Diskrete Mathematik und Logik – Q&A Woche 7

Bastian Goldlücke
Uni Konstanz, 11.12.23

Universität Konstanz

Inhalt der Q&A Woche 7:

Selbststudium aus Woche 6

Skript Kapitel 4.4
Video E11

- Kapitel 4.4: Funktionen und Abbildungen
  - Links- / Rechtstotal, und –eindeutig
  - Injektiv, Surjektiv, Bijektiv
  - Bild und Urbild
  - Invertierbarkeit und inverse Funktion
  - Komposition (Hintereinanderausführung)

Übungsblatt Woche 7

Erinnerung: wird in den Übungsgruppen bearbeitet, freiwille Abgabe am Freitag.

- Reflexive und transitive Hülle (A19)
- Funktionsbegriff
  - Definition (A20)
  - Bilder und Urbilder (A21)

Links- / Rechtstotal, und –eindeutig

Eigenschaften einer Relation $R \subseteq X \times Y$

- *Linkstotal*: jedes Element aus X kommt mindestens einmal in R vor
- *Rechtstotal*: jedes Element aus Y kommt mindestens einmal in R vor
- *Linkseindeutig*: jedes Element aus Y kommt höchstens einmal in R vor, d.h. steht nicht zu mehreren Elementen aus X in Relation
- *Rechtseindeutig*: jedes Element aus X kommt höchstens einmal in R vor, d.h. steht nicht zu mehreren Elementen aus Y in Relation

Definition einer Funktion als spezielle Relation

- Eine Funktion ist eine Relation, die linkstotal und rechtseindeutig ist
- Berechtigt zur Notation $f: X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$
- Die zugrundeliegende Relation nennt man dann auch den Graph von f

Bild und Urbild

Definiert für Funktion $f: X \to Y$

- Bild f(A) einer Menge A in X:
  Teilmenge von Y, alles, worauf X unter f abbildet

- Urbild $f^{-1}(B)$ einer Menge B in Y:
  Teilmenge von X, alles was unter f auf Y abgebildet wird

- Die Urbilder aller Elemente von Y bilden eine Partition von X

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Zusätzliche Eigenschaften von Funktionen

- Erinnerung: Funktion $f : X \to Y$ ist rechtseindeutig und linkstotal

- *Injektiv*: zusätzlich linkseindeutig, d.h. jedes Element in Y kommt höchstens einmal vor.
  Alternativ: das Urbild jedes Elements aus Y enthält höchstens ein Element

- *Surjektiv*: zusätzlich rechtstotal, d.h. jedes Element in Y kommt mindestens einmal vor.
  Alternativ: das Urbild jedes Elements aus Y ist nicht-leer

- *Bijektiv*: sowohl injektiv als auch surjektiv, d.h.
  jedes Element in Y kommt genau einmal vor
  jedes Urbild eines Elements aus Y enthält genau ein Element

Abbildungen endlicher Mengen

Seien X,Y endliche Mengen. Dann gilt

- Eine *injektive* Abbildung $f: X \to Y$ gibt es dann und nur dann, wenn Y mindestens so viele Elemente wie X hat.

- Eine *surjektive* Abbildung $f: X \to Y$ gibt es dann und nur dann, wenn X mindestens so viele Elemente wie Y hat.

- Eine *bijektive* Abbildung $f: X \to Y$ gibt es dann und nur dann, wenn X gleich viele Elemente wie Y hat.

- Hat X gleich viele Elemente wie Y, so sind die drei Begriffe äquivalent.

Invertierbarkeit und inverse Funktion

Bijektive Funktionen lassen sich umkehren, indem man die Rolle von X und Y in der Relation vertauscht.

- Umkehrrelation
  - Linkstotal wird zu rechtstotal und umgekehrt
  - Linkseindeutig wird zu rechtseindeutig und umgekehrt

- Genau für die bijektiven Funktionen ist die Umkehrrelation wieder eine Funktion

- Invertiert man die inverse Funktion nochmal, erhält man wieder die Ausgangsfunktion

Komposition (Hintereinanderausführung)

Funktion $f: X \to Y$ und $\mathbf{g}: Y \to \mathbf{Z}$ warden hintereinander ausgeführt:

$\boldsymbol{g\left(f(x)\right) =: g \circ f(x) \in Z}$

- Verkettung erhält Bijektivität, Injektivität, Surjektivität beider Funktionen.
- Bei Bijektion: Verkettung von Funktion und Umkehrabbildung ist die Identität.