5.3 Binomialkoeffizienten

- Anzahl Kombination von k Kugeln aus n Kugeln entspricht $\binom{n}{k}$: Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$\binom{n}{k} =_{df} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{mit} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n$$

Offensichtlich: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Damit Erweiterung auf negative Werte von k: $\binom{n}{k} =_{df} 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Satz 7. (Pascalsches Dreieck)

Für $n \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Aufbau des Pascalschen Dreiecks:

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$

$n=0 \to \quad \binom{0}{0}\ 1 \qquad 1$

$n=1 \to \quad \binom{1}{0}\ 1 \quad \binom{1}{1}\ 1 \qquad 2 \quad 0$

$n=2 \to \quad \binom{2}{0}\ 1 \quad \binom{2}{1}\ 2 \quad \binom{2}{2}\ 1 \qquad 4 \quad 0$

$n=3 \to \quad \binom{3}{0}\ 1 \quad \binom{3}{1}\ 3 \quad \binom{3}{2}\ 3 \quad \binom{3}{3}\ 1 \qquad k=4 \qquad 8 \quad 0$

$n=4 \to \binom{4}{0}\ 1 \quad \binom{4}{1}\ 4 \quad \binom{4}{2}\ 6 \quad \binom{4}{3}\ 4 \quad \binom{4}{4}\ 1 \qquad 16$

Beweis: (kombinatorisch)

Interpretieren Gleich. als Bestimmung d. Kardinalitäten v. Mengen auf zwei verschiedene Weise (Doppeltes Abzählen).
Es sei $n \in \mathbb{N}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Definieren Mengenfamilien:

$$\mathcal{F} =_{def} \mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\}) = \{\ \{a_1,\dots,a_k\} \mid a_i \in \{1,\dots,n\},\ a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

$$\mathcal{F}_+ =_{def} \{A \mid A \in \mathcal{F},\ 1 \in A\}$$

$$\mathcal{F}_- =_{def} \{A \mid A \in \mathcal{F},\ 1 \notin A\}$$

Es gilt: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \cup \mathcal{F}_-$ sowie $\mathcal{F}_+ \cap \mathcal{F}_- = \emptyset$.
Nach Summenregel: $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_+| + |\mathcal{F}_-|$

komb. Interpretation v. $\mathcal{F}, \mathcal{F}_+, \mathcal{F}_-$:

- $\mathcal{F}$ entspricht Ziehen v. k Kugeln aus n Kugeln, o.Z., o.R.
- $\mathcal{F}_+$ entspricht Ziehen v. $k-1$ Kugeln aus $n-1$ Kugeln o.Z., o.R. (Kugel 1 liegt nicht in Urne)
- $\mathcal{F}_-$ entspricht Ziehen v. k Kugeln aus $n-1$ Kugeln, o.Z., o.R. (da Kugel 1 nicht gezogen werden darf)

Wir erhalten:

$$|\mathcal{F}| = \binom{n}{k}, \quad |\mathcal{F}_+| = \binom{n-1}{k-1}, \quad |\mathcal{F}_-| = \binom{n-1}{k}$$

Insgesamt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\blacksquare$

__Satz 8.__ (Binomialtheorem)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

__Beweis:__ (kombinatorisch) Ausmultiplizieren v. $(a+b)^n$ ergibt:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \;& a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \\ &+ a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \\ &+ a \cdot a \cdot \ldots \cdot b \cdot a \\ &+ a \cdot a \cdot \ldots \cdot b \cdot b \\ &\;\vdots \\ &+ \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \cdot b}_{n \text{ Faktoren}}\end{aligned}$$

D.h. jeder Summand besteht aus n Faktoren; sind k Faktoren davon b, so sind $(n-k)$ davon a; dies entspricht $a^{n-k}b^k$. Anzahl Produkte $a^{n-k}b^k$ entspricht Ziehen v. k Kugeln (Faktoren b) aus n Kugeln (Gesamtheit d. Faktoren) o.Z., o.R.; d.h. $\binom{n}{k}$ nach Satz 6.

Somit gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \blacksquare$$

Korollar 9.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis: Nach Satz 8 gilt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \blacksquare$$

Korollar 10.

Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Beweis: Nach Satz 8 gilt:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \qquad \blacksquare$$

Satz 11. (Vandermondesche Identität)

Für $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$$

Beweis: klar (n Frauen, m Männer, Gruppengröße k) $\blacksquare$