(3.) $R' =_{\text{def}} \{(m,n) \mid m \text{ teilt } n\} \subseteq \mathbb{N}^2$; $m|n \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists c \in \mathbb{N})[n = c \cdot m]$

- R' reflexiv? Ja: $n = 1 \cdot n$, d.h. n teilt n für alle $n \in \mathbb{N}$
- R' transitiv? Ja: Gilt $k|m$ und $m|n$, so gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $m = c_1 \cdot k$ und $n = c_2 \cdot m$; somit gilt $n = c_2 \cdot c_1 \cdot k$, d.h. $k|n$ für alle $k, m, n \in \mathbb{N}$
- R' antisymmetrisch? Ja: Gilt $m|n$ und $n|m$, d.h. es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ mit $n = c_1 \cdot m$ und $m = c_2 \cdot n$, d.h. $n = c_1 \cdot c_2 \cdot n$, d.h. $c_1 = c_2 = 1$, d.h. $n = m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$
- R' linear? Nein: $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$

(4.) $R'' =_{\text{def}} \{(A,B) \mid A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X)^2$ für Grundmenge X.

- R'' reflexiv: $A \subseteq A$ für $A \subseteq X$ ($A \in \mathcal{P}(X)$)
- R'' transitiv: $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so auch $A \subseteq C$
- R'' antisymmetrisch: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so ist $A = B$
- R'' nicht linear, falls $|X| \geq 2$: Es seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann gilt $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$.

Definition 8.

Es sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation auf A.

(1.) R heißt Halbordnung (oder partielle Ordnung), falls R reflexiv, transitiv, antisymmetrisch ist.

(2.) R heißt Ordnung (oder totale / lineare Ordnung), falls R Halbordnung und zusätzlich linear ist.

(3.) Ist R eine Halbordnung, so heißt (A, R) halbgeordnete Menge (oder partiell geordnete Menge)

(4.) Ist R eine Ordnung, so heißt (A, R) geordnete Menge (oder total / linear geordnete Menge).

Beispiele:

R Ordnung, $(\mathbb{N}, \leq)$ geordnete Menge $(\leq \subseteq \mathbb{N}^2)$
R' Halbordnung, $(\mathbb{N}, |)$ halbgeordnete Menge
R'' Halbordnung, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ halbgeordnete Menge

Definition 9.

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$.

(1.) Ein Element $a \in K$ heißt **Minimum** (bzw. **Maximum**) von K, falls $a \leq_R b$ (bzw. $b \leq_R a$) für alle $b \in K$ gilt.

(2.) Ein Element $a \in A$ heißt **untere Schranke** (bzw. **obere Schranke**), falls $a \leq_R b$ (bzw. $b \leq_R a$) für alle $b \in K$ gilt.

(3.) Ein Element $a \in A$ heißt **Infimum** (bzw. **Supremum**) von K, falls a eine untere (bzw. obere) Schranke von K ist und $b \leq_R a$ (bzw. $a \leq_K b$) für alle unteren (bzw. oberen) Schranken b von K gilt.

Proposition 10.

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$. Existiert das Minimum (Maximum, Infimum, Supremum), so ist es eindeutig.

Beweis: (nur für Minimum)

Es seien $a, a' \in K$ Minima von K. Dann gilt $\overset{(a,a')\in R}{a \leq_R a'}$, da a Min. v. K, und $\overset{(a',a)\in R}{a' \leq_K a}$, da a' Min. v. K. Wegen Antisymmetrie von R gilt $a = a'$! ∎

Bemerkung:

1. min(K) steht für Minimum v. K
   max(K) — " — Maximum v. K
   inf (K) — " — Infimum v. K
   sup (K) — " — Supremum v. K

2. Infimum ist die größte untere Schranke
   Supremum ist die kleinste obere Schranke

3. Minimum, Maximum, Infimum, Supremum müssen nicht ex.

Beispiele:

1. $\min(\emptyset)$, $\max(\emptyset)$ existieren nicht

2. $A = \mathbb{Q}$, $R =_{def} \{(x,y) \mid x \leq y\} \subseteq A \times A$; für

   $K_+ =_{def} \{x \mid 0 < x\} \subseteq A$
   $K_- =_{def} \{x \mid x < 0\} \subseteq A$

   gilt:
   - $\min(K_+)$ ex. nicht; $\min(K_-)$ ex. nicht
   - $\max(K_+)$, $\max(K_-)$ ex. nicht
   - Menge d. unteren Schranken v. K_+: $K_- \cup \{0\}$
   - Menge d. oberen Schranken v. K_+: $\emptyset$
   - Menge d. oberen Schranken v. K_-: $K_+ \cup \{0\}$
   - Menge d. unteren Schranken v. K_-: $\emptyset$
   - $\inf(K_+) = \max(K_- \cup \{0\}) = 0$
   - $\sup(K_+)$ ex. nicht
   - $\sup(K_-) = \min(K_+ \cup \{0\}) = 0$
   - $\inf(K_-)$ ex. nicht

3. veränderte Grundmenge $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, R, K_+, K_- wie gehabt:

- Menge d. unteren Schranken v. K_+ : K_-
- $\inf(K_+)$ ex. nicht, da K_- kein Max. besitzt.

4. $A = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $R = \{(m,n) \mid m \leq n\} \subseteq A \times A$.

Dann gilt:

- $\inf(\emptyset) = \max(A) = 10$
- $\sup(\emptyset) = \min(A) = 0$

<u>Definition 11.</u>

Es seien $R \subseteq A \times A$ eine Halbordnung und $K \subseteq A$.
Ein Element $a \in K$ heißt minimal (bzw. maximal) in K, falls für alle $b \in K$ gilt:

Ist $b \leq_R a$ (bzw. $a \leq_R b$), so ist $a = b$.