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Mithin gilt: $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv A \oplus (B \oplus C)$

Satz 7.

Es seien A, B, C bel. AF. Dann gilt:

$$\left.\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\equiv A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &\equiv A \vee (B \vee C) \end{aligned}\right\} \text{Assoziativgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ A \vee B &\equiv B \vee A \end{aligned}\right\} \text{Kommutativgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} \neg (A \wedge B) &\equiv (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg (A \vee B) &\equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned}\right\} \text{De Morgansche Regeln}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \wedge B) \vee C &\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \vee B) \wedge C &\equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \end{aligned}\right\} \text{Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} A \vee (\neg A) &\equiv w \\ A \wedge (\neg A) &\equiv f \end{aligned}\right\} \text{tertium non datur}$$

$$\left.\begin{aligned} A \vee w &\equiv w \\ A \vee f &\equiv A \\ A \wedge w &\equiv A \\ A \wedge f &\equiv f \end{aligned}\right\} \text{Dominanzgesetze}$$

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\equiv (\neg A) \vee B && \text{AD Implikation} \\ &\equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A) && \text{Kontraposition} \end{aligned}$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \qquad \text{AD Äquivalenz}$$

$$\neg (\neg A) \equiv A \qquad \text{Doppelte Negation}$$