3 Mengen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den grundlegenden Begriffen der Mengenlehre. Hierbei folgen wir im Wesentlichen der naiven Mengenlehre, wie sie im mathematischen Alltagsgeschäft der Informatik ausreichend ist. Unter einer streng mathematischen Sichtweise ist die naive Mengenlehre nicht widerspruchsfrei (Russellsches Paradoxon); jedoch können Widersprüche mit einer gewissen Umsicht vermieden werden.

3.1 Aussagen über Mengen

Eine Menge A besteht aus paarweise verschiedenen Objekten. Damit wird ein mehrfaches Vorkommen von Objekten ignoriert – im Gegensatz z.B. zu Listen als Datenstruktur. Mengen können auf unterschiedliche Art und Weise beschrieben werden:

- extensionale Darstellung (Darstellung nach dem Umfang der Menge): Die in der Menge A enthaltenen Objekte werden aufgezählt (soweit dies möglich ist), wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt – auch hier im Gegensatz zu Listen; symbolisch:

  $$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

- intensionale Darstellung (Darstellung nach dem Inhalt der Menge): Es werden alle Objekte a selektiert, die aus dem zu einer Aussageform $E(x)$ gehörenden Universum stammen, sodass $E(a)$ eine wahre Aussage ist; symbolisch:

  $$A = \{\ a \mid E(a)\ \}$$

  Mit anderen Worten enthält die Menge A alle Objekte a, die eine gewisse Eigenschaft E erfüllen.

Extensionale Darstellungen sind für die Fälle endlicher Mengen häufig einsichtiger als intensionale Darstellungen, da die Selektion der Objekte bereits ausgeführt vorliegt. Für unendliche Mengen sind extensionale Darstellungen im Allgemeinen nicht mehr möglich.

Beispiele: Die folgenden Darstellungen derselben (endlichen) Menge verdeutlichen die unterschiedlichen Beschreibungsaspekte:

- $\{3, 5, 7, 11\} = \{11, 5, 7, 3\}$
- $\{3, 5, 7, 11\} = \{3, 3, 3, 5, 5, 7, 11, 11\}$
- $\{3, 5, 7, 11\} = \{\ a \mid 2 < a < 12 \wedge a \text{ ist eine Primzahl}\ \}$

Im Folgenden vereinbaren wir Schreib- und Sprechweisen für mengenbezogene Aussagen. Positive Aussagen sind die folgenden:

$$
\begin{array}{rll}
a \in A & \text{steht für:} & a \text{ ist Element von } A \\
A \subseteq B & \text{steht für:} & A \text{ ist Teilmenge von } B \\
B \supseteq A & \text{steht für:} & B \text{ ist Obermenge von } A \\
A = B & \text{steht für:} & A \text{ und } B \text{ sind gleich} \\
A \subset B & \text{steht für:} & A \text{ ist echte Teilmenge von } B \\
B \supset A & \text{steht für:} & B \text{ ist echte Obermenge von } A
\end{array}
$$

Die zugehörigen negativen Aussagen sind:

$$
\begin{array}{rll}
a \notin A & \text{steht für:} & a \text{ ist kein Element von } A \\
A \not\subseteq B & \text{steht für:} & A \text{ ist keine Teilmenge von } B \\
B \not\supseteq A & \text{steht für:} & B \text{ ist keine Obermenge von } A \\
A \neq B & \text{steht für:} & A \text{ und } B \text{ sind verschieden} \\
A \not\subset B & \text{steht für:} & A \text{ ist keine echte Teilmenge von } B \\
B \not\supset A & \text{steht für:} & B \text{ ist keine echte Obermenge von } A
\end{array}
$$

Die exakten Bedeutungen der Bezeichnungen werden aussagenlogisch festgelegt. Dazu setzen wir im Folgenden für die verwendeten Aussageformen stets ein Universum voraus.

$$
\begin{array}{rll@{\qquad\qquad}rll}
a \in A & =_{\text{def}} & a \text{ gehört zur Menge } A & a \notin A & =_{\text{def}} & \neg(a \in A) \\
A \subseteq B & =_{\text{def}} & (\forall a)[a \in A \rightarrow a \in B] & A \not\subseteq B & =_{\text{def}} & \neg(A \subseteq B) \\
B \supseteq A & =_{\text{def}} & A \subseteq B & B \not\supseteq A & =_{\text{def}} & \neg(B \supseteq A) \\
A = B & =_{\text{def}} & A \subseteq B \wedge B \subseteq A & A \neq B & =_{\text{def}} & \neg(A = B) \\
A \subset B & =_{\text{def}} & A \subseteq B \wedge A \neq B & A \not\subset B & =_{\text{def}} & \neg(A \subset B) \\
B \supset A & =_{\text{def}} & A \subset B & B \not\supset A & =_{\text{def}} & \neg(B \supset A)
\end{array}
$$

Aussagen über Mengen werden also als Abkürzungen für quantifizierte Aussagen über ihren Elementen eingeführt.

Beispiele: Wir verdeutlichen den Zusammenhang zwischen Aussagen über Mengen und den definierenden quantifizierten Aussagen über den Elementen an Hand zweier Mengenaussagen:

$$
\begin{aligned}
A \not\subseteq B \quad & \equiv \quad \neg(A \subseteq B) \\
& \equiv \quad \neg(\forall a)[a \in A \rightarrow a \in B] \\
& \equiv \quad (\exists a)[\neg(a \in A \rightarrow a \in B)] \\
& \equiv \quad (\exists a)[\neg(a \notin A \vee a \in B)] \\
& \equiv \quad (\exists a)[a \in A \wedge a \notin B]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A = B \quad & \equiv \quad A \subseteq B \wedge A \supseteq B \\
& \equiv \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\
& \equiv \quad (\forall a)[a \in A \rightarrow a \in B] \wedge (\forall a)[a \in B \rightarrow a \in A] \\
& \equiv \quad (\forall a)[(a \in A \rightarrow a \in B) \wedge (a \in B \rightarrow a \in A)] \\
& \equiv \quad (\forall a)[(a \in A \leftrightarrow a \in B)]
\end{aligned}
$$

Häufig muss die Gleichheit zweier Mengen A und B, die in intensionaler Darstellung gegeben sind, gezeigt werden. Nach Definition des Wahrheitswertes der Aussage $A = B$ müssen dafür stets zwei Richtungen gezeigt werden. Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen.

Beispiel: Es seien die beiden Mengen $A =_{\text{def}} \{\ n \mid n \text{ ist gerade}\ \}$ und $B =_{\text{def}} \{\ n \mid n^2 \text{ ist gerade}\ \}$ als Teilmengen natürlicher Zahlen gegeben. Wir wollen zeigen, dass $A = B$ gilt. Dazu zeigen wir zwei Inklusionen:

$\subseteq$: Es sei $n \in A$. Dann ist n gerade, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Es gilt $n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$. Somit ist n^2 gerade. Folglich gilt $n \in B$. Damit gilt $A \subseteq B$.

$\supseteq$: Es sei $n \in B$. Dann ist n^2 gerade. Nach Korollar B (Abschnitt 1.6) ist n gerade. Also gilt $n \in A$. Somit gilt $B \subseteq A$.

Damit ist die Gleichheit der Mengen bewiesen.

Eine ausgezeichnete Menge (in jedem Universum) ist die leere Menge: Eine Menge A heißt leer, falls A kein Element enthält. Logisch ausgedrückt bedeutet die Bedingung: $(\forall a)[a \notin A]$.

Proposition 3.1

Es gibt nur eine leere Menge (in jedem Universum).

Beweis: (Kontraposition) Wir wollen zeigen: Sind A und B leere Mengen, so gilt $A = B$. Dafür zeigen wir: Gilt $A \neq B$, so ist A nicht leer oder B nicht leer. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \neq B &\equiv A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A \\ &\equiv (\exists a)[a \in A \wedge a \notin B] \vee (\exists a)[a \in B \wedge a \notin A] \\ &\equiv (\exists a)\underbrace{[(a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in B \wedge a \notin A)]}_{=_{\text{def}}\, D(a)} \end{aligned}$$

Es sei x ein Objekt im Universum, so dass $D(x)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Also ist A oder B nicht leer. ■

Damit ist gerechtfertigt, dass ein eigenes Symbol $\emptyset$ für die Bezeichnung der leeren Menge eingeführt wird. $|A|$ (oder auch: $\|A\|, \#A$) ist die Anzahl der Elemente von A bzw. die Kardinalität von A. Die Kardinalität der leeren Menge ist also stets 0. Ist $|A| < \infty$, so heißt A endliche Menge, sonst unendliche Menge. Mengen mit nur einem Element werden Einermengen genannt. Die natürlichen Zahlen sind also genau die Kardinalitäten endlicher Mengen.

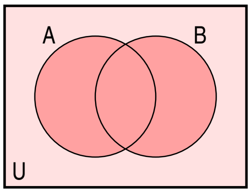
3.2 Rechnen mit Mengen

Wir definieren die folgenden Operationen, die aus zwei Mengen A und B eines Universums U wieder eine Menge desselben Universums U formen (zur Verdeutlichung geben wir U mit an):

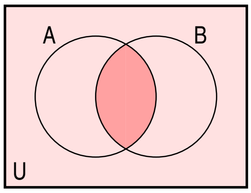
Vereinigung:	$A \cup B =_{\text{def}} \{\ x \in U \mid x \in A \vee x \in B\ \}$
Durchschnitt:	$A \cap B =_{\text{def}} \{\ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\ \}$
Differenz:	$A \setminus B =_{\text{def}} \{\ x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\ \}$
symmetrische Differenz:	$A \triangle B =_{\text{def}} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Eine besondere Differenzoperation ist die Komplementierung einer Menge A:

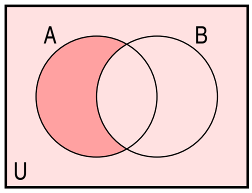
Komplement:	$\overline{A} =_{\text{def}} U \setminus A$



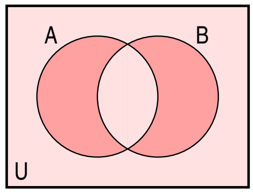
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \triangle B$

Üblicherweise werden Mengenoperationen zur Veranschaulichung durch die aus der Schule bekannten Venn-Diagramme dargestellt. Die vier obigen Operationen auf zwei Mengen lassen sich wie folgt visualisieren:

Dabei sind die dunkler dargestellten Punktmengen immer das Ergebnis der jeweiligen Mengenoperationen auf den durch die Kreis A und B eingefassten Punktmengen. Diese Darstellungsformen sind zwar illustrativ; sie sind jedoch keinesfalls ausreichend für Beweise.

Beispiele: Es seien $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ und $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dann gilt:

- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$
- $A \cap B = \{2, 3, 5\}$
- $A \setminus B = \{7, 11\}$
- $B \setminus A = \{4, 6\}$
- $A \triangle B = \{4, 6, 7, 11\}$
- $(A \setminus B) \cap B = \{7, 11\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \emptyset$

Zwei Mengen A und B heißen disjunkt genau dann, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Die logische Formulierung der Zugehörigkeit von Elementen zu einer Menge ermöglicht eine einfache Gewinnung von Rechenregeln durch Übertragung der logischen Äquivalenzen. Eine Auswahl sinnvoller Rechenregeln wird in folgendem Theorem gegeben.

Theorem 3.2

Es seien A, B und C Mengen (über dem Universum U). Dann gilt:

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — Assoziativgesetze
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $A \cap B = B \cap A$ — Kommutativgesetze
   $A \cup B = B \cup A$
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ — Distributivgesetze
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — De Morgansche Regeln
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. Wenn $A \subseteq B$, dann $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ — Kontraposition
6. $\overline{\overline{A}} = A$ — Doppeltes Komplement

Beweis: Wir zeigen exemplarisch die erste De Morgansche Regel, um den Zusammenhang zur logischen Äquivalenz zu verdeutlichen.

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \{\, x \in U \mid x \notin A \cup B \,\} \\
&= \{\, x \in U \mid \neg(x \in A \cup B) \,\} \\
&= \{\, x \in U \mid \neg(x \in A \vee x \in B) \,\} \\
&= \{\, x \in U \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \,\} \qquad \text{(De Morgansche Regel der Aussagenlogik)} \\
&= \{\, x \in U \mid x \notin A \wedge x \notin B \,\} \\
&= \{\, x \in U \mid x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \,\} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Die Regeln aus Theorem 3.2 lassen sich verwenden, um aus Venn-Diagrammen leicht abzulesende Mengengleichheiten formal zu beweisen. Zum Beispiel ist die Identität $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ einfach auszurechnen:

$$A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B$$

3.3 Rechnen mit unendlich vielen Mengen

In einigen Fällen werden auch Verallgemeinerungen von Vereinigung und Durchschnitt auf eine beliebige, auch unendliche, Anzahl von Mengen betrachtet. Dazu betrachten wir Teilmengen eines Universums U. Weiterhin sei I eine beliebige Menge (Indexmenge). Für jedes $i \in I$ sei eine Menge $A_i \subseteq U$ gegeben. Dann sind Vereinigung und Durchschnitt aller A_i definiert als:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i \in I} A_i &=_{\text{def}} \{\, a \mid (\exists i \in I)[a \in A_i] \,\} \\
\bigcap_{i \in I} A_i &=_{\text{def}} \{\, a \mid (\forall i \in I)[a \in A_i] \,\}
\end{aligned}$$

Für $I = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ bzw. $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Beispiele: Folgende Beispiele und Spezialfälle sollen die Wirkungsweise von allgemeiner Vereinigung und Durchschnitt demonstrieren:

- Es seien $U = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{N}_+$ und
$$A_k =_{\text{def}} \left\{ x \,\middle|\, |x^2 - 1| \leq \frac{1}{k} \right\}$$
Dann gilt:
$$\begin{aligned}
\bigcup_{k \in I} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k &= \left\{ x \,\middle|\, |x^2 - 1| \leq 1 \right\} \\
&= \left\{ x \,\middle|\, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right\} {}_{\text{def}} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \\
\bigcap_{k \in I} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k &= \{-1, 1\}
\end{aligned}$$

- Es gilt stets $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$. Dies ist verträglich mit folgender Rechenregel für Indexmengen I_1 und I_2:

$$\left(\bigcup_{i\in I_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right) = \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} A_i$$

- Es gilt stets $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$. Dies ist verträglich mit folgender Rechenregel für Indexmengen I_1 und I_2:

$$\left(\bigcap_{i\in I_1} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in I_2} A_i\right) = \bigcap_{i\in I_1\cup I_2} A_i$$

Wir merken abschließend an, dass auch die logischen Äquivalenzen für quantifizierte Aussagen ihre Entsprechung auf Mengenebene besitzen:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \;\cup\; \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} (A_i \cup B_i) \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \;\cap\; \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} (A_i \cap B_i)$$

und insbesondere

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

3.4 Potenzmengen

Mengen von Mengen heißen (Mengen)Familien. Um dies widerspruchsfrei einzuführen, benötigen wir die Operation der Potenzmengenbildung, die von einem anderen Typ als Vereinigung, Durchschnitt und Differenzen ist. Die Potenzmenge einer Menge A ist definiert als

$$\mathcal{P}(A) =_{\text{def}} \{\ X \mid X \subseteq A\ \}$$

Für die Potenzmenge von A gelten folgenden Aussagen:

Proposition 3.3

Es sei A eine beliebige Menge.

1. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$
2. $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$
3. Ist A endlich, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der Definition. Die dritte Aussage werden wir im Kapitel über Kombinatorik beweisen. ■

Die Elemente der Potenzmenge sind also Mengen aus dem Universum $\mathcal{P}(A)$. Der letzte Sachverhalt lässt die mitunter auch verwendete Bezeichnung 2^A für die Potenzmenge von A plausibel erscheinen.

Beispiele: Folgende Mengen verdeutlichen die Potenzmengenkonstruktion.

- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Die Teilmengen der Potenzmenge heißen Mengenfamilien.

Beispiel: Für eine Menge A und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{P}_k(A)$ definiert als

$$\mathcal{P}_k(A) =_{\text{def}} \{ X \mid X \subseteq A, |X| = k \}.$$

Insbesondere ist also $\mathcal{P}_1(A)$ die Familie der Einermengen von A, $\mathcal{P}_2(A)$ ist die Familien der Zweiermengen von A usw. usf. Für $|A| = n < \infty$ gilt

$$\mathcal{P}(A) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(A).$$

Eine wichtige Mengenfamilie ist die Partition oder Zerlegung eines Universums.

Definition 3.4

Eine Mengenfamilie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ heißt (ungeordnete) Partition von A, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $B \cap C = \emptyset$ für alle Mengen $B, C \in \mathcal{F}$ mit $B \neq C$
2. $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = A$

Die Mengen $B \in \mathcal{F}$ heißen Komponenten der Partition.

Leere Mengen werden als Komponenten einer Partition weggelassen.

Beispiele: Folgende Familien verdeutlichen das Konzept von Partitionen.

- $\{\mathbb{R}_{<0}, \{0\}, \mathbb{R}_{>0}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}$ mit drei Komponenten.
- $\{ \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}$ mit unendlich vielen Komponenten. (Genauer gesagt besteht die Partition aus überabzählbar vielen Komponenten.)
- Für jede Menge $A \subseteq U$ ist $\{A, \overline{A}\}$ eine Partition von U mit zwei Komponenten. Tatsächlich ist für jede Menge $U \neq \emptyset$ die Partition $\{A, \overline{A}\}$ die einzige Partition von U, die die Menge A als Komponente besitzt. Dazu muss nur gezeigt werden, dass für zwei Partitionen $\{A, B\}$ und $\{A, \overline{A}\}$ stets $B = \overline{A}$ gilt. Dies ist leicht einzusehen, da einerseits $A \cap B = \emptyset$ äquivalent zu $A \subseteq \overline{B}$ und andererseits $A \cup B = U$ einmal äquivalent zu $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ und somit auch zu $\overline{B} \subseteq A$ ist. Damit folgt $B = \overline{A}$.

Im letzten Beispiel haben wir die Gleichheit zweier Partitionen dadurch gezeigt, dass wir die Gleichheit aller einzelnen Komponenten nachgeweisen haben ($A = A$ und $B = \overline{A}$). Damit haben wir uns zuviel Arbeit gemacht. Es hätte genügt Inklusionen der Komponenten zu zeigen ($A \subseteq A$ und $B \subseteq \overline{A}$). Die Gleichheiten der Komponenten folgen mittels des Hauberschen Theorems.

Theorem 3.5 (Hauber)

Es seien $\{ A_i \mid i \in I \}$ und $\{ B_i \mid i \in I \}$ zwei Partitionen von U mit einer beligen Indexmenge I. Gilt $A_i \subseteq B_i$ für alle $i \in I$, so gilt $B_i \subseteq A_i$ (und mithin $A_i = B_i$) für alle $i \in I$.

Beweis: Es sei A_i eine beliebige Komponente mit $i \in I$. Dann gilt

$$\emptyset = \overline{U} = \overline{A_i \cup \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} A_j} = \overline{A_i} \cap \overline{\bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} A_j}$$

und somit

$$\overline{A_i} \subseteq \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} A_j \subseteq \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} B_j \subseteq \overline{B_i}$$

Daraus folgt $B_i \subseteq A_i$. Damit ist der Satz bewiesen. ∎