6.4 Stirling-Zahlen

① Stirling-Zahlen zweiter Art

Es sei A endl. Menge mit $|A| = n$.
Eine **k-Partition** $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_k\}$ ist eine k-elementige Familie von nicht-leeren Teilmengen von A mit $A_1 \cup \dots \cup A_k = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Es sei $\left\{ n \atop k \right\}$ (manchmal auch: $S_{n,k}$) die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Grundmenge.
Die Zahlen $\left\{ n \atop k \right\}$ heißen **Stirling-Zahlen zweiter Art**

Spezialfälle:

- für $k > n$ gilt: $\left\{ n \atop k \right\} = 0$
- für $k = 0$ gilt: $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$
- $\left\{ 0 \atop 0 \right\} =_{\text{def}} 1$

Satz 12. (Stirling-Dreieck zweiter Art)
Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

Aufbau d. Stirling-Dreiecks zweiter Art:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$:	1					
$n=1$:	0	1				
$n=2$:	0	1	1			
$n=3$:	0	1	3	1		
$n=4$:	0	1	7	6	1	

$\frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$

$n=5$: 0 1 15 25 10 1

$n=6$: 0 1 31 90 65 15 1

Beispiel (Forts.):

Es gibt $\left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k!$ Wörter der Länge $n \geq k$ über k-elementigem Alphabet, in denen jeder Buchstabe mindestens einmal vorkommt. (Alice und Bob hatten $k!\binom{n}{k}k^{n-k}$ vorgeschlagen.)

Beweis (Satz 12): (kombinatorisch)

Es sei $\mathcal{F}$ eine k-Partition einer n-elementigen Menge $A=\{1,\dots,n\}$. Dann kann $\mathcal{F}$ auf zwei Arten aus einer Partition einer $(n-1)$-elementigen Menge entstanden sein:

(i) Hinzufügen v. $\{n\}$ zu einer $(k-1)$-Partition von $n-1$ Elementen

(ii) Einfügen v. n in eine der Komp. einer k-Partition von $n-1$ Elementen

Anzahl d. Möglichkeiten, eine k-Partition von n Elementen zu bilden:

(i) $1 \cdot \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ $\quad \{\{1,2\},\{3,4\}\} \to \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$

(ii) $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ $\quad \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\} \to \{\{1,2,5\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$

Damit gilt: $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ ∎

② Stirling-Zahlen erster Art:

Es sei A eine endl. Menge mit $|A|=n>0$.

Eine Permutation von A ist eine bij. Fkt. $\pi: A \to A$, o.B.d.A. setzen wir $A=\{1,\dots,n\}$ voraus; Notation: $[n]=\{1,\dots,n\}$.

Die Menge $\mathcal{S}_n$, definiert als

$$\mathcal{S}_n =_{df} \{ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation} \}$$

heißt symmetrische Gruppe von n Elementen.

<u>Satz 13.</u>

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathcal{S}_n| = n!$

Beweis: Eine Perm. v. n Elementen entspricht Ziehung v. n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln o.Z., m.R. Nach Satz 6 gilt:
$$|\mathcal{S}_n| = n^{\underline{n}} = n!$$ ■

<u>Satz 14.</u> (Stirlingsche Formel)

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

wobei $e = e^1 = 2{,}718281 8\ldots$ die Eulersche Zahl ist.