Definition 2 (Syntax von AF)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ aussagenlogische Variablen

(IA) X_i, w, f sind AF

(IS) Sind A, B AF, so auch

- $(\neg A)$ (gelesen: „nicht A") Negation
- $(A \wedge B)$ (gelesen: „A und B") Konjunktion
- $(A \vee B)$ (gelesen: „A oder B") Disjunktion
- $(A \rightarrow B)$ (gelesen: „Wenn A dann B") Implikation
- $(A \leftrightarrow \ )$ (gelesen: „Genau dann A wenn B") Äquivalenz
- $(A \oplus B)$ (gelesen: „Entweder A oder B") Antivalenz

Nichts sonst ist AF

Bemerkungen

1. außer $\rightarrow, \leftrightarrow$ wird auch $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ verwendet
2. äußere Klammern werden üblicherweise weggelassen, also $X_1 \vee X_2$ statt $(X_1 \vee X_2)$
3. „$\neg$ geht vor $\wedge$ geht vor $\vee$": $\neg X_1 \wedge X_2 \vee X_3$ ist gleiche AF wie $(((\neg X_1) \wedge X_2) \vee X_3)$

Eine Interpretation (Belegung) I ist eine Zuweisung von 0 oder 1 zu jeder aussagenlog. Variablen

Definition 3 Semantik von AF

Sei I eine Interpretation. Für AF H ist $I(H)$ wie folgt definiert:

(IA) Ist $H = X_i$, so ist $I(H) =_{def} I(X_i)$
Ist $H = f$, so ist $I(H) =_{def} 0$
Ist $H = w$, so ist $I(H) =_{def} 1$

(IS) Ist $H = (\neg A)$, so ist $I(A) =_{def} 1 - I(A)$

Ist $H = (A \wedge B)$, so ist $I(H) =_{def} \min(I(A), I(B))$

Ist $H = (A \vee B)$, so ist $I(H) =_{def} \max(I(A), I(B))$

Ist $H = (A \rightarrow B)$, so ist $I(H) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) \leq I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist $H = (A \leftrightarrow B)$, so ist $I(H) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) = I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist $H = (A \oplus B)$, so ist $I(H) =_{def} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) \neq I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Eine Aussage H ist wahr, falls $I(H) = 1$

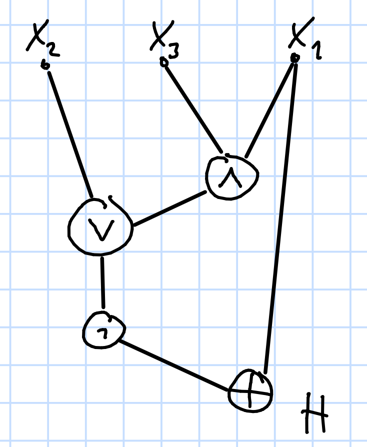
Wertetabellen für Festlegung der Interpretationen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	—
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
Fkt. name		NOT	AND	OR	—	—	XOR	NAND

Beispiel:

$$H =_{def} X_1 \oplus \underbrace{(\neg(\overbrace{X_2 \vee \underbrace{(X_3 \wedge X_1)}_{H_1}}^{H_2}))}_{H_3}$$

$H_1 =_{def} X_3 \wedge X_1$
$H_2 =_{def} X_2 \vee H_1$
$H_3 =_{def} \neg H_2$
$H =_{def} X_1 \oplus H_3$



- Wahrheitswerte von H: $I(X_1) =_{def} 0$, $I(X_2) =_{def} 1$, $I(X_3) =_{def} 1$

$I(H_1) = \min(I(X_3), I(X_1)) = \min(1, 0) = 0$

$I(H_2) = \max(I(X_2), I(H_1)) = \max(1, 0) = 1$

$I(H_3) = 1 - I(H_2) = 1 - 1 = 0$

$I(H) = 0$, da $I(X_1) = I(H_3) = 0$

- WW-Tabelle:

X_1	X_2	X_3	$X_1 \wedge X_3$ H_1	$X_2 \vee H_1$ H_2	$\neg H_2$ H_3	$X_1 \oplus H_3$ H
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1