Erweitern log. Äquivalenz $\equiv$ auf Aussageformen.

<u>Definition 11.</u>

Es seien $A(x_1,\dots,x_n)$ und $B(x_1,\dots,x_n)$ Aussageformen über Universen $U_1,\dots,U_n$. Dann gilt:

$A(x_1,\dots,x_n) \equiv B(x_1,\dots,x_n)$

$:\Leftrightarrow$ $A(u_1,\dots,u_n) \Leftrightarrow B(u_1,\dots,u_n)$ ist wahr für alle $u_1,\dots,u_n$ aus den jew. Universen

$\Leftrightarrow$ $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\,[\,A(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow B(x_1,\dots,x_n)\,]$ ist wahr

<u>Satz 12.</u>

Es seien $A(\vec{x})$ und $B(\vec{x})$ Aussageformen mit den Variablen $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ über Universen $U_1,\dots,U_n$ sowie $i \neq j$ zwei Indizes.

(1.) $(\exists x_i)[A(\vec{x})] \lor (\exists x_i)[B(\vec{x})] \equiv (\exists x_i)[A(\vec{x}) \lor B(\vec{x})]$

$(\forall x_i)[A(\vec{x})] \land (\forall x_i)[B(\vec{x})] \equiv (\forall x_i)[A(\vec{x}) \land B(\vec{x})]$

(2.) $(\exists x_i)(\exists x_j)[A(\vec{x})] \equiv (\exists x_j)(\exists x_i)[A(\vec{x})]$

$(\forall x_i)(\forall x_j)[A(\vec{x})] \equiv (\forall x_j)(\forall x_i)[A(\vec{x})]$

(3.) $\neg(\exists x_i)[A(\vec{x})] \equiv (\forall x_i)[\neg A(\vec{x})]$

$\neg(\forall x_i)[A(\vec{x})] \equiv (\exists x_i)[\neg A(\vec{x})]$

$\blacksquare$

Beispiel: $P(x) =_{def}$ „x ist Primzahl" sei AF über $\mathbb{N}$.
Formulieren Aussage, dass es unendl. viele Primzahlen gibt:

$$A =_{def} (\forall x)(\exists y)[P(y) \land x < y]$$

Negation der Aussage: „Es gibt endlich viele Primzahlen."

$$\begin{aligned}
\neg A &\equiv \neg(\forall x)(\exists y)[P(y) \land x < y] \\
&\equiv (\exists x)[\neg(\exists y)[P(y) \land x < y]] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[\neg(P(y) \land x < y)] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[\neg P(y) \lor x \geq y] \\
&\equiv (\exists x)(\forall y)[P(y) \rightarrow x \geq y]
\end{aligned}$$

Intuitiv: „Es gibt eine größte Primzahl"

Häufig benutzte Redewendungen:

(1.) „Es gibt $x_1, \ldots, x_n$, sodass $A(x_1, \ldots, x_n)$ gilt."
(2.) „Für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt $A(x_1, \ldots, x_n)$."
(3.) „Für alle x mit $A(x)$ gilt $B(x)$"
(4.) „Es gibt ein x mit $A(x)$, sodass $B(x)$ gilt."

Zugehörige log. Formulierungen und Abk.:

(1.) $(\exists x_1, \ldots, x_n)[A(x_1, \ldots, x_n)] =_{def} (\exists x_1)(\exists x_2) \cdots (\exists x_n)[A(x_1, \ldots, x_n)]$
(2.) $(\forall x_1, \ldots, x_n)[A(x_1, \ldots, x_n)] =_{def} (\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_n)[A(x_1, \ldots, x_n)]$
(3.) $(\forall x; A(x))[B(x)] =_{def} (\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$
(4.) $(\exists x; A(x))[B(x)] =_{def} (\exists x)[A(x) \land B(x)]$

(3.), (4.) mit De Morgan verträglich:

$$\neg\,(\exists x;\, A(x))[B(x)] \equiv \neg(\exists x)[A(x) \wedge B(x)]$$
$$\equiv (\forall x)[\neg(A(x) \wedge B(x))]$$
$$\equiv (\forall x)[\neg A(x) \vee \neg B(x)]$$
$$\equiv (\forall x)[A(x) \rightarrow \neg B(x)]$$
$$\equiv (\forall x;\, A(x))[\neg B(x)]$$

<u>Beispiel:</u> Wollen „Es gibt höchstens ein x mit $A(x)$" ausdrücken:

Idee: Negation von „Es gibt mindestens zwei verschiedene x mit $A(x)$":

$$H =_{def} (\exists x_1, x_2;\, x_1 \neq x_2)[A(x_1) \wedge A(x_2)]$$
$$= (\exists x_1)(\exists x_2)[x_1 \neq x_2 \wedge A(x_1) \wedge A(x_2)]$$

Somit gilt:

$$\neg H \equiv (\forall x_1)(\forall x_2)[\neg(x_1 \neq x_2 \wedge A(x_1) \wedge A(x_2))]$$
$$\equiv (\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 = x_2 \vee \neg(A(x_1) \wedge A(x_2))]$$
$$\equiv (\forall x_1)(\forall x_2)[A(x_1) \wedge A(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$$