Proposition 16.

Es seien A, B endliche Mengen und $f: A \to B$ eine Funktion. Dann gilt:

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})|$$

Beweis: Da f eine Fkt. ist, bildet Mengenfamilie $\{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$ eine Partition von A. Damit gilt:

$$A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(\{b\})$$

Mithin sind d. Kard. gleich. ∎

Klassifizieren Fkt. danach, welche Eigenschaften noch erfüllt sind.

Definition 17.

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt

(1) surjektiv $\Leftrightarrow_{def}$ f rechtstotal

(2) injektiv $\Leftrightarrow_{def}$ f linkseindeutig

(3) bijektiv $\Leftrightarrow_{def}$ f rechtstotal und linkseindeutig

Beispiele:

1. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
2. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^3$ ist nicht surjektiv, aber injektiv
3. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto -x$ ist bijektiv

Lemma 18.

Es sei $f: A \to B$ eine Fkt. Dann gilt:

(1.) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in B)\left[\, |f^{-1}(\{b\})| \geq 1 \,\right]$

(2.) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in B)\left[\, |f^{-1}(\{b\})| \leq 1 \,\right]$

(3.) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $(\forall b \in B)\left[\, |f^{-1}(\{b\})| = 1 \,\right]$

Lemma 19.

Es seien A und B endl. Mengen, $A, B \neq \emptyset$. Dann gilt:

(1.) Es gibt eine surjektive Fkt. $f: A \to B \iff |A| \geq |B|$

(2.) Es gibt eine injektive Fkt. $f: A \to B \iff |A| \leq |B|$

(3.) Es gibt eine bijektive Fkt. $f: A \to B \iff |A| = |B|$

Beweis: (Block)

$\boxed{\Leftarrow}$ Es seien $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ endl. Mengen. Definiere Fkt. $f: A \to B$ wie folgt für $a_i \in A$:

$$f(a_i) =_{\text{def}} \begin{cases} b_i & \text{falls } i \leq m \\ b_1 & \text{falls } i > m \end{cases}$$

(1.) Ist $|A| \geq |B|$, d.h. $n \geq m$, so ist f surjektiv

(2.) Ist $|A| \leq |B|$, d.h. $n \leq m$, so ist f injektiv

(3.) Ist $|A| = |B|$, d.h. $n = m$, so ist f bijektiv

$\boxed{\Rightarrow}$ Es sei $f: A \to B$ eine Fkt. Dann gilt:

(1.) Ist f surjektiv, so gilt: $|A| \overset{\text{Prop. 16}}{=} \sum_{b \in B} \underbrace{|f^{-1}(\{b\})|}_{\geq 1,\ \text{Lemma 18}} \geq \sum_{b \in B} 1 = |B|$

(2.) Ist f injektiv, so gilt: $|A| = \sum_{b \in B} \underbrace{|f^{-1}(\{b\})|}_{\leq 1} \leq \sum_{b \in B} 1 = |B|$

(3.) Ist f bijektiv, so gilt: $|A| = \sum_{b \in B} \underbrace{|f^{-1}(\{b\})|}_{= 1} = \sum_{b \in B} 1 = |B|$ ∎

Satz 20.

Es seien A, B endl. Mengen mit $|A| = |B| > 0$ und $f: A \to B$ eine bel. Fkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1.) f ist surjektiv

(2.) f ist injektiv

(3.) f ist bijektiv

Beweis: Wir zeigen einzelne Implikationen:

(3) $\Rightarrow$ (1): Ist f bijektiv, so ist f surjektiv

(3) $\Rightarrow$ (2): Ist f bijektiv, so ist f injektiv

(1) $\Rightarrow$ (3): Es sei f surjektiv, d.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| \geq 1$.

Dann gilt:

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \overset{=}{\geq} \sum_{b \in B} 1 = |B| = |A|$$

D.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| = 1$

D.h. f ist bijektiv

(2) $\Rightarrow$ (3): Es sei f injektiv, d.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| \leq 1$.

Dann gilt:

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \overset{=}{\leq} \sum_{b \in B} 1 = |B| = |A|$$

D.h. für alle $b \in B$ gilt $|f^{-1}(\{b\})| = 1$

D.h. f ist bijektiv. ∎

Für eine Relation $R \subseteq A \times B$ definieren wir die Umkehrrelation $R^{-1} \subseteq B \times A$:

$$R^{-1} =_{def} \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \} \qquad (R^{-1})^{-1} = R$$

Proposition 21.

Es sei R eine binäre Relation. Dann gilt:

(1.) R ist linkstotal $\Leftrightarrow$ R^{-1} rechtstotal

(2.) R ist rechtseindeutig $\Leftrightarrow$ R^{-1} linkseindeutig

(3.) R ist rechtstotal $\Leftrightarrow$ R^{-1} linkstotal

(4.) R ist linkseindeutig $\Leftrightarrow$ R^{-1} rechtseindeutig