Beispiele:

1. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$
   $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

2. $A = \{5,7\}$
   $A^3 = \{5,7\} \times \{5,7\} \times \{5,7\}$
   $= \{(5,5,5), (5,5,7), (5,7,5), (5,7,7), (7,5,5), (7,5,7), (7,7,5), (7,7,7)\}$

3. $\emptyset \times A = \emptyset$

4. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Es seien $A_1, \dots, A_n$ Mengen.
Eine Menge $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt n-stellige Relation.

Eine Relation $R \subseteq A_1 \times A_2$ heißt binäre Relation.
Gilt $A_1 = A_2 = A$, so sprechen wir v. binärer Relation auf A.
Infix-Notation f. binäre Relation:

$$x R y \iff_{\text{def}} (x,y) \in R$$

Beispiele: $A = \mathbb{N}$

1. $R_1 =_{\text{def}} A \times A$ (volle Relation)
2. $R_2 =_{\text{def}} \{(0,0), (2,3), (5,1), (5,3)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
3. $R_3 =_{\text{def}} \{(n_1,n_2) \mid 2n_1 = n_2\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   $= \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), \dots\}$
4. $R_4 =_{\text{def}} \{(n_1,n_2) \mid 2 \mid n_1 - n_2\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   $= \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (1,1), (1,3), (3,1), \dots\}$
5. $R_5 =_{\text{def}} \{(n_1,n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   $= \{(0,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2), (2,2), \dots\}$

⑥ $R_6 =_{def} \{ (n_1, n_2) \mid n_1 | n_2 \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$= \{ (1,2), (2,4), (2,6), (7,0), \dots \}$.

R_3 ist eine Funktion(enrelation)

R_4 ist eine Äquivalenzrelation

R_5 und R_6 sind Ordnungsrelationen

4.2 Äquivalenzrelationen

Definition 1.

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

(1.) reflexiv $\Leftrightarrow_{def}$ $(\forall a \in A)[(a,a) \in R]$

(2.) transitiv $\Leftrightarrow_{def}$ $(\forall a,b,c \in A)[((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R]$

(3.) symmetrisch $\Leftrightarrow_{def}$ $(\forall a,b \in A)[(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R]$

(4.) Äquivalenzrelation $\Leftrightarrow_{def}$ R ist reflexiv, transitiv, symmetrisch

Schreibweisen f. Äquivalenzrelation R: statt $(a,b) \in R$

in Infix-Notation: $a \sim_R b$ $(a \approx_R b,\ a \equiv_R b)$

Beispiele: $A = \{0,1,2\}$

Relation	(1) R	(2) T	(3) S	(4) Ä
$\{(0,1), (1,0), (0,2), (2,0)\}$	f	f	w	f
$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0), (2,2)\}$	w	f	w	f
$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$	w	w	w	w
$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$	f	w	w	f
$\{(0,1)\}$	f	w	f	f
$\emptyset$	f	w	w	f

weitere Beispiele:

(1.) $A =_{def}$ Menge aller aussagenlogischen Formeln und
$R =_{def} \{ (H, H') \mid (H \Leftrightarrow H') \text{ Tautologie} \} \subseteq A \times A$

Dann ist R eine Äquivalenzrelation:
- R ist reflexiv: $(H \Leftrightarrow H)$ Tautologie f. alle $H \in A$
- R ist transitiv: $H \Leftrightarrow H'$, $H' \Leftrightarrow H''$ Tautologien, so auch $H \Leftrightarrow H''$ Tautologie (z.B. doppelte Anwend. d. Kettenschluss)
- R ist symmetrisch: $H \Leftrightarrow H'$ Tautologie, so auch $H' \Leftrightarrow H$

(2.) Es sei f bel. Fkt. mit Argumenten aus A. Dann ist die Relation

$$R_f =_{def} \{ (x,y) \mid f(x) = f(y) \} \subseteq A \times A$$

Äquivalenzrelation.
Spezialfall:
Auf $A =_{def} \mathbb{Z}$ sei $f_n(x) =_{def} \bmod(x, n)$
Wir schreiben: $x \equiv y \mod n$ für $(x,y) \in R_{f_n}$
und sagen: „x ist kongruent zu y modulo n"

Definition 2.
Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $x \in A$.
Dann heißt die Menge

$$[x]_R =_{def} \{ y \mid (x,y) \in R \}$$

Äquivalenzklasse von x. Wir nennen x Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Beispiel: Kongruenz „$\equiv \bmod 8$" auf $\mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$[13]_\equiv = \{ y \mid 13 \equiv y \bmod 8 \}$$

mod(13,8) = mod(y,8)
mod(13,8) - mod(y,8) = 0
mod(13-y,8) = 0

$$= \{ y \mid \operatorname{mod}(y-13, 8) = 0 \}$$

$$= \{ \dots, -11, -3, 5, 13, 21, 29, \dots \}$$

$$= [5]_\equiv = [-3]_\equiv$$