5.2 Urnenmodelle

Urnenmodelle sind abstrakte Szenarien f. komb. Fragestellungen. Betrachten einfachsten Fall:

- In einer Urne liegen n unterschiedliche Kugeln, von denen k Kugeln gezogen werden dürfen
- Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es k Kugeln zu ziehen?

Unterscheiden Szenarien danach

- ob gezogene Kugeln wieder zurückgelegt werden oder nicht;
- ob Reihenfolge, in der Kugeln gezogen werden, eine Rolle spielt

Beispiele:

1. Lotto (6 aus 49): ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge
2. PIN-Codes (4-stellig): mit Zurücklegen, mit Reihenfolge
3. Wettkämpfe (Gold-Silber-Bronze): ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge
4. Wahlen (Stimmverteilungen): mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge

Satz 6.

Die Anzahl d. Möglichkeiten, aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln auszuwählen, ist durch folgende Tabelle gegeben:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge (geordnet)	n^k Komplexion	$n^{\underline{k}} =_{def} \frac{n!}{(n-k)!}$ Variationen
ohne Reihenfolge (ungeordnet)	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} =_{def} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ Kombination

Beweis: Alle Fälle einzeln aber aufeinander aufbauend:

(1.) Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge: Analyse:

- Für erste gez. Kugel gibt es n Möglichkeiten
- Für zweite gez. Kugel gibt es n Möglichkeiten

$\vdots$

- Für k-te gez. Kugel gibt es n Möglichkeiten

Insgesamt:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k \text{ Möglichkeiten}$$

(2.) Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge: Analyse:

- Für erste gez. Kugel gibt es n Möglichkeiten
- Für zweite gez. Kugel gibt es $n-1$ Möglichkeiten

$\vdots$

- Für k-te gez. Kugel gibt es $\overset{n-(k-1)}{n-k+1}$ Möglichkeiten

Insgesamt:

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!} \overset{\text{auf}}{=} n^{\underline{k}} \text{ Möglichkeiten}$$

(3.) Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge: Mit Reihenfolge gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Wenn Reihenfolge keine Rolle spielt, zählen alle Ziehungen derselben k Kugeln als eine Möglichkeiten. Davon gibt es gerade $\frac{k!}{(k-k)!} = k!$ viele Möglichkeiten. Insgesamt:

$$\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{auf}}{=} \binom{n}{k} \text{ Möglichkeiten}$$

(4.) Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge: Jede Kugel kann mehrmals gezogen werden; Reihenfolge spielt keine Rolle, d.h. nur Anzahl, wie oft Kugel gezogen wird, ist wichtig. Schreiben Ziehung als Tupel $(a_1,\ldots,a_n)$, wobei a_j gerade die Anzahl ist, wie oft Kugel j gezogen wird.

Für Anzahltupel $(a_1,\ldots,a_n)$ muss gelten:

(i) $a_i \in \{0,1,\ldots,k\}$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$

(ii) $a_1+a_2+\cdots+a_n=k$

müssen zählen, wie viele solche Tupel es gibt:
Schreiben Tupel in anderer Weise unter Verwendung von $*$ (k-mal) und $|$ ($n-1$)-mal:

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \underbrace{*\cdots*}_{a_1} | \underbrace{*\cdots*}_{a_2} | \cdots | \underbrace{*\cdots*}_{a_n}$$

Jedes Tupel wird genau durch eine Symbolfolge beschrieben und umgekehrt.

Statt Tupel bestimmen wir Anzahl d. Symbolfolgen:
Dies entspricht Ziehen von k Kugeln (Position für $*$) aus $n+k-1$ Kugeln (Gesamtzahl d. Position in Symbolfolge) ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge.

Insgesamt: $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten ■

<u>Beispiel (Fort.):</u>

1. Lotto („6 aus 49"): $n=49$, $k=6$; $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} = \frac{49^{\underline{6}}}{6!}$

$= 13.983.816$ Ziehungen

2. PIN-Codes (4-stellig): $n=10$, $k=4$; $10^4 = 10.000$ Codes
3. Wettkämpfe (GSB): $n=8$, $k=3$; $8^{\underline{3}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ Siegerehrungen
4. Wahlen (Stimmvert.): $n=3$, $k=100$; $\binom{102}{100} = 5.151$ Wahlausgänge

Urnenmodelle treten oft gemischt auf:

Beispiele:

(1) Es gibt 3^n Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{a,b,c\}$

Es gibt $3^n - 3$ Wörter der Länge n mit mindestens zwei versch. Buchstaben.

Es gibt $\binom{3n}{n}\binom{2n}{n}$ Wörter, in denen alle Buchstaben gleich oft, d.h. n-mal, vorkommen.

Beispiele:

(2.) Wettkämpfe (Gold-Silber-Bronze): Wollen Anzahl unterschiedlicher Beflaggungen f. die Siegerehrung bestimmen f. 100m-Lauf mit 8 Teilnehmerinnen und jeweils 2 aus einem Land:

Auw. d. Fahnen — Platzierung d. Fahnen — restliche Fahne

$$\binom{4}{3}3! \quad + \quad \binom{4}{2}\binom{3}{2}\cdot 2 = 60$$

alle Fahnen versch. — zwei Fahnen gleich

Alternativ: Von allen Beflaggungen mit 4 Fahnen scheiden 4 aus, da keine Fahne dreimal vorkommt:

$$4^3 - 4 = 64 - 4 = 60$$

(3.) Alice und Bob versuchen, folg. komb. Aufgabe zu lösen: Wie viele Wörter der Länge $n \geq k$ können über k-elementigem Alphabet gebildet werden, in denen jeder Buchst. mindestens einmal vorkommt?

Bob: Jeder Buchstabe muss einmal vorkommen; daher $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Buchstaben auf n Pos. verteilen. Restliche $n-k$ Pos. beliebig belegbar, somit $\binom{n}{k} k^{n-k}$.

Alice: Ja, aber die k Pos. können in untersch. Reihenfolge belegt werden, daher $k!$ als Faktor

Beide: Antwort $k!\binom{n}{k}k^{n-k}$. Fertig!

Haben Alice und Bob recht?