B Zusammenfassung der Beweisregeln

In diesem Anhang findest du nochmal die wichtigsten Beweisregeln sowie die typischen Nachweis- und Benutzungstexte aus Kapitel 2 im Überblick. Du kannst diese beim Anfertigen von Beweisen zum schnellen Nachschlagen nutzen.

Implikation	Eindeutigkeit
Äquivalenz	Sätze
Und-Aussage	Definitionen
Oder-Aussage	Teilmenge
Negation und Widerspruch	Mengengleichheit
Für-alle-Aussage	Funktionsgleichheit
Existenzaussage	Element einer Aussonderung

In der elektronischen Buchausgabe kannst du mit einem Klick auf die Namen direkt zu den Regeln springen. Dort führt dich ein Klick auf das ⏪ Symbol hierher zurück .

Beim Benutzen der Übersichten musst du über weite Strecken einfach nur Lücken füllen und die Textbausteine übernehmen. Was in die Lücken kommt, hängt natürlich von deiner vorliegenden Aufgabe ab und wird jedesmal anders sein. In den Texten ist der Lückeninhalt durch farbige Ovale mit drei Punkten angedeutet.

Halte Dich beim Aufschreiben **stur** an die Vorgaben. Lass keine Textblöcke aus und fasse auch nicht mehrere zusammen.
Der so entstehende Text hilft, strukturiert zu denken und Fehler zu vermeiden.

Während das Abschreiben und Lückenfüllen lediglich Konzentration und *Sturheit* verlangt, ist Kreativität immer dann von Nöten, wenn Du auf ein Baustellenzeichen triffst oder beim Nachweis einer Existenzaussage bzw. beim Anwenden einer Für-alle-Aussage ein konkreter Ausdruck mit bestimmten Eigenschaften anzugeben ist.

Ob ein Beweistext am Ende *richtig* ist, entscheidet sich *nicht* daran, dass er logisch *klingt* oder überzeugend *wirkt*. Stattdessen gilt:

> Ein Beweis ist richtig, wenn er die vereinbarten Beweistexte der grundlegenden Aussagetypen entsprechend der Regeln verknüpft, sodass am Ende die geforderten Ziele durch Kombination der geltenden Aussagen erfüllt werden.

Um die Beweistexte richtig benutzen zu können, solltest du die darin vorkommenden Symbole richtig deuten können. Diese werden im Folgenden erklärt und an einem Beispiel illustriert.

M. Junk und J.-H. Treude, *Beweisen lernen Schritt für Schritt*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61616-1_8

Symbolerklärung

... und stehen stellvertretend für Aussagen.

weist darauf hin, dass hier noch etwas extra nachzuweisen ist.

Hier muss ein Name für ein Element gewählt werden. Dieser muss von den schon im laufenden Beweis vergebenen Namen verschieden sein.

Hier muss eventuell ein Platzhaltername durch einen zuvor gewählten Objektnamen ersetzt werden.

$\lightning$ steht für einen Widerspruch, d. h. für eine (situationsabhängige) Aussage, die gilt und zugleich nicht gilt.

steht stellvertretend für einen oder mehrere Platzhalter (in Sätzen und Definitionen).

steht stellvertretend für ein oder mehrere Objekte, auf die man z. B. Sätze oder Definitionen anwendet.

Anwendungsbeispiel

Als Beispiel betrachten wir einen Beweiskontext, in dem die Namen A, B, C und y bereits für drei Mengen und ein Element genutzt werden. Das aktuelle Ziel besteht darin, den Nachweis der Für-alle-Aussage $\forall y \in B : (y \notin A) \Rightarrow (y \in C)$ zu führen.

Du schlägst Seite 201 auf und findest

Nachweistext

Du willst beweisen: $\forall x \in X :$ ...

Schreibe dazu: Sei ein $x \in X$ gegeben. Zeige: ... .

Der nächste Schritt besteht darin, die entscheidenden Komponenten im angegebenen Aussagenmuster den entsprechenden Stellen in der konkreten Aufgabe zuzuordnen. So steht anstelle des Platzhalternamens x im Aussagenmuster bei uns der Name y und die Menge X im Muster trägt bei uns den Namen B. Schließlich ist *alles* ab dem Doppelpunkt durch das farbige Oval abgekürzt, hier also die Aussage

$(y \notin A) \Rightarrow (y \in C)$. Die darin codierten Details müssen wir in diesem Schritt also noch gar nicht anschauen, lesen oder verstehen. Sie werden später in weiteren Schritten genauer betrachtet und sollten uns im Moment nicht stören oder ablenken.

Denke dir zu den Aussagen in den ovalen Symbolen: *Die Details sind im Moment nicht wichtig – sie werden in späteren Schritten genauer untersucht.*

Nachdem alle Bestandteile identifiziert sind, können wir den vorgegebenen Beweistext abschreiben. Das Symbol über $x \in X$ weist uns dabei auf eine mögliche Fehlerquelle hin: Wenn wir hier einfach x durch y und X durch B ersetzen würden, dann hätte das im Nachweis hinzukommende Objekt *denselben* Namen wie das Element y, das sich bereits in unserem Beweiskontext befindet. Da solche Namensdopplungen das genaue Nachvollziehen des Textes unmöglich machen, müssen wir für das neue Objekt einen anderen Namen wählen. Wir nennen es hier zum Beispiel x und schreiben: *Sei* $x \in B$ *gegeben.* Bevor wir den zweiten Satz abschreiben, müssen wir den Platzhalternamen y in der Aussage ebenfalls an die konkrete Namenssituation in unserem Beweis anpassen. Daran erinnert uns das Symbol über dem farbigen Oval. Wir schreiben also: *Zeige:* $(x \notin A) \Rightarrow (x \in C)$.

Die bisher blockartig benutzte Implikationsaussage wird im nächsten Schritt mit dem Nachweistext auf Seite 196 weiterbehandelt. Dabei werden die Teilaussagen $x \notin A$ und $x \in C$ zu den neuen Blöcken im folgenden Nachweistext.

Nachweistext

Du willst beweisen: … $\Rightarrow$ …

Schreibe dazu: Es gelte …. Zu zeigen: ….

B.1 Implikation

Eine Implikation beschreibt eine Regel: *Wenn* die Voraussetzung erfüllt ist, *dann* gilt die Folgerung. Zum Nachweis müssen wir deshalb die Folgerung unter Annahme der Voraussetzung zeigen, während bei der Nutzung die Folgerung nur dann verwendet werden darf, wenn die Voraussetzung erfolgreich überprüft wurde. Weitere Details findest du auf Seite 22.

Nachweistext

Du willst beweisen: … $\Rightarrow$ …

Schreibe dazu: Es gelte … . Zu zeigen: … .

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden: … $\Rightarrow$ …

Schreibe dazu: Da … gilt (und die Implikation), folgt … .

Das Schild weist darauf hin, dass das Gelten der Voraussetzung zunächst nachgewiesen werden muss, bevor die Implikation überhaupt benutzt werden darf.

B.2 Äquivalenz

Zwei Aussagen sind äquivalent (gleichwertig), wenn sie den gleichen Wahrheitswert besitzen. Sie können dann ohne Bedeutungsunterschied gegeneinander ausgetauscht werden. Zum Nachweis einer Äquivalenz zeigt man zwei Implikationen $\Leftarrow$ und $\Rightarrow$ zwischen den Aussagen, woran auch das Symbol $\Leftrightarrow$ erinnert. Eine Begründung dafür findest du im Abschnitt 2.2.1.

Nachweistext

Du willst beweisen: ... $\Leftrightarrow$ ...

Schreibe dazu: Zu zeigen: ... $\Rightarrow$ ...
und ... $\Rightarrow$ ... .

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden: ... $\Leftrightarrow$ ...

Schreibe dazu: Da ... gilt (und die Äquivalenz),
folgt ... .

oder

Da ... gilt (und die Äquivalenz),
folgt ... .

Das Schild weist darauf hin, dass das Gelten einer der beiden Aussagen natürlich zunächst nachgewiesen werden muss, bevor mit der Äquivalenz auf die andere geschlossen werden darf.

Die Äquivalenz kann außerdem dazu verwendet werden, die eine Aussage durch die andere in Ausdrücken zu ersetzen, ohne dass sich die Bedeutung dabei ändert.

B.3 Und-Aussage

Eine Und-Aussage gilt genau dann, wenn beide beteiligte Aussagen gelten. Details hierzu gibt es im Abschnitt 2.1.2.

Nachweistext

Du willst beweisen: ... $\wedge$ ...

Schreibe dazu: Zu zeigen: ... und ... .

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden: ... $\wedge$ ...

Schreibe dazu: Es gelten ... und ... .

B.4 Oder-Aussage

Eine Oder-Aussage gilt, wenn mindestens eine der beteiligten Aussagen wahr ist. Weitere Infos gibt es im Abschnitt 2.1.3.

Nachweistext

Du willst beweisen: ... $\vee$ ...

Schreibe dazu:

Angenommen ¬ ... gilt. Zeige: ... .

oder

Angenommen ¬ ... gilt. Zeige: ... .

Alternativ kannst du auch so vorgehen:

Da ... gilt, gilt auch ... $\vee$ ... .

oder

Da ... gilt, gilt auch ... $\vee$ ... .

Das Schild weist darauf hin, dass die Gültigkeit einer der beiden Aussagen natürlich gezeigt werden muss.

Benutzungstext (Fallunterscheidung)

Du willst die geltende Aussage ... $\vee$ ... benutzen, um eine weitere Aussage zu zeigen.

Schreibe dazu:

Fall ... gilt: , also folgt .

Fall ... gilt: , also folgt .

Also gilt in jedem Fall.

An die Stellen der Schilder muss natürlich jeweils ein Beweis, in dem jeweils aus der getroffenen Annahme die Gültigkeit der Aussage gefolgert wird.

Diese Regel ist eine Konsequenz aus Satz 2.7.

In dieser Form wird der Nachweis vor allem dann geführt, wenn eine der beiden Aussagen bereits gilt.

B.5 Negation und Widerspruch

Widerspruchsbeweise basieren darauf, dass sich aus wahren Annahmen keine falschen Aussagen folgern lassen. Details dazu gibt es in den Abschnitten 2.1.4 und 2.1.5.

Nachweistext

Du willst beweisen: $\neg$ (...)

Schreibe dazu: Angenommen (...) gilt. Zeige: ↯ .

Hier steht ↯ für einen Widerspruch, d. h., man muss von einer (beliebigen) Aussage zeigen, dass sie gilt und zugleich nicht gilt. Welche Aussage sich hierfür eignet, ist je nach Situation unterschiedlich.

Benutzungstext (Doppelte Negation)

Es gilt und soll benutzt werden: $\neg(\neg$ (...) $)$

Schreibe dazu: Wegen $\neg(\neg$ (...) $)$ gilt auch (...).

Durch Kombination von Nachweis- und Benutzungsregel der Negation erhält man die Beweismethode des Widerspruchsbeweises.

Widerspruchsbeweis

Du willst (per Widerspruch) beweisen: (...)

Schreibe dazu:

Angenommen $\neg$ (...) gilt. Zeige: ↯ .

B.6 Für-alle-Aussage

Um zu zeigen, dass eine Aussage für alle Elemente einer Menge gilt, erzeugt man eine *Argumentationsschablone*: Für ein Element (etwa mit Namen x), von dem außer der Mengenzugehörigkeit nichts bekannt ist, zeigt man die x-abhängige Aussage. Sie gilt dann auch *für jedes* konkrete Element der Menge anstelle von x, da sich die Argumentation in jedem Einzelfall wiederholen ließe. Weitere Details stehen in Abschnitt 2.3.2

Nachweistext

Du willst beweisen: $\forall x \in X :$ …

Schreibe dazu: Sei ein $x \in X$ gegeben. Zeige: … .

Hier wird x als *Objektname* vergeben. Ist x im laufenden Beweis schon der Name eines anderen Objekts, musst du hier statt x einen anderen Namen wählen, z. B. y, der noch nicht vergeben ist. Dieser muss natürlich auch in … an die Stelle des Platzhalters x.

Heißt die Menge X im konkreten Fall anders, musst du das X entsprechend ersetzen.

Benutzungstext

Du willst die geltende Aussage $\forall x \in X :$ … anwenden.

Dazu muss ein Element a vorliegen, *auf das* die Für-alle-Aussage angewendet werden kann.

Schreibe dazu:

Anwendung der für-alle-Aussage auf das Element a ergibt wegen $a \in X$, dass … gilt.

Oder in Kurzform:

Wegen $a \in X$ folgt … (aus der $\forall$-Aussage).

Steht nach dem $\forall$-Quantor eine ganze Liste von Platzhaltern, so ersetzt dies mehrfach geschachtelte $\forall$-Aussagen. Wende die Regeln sinngemäß an.

B.7 Existenzaussage

Der offensichtlichste Nachweis dafür, dass in einer Menge ein Element mit einer bestimmten Eigenschaft existiert, besteht darin, ein solches Element konkret anzugeben. Gilt eine Existenzaussage, kann man umgekehrt davon ausgehen, dass ein Element aus der Menge mit der angegebenen Eigenschaft benutzt werden kann. Den Namen für ein solches Element darfst du bei der Benutzung wählen. Weitere Details dazu findest du im Abschnitt 2.3.3.

Heißt die Menge X im konkreten Fall anders, musst du das X entsprechend ersetzen.

Steht nach dem $\exists$-Quantor eine ganze Liste von Platzhaltern, so ersetzt dies mehrfach geschachtelte $\exists$-Aussagen. Wende die Regeln sinngemäß an.

Nachweistext

Du willst beweisen: $\exists\, x \in X$: ...

Schreibe dazu:

Setze x:=_____ . Zu zeigen: x∈X und ...

Hier wird x als *Objektname* vergeben. Ist x im laufenden Beweis schon der Name eines anderen Objekts, musst du hier statt x einen anderen Namen wählen, z. B. y, der noch nicht vergeben ist. Dieser muss natürlich auch in ... an die Stelle des Platzhalters x.

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden: $\exists\, x \in X$: ...

Schreibe dazu: Wähle ein x∈X mit ... .

B.8 Eindeutigkeit

Dass es höchstens ein Element in der Menge x gibt, für das die Aussage E_x gilt, wird durch $\forall x, y \in X : (E_x \wedge E_y) \Rightarrow x = y$ ausgedrückt. Die zugehörigen Regeln ergeben sich aus denen der beteiligten $\forall$ und $\Rightarrow$ Aussagen. Details finden sich auf Seite 78.

Nachweistext

Du willst beweisen, dass es *höchstens ein* Element $x \in X$ mit einer gewissen Eigenschaft ... gibt.

Schreibe dazu:

Seien $x, y \in X$ mit ... und ... gegeben.
Zeige: $x = y$.

Hier werden x und y als *Objektnamen* vergeben. Sind diese im laufenden Beweis schon als Namen in Verwendung, musst du hier andere Namen wählen, z.B. u und v, die noch nicht vergeben sind. Diese müssen dann auch in ... entsprechend eingesetzt werden.

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden, dass es höchstens ein Element $x \in X$ mit einer gewissen Eigenschaft ... gibt.

Damit kann man zeigen, dass zwei vorliegende Elemente $x, y \in X$ gleich sind, wenn sie beide diese Eigenschaft erfüllen.

Schreibe dazu:

Da $x \in X$ ... erfüllt und $y \in X$ auch ...
erfüllt, folgt $x = y$ aus der Eindeutigkeit.

Eindeutigkeitsaussagen treten oft in Kombination mit Existenzaussagen auf, wobei dann das Symbol $\exists!$ für eindeutige Existenz benutzt wird. In diesem Fall muss die Existenzaussage zusätzlich gezeigt bzw. kann zusätzlich benutzt werden.

B.9 Sätze

In einem Satz geht es immer um gewisse mathematische *Objekte*, von denen gewisse *Voraussetzungen* als wahr angenommen werden. Die Aussage des Satzes ist, dass dann auch gewisse *Folgerungen* über die Objekte wahr sind. Mehr Informationen gibt es im Abschnitt 2.1.1.

> Sind Voraussetzungen und Folgerungen in der Formulierung eines Satzes stark vermischt, kann eine Neuordnung als Anfangstext im Beweis sinnvoll sein. Ansonsten musst du die Voraussetzungen zu Beginn deines Beweises nicht nochmals wiederholen.

Nachweistext

Du willst beweisen:

> **Satz:**
> *Seien* … *gegeben und gelte* … .
> *Dann folgt* … .

Schreibe dazu: Zu zeigen: … .

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden:

> **Satz:**
> *Seien* … *gegeben und gelte* … .
> *Dann folgt* … .

Du kannst den Satz auf gegebene Objekte anwenden, die genau denen aus dem Satz entsprechen.

Schreibe dazu:

Da (die Objekte) die Voraussetzungen … des Satzes erfüllen, folgt … .

Vergiss nicht, die Platzhalternamen aus dem Satz an allen Stellen durch die Namen der Objekte zu ersetzen, auf die du den Satz anwenden möchtest.

B.10 Definitionen

In einer Definition werden längere Aussagen über ein oder mehrere Objekte abgekürzt.

Nachweistext

Du willst beweisen, dass ein gegebenes Objekt die Definition

> **Definition:**
> *wird* ***Blubb*** *genannt, falls* … *gilt.*

erfüllt.

Schreibe dazu: Zu zeigen: … .

Vergiss nicht, die Platzhalternamen aus der Definition an allen Stellen durch die Namen der Objekte zu ersetzen, für die du die Definition nachprüfen möchtest.

Benutzungstext

Du willst benutzen, dass ein gegebenes Objekt die Definition

> **Definition:**
> *wird* ***Blubb*** *genannt, falls* … *gilt.*

erfüllt.

Schreibe dazu:

Nach Definition von "Blubb" folgt … .

Vergiss nicht, die Platzhalternamen aus der Definition an allen Stellen durch die Namen der Objekte zu ersetzen, auf die du die Definition anwenden möchtest.

Definitionen ersetzen einen längeren Ausdruck oder eine verschachtelte Aussage durch abkürzende Symbole oder Begriffe.

B.11 Teilmenge

Die Teilmengen-Aussage $A \subset B$ ist gleichbedeutend mit: Für alle Elemente aus A gilt, dass sie auch Elemente von B sind. Dies ist eine Für-alle-Aussage und somit ergeben sich die Nachweis- und Benutzungsregel für die Teilmengen-Aussage direkt aus denen der Für-alle-Aussage.

Bei dir heißen die beiden Mengen vielleicht nicht A und B, sodass du diese durch die entsprechenden Namen oder Ausdrücke ersetzen musst.

Nachweistext

Du willst beweisen: $A \subset B$

Schreibe dazu: Sei ein $x \in A$ gegeben. Zeige: $x \in B$.

Benutzungstext

Es gilt und soll benutzt werden: $A \subset B$

Dies lässt sich auf ein gegebenes Element x anwenden.

Schreibe dazu: Wegen $x \in A$ (und $A \subset B$) folgt $x \in B$.

B.12 Mengengleichheit

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente besitzen, also wenn jedes Element der einen Menge in der anderen liegt, und umgekehrt. Dies sind gerade zwei Teilmengenaussagen.

Nachweistext

Du willst beweisen: $A = B$ (für zwei Mengen A und B)

Schreibe dazu: Zu zeigen: $A \subset B$ und $B \subset A$.

Benutzungsregel

Es gilt und soll benutzt werden: $A = B$

Du darfst in jedem Ausdruck die eine Menge durch die andere ersetzen, ohne dass sich dadurch die Bedeutung des Ausdrucks verändert.

Insbesondere kann für ein Element x geschlossen werden:

Wegen $x \in A$ (und $A = B$) folgt $x \in B$.

Ebenso kann geschlossen werden:

Wegen $x \in B$ (und $A = B$) folgt $x \in A$.

Bei dir heißen die beiden Mengen vielleicht nicht A und B, sodass du diese durch die entsprechenden Namen oder Ausdrücke ersetzen musst.

B.13 Funktionsgleichheit

Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn man in beide dieselben Elemente einsetzen kann und sie dabei jeweils (also je Element) denselben Funktionswert ausgeben. Details gibt es auf Seite 85.

Nachweistext

Du willst beweisen: $f = g$ (für zwei Funktionen f und g)

Schreibe dazu:

Zu zeigen: $\mathrm{Def}(f) = \mathrm{Def}(g)$
und $\forall x \in \mathrm{Def}(f): f(x) = g(x)$.

Bei dir heißen die beiden Funktionen vielleicht nicht f und g, sodass du diese Namen durch die entsprechenden Namen ersetzen musst.

Benutzungsregel

Es gilt und soll benutzt werden: $f = g$

Du darfst in jedem Ausdruck die eine Funktion durch die andere ersetzen, ohne dass sich dadurch die Bedeutung des Ausdrucks verändert.

B.14 Element einer Aussonderung

Bei der Bildung einer Aussonderungsmenge übernimmt man genau die Elemente u einer Grundmenge A, die eine Eigenschaft E_u besitzen. Alle beschriebenen Zutaten erkennt man in der Notation $\{u \in A : E_u\}$. Nach dieser Konstruktionsangabe ist also x genau dann in $\{u \in A : E_u\}$, wenn $x \in A$ und E_x gilt. Details findest du im Abschnitt 2.3.1.

Nachweistext

Du willst beweisen: $x \in \{u \in A : \text{...}\}$

Schreibe dazu: Zu zeigen: $x \in A$ und ... .

Benutzungsregel

Es gilt und soll benutzt werden: $x \in \{u \in A : \text{...}\}$

Schreibe dazu: Es gelten $x \in A$ und ... .

Heißt die Menge A im konkreten Fall anders, musst du das A entsprechend ersetzen.