2 Elementare Logik

2.1 Aussagen

Definition 2.1

Eine (mathematische) Aussage ist ein sprachlicher Ausdruck (Satz), dem eindeutig einer der Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden kann.

Wir werden Aussagen mit großen Buchstaben bezeichnen und wie folgt beschreiben:

$$X =_{\text{def}} \text{ Beschreibung}$$

Beispiele: Die folgenden Beispiele verdeutlichen die obige Begriffsbildung:

- $A =_{\text{def}}$ „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine Primzahl, die größer ist“ ist eine wahre Aussage.
- $B =_{\text{def}}$ „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine Primzahl, die kleiner ist“ ist eine falsche Aussage, da die Zahl 2 ein Gegenbeispiel ist.
- $C =_{\text{def}}$ „Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen“ ist eine Aussage, da der Satz entweder gültig oder nicht gültig ist. Der Wahrheitswert ist noch offen; bei der Aussage handelt es sich um die bekannte Goldbachsche Vermutung.
- $D =_{\text{def}}$ „Diese Aussage ist falsch“ ist keine Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann: Ist D wahr, dann ist D falsch; ist D falsch, dann ist D wahr.

2.2 Logische Verknüpfungen

Aussagen können mittels logischer Operationen verknüpft werden. Dadurch entstehen wiederum Aussagen. Unverknüpfte Aussagen heißen Elementaraussagen oder auch, wenn der operationale bzw. funktionale Aspekt hervorgehoben werden soll, aussagenlogische Variablen; verknüpfte Aussagen heißen zusammengesetzte Aussagen oder auch, wenn der operationale bzw. funktionale Aspekt hervorgehoben werden soll, aussagenlogische Formeln.

Im Folgenden wollen wir die Menge der aussagenlogischen Formeln mit Hilfe der gängigsten logischen Verknüpfungen induktiv definieren.

Definition 2.2 (Syntax aussagenlogischer Formeln)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ aussagenlogische Variablen.

1. Induktionsanfang (Elementaraussagen): $X_i, \mathsf{f}, \mathsf{w}$ sind aussagenlogische Formeln.
2. Induktionsschritt (zusammengesetzte Aussagen): Sind A, B aussagenlogische Formeln, so sind auch

$(\neg A)$	(gelesen: „nicht A")	Negation
$(A \wedge B)$	(gelesen: „A und B")	Konjunktion
$(A \vee B)$	(gelesen: „A oder B")	Disjunktion
$(A \rightarrow B)$	(gelesen: „wenn A, dann B")	Implikation
$(A \leftrightarrow B)$	(gelesen: „genau dann A, wenn B")	Äquivalenz
$(A \oplus B)$	(gelesen: „entweder A oder B")	Antivalenz

aussagenlogische Formeln.

3. Nichts sonst ist eine aussagenlogische Formel.

Einige Anmerkungen zur Definition sind hilfreich:

1. Außer $\rightarrow, \leftrightarrow$ werden auch oft $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ für die Implikation und Äquivalenz verwendet. Es empfiehlt sich jedoch, zur Definition von Formeln diese Symbole nicht zu verwenden. Insbesondere wenn wir Aussagen über aussagenlogische Formeln treffen oder beweisen wollen, ist es wichtig, die logischen Ebenen getrennt zu halten.
2. Äußere Klammern werden üblicherweise weggelassen, d.h., wir schreiben beispielsweise $X_1 \vee X_2$ statt $(X_1 \vee X_2)$.
3. Ähnlich der Addition und Multiplikation („Punktrechnung geht vor Strichrechnung") gibt es Bindungsregeln bei der Verwendung der logischen Verknüpfungen, um die Klammerungen in zusammengesetzten Ausdrücken wegzulassen. Für die gebräuchlichsten Verknüpfungen $\neg, \wedge$ und $\vee$ vereinbaren wir: „$\neg$ geht vor $\wedge$" und „$\wedge$ geht vor $\vee$". Zum Beispiel ist die Aussage $\neg X_1 \wedge X_2 \vee X_3$ die gleiche Aussage wie $((\neg X_1) \wedge X_2) \vee X_3$. Um Missverständnissen in komplizierteren Zusammenhängen vorzubeugen, werden wir jedoch auch weiterhin Klammern setzen, wo sie eigentlich nach den Bindungsregeln nicht notwendig wären.

Im Folgenden definieren wir die Wahrheitswerte bzw. die Bedeutung oder Semantik von aussagenlogischen Formeln. Eine Interpretation I ist eine Belegung aller Variablen X_i mit genau einem Wert 0 oder 1. Wir erweitern Interpretationen auf aussagenlogische Formeln induktiv über deren Aufbau.

Definition 2.3 (Semantik aussagenlogischer Formel)

Es sei I eine Interpretation. Für eine aussagenlogische Formel H ist $I(H)$ wie folgt definiert:

1. Induktionsanfang (Elementaraussagen):

   Ist $H = X_i$, so ist $I(H) =_{\text{def}} I(X_i)$.
   Ist $H = \text{f}$, so ist $I(H) =_{\text{def}} 0$.
   Ist $H = \text{w}$, so ist $I(H) =_{\text{def}} 1$.

2. Induktionsschritt (zusammengesetzte Aussagen):

   Ist $H = (\neg A)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} 1 - I(A)$
   Ist $H = (A \wedge B)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} \min\{I(A), I(B)\}$
   Ist $H = (A \vee B)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} \max\{I(A), I(B)\}$
   Ist $H = (A \rightarrow B)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) \leq I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   Ist $H = (A \leftrightarrow B)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) = I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   Ist $H = (A \oplus B)$, so ist $I(H) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{falls } I(A) \neq I(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

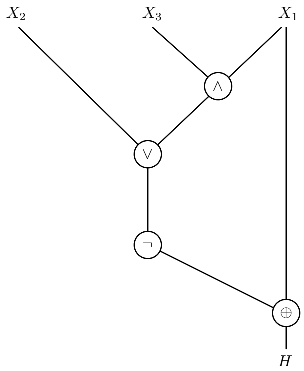
Eine Aussage H heißt genau dann wahr, wenn $I(H) = 1$ gilt.

Die Wahrheitswerte der durch logische Verknüpfungen entstandenen zusammengesetzten Aussagen können auch durch Wertetabellen definiert werden. Die in Definition 2.3 angegebenen Formeln können leicht aus den folgenden Wertetabellen abgelesen werden:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	–
0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0
Funktionsname		NOT	AND	OR	–	–	XOR	NAND

Bei digitalen Schaltungen entsprechen diese Wertetabellen den booleschen Funktionen. Die Namen der den Verknüpfungen zugehörigen booleschen Funktionen sind in der untersten Zeile angegeben.

Beispiel: Der Ausdruck $H =_{\text{def}} X_1 \oplus \neg(X_2 \vee (X_3 \wedge X_1))$ ist eine aussagenlogische Formel (mit den aussagenlogischen Variablen X_1, X_2 und X_3) im Sinne von Definition 2.2. In der Tat ergibt sich der Aufbau von H über die folgenden aussagenlogischen (Teil)Formeln:



$$
\begin{aligned}
H_1 &=_{\text{def}} X_3 \wedge X_1 \\
H_2 &=_{\text{def}} X_2 \vee H_1 \\
H_3 &=_{\text{def}} \neg H_2 \\
H &=_{\text{def}} X_1 \oplus H_3
\end{aligned}
$$

Die Abbildung auf der rechten Seite zeigt eine Darstellung von H als Schaltkreis (mit den Eingängen X_1, X_2 und X_3 und dem Ausgang H). Der Wahrheitswert von H hängt von einer gegebenen Belegung I für die in H vorkommenden aussagenlogischen Variablen ab. Es sei beispielsweise I wie folgt gegeben:

$$I(X_1) =_{\text{def}} 0, \qquad I(X_2) =_{\text{def}} 1, \qquad I(X_3) =_{\text{def}} 1$$

Dann ergibt sich für die Teilformeln H_1, H_2 und H_3

$$
\begin{aligned}
I(H_1) &= \min\{I(X_3), I(X_1)\} = \min\{1,0\} = 0 \\
I(H_2) &= \max\{I(X_2), I(H_1)\} = \max\{1,0\} = 1 \\
I(H_3) &= 1 - I(H_2) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

und somit $I(H) = 0$ wegen $I(X_1) = I(H_3) = 0$. Die folgende Wertetabelle fasst die Interpretation von H für alle Belegungen von X_1, X_2 und X_3 zusammen:

X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Eine Aussage H heißt genau dann wahr, wenn $I(H) = 1$. Die Wahrheit einer Aussage hängt stets Interpretationen ab. Je nachdem, wie viele erfüllende Interpretationen existieren, können einer

Aussage folgende Begriffe zugeordnet werden.

Definition 2.4

Es sei H eine aussagenlogische Formel.

1. H heißt genau dann erfüllbar, wenn $I(H) = 1$ für mindestens eine Belegung I gilt.
2. H heißt genau dann allgemeingültig (oder Tautologie), wenn $I(H) = 1$ für alle Belegungen I gilt.
3. H heißt genau dann widerlegbar, wenn $I(H) = 0$ für mindestens eine Belegung I gilt.
4. H heißt genau dann unerfüllbar (oder Kontradiktion), wenn $I(H) = 0$ für alle Belegungen I gilt.

Zwischen den einzelnen Erfüllbarkeitskonzepten bestehen offensichtliche Beziehungen.

Proposition 2.5

Es sei H eine Aussage.

1. Ist H allgemeingültig, so ist H erfüllbar.
2. H ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg H$ widerlegbar ist.
3. H ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg H$ unerfüllbar ist.

Beispiele: Einige Beispiele sollen die Begriffsbildungen verdeutlichen (Begründungen mittels Wertetabelle):

- Die Elementaraussage w ist allgemeingültig; f ist unerfüllbar.
- $A \vee B$ ist erfüllbar und widerlegbar.
- $((A \to B) \to A) \wedge (\neg A)$ ist unerfüllbar.
- $(A \wedge (A \to B)) \to B$ ist allgemeingültig.

2.3 Rechnen mit logischen Verknüpfungen

Definition 2.6

Zwei Aussagen A und B heißen genau dann (logisch) äquivalent, symbolisch $A \equiv B$, wenn für alle Interpretationen I gilt $I(A) = I(B)$.

Mit anderen Worten: $A \equiv B \iff_{\text{def}} A \leftrightarrow B$ ist stets wahr.

Beispiel: Wir wollen uns davon überzeugen, dass die Aussagen $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ und $(A \oplus B) \oplus C$ logisch äquivalent sind. Dazu betrachten wir die zusammengesetzten Aussagen:

$$H_1 =_{\text{def}} B \leftrightarrow C, \quad H_2 =_{\text{def}} A \leftrightarrow H_1, \qquad H_3 =_{\text{def}} A \oplus B, \quad H_4 =_{\text{def}} H_3 \oplus C$$

Letztlich muss also gezeigt werden, dass $H_2 \leftrightarrow H_4$ stets eine wahre Aussage ist. Wir bestimmen die zugehörige Wahrheitswerttabelle:

A	B	C	H_1	H_2	H_3	H_4	$H_2 \leftrightarrow H_4$
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Mithin gilt also $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \oplus B) \oplus C$.

Logisch äquivalente Aussagen können in zusammengesetzten Aussagen beliebig gegeneinander ausgetauscht werden. Die wichtigsten logischen Äquivalenzen sind in folgendem Theorem zusammengefasst.

Theorem 2.7

Es seien A, B und C aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

1. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ — Assoziativgesetze
   $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ — Kommutativgesetze
   $A \vee B \equiv B \vee A$
3. $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ — Distributivgesetze
   $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
4. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ — De Morgansche Regeln
   $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
5. $A \vee (\neg A) \equiv \mathrm{w}$ — *tertium non datur*
   $A \wedge (\neg A) \equiv \mathrm{f}$ — (Regeln vom ausgeschlossenen Dritten)
6. $A \vee \mathrm{w} \equiv \mathrm{w}$ — Dominanzgesetze
   $A \vee \mathrm{f} \equiv A$
   $A \wedge \mathrm{w} \equiv A$
   $A \wedge \mathrm{f} \equiv \mathrm{f}$
7. $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$ — Auflösung der Implikation
   $A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$ — Kontraposition
8. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ — Auflösung der Äquivalenz
9. $\neg(\neg A) \equiv A$ — Dopppelte Negation

Beweis: Wir beweisen nur die erste De Morgansche Regel $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$. Dazu definieren wir zunächst die Hilfsaussagen $H_1 =_{\text{def}} \neg(A \wedge B)$ und $H_2 =_{\text{def}} (\neg A) \vee (\neg B)$. Die Überprüfung der Aussage $H_1 \leftrightarrow H_2$ erfolgt mittels einer Wertetabelle:

A	B	$A \wedge B$	H_1	$\neg A$	$\neg B$	H_2	$H_1 \leftrightarrow H_2$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Somit ist $H_1 \leftrightarrow H_2$ eine wahre Aussage. Also sind H_1 und H_2 logisch äquivalent. Alle anderen logischen Äquivalenzen können ebenfalls mittels Berechnung der Wertetabellen gezeigt werden. Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Mit Hilfe von Theorem 2.7 können Aussagen umgeformt werden, genauso wie es von der algebraischen Umformung von Gleichungen her bekannt ist.

Beispiel: Zur Demonstration der Anwendung von Theorem 2.7 wollen wir die Aussage

$$C =_{\text{def}} (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

vereinfachen. Wir formen die Aussage wie folgt logisch äquivalent um:

$$\begin{aligned}
C &\equiv (A \wedge (\neg A \vee B)) \rightarrow B && \text{(Auflösung der Implikation)}\\
&\equiv ((A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)) \rightarrow B && \text{(Distributivgesetz)}\\
&\equiv (\mathrm{f} \vee (A \wedge B)) \rightarrow B && \text{(tertium non datur)}\\
&\equiv (A \wedge B) \rightarrow B && \text{(Dominanzgesetz)}\\
&\equiv \neg(A \wedge B) \vee B && \text{(Auflösung der Implikation)}\\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee B && \text{(De Morgansche Regel)}\\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee B) && \text{(Assoziativgesetz)}\\
&\equiv \neg A \vee \mathrm{w} && \text{(tertium non datur)}\\
&\equiv \mathrm{w} && \text{(Dominanzgesetz)}
\end{aligned}$$

Die Aussage C ist also stets wahr unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B.

2.4 Aussageformen

Definition 2.8

Eine Aussageform über den Universen $U_1, \ldots, U_n$ ist ein Satz $A(x_1, \ldots, x_n)$ mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, der zu einer Aussage wird, wenn jedes x_i durch ein Objekt aus dem Universum U_i ersetzt wird.

Beispiel: Die Begriffsbildung verdeutlichen wir durch folgende Aussageformen:

- $A(x) =_{\text{def}}$ „x ist eine gerade Zahl" ist eine Aussageform über den natürlichen Zahlen: $A(2) =$ „2 ist eine gerade Zahl" ist eine wahre Aussage; $A(3) =$ „3 ist eine gerade Zahl" ist eine falsche Aussage.
- $B(x, y) =_{\text{def}}$ „Das Wort x ist y Buchstaben lang" ist eine Aussageform über den Universen U_1 aller Wörter (über einem Alphabet) und U_2 aller natürlichen Zahlen. So ist $B(\text{ Konstanz}, 8) =$ „Das Wort Konstanz ist 8 Buchstaben lang" eine wahre Aussage.
- $C(x) =_{\text{def}}$ „$x < x + 1$" ist als Aussageform über den natürlichen Zahlen stets wahr unabhängig davon, welche natürliche Zahl n für x eingesetzt wird. Als Aussageform über der Java-Klasse `Integer` gilt dies nicht: $C(\texttt{Integer.MAX\_VALUE})$ ist eine falsche Aussage.

Wenn wir es mit einer Aussageform $A(x_1, \ldots, x_n)$ mit mehreren freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zu tun haben, die wir alle über dem gleichen Universum $U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U$ betrachten, so sprechen wir von einer Aussageform über dem Universum U.

2.5 Aussagen mit Quantoren

Das Einsetzen konkreter Objekte aus einem Universum macht aus einer Aussageform eine Aussage. Eine weitere Möglichkeit dafür ist die Quantifizierung von Aussagen mittels Quantoren. Im Unterschied zum konkreten Einsetzen müssen wir dabei die Objekte nicht kennen, deren Einsetzen den Wahrheitswert bestimmt. Wir brauchen nur sagen, dass es solche Objekte gibt oder nicht gibt. Die beiden wichtigsten Quantoren sind:

- Existenzquantor (oder existenzieller Quantor) $\exists$ (manchmal auch $\bigvee$ geschrieben)
- Allquantor (oder universeller Quantor) $\forall$ (manchmal auch $\bigwedge$ geschrieben)

Die Quantoren werden gemäß folgender Definition verwendet, um aus Aussageformen mit einer freien Variablen Aussagen zu machen.

Definition 2.9

Es sei $A(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen über dem Universum U.

1. Die Aussage $(\exists x)[A(x)]$ (gelesen: „es gibt ein x, für das $A(x)$ gilt") ist genau dann wahr, wenn es ein u aus U gibt, für das $A(u)$ eine wahre Aussage ist.
2. Die Aussage $(\forall x)[A(x)]$ (gelesen: „für alle x gilt $A(x)$") ist genau dann wahr, wenn $A(u)$ für alle u aus U eine wahre Aussage ist.

Beispiele: Folgende quantifizierte Aussagen verdeutlichen die Begriffsbildung.

- Für die Aussageform $A(x) =_{\text{def}}$ „x ist eine ungerade Zahl" über dem Universum der natürlichen Zahlen ist $(\exists x)[A(x)]$ eine wahre Aussage, da $A(3) =$ „3 ist eine ungerade Zahl" wahr ist, und ist $(\forall x)[A(x)]$ eine falsche Aussage, da $A(2) =$ „2 ist eine ungerade Zahl" falsch ist.
- Für die Aussageform $C(x) =_{\text{def}}$ „$x < x + 1$" über dem Universum der natürlichen Zahlen ist $(\forall x)[C(x)] = (\forall x)[x < x + 1]$ eine wahre Aussage.
- Es sei U ein endliches Universum mit den Objekten $u_1, \ldots, u_n$. Dann gilt:

$$(\exists x)[A(x)] \text{ ist wahr} \iff A(u_1) \vee A(u_2) \vee \ldots \vee A(u_n) \;{}_{\text{def}}\!= \bigvee_{i=1}^{n} A(u_i) \text{ ist wahr}$$

$$(\forall x)[A(x)] \text{ ist wahr} \iff A(u_1) \wedge A(u_2) \wedge \ldots \wedge A(u_n) \;{}_{\text{def}}\!= \bigwedge_{i=1}^{n} A(u_i) \text{ ist wahr}$$

Der Existenzquantor stellt somit eine endliche oder unendliche Disjunktion und der Allquantor eine endliche oder unendliche Konjunktion dar.

Wir erweitern nunmehr die Anwendung von Quantoren auf Aussageformen mit mehr als einer Variablen. Dabei entstehen nicht sofort wieder Aussagen, vielmehr wird pro Anwendung eines Quantors die Anzahl freier Variablen um eine Variable reduziert. Erst wenn alle Variablen durch Quantoren oder Einsetzen konkreter Objekte gebunden sind, können wir der nun entstandenen Aussage einen

Wahrheitswert zuordnen.

Definition 2.10

Es sei $A(x_1, \dots, x_n)$ eine Aussageform mit n Variablen über den Universen $U_1, \dots, U_n$.

1. $(\exists x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ und $(\forall x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ sind Aussageformen mit den $n-1$ Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.
2. In $(\exists x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ bzw. $(\forall x_i)[A(x_1, \dots, x_n)]$ heißt $A(x_1, \dots, x_n)$ der Wirkungsbereich des Quantors $\exists x_i$ bzw. $\forall x_i$.

Beispiele: Wir setzen unsere Beispiele für quantifizierte Aussagen fort.

- Es seien $A(x) =_{\text{def}}$ „x ist eine ungerade Zahl“ und $B(x, y) =_{\text{def}}$ „$x \cdot y$ ist eine ungerade Zahl“ Aussageformen über dem Universum der natürlichen Zahlen. Dann sind
  - $C_x(y) =_{\text{def}} (\exists x)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ eine Aussageform mit der freien Variable y und
  - $C_y(x) =_{\text{def}} (\forall y)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ eine Aussageform mit der freien Variable x,

  und es gilt beispielsweise:
  - $C_x(3) =_{\text{def}} (\exists x)[A(x) \rightarrow B(x, 3)]$ ist eine wahre Aussage
  - $C_y(3) =_{\text{def}} (\forall y)[A(3) \rightarrow B(3, y)]$ ist eine falsche Aussage, da $A(3)$ zwar wahr aber $B(3, 2)$ falsch ist.

  Für vollständig quantifizierte Aussagen erhalten wir:
  - $(\exists y)(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ ist eine wahre Aussage
  - $(\exists x)(\forall y)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ ist eine wahre Aussage
  - $(\forall y)(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ ist eine falsche Aussage
  - $(\forall x)(\forall y)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ ist eine falsche Aussage

  In der Aussage $(\exists y)(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ ist $A(x) \rightarrow B(x, y)$ der Wirkungsbereich von $\forall x$ und $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x, y)]$ der Wirkungsbereich von $\exists y$.
- Für die Aussageform „$x < y$“ über dem Universum der natürlichen Zahlen ist $(\forall x)(\exists y)[x < y]$ (lies: „für alle x gibt es ein y mit $x < y$“) eine wahre Aussage, da $A(x, x+1)$ stets wahr ist, und $(\exists y)(\forall x)[x < y]$ (lies: „es gibt ein y mit $x < y$ für alle x“) eine falsche Aussage, da $A(y, y)$ stets falsch ist. Das letzte Beispiel macht deutlich, dass es bei geschachtelten quantifizierten Aussagen ganz entscheidend auf die Stellung der Existenz- und Allquantoren zueinander ankommt.

Die Namen von Variablen, die zur Quantifizierung verwendet werden, sind nur innerhalb der Wirkungsbereiche der Quantoren relevant: Zum Beispiel ist $(\exists x)(\forall x)[x < x]$ keine korrekte Quantifizierung, da bei der Einsetzung von Objekten nicht klar ist, welches für welches x die Einsetzung erfolgt; $(\exists x)[x < y] \wedge (\forall x)[x < y]$ ist dagegen unmissverständlich, da $\exists x$ und $\forall x$ überschneidungsfreie Wirkungsbereiche besitzen.

Auch für quantifizierte Aussagen können Rechenregeln (d.h. logische Äquivalenzen) angegeben werden. Dazu erweitern wir zunächst die logische Äquivalenz $\equiv$ auf Aussageformen.

Definition 2.11

Es seien $A(x_1, \ldots, x_n)$ und $B(x_1, \ldots, x_n)$ Aussageformen über den Universen $U_1, \ldots, U_n$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& A(x_1, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, \ldots, x_n) \\
& \quad \Longleftrightarrow_{\text{def}} \quad A(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow B(u_1, \ldots, u_n) \text{ ist wahr für alle } u_1, \ldots, u_n \text{ aus den jeweiligen Universen} \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_n)[A(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow B(x_1, \ldots, x_n)] \text{ ist wahr (über den Universen } U_1, \ldots, U_n)
\end{aligned}
$$

Im Falle endlicher Universen können wir die Frage nach der logischen Äquivalenz von Aussageformen im Prinzip mit Wertetabellen beantworten. Abgesehen von praktischen Erwägungen funktioniert dies im Falle unendlicher Universen auch prinzipiell nicht mehr und wir müssen andere Verfahren heranziehen (siehe auch den nächsten Abschnitt über Beweise). Wie in der Aussagenlogik können einige logische Äquivalenzen zur Umformung von quantifizierten Aussagen verwendet werden.

Wir erwähnen die folgenden Regeln hier nur auszugsweise (und ohne Beweise). Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir die Notation $\vec{x}$ für die freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, d.h., wir schreiben $A(\vec{x})$ für $A(x_1, \ldots, x_n)$.

Theorem 2.12

Es seien $A(\vec{x})$ und $B(\vec{x})$ Aussageformen mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ über den Universen $U_1, \ldots, U_n$ sowie $i \neq j$ zwei Indizes.

1. $(\exists x_i)[A(\vec{x})] \vee (\exists x_i)[B(\vec{x})] \equiv (\exists x_i)[A(\vec{x}) \vee B(\vec{x})]$
   $(\forall x_i)[A(\vec{x})] \wedge (\forall x_i)[B(\vec{x})] \equiv (\forall x_i)[A(\vec{x}) \wedge B(\vec{x})]$
2. $(\exists x_i)(\exists x_j)[A(\vec{x})] \equiv (\exists x_j)(\exists x_i)[A(\vec{x})]$
   $(\forall x_i)(\forall x_j)[A(\vec{x})] \equiv (\forall x_j)(\forall x_i)[A(\vec{x})]$
3. $\neg(\exists x_i)[A(\vec{x})] \equiv (\forall x_i)[\neg A(\vec{x})]$ De Morgansche Regeln
   $\neg(\forall x_i)[A(\vec{x})] \equiv (\exists x_i)[\neg A(\vec{x})]$

Die Stichhaltigkeit und Namensgebung der Rechenregeln ist leicht einzusehen, wenn wir endliche Universen für die Aussage zu Grunde legen und endliche Konjunktionen und Disjunktionen betrachten.

Beispiel: Es sei $P(x) =_{\text{def}}$ „x ist eine Primzahl" eine Aussageform über dem Universum der natürlichen Zahlen. Wir formulieren die Aussage, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, wie folgt:

$$A =_{\text{def}} (\forall x)(\exists y)[P(y) \wedge x < y]$$

Die Negation der Aussage ist: „Es gibt endlich viele Primzahlen". Wir negieren die Aussage A dazu formal:

$$\neg A \equiv \neg(\forall x)(\exists y)[P(y) \wedge x < y]$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\exists x)\left[\neg(\exists y)[P(y) \wedge x < y]\right] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[\neg(P(y) \wedge x < y)] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[\neg P(y) \vee x \geq y] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[P(y) \rightarrow x \geq y]
\end{aligned}
$$

Intuitiv ausgedrückt bedeutet dies Aussage: „Es gibt eine größte Primzahl“.

Quantifizierte Aussagen in komplexeren Domänen werden in der Regel schnell unübersichtlich. Deshalb finden sich oft Abkürzungen für häufig benutzte Redewendungen. Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen davon beschließen.

1. „Es gibt $x_1, \dots, x_n$, sodass $A(x_1, \dots, x_n)$ gilt“: Die zugehörige Abkürzung für die exakte logische Definition ist:

$$(\exists x_1, \dots, x_n)[A(x_1, \dots, x_n)] =_{\mathrm{def}} (\exists x_1)(\exists x_2) \cdots (\exists x_n)[A(x_1, \dots, x_n)]$$

2. „Für alle $x_1, \dots, x_n$ gilt $A(x_1, \dots, x_n)$“: Die zugehörige Abkürzung für die exakte logische Definition ist:

$$(\forall x_1, \dots, x_n)[A(x_1, \dots, x_n)] =_{\mathrm{def}} (\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_n)[A(x_1, \dots, x_n)]$$

3. „Für alle x mit $A(x)$ gilt $B(x)$“: Die zugehörige Abkürzung für die exakte logische Definition ist:

$$(\forall x; A(x))[B(x)] =_{\mathrm{def}} (\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$$

4. „Es gibt ein x mit $A(x)$, sodass $B(x)$ gilt“: Die zugehörige Abkürzung für die exakte logische Definition ist:

$$(\exists x; A(x))[B(x)] =_{\mathrm{def}} (\exists x)[A(x) \wedge B(x)]$$

Die beiden letzten Regeln sind verträglich mit den De Morganschen Regeln:

$$
\begin{aligned}
\neg(\exists x; A(x))[B(x)] &\equiv \neg(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \\
&\equiv (\forall x)[\neg(A(x) \wedge B(x))] \\
&\equiv (\forall x)[(\neg A(x)) \vee (\neg B(x))] \\
&\equiv (\forall x)[A(x) \rightarrow (\neg B(x))] \\
&\equiv (\forall x; A(x))[\neg B(x)]
\end{aligned}
$$

Beispiel: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen ist ein wichtiges Hilfsmittel im Bereich der Automatentheorie und Formaler Sprachen. Eine übliche Formulierung als Theorem ist die folgende:

> „Für jede reguläre Sprache L gibt es ein $n_0 > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes z aus L mit $|z| \geq n_0$ gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n_0$ und $|v| > 0$, sodass $uv^k w$ zu L gehört für alle $k \geq 0$.“

Mit Hilfe unserer Quantorennotationen ist das Theorem wie folgt ausdrückbar:

$$
\begin{aligned}
&(\forall L; L \text{ ist regulär})\ (\exists n_0; n_0 > 0)\ (\forall z; z \text{ gehört zu } L \wedge |z| \geq n_0) \\
&\quad (\exists u, v, w; z = uvw \wedge |uv| \leq n_0 \wedge |v| > 0)\ (\forall k; k \geq 0)\ [uv^k w \text{ gehört zu } L]
\end{aligned}
$$

Die Handhabung des Theorems (abgesehen vom Wissen um die verwendeten Begriffe und Notationen) bedarf einiger Übung, da die Quantorenstruktur $\forall\exists\forall\exists\forall$ der Aussage vier Wechsel zwischen All- und Existenzquantoren aufweist.

2.6 Beweise

Unter einem Beweis wollen wir eine Folge von allgemeingültigen Implikationen (Regeln) verstehen, die auf wahren Anfangsaussagen (Prämissen) basieren und zu der Zielaussage (Folgerung) führen, deren Wahrheit damit nachgewiesen wird.

Universelle Beweisregeln

Wichtige Beweisregeln (Implikationen) für den mathematischen Alltagsgebrauch sind:

- Abtrennungsregel (modus ponens): Sind A und $A \to B$ wahr, so ist B wahr.
  Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $(A \wedge (A \to B)) \to B$.
- Fallunterscheidung: Sind $A \to B$ und $\neg A \to B$ wahr, so ist B wahr.
  Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \to B) \wedge ((\neg A) \to B)) \to B$.
- Kettenschluss: Sind $A \to B$ und $B \to C$ wahr, so ist $A \to C$ wahr.
  Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.
- Kontraposition: Ist $A \to B$ wahr, so ist $(\neg B) \to (\neg A)$ wahr.
  Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A))$.
- Indirekter Beweis (oder Beweis mittels Widerspruch): Sind $A \to B$ und $A \to \neg B$ wahr, so ist $\neg A$ wahr.
  Korrektheit folgt aus der Allgemeingültigkeit von $((A \to B) \wedge (A \to (\neg B))) \to (\neg A)$.

Beweisanalyse*

Im Folgenden wollen an dem Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ die logische Struktur und das Zusammenspiel der verschiedenen Beweisregeln offenlegen.

Lemma 2.13

Ist n eine ungerade Zahl, so ist n^2 eine ungerade Zahl.

Beweis: (direkt) Es sei n eine ungerade Zahl, d.h.

$$n = 2\lfloor n/2 \rfloor + 1. \qquad =_{\mathrm{def}} \mathsf{A}$$

A (für eine konkrete Zahl) ist eine wahre Prämisse

Wir müssen zeigen:

$$n^2 = 2\left\lfloor n^2/2 \right\rfloor + 1. \qquad =_{\mathrm{def}} \mathsf{Z}$$

Z ist die Zielaussage

Mit $n = 2\lfloor n/2 \rfloor + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\lfloor n/2 \rfloor + 1)^2 && =_{\mathrm{def}} \mathsf{B} \\ &= 4\lfloor n/2 \rfloor^2 + 4\lfloor n/2 \rfloor + 1 && =_{\mathrm{def}} \mathsf{C} \\ &= 2\left(2\lfloor n/2 \rfloor^2 + 2\lfloor n/2 \rfloor\right) + 1 && =_{\mathrm{def}} \mathsf{D} \end{aligned}$$

A → B ist wahr

B → C ist wahr

C → D ist wahr

Wir zeigen zunächst die Hilfsaussage:

$$\left\lfloor n^2/2 \right\rfloor = 2\lfloor n/2 \rfloor^2 + 2\lfloor n/2 \rfloor \qquad =_{\mathrm{def}} \mathsf{H}$$

Wegen $n = 2\lfloor n/2 \rfloor + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \lfloor n^2/2 \rfloor &= \left\lfloor (2\lfloor n/2 \rfloor + 1)^2 / 2 \right\rfloor && =_{\mathrm{def}} \mathsf{E} \\ &= \left\lfloor \left(4\lfloor n/2 \rfloor^2 + 4\lfloor n/2 \rfloor + 1\right)/2 \right\rfloor && =_{\mathrm{def}} \mathsf{F} \\ &= \left\lfloor 2\lfloor n/2 \rfloor^2 + 2\lfloor n/2 \rfloor + 1/2 \right\rfloor && =_{\mathrm{def}} \mathsf{G} \\ &= 2\lfloor n/2 \rfloor^2 + 2\lfloor n/2 \rfloor && = \mathsf{H} \end{aligned}$$

A → E ist wahr

E → F ist wahr

F → G ist wahr

G → H ist wahr

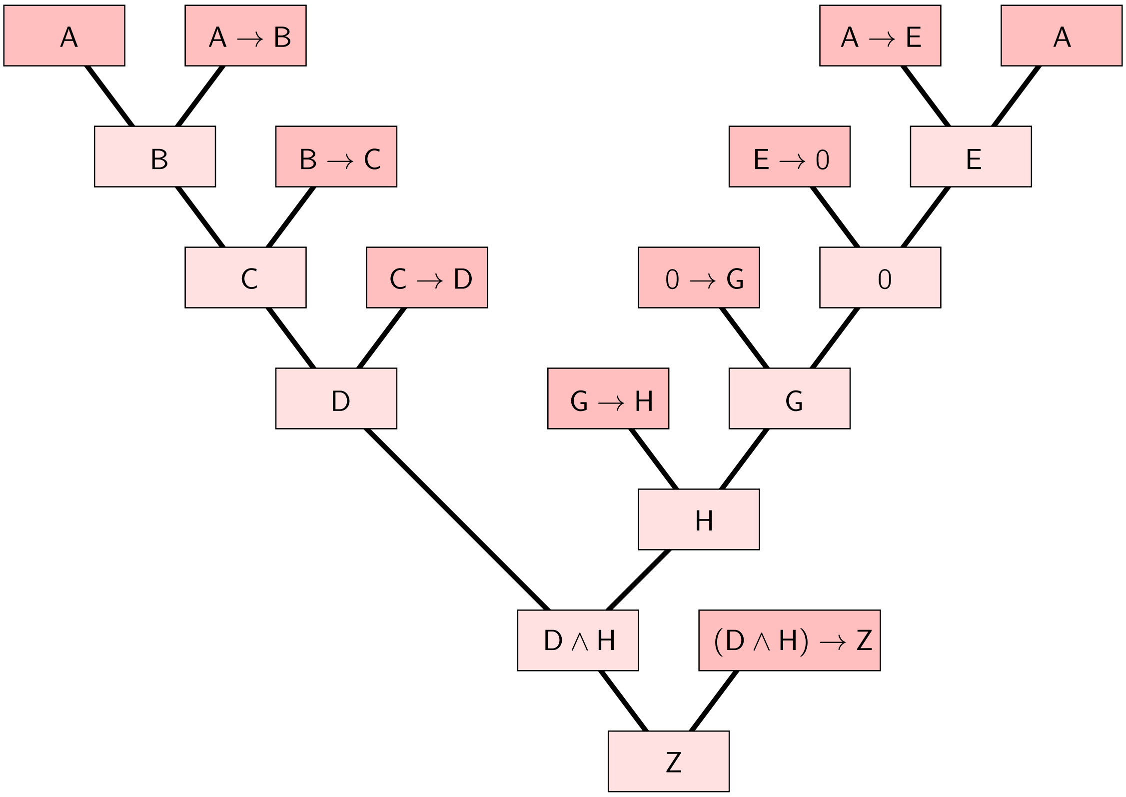
Einsetzen der Hilfsaussage in D ergibt:

$$n^2 = 2\left\lfloor n^2/2 \right\rfloor + 1. \qquad = \mathsf{Z}$$

(D ∧ H) → Z ist wahr

d.h. n^2 ist ungerade. ∎

Die logische Struktur des Beweises kann schematisch in Form eines Ableitungsbaumes dargestellt werden:



Hierbei sind die heller unterlegten Aussagen (bis auf $D \wedge H$) durch Anwendung der Abtrennungsregel aus den beiden darüber liegenden Aussagen abgeleitet worden. Die dunkler unterlegten Aussagen sind per Voraussetzung wahr (Aussage A) oder durch Anwendung algebraischer Umformungsregeln wahr.

Durch Kontraposition von Lemma 2.13 lässt sich nun direkt Korollar 2.14 folgern.

Korollar 2.14

Ist n^2 eine gerade Zahl, so ist n eine gerade Zahl.

Beweis: (Kontraposition)
Ist n eine ungerade Zahl, $=_{\text{def}}$ A
so ist n^2 eine ungerade Zahl $=_{\text{def}}$ B
(nach Lemma A).

Damit gilt nach Kontraposition:
Ist n^2 eine gerade Zahl, $\equiv \neg B$
so ist n eine gerade Zahl. $\equiv \neg A$

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

$A \rightarrow B$ ist wahr

$\neg B \rightarrow \neg A$ ist wahr

Mit Hilfe von Korollar B kann die Irrationalität von $\sqrt{2}$ mittels Widerspruchbeweis gezeigt werden.

Theorem 2.15

$\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: (indirekt) Wir nehmen an: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, d.h.

$$(\exists p)(\exists q)\left[\underbrace{\mathrm{ggT}(p,q)=1}_{=_{\mathrm{def}}\ \mathrm{Z}} \wedge \sqrt{2}=p/q\right] \quad =_{\mathrm{def}} \mathrm{A}$$

A $\rightarrow$ Z ist wahr

Dann gilt

$$2q^2 = p^2, \quad =_{\mathrm{def}} \mathrm{B}$$

A $\rightarrow$ B ist wahr

d.h. p^2 ist gerade.

Nach Korollar B ist p gerade, d.h.

$$p = 2\lfloor p/2 \rfloor. \quad =_{\mathrm{def}} \mathrm{C}$$

B $\rightarrow$ C ist wahr

Wollen zeigen, dass auch q^2 gerade ist, d.h.

$$q^2 = 2\lfloor q^2/2 \rfloor. \quad =_{\mathrm{def}} \mathrm{D}$$

Mit $2q^2 = p^2$ und $p = 2\lfloor p/2 \rfloor$ folgt

$$\begin{aligned} q^2 &= p^2/2 && =_{\mathrm{def}} \mathrm{E} \\ &= \left(2\lfloor p/2 \rfloor\right)^2/2 && =_{\mathrm{def}} 0 \\ &= 2\left\lfloor p/2 \right\rfloor^2 && =_{\mathrm{def}} \mathrm{G} \end{aligned}$$

B $\rightarrow$ E ist wahr

(C $\wedge$ E) $\rightarrow$ 0 ist wahr

0 $\rightarrow$ G ist wahr

und somit

$$\begin{aligned} 2\left\lfloor q^2/2 \right\rfloor &= 2\left\lfloor 2\lfloor p/2 \rfloor^2/2 \right\rfloor && =_{\mathrm{def}} \mathrm{H} \\ &= 2\lfloor \lfloor p/2 \rfloor^2 \rfloor && =_{\mathrm{def}} \mathrm{I} \\ &= 2\lfloor p/2 \rfloor^2 && =_{\mathrm{def}} \mathrm{J} \\ &= q^2 && \equiv \mathrm{D} \end{aligned}$$

G $\rightarrow$ H ist wahr

H $\rightarrow$ I ist wahr

I $\rightarrow$ J ist wahr

J $\rightarrow$ D ist wahr

Nach Korollar B ist q gerade. $=_{\mathrm{def}}$ K

D $\rightarrow$ K ist wahr

Damit gilt $\mathrm{ggT}(p,q) \geq 2$. $\equiv \neg$Z

K $\rightarrow$ $\neg$Z ist wahr

A $\rightarrow$ $\neg$Z ist wahr

Dies ist ein Widerspruch, d.h. die Annahme ist falsch und $\sqrt{2}$ ist irrational. $\equiv \neg$A

$\neg$A ist wahr

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Spezielle Beweisregeln

Neben den Beweisregeln, die ganz allgemein für beliebige Aussagen anwendbar sind, gibt es noch eine ganze Menge spezieller Beweisregeln für Aussagen mit bestimmter Quantorenstruktur und bestimmter Universen. Zwei wichtige unter diesen sind die folgenden:

- Spezialisierung (Substitution): Ist $(\forall x)[A(x)]$ wahr, so ist $A(y)$ wahr, falls y nicht in einem Wirkungsbereich eines Quantors in $A(x)$ vorkommt.

  Korrektheit folgt aus Allgemeingültigkeit von $(\forall y)\,[(\forall x)[A(x)] \rightarrow A(y)]$ (mit obiger Einschränkung).

- Vollständige Induktion: Es sei $A(n)$ eine Aussageform über dem Universum der natürlichen Zahlen. Sind $A(0)$ und $A(n-1) \rightarrow A(n)$ für alle $n > 0$ wahr, so ist $A(n)$ für alle n wahr.

Wir wollen die Korrektheit der vollständigen Induktion überprüfen.

Theorem 2.16

Es sei $A(n)$ eine Aussageform mit der freien Variable n über dem Universum der natürlichen Zahlen. Dann ist die Aussage

$$\Big(A(0) \wedge (\forall n; n > 0)[A(n-1) \rightarrow A(n)]\Big) \rightarrow (\forall n)[A(n)]$$

allgemeingültig.

Beweis: (indirekt) Es gelte $A(0)$ und $A(n-1) \rightarrow A(n)$ für alle $n > 0$. Zum Widerspruch nehmen wir an, dass es ein n gibt, sodass $A(n)$ nicht gilt. Dann gibt es auch eine kleinste natürliche Zahl n_0, für die $A(n_0)$ nicht wahr ist, d.h. es gilt $\neg A(n_0) \wedge (\forall n; n < n_0)[A(n)]$. Wir unterscheiden zwei Fälle für n_0:

- 1. Fall: Ist $n_0 = 0$, so ist $\neg A(0)$ wahr. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A(0)$ gilt.
- 2. Fall: Ist $n_0 > 0$, so ist $\neg A(n_0) \wedge A(n_0 - 1) \equiv \neg(A(n_0 - 1) \rightarrow A(n_0))$ wahr. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A(n-1) \rightarrow A(n)$ für alle $n > 0$ gilt, also insbesondere auch $A(n_0 - 1) \rightarrow A(n_0)$.

Also ist die Annahme falsch und es gilt $A(n)$ für alle n. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Die logische Struktur des Beweises für Theorem 2.16 ist typisch für einen Widerspruchsbeweis einer Implikation. Wenn wir die Aussage $A \rightarrow B$ als wahr beweisen wollen, so nehmen wir an, dass A aber nicht B gilt. Damit folgt sofort, dass die Aussage $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow A$ wahr ist. Anschließend müssen wir noch beweisen, dass auch $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$ allgemeingültig ist, d.h. wir konstruieren einen Widerspruch zur eigentlichen Prämisse A unserer zu beweisenden Implikation. Nach der Regel vom indirekten Beweis folgt nun, dass $\neg(A \wedge (\neg B)) \equiv A \rightarrow B$ wahr ist.

2.7 Exkurs: Aussagen in Normalform*

Im Folgenden betrachten wir Aussagen besonderer Struktur mit den Konnektoren $\neg, \wedge, \vee$. Wir führen zunächst zwei Abkürzungen ein. Für Aussagen $H_1, \ldots, H_n$ definieren wir:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} H_i =_{\text{def}} H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$$
$$\bigvee_{i=1}^{n} H_i =_{\text{def}} H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n$$

Ein Literal ist eine Aussage der Form X oder $\neg X$, wobei X eine aussagenlogische Variable ist.

Definition 2.17

Eine Aussage A mit den aussagenlogischen Variablen $X_1, \ldots, X_n$ heißt

1. konjunktive Normalform (KNF, CNF), falls für geeignete Zahlen k und ℓ_i sowie Literale L_{ij} gilt:

$$A = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{\ell_i} L_{ij}$$

2. disjunktive Normalform (DNF), falls für geeignete Zahlen k und ℓ_i sowie Literale L_{ij} gilt:

$$A = \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{\ell_i} L_{ij}$$

Beispiele: Wir wollen die Definitionen an einigen Aussagen nachvollziehen.

- Die Aussage $(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_3 \wedge X_4) \vee (X_2 \wedge X_4) \vee X_3$ ist eine disjunktive Normalform mit $k = 4, \ell_1 = 2, \ell_2 = 3, \ell_3 = 2, \ell_4 = 1$ und

$$\begin{array}{lll} L_{11} = X_1, & L_{12} = X_2, & \\ L_{21} = \neg X_1, & L_{22} = \neg X_3, & L_{23} = X_4 \\ L_{31} = X_2, & L_{32} = X_4, & \\ L_{41} = X_3, & & \end{array}$$

- $X_1 \wedge (X_2 \vee X_3)$ ist eine konjunktive Normalform, aber keine disjunktive Normalform.
- $X_1 \vee (X_2 \wedge X_3)$ ist eine disjunktive Normalform, aber keine konjunktive Normalform.
- $X_1 \wedge X_2$ ist eine disjunktive Normalform (mit $k = 1$) und eine konjunktive Normalform (mit $k = 2$).
- $X_1 \wedge (X_2 \vee (X_3 \wedge X_4))$ ist weder eine disjunktive noch eine konjunktive Normalform. Aber es gilt

$$X_1 \wedge (X_2 \vee (X_3 \wedge X_4)) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3 \wedge X_4)),$$

  d.h., die Aussage ist äquivalent zu einer disjunktiven Normalform.

Wir wollen die Einsicht aus dem letzten Beispiel ausdehnen und zeigen, dass jede Aussage äquivalent zu einer konjunktiven und zu einer disjunktiven Normalform ist. Dazu führen wir für eine Aussage X folgende Schreibweise ein:

$$X^1 =_{\text{def}} X, \qquad X^0 =_{\text{def}} \neg X$$

Proposition 2.18

Für eine beliebige Aussage X und eine Interpretation I gilt

$$I(X^\sigma) = 1 \iff I(X) = \sigma$$

Beweis: Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Ist $\sigma = 1$, so gilt $X^\sigma = X$, d.h., X ist genau dann wahr, wenn $I(X) = 1$ gilt. Ist $\sigma = 0$, so gilt $X^\sigma = \neg X$, d.h., $\neg X$ ist genau dann wahr, wenn $I(X) = 0$ gilt. Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Proposition 2.19

Es seien $H_1, \dots H_n$ Aussagen und I eine Intepretation. Dann gilt:

1. $I(\bigwedge_{i=1}^n H_i) = 1$ gilt genau dann, wenn für alle Aussagen $I(H_i) = 1$ gilt.
2. $I(\bigvee_{i=1}^n H_i) = 1$ gilt genau dann, wenn für eine Aussage $I(H_i) = 0$ gilt.

Beweis: Der Induktionsbeweis bleibt zur selbständigen Übung überlassen. ■

Ohne Beweis führen wir den folgenden Satz an, der die Existenz der kanonischen disjunktiven Normalform für jede erfüllbare Aussage sichert.

Theorem 2.20

Für jede erfüllbare Aussage H mit den aussagenlogischen Variablen $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$H \equiv \bigvee_{\substack{\text{Belegung } I\\ \text{erfüllt } H}} \bigwedge_{i=1}^{n} X_i^{I(X_i)}$$

Beispiele: Für $H =_{\text{def}} X_1 \oplus \neg(X_2 \vee (X_3 \wedge X_1))$ betrachten wir die Wertetabelle. Dabei setzen wir

$$\begin{aligned} H_1 &=_{\text{def}} X_3 \wedge X_1 \\ H_2 &=_{\text{def}} X_2 \vee H_1 \\ H_3 &=_{\text{def}} \neg H_2 \end{aligned}$$

Somit ist $H = X_1 \oplus H_3$. Wir erhalten folgende Wertetabelle:

X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Nach Theorem 2.20 gilt somit

$$\begin{aligned} H \quad \equiv \quad & (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \\ & \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \end{aligned}$$

Das analoge Theorem gilt auch für die kanonische konjunktive Normalform (wiederum ohne Beweis).

Theorem 2.21

Für jede widerlegbare Aussage H mit den aussagenlogischen Variablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$H \equiv \bigwedge_{\substack{\text{Belegung } I \\ \text{widerlegt } H}} \bigvee_{i=1}^{n} X_i^{1-I(X_i)}$$

Beispiel: Mit Hilfe obiger Wertetabelle erhalten wir die logische Äquivalenz:

$$X_1 \oplus \neg(X_2 \vee (X_3 \wedge X_1)) \equiv (X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3)$$