

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

А. Н. Трофимов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2015

УДК 621.391(075.8)

ББК 32.811.3я73

Т76

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент *С. Э. Хоружников*;
кандидат технических наук, доцент *П. В. Трифонов*

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Трофимов, А. Н.

Т76 Основы теории цифровой связи: учебное пособие / А. Н. Трофимов. – СПб.: ГУАП, 2015. – 184 с.: ил.
ISBN 978-5-8088-0998-7

Рассматриваются основные виды дискретной модуляции, алгоритмы оптимального приема, некоторые модели каналов, а также задача вычисления и оценивания вероятности ошибки приема цифровых сигналов в различных условиях.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 90900 «Информационная безопасность», а также по смежным направлениям. Может быть использовано для самостоятельной работы студентов и при выполнении заданий по НИР.

УДК 621.391(075.8)

ББК 32.811.3я73

ISBN 978-5-8088-0998-7

© Трофимов А. Н., 2015

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии излагаются основы теории цифровой связи. Содержание книги представляет собой расширенный конспект лекций по общим вопросам теории передачи дискретных сообщений. Курс такого содержания в течение ряда лет читался автором в Санкт-Петербургском государственном университете аэрокосмического приборостроения. В пособии рассматриваются основные классические вопросы теории цифровой связи, а также уделено внимание некоторым моделям каналов передачи, представляющим теоретический и практический интерес. Курс охватывает комплекс вопросов, включающих описание основных видов дискретной модуляции, важные для теории и практики модели каналов, алгоритмы оптимального приема, оценки вероятности ошибки, и не включает вопросы, относящиеся к задачам кодирования источников, помехоустойчивому кодированию, организации систем связи и т. п., изучаемых в других курсах. Основное содержание пособия посвящено исследованию надежности передачи с использованием основных видов дискретной модуляции.

Разделы пособия дополнены задачами и упражнениями, решение которых может быть полезным для более глубокого освоения теоретических вопросов.

1. ВВЕДЕНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

1.1. Структура системы передачи информации.

Модели каналов и помех

В самом общем виде структура системы передачи информации может быть показана следующим образом (рис. 1.1).

Здесь под каналом понимается часть системы передачи, природа и характеристики которой заданы, а их изменение нежелательно, затруднено или просто невозможно. Задача, решаемая системой передачи, состоит в том, чтобы передать сообщение m от источника к получателю. Как правило, сообщение источника представлено в такой форме, в которой невозможна его эффективная передача по каналу. Поэтому в систему обычно включаются устройства передачи и приема, которые выполняют преобразование сообщения m в сигнал s и преобразование принятого сигнала r в принятое сообщение \hat{m} (рис. 1.2).

Заметим, что преобразование $m \rightarrow s$, выполняемое передатчиком, является детерминированным и взаимно-однозначным; преобразование $s \rightarrow r$, определяемое каналом, является случайным; преобразование $r \rightarrow \hat{m}$, выполняемое в приемнике, является детерминированным, но не взаимно-однозначным.

Если источник порождает сообщения из конечного множества, то он называется источником дискретных сообщений, в противном случае источник называется источником непрерывных сообщений.

Процесс формирования сигнала по сообщению называется *модуляцией*. В процессе модуляции выполняется изменение пара-

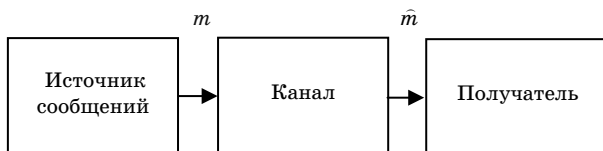


Рис. 1.1. Общая схема системы передачи

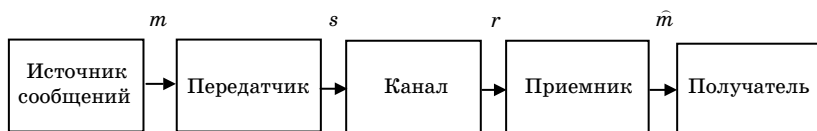


Рис. 1.2. Схема системы передачи информации

метров сигнала в соответствии с сообщением, подлежащим передаче. Если множество сигналов, формируемых в процессе модуляции, оказывается конечным, то такая модуляция называется дискретной или цифровой. В настоящем курсе рассматривается передача с использованием дискретной модуляции. Более подробная схема передачи дискретных сообщений с использованием цифровой модуляции показана на рис. 1.3.

Кодирование-декодирование источника служит для уменьшения избыточности, присутствующей в сообщениях источника. В результате кодирования сообщения источника оказываются записанными с использованием меньшего числа символов, т. е. эти сообщения представляются в сжатой форме. Кодирование источника может выполняться с потерями (например, сжатие звука и изображений, представленных в цифровой форме) либо без потерь (например, архивирование файлов).

Канальное, или помехоустойчивое, кодирование-декодирование применяется для обеспечения большей надежности передачи. При использовании помехоустойчивого кодирования скорость передачи уменьшается за счет передачи избыточных символов, позволяющих исправлять ошибки, возникающие в канале. Вообще говоря, в системе передачи информации операции кодирования-декодирования источника и/или помехоустойчивого кодирования-декодирования могут отсутствовать.

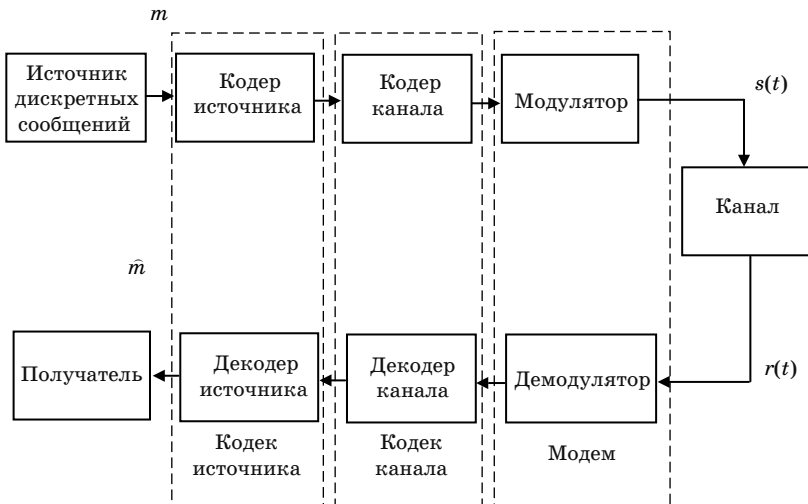


Рис. 1.3. Схема системы передачи дискретных сообщений

На рис. 1.4 показана структура системы цифровой передачи непрерывных сообщений.

Непрерывное сообщение источника подвергается дискретизации и квантованию (аналого-цифровому преобразованию); в результате этой операции формируется цифровой поток. Дальнейшая передача выполняется так же, как показано на рис. 1.3. После приема цифрового потока непрерывное сообщение источника восстанавливается с использованием цифроаналогового преобразования и интерполяции (сглаживания).

Качество системы передачи дискретных сообщений характеризуется вероятностью ошибки, которая определяется как $P_e = \Pr[\hat{m} \neq m]$, где m – переданное сообщение, \hat{m} – полученное сообщение. Само сообщение может иметь различный объем: от одного бита до нескольких тысяч бит и более в зависимости от назначения системы передачи сообщений. При передаче непрерывных сообщений в качестве критерия качества рассматривается некоторая мера близости сообщения $\hat{m}(t)$, доставленного получателю, и оригинального сообщения $m(t)$. Наиболее часто используется сред-

неквадратичное отклонение $\Delta^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (m(t) - \hat{m}(t))^2 dt$ или от-

ношение Δ^2/P , где $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T m(t)^2 dt$ – мощность непрерывного сообщения. Следует отметить, что малое значение среднеквадратичного отклонения не всегда соответствует хорошему воспроизведению непрерывного сообщения, например звукового. В этом случае используется другая мера отклонения, например такая $\max_{0 < t < T} |m(t) - \hat{m}(t)|$.

Основными параметрами системы передачи являются *скорость передачи, ширина полосы частот и отношение сигнал/шум*. Эти параметры обычно являются исходными, и при заданных значениях этих параметров нужно обеспечить требуемое качество передачи.

Различаются *информационная и модуляционная скорости*. Модуляционная скорость, или символьная скорость, определяется как $V_{\text{мод}} = T^{-1}$, где T – период следования дискретных сигналов. Модуляционная скорость численно равна числу изменений параметров дискретного сигнала в единицу времени. Единицей измерения модуляционной скорости является Бод, (Baud), 1 Бод = с⁻¹. Информационная скорость определяется как количество информации, передаваемое в единицу времени, и измеряется в бит/с. При передаче с использованием равновероятных q -ичных дискретных сигналов

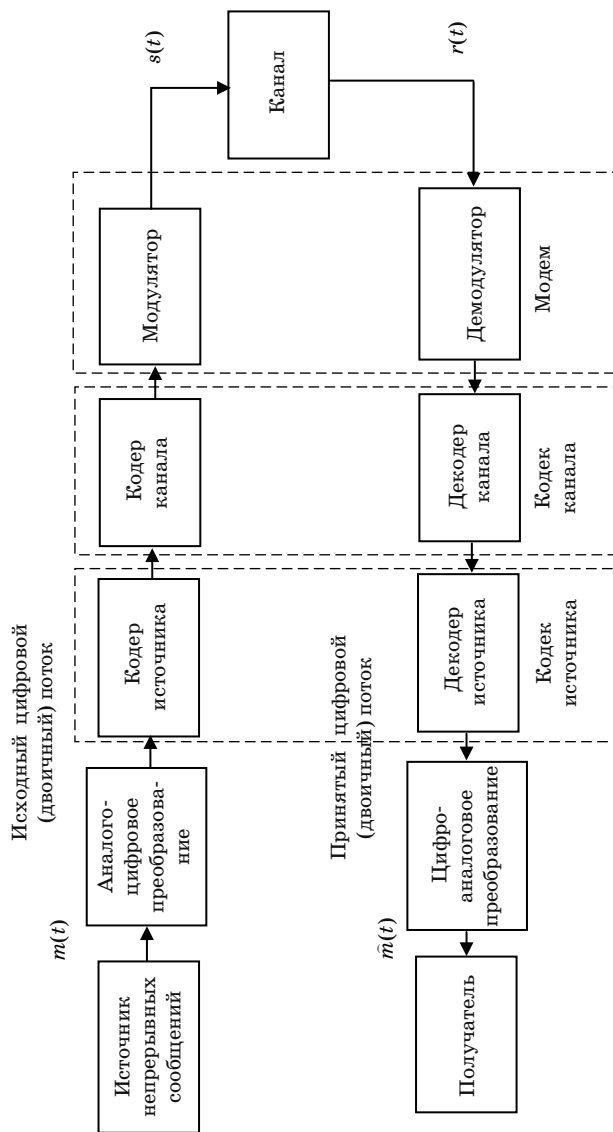


Рис. 1.4. Схема цифровой системы передачи непрерывных сообщений

и при отсутствии помехоустойчивого кодирования информационная скорость может быть вычислена как $V = \log_2 q / T$. Заметим, что значения информационной и модуляционной скоростей численно равны только в случае двоичной передачи, т. е. при $q = 2$.

Помехи, действующие в канале передачи информации, можно разделить на помехи *естественного происхождения* и помехи *искусственного происхождения*, которые в свою очередь делятся на *преднамеренные* и *непреднамеренные*. По своему действию на передаваемый сигнал помехи могут быть *аддитивными* и *мультипликативными*. Среди аддитивных помех различаются: тепловой шум, сосредоточенная помеха, импульсная помеха, помехи от других систем передачи. На рис. 1.5 показаны типичные реализации некоторых аддитивных помех (слева) и их спектральное представление (справа). Видно, что спектр сосредоточенной помехи сконцентрирован в нескольких узких участках частотного диапазона, а сама сосредоточенная помеха занимает всю временную область. Импульсная помеха представляет собой последовательность коротких по сравнению с длительностью полезного сигнала импульсов, т. е. импульсная помеха сосредоточена во временной об-

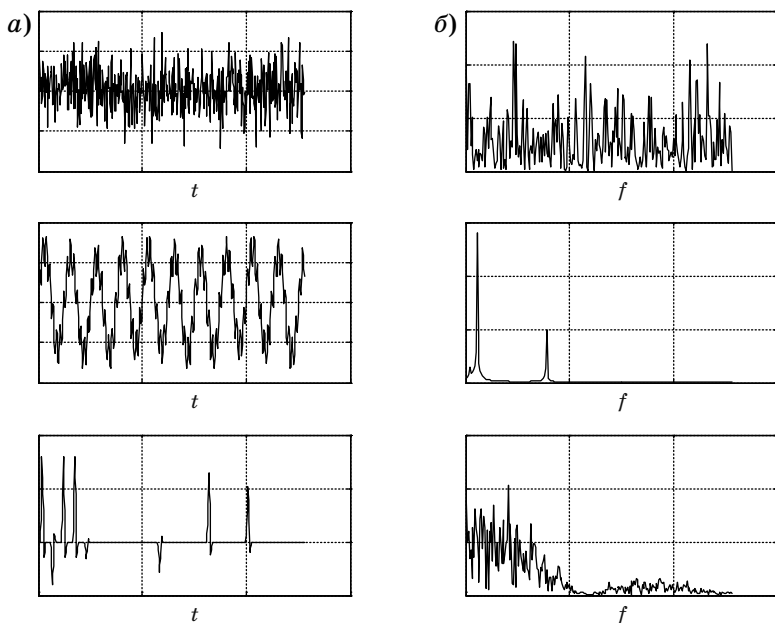


Рис. 1.5. Аддитивные помехи: шум, сосредоточенная, импульсная (сверху вниз); а) типичные реализации, б) типичные спектры

ласти. Спектр импульсной помехи достаточно протяжен в частотной области. Реализация теплового шума занимает всю временную область. Спектр теплового шума занимает всю частотную область.

1.2. Геометрическое представление сигналов

Начнем с напоминания необходимых определений и обозначений. Пусть некоторые функции $g(t)$ и $h(t)$ определены на интервале

$[a, b]$. Величина $\int_a^b g(t)h(t)dt$ называется скалярным произведением

функций $g(t)$ и $h(t)$ и обозначается как (g, h) . Величина $\left(\int_a^b g^2(t)dt \right)^{1/2}$

называется нормой функции $g(t)$ и обозначается как $\|g\|$. Заметим,

что $(g, g) = \|g\|^2$. Наконец, величина $\left(\int_a^b (g(t) - h(t))^2 dt \right)^{1/2}$ называется

расстоянием, точнее говоря, евклидовым расстоянием, между функциями $g(t)$ и $h(t)$ и обозначается $d(g, h)$. Очевидно, что $d(g, h) =$

$\|g - h\|$. Кроме того, очевидно, что $\|g - h\|^2 = \|g\|^2 - 2(g, h) + \|h\|^2$. Аналогично

определяются расстояние, норма и скалярное произведение для векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$: $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2 \right)^{1/2}$,

$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$. Легко видеть также, что $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2$.

Пусть сигнал $s(t)$ определен на конечном интервале времени, например на $[0, T]$, где T – период следования сигналов. Пусть $\{\varphi_j(t)\}$, $j=1, 2, \dots$, – множество ортонормированных функций, определенных на интервале $[0, T]$, т. е. таких, для которых выполняется условие

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \int_0^T \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде линейной комбинации D базисных функций

$$s(t) = \sum_{j=1}^D s_j \varphi_j(t). \quad (1.1)$$

Величина D называется размерностью пространства сигналов. Заметим, что D может быть конечной или бесконечной величиной. По поводу размерности D следует сделать пару замечаний.

1. Пусть $\{s_i(t)\}$, $i=0, \dots, q-1$ – некоторое *фиксированное* сигнальное множество. Тогда существует алгоритм построения базиса $\{\varphi_j(t)\}$, $j=1, \dots, D$, и $D \leq q$, причем равенство имеет место только тогда, когда сигналы $\{s_i(t)\}$ линейно независимы. Алгоритм построения базиса по набору сигналов $\{s_i(t)\}$ называется процедурой Грама–Шмидта (см. приложение 1).

2. Если сигнальное множество *не фиксировано*, но все сигналы имеют конечную норму, то существует универсальный базис $\{\varphi_j(t)\}$, с помощью которого можно представить любой сигнал. Число базисных функций в этом случае может быть бесконечным.

Вернемся к рассмотрению равенства (1.1), называемого также обобщенным рядом Фурье. Величины s_j в (1.1) называются коэффициентами разложения сигнала $s(t)$ по базису $\{\varphi_j(t)\}$. Покажем, как коэффициенты разложения связаны с сигналом. Для этого умножим левую и правую части равенства (1.1) на $\varphi_k(t)$ и проинтегрируем на интервале $[0, T]$, т. е. вычислим

$$\begin{aligned} \int_0^T s(t) \varphi_k(t) dt &= \int_0^T \left(\sum_{j=1}^D s_j \varphi_j(t) \right) \varphi_k(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^D s_j \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \sum_{j=1}^D s_j \delta_{jk} = s_k. \end{aligned}$$

Таким образом получено, что k -й коэффициент разложения вычисляется следующим образом:

$$s_k = \int_0^T s(t) \varphi_k(t) dt = (s, \varphi_k). \quad (1.2)$$

Собирая вместе равенства (1.1) и (1.2), получим в итоге пару преобразований

$$\begin{cases} s(t) = \sum_{j=1}^D s_j \varphi_j(t), \\ s_j = \int_0^T s(t) \varphi_j(t) dt, \end{cases} \quad (1.3)$$

ставящих во взаимно-однозначное соответствие сигнал $s(t)$ и набор коэффициентов $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_D)$, которое будем обозначать как $s(t) \xleftrightarrow{\{\varphi_j(t)\}} \mathbf{s}$.

Далее рассмотрим случай сигнального множества конечной размерности, т. е. случай $D < \infty$. В этом случае имеет место отображение сигнального множества $\{s_i(t)\}$ в множество сигнальных векторов, или сигнальных точек в D -мерном вещественном пространстве \mathbb{R}^D

$$\{s_i(t)\} \xleftrightarrow{\{\varphi_j(t)\}} \{\mathbf{s}_i\} \in \mathbb{R}^D. \quad (1.4)$$

Для значений размерности $D \leq 3$ множество сигнальных точек может быть изображено графически. Такое изображение называется иногда сигнальным созвездием (signal constellation). Примеры сигнальных созвездий показаны на рис. 1.6.

Рассмотрим свойства отображения (1.4).

Свойство 1. Представление (1.3) дает наилучшее приближение при любом фиксированном числе слагаемых.

Пусть $\tilde{s}(t) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(t)$, где c_j – некоторые коэффициенты, $N \leq D$. Покажем, что если коэффициенты c_j назначены равными коэффициентам s_j из (1.2), то $\tilde{s}(t)$ и $s(t)$ будут близки в некотором смысле. Обозначим через Δ величину рассогласования между $\tilde{s}(t)$ и $s(t)$ и определим ее как квадрат расстояния между функциями, т. е. $\Delta = \int_0^T (s(t) - \tilde{s}(t))^2 dt$. Найдем значения коэффициентов c_j , минимизирующие Δ , решая уравнение $\partial \Delta / \partial c_j = 0$. Подробнее

$$\Delta = \int_0^T (s(t) - \tilde{s}(t))^2 dt = \int_0^T \left(s(t) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t) \right)^2 dt,$$

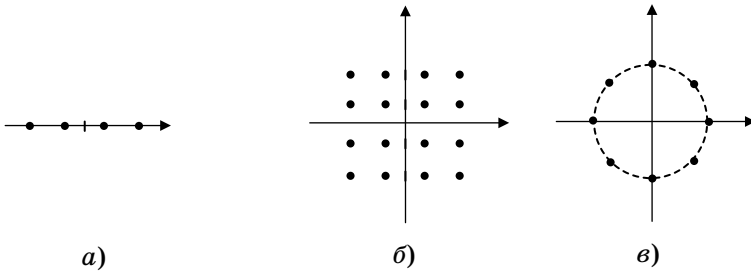


Рис. 1.6. Примеры сигнальных созвездий: а) $D = 1$, б, в) $D = 2$

тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta}{\partial c_j} &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial c_j} \left(s(t) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t) \right)^2 dt = -2 \int_0^T \left(s(t) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(t) \right) \varphi_j(t) dt = \\ &= -2 \int_0^T s(t) \varphi_j(t) dt + 2 \sum_{k=1}^N c_k \int_0^T \varphi_k(t) \varphi_j(t) dt = -2 \left(s_j - \sum_{k=1}^N c_k \delta_{kj} \right) = \\ &= -2(s_j - c_j) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $c_j = s_j$ рассогласование между $\tilde{s}(t)$ и $s(t)$ минимально. Заметим также, что при $N = D$ это рассогласование равно нулю.

Свойство 2. Энергия, или квадрат нормы сигнала, равна квадрату нормы (квadrату длины) соответствующего сигнального вектора, т. е.

$$\begin{aligned}E &= \int_0^T s^2(t) dt = \int_0^T s(t) s(t) dt = \int_0^T s(t) \sum_{j=1}^D s_j \varphi_j(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^D s_j \int_0^T s(t) \varphi_j(t) dt = \sum_{j=1}^D s_j s_j = \|\mathbf{s}\|^2.\end{aligned}$$

Свойство 3. Скалярное произведение сигналов равно скалярному произведению соответствующих сигнальных векторов, т. е. $(s_1, s_2) = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$.

$$\begin{aligned}\int_0^T s_1(t) s_2(t) dt &= \int_0^T s_1(t) \sum_{j=1}^D s_{2j} \varphi_j(t) dt = \sum_{j=1}^D s_{2j} \int_0^T s_1(t) \varphi_j(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^D s_{2j} s_{1j} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2).\end{aligned}$$

Свойство 4. Отображение (1.4) представляет собой изометрическое отображение, т. е. оно сохраняет расстояние, поэтому $d(s_1, s_2) = d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$; иными словами, расстояние между сигнальными функциями совпадает с расстоянием между соответствующими сигнальными точками.

Рассмотрим квадрат расстояния между сигналами

$$\begin{aligned}d^2(s_1, s_2) &= \int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = \int_0^T s_1^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt = \\ &= \|\mathbf{s}_1\|^2 - 2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) + \|\mathbf{s}_2\|^2 = d^2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2).\end{aligned}$$

Перечисленные свойства отображения (1.4) справедливы независимо от конкретного вида базиса, который может быть выбран многими способами.

Рассмотрим два примера универсальных, или функционально полных, базисов. Эти базисы содержат бесконечно много функций и могут использоваться для представления любых сигнальных функций.

Ортонормированный гармонический базис. Пусть $0 \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, \\ \varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \\ \varphi_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(2\pi \frac{2t}{T}\right), \\ \varphi_4(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(2\pi \frac{2t}{T}\right), \\ &\dots\end{aligned}$$

Заметим, что множитель $\sqrt{2/T}$ обеспечивает нормировку функций базиса. Графики нескольких первых функций гармонического базиса показаны на рис. 1.7.

Ортонормированный базис Уолша. Сначала определим функции $w_n(\tau)$ на интервале $\tau \in [-1/2, 1/2]$. Пусть

$$w_0(\tau) = \begin{cases} 0, & |\tau| > 1/2, \\ 1, & |\tau| \leq 1/2, \end{cases}$$

а все остальные функции более высокого порядка определяются рекурсивно

$$w_{2n+p}(\tau) = (-1)^{[n/2]+p} \left(w_n(2\tau + 1/2) + (-1)^{n+p} w_n(2\tau - 1/2) \right).$$

Функции $w_n(\tau)$, $n = 0, 1, \dots$ ортогональны и нормированы на интервале $[-1/2, 1/2]$. Графики нескольких первых функций базиса Уолша показаны на рис. 1.8.

Если положить $t = (\tau + 1/2)T$, то $t \in [0, T]$, если $\tau \in [-1/2, 1/2]$. Поэтому множество функций $\varphi_n(t)$, определенных как $\varphi_n(t) =$

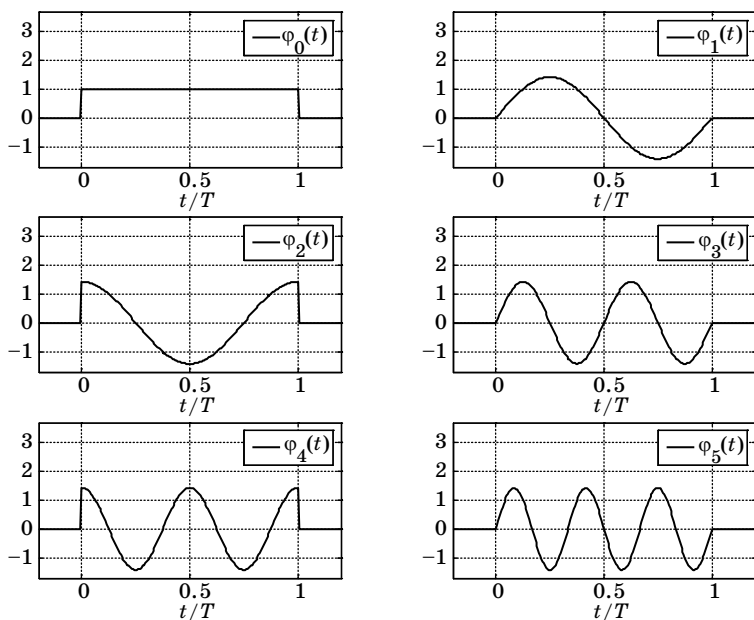


Рис. 1.7. Функции гармонического базиса, заданные на интервале $[0, T]$

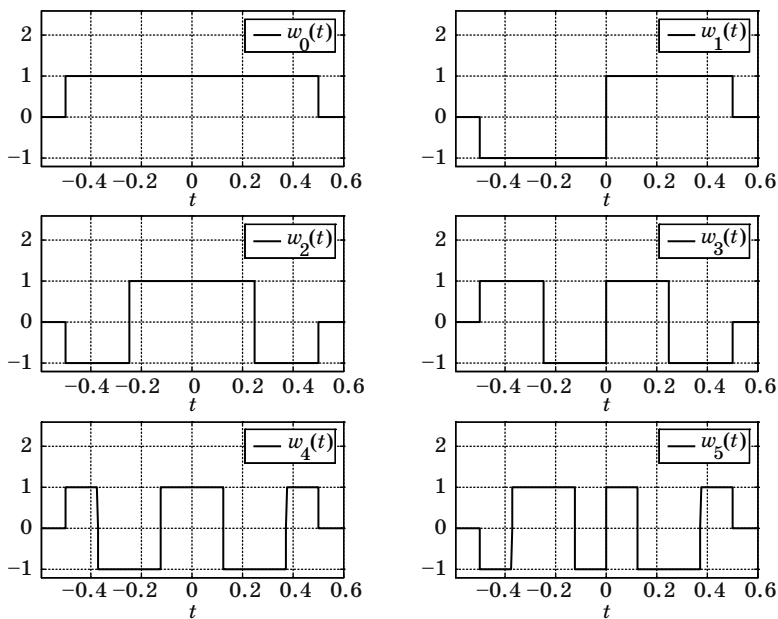


Рис. 1.8. Функции Уолша

$= \sqrt{1/T} w_n(t/T - 1/2)$, образуют ортонормированный базис на интервале $[0, T]$. Множитель $\sqrt{1/T}$ обеспечивает, как и ранее, нормировку функций базиса.

1.3. Периодические сигналы и ряд Фурье

Если для сигнала $s(t)$ выполняется условие $s(t) = s(t \pm T)$, то он называется периодическим. Наименьшее значение T , для которого это условие выполняется, называется периодом сигнала.

Рассмотрим интервал $[-T/2, T/2]$. В качестве базиса возьмем гармонический базис, рассмотренный ранее.

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{T}}, & k=0, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(2\pi \frac{t(k+1)/2}{T}\right), & k=1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(2\pi \frac{t(k/2)}{T}\right), & k=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Заметим, что этот базис обладает свойством ортонормированности не только на интервале $[0, T]$, но и на интервале $[-T/2, T/2]$. Вычислим коэффициенты разложения

$$s_k = (s, \varphi_k) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \varphi_k(t) dt. \quad (1.5)$$

Тогда для $t \in [-T/2, T/2]$ справедливо представление

$$s(t) = \sum_k s_k \varphi_k(t). \quad (1.6)$$

Если распространить область определения базисных функций $\{\varphi_k(t)\}$ с интервала $[-T/2, T/2]$ на всю ось времени, то они станут периодическими с периодом T . Поскольку сигнал $s(t)$ имеет период T , то равенство (1.6) будет выполняться и для $t \in (-\infty, \infty)$. Это значит, что обобщенный ряд Фурье для периодических функций и для гармонического базиса совпадает с обычным рядом Фурье.

Обычно ряд Фурье записывается в форме

$$s(t) = a_0 / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t), \quad (1.7)$$

где $f_k = k/T$. Найдем значения коэффициентов ряда Фурье a_k, b_k из (1.7), исходя из выражений (1.5) для коэффициентов обобщенного ряда Фурье (1.6). Ряд (1.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 \varphi_0(t) + s_1 \varphi_1(t) + s_2 \varphi_2(t) + s_3 \varphi_3(t) + s_4 \varphi_4(t) + \dots = \\ &= s_0 \frac{1}{\sqrt{T}} + s_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi \frac{t}{T} + s_2 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} + \\ &\quad + s_3 \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi \frac{2t}{T} + s_4 \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi \frac{2t}{T} + \dots \end{aligned}$$

Аналогично ряд (1.7) можно переписать в виде

$$s(t) = a_0 / 2 + a_1 \cos 2\pi f_1 t + b_1 \sin 2\pi f_1 t + a_2 \cos 2\pi f_2 t + b_2 \sin 2\pi f_2 t + \dots$$

Из сравнения двух последних выражений видно, что

$$\frac{a_0}{2} = s_0 \frac{1}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \varphi_0(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

отсюда следует

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt{\frac{2}{T}} s_{2k} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \varphi_{2k}(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left(2\pi \frac{kt}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos 2\pi f_k t dt, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_k &= \sqrt{\frac{2}{T}} s_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \varphi_{2k-1}(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left(2\pi \frac{kt}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin 2\pi f_k t dt. \end{aligned}$$

Итак, периодический сигнал может быть представлен рядом (1.7) с коэффициентами

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

1.4. Комплексная форма ряда Фурье

Ранее получено выражение для ряда Фурье

$$s(t) = a_0 / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t),$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt.$$

Его можно преобразовать с использованием формул Эйлера для тригонометрических функций: $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx}) / 2$ и $\sin x = (e^{jx} - e^{-jx}) / 2j$, где $j = \sqrt{-1}$, т. е.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{j2\pi f_k t} + e^{-j2\pi f_k t}}{2} + b_k \frac{e^{j2\pi f_k t} - e^{-j2\pi f_k t}}{2j} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - jb_k}{2} e^{j2\pi f_k t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j2\pi f_k t} \right).$$

Обозначим коэффициент при $\exp(j2\pi f_k t)$ как c_k , а коэффициент при $\exp(-j2\pi f_k t)$ — как c_{-k} . Очевидно, что $c_k = (a_k - jb_k)/2$ и $c_{-k} = (a_k + jb_k)/2$. Кроме того, $c_k = c_{-k}^*$. С учетом этих обозначений имеем запись ряда Фурье в комплексной форме

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}, \quad (1.8)$$

где

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt. \quad (1.9)$$

Равенства (1.8) и (1.9) допускают любопытную графическую интерпретацию. Каждый коэффициент c_k в правой части суммы (1.8) представляет собой комплексное число, которое может быть изображено точкой на комплексной плоскости. Поскольку $c_k = c_{-k}^*$, то точки, соответствующие коэффициентам c_k и c_{-k} , расположены симметрично относительно оси абсцисс. Каждое слагаемое $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ в сумме (1.8) представляет собой комплексное число и может быть изображено точкой на комплексной плоскости. При изменении значения времени t точки, соответствующие слагаемым $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ и $c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$, перемещаются по окружностям радиуса $|c_k| = |c_{-k}|$ по часовой стрелке и против нее соответственно. Сумма $c_k \exp(j2\pi kt/T) + c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$ при всяком значении t принимает вещественные значения, поэтому точка, соответствующая этой сумме, перемещается по оси абсцисс (рис. 1.9).

На рис. 1.10 показана иллюстрация для многих слагаемых в правой части равенства (1.8). В этой сумме для пары значений k и $-k$ есть пара слагаемых $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ и $c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$. Эти

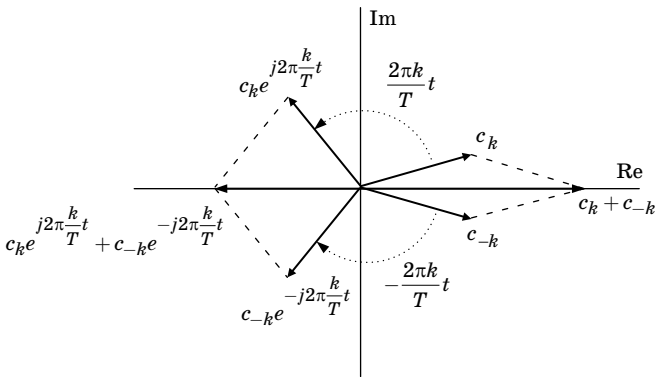


Рис. 1.9. Пара слагаемых $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ и $c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$ и их сумма

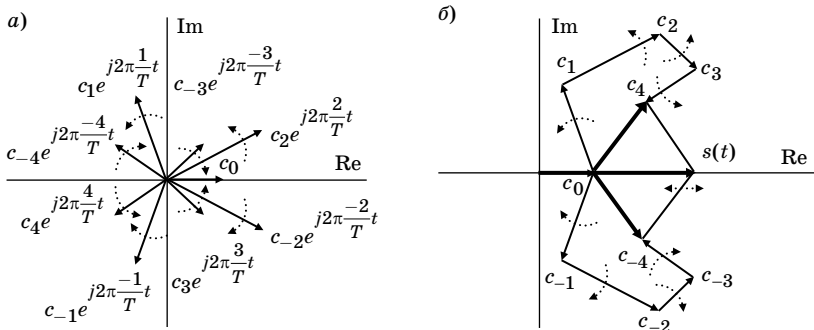


Рис. 1.10. Слагаемые $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ и $c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$ (а) и их суммы для $k > 0$ и $k < 0$ и полная сумма $s(t)$ (б)

слагаемые могут быть представлены как пара векторов, вращающихся по и против часовой стрелки с угловой скоростью $2\pi kt/T$ (см. рис. 1.9). На рис. 1.10, а показаны все векторы $c_k \exp(j2\pi kt/T)$ и $c_{-k} \exp(-j2\pi kt/T)$ для некоторого примера, а на рис. 1.10, б – суммы этих векторов для $k > 0$ и для $k < 0$. Точка, изображающая сумму всех слагаемых правой части равенства (1.8), отмечена на рис. 1.10, б как $s(t)$, и с изменением времени t эта точка перемещается по вещественной оси.

1.5. Преобразование Фурье и спектры сигналов

Ряд Фурье дает разложение периодического сигнала по гармоническому ортонормированному базису. Сигнал общего вида, т. е. непериодический, можно представить как «предельный» случай периодического сигнала при $T \rightarrow \infty$.

В общем случае вместо ряда Фурье рассматривается преобразование Фурье, определенное как

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1.10)$$

и обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.11) имеют определенное сходство с формулами ряда Фурье в комплексной форме и коэффициентами этого ряда соответственно

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt, \quad (1.12)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}. \quad (1.13)$$

Действительно, если подставить правую часть равенства (1.12) в (1.13), то получим, что

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \right) e^{j2\pi \frac{k}{T} t}.$$

Переход к пределу при $T \rightarrow \infty$ соответствует заменам $1/T$ на df , k/T на f , и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dots$ на $\int_{-\infty}^{\infty} \dots df$. Выполняя этот «предельный» переход, получаем

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{=S(f)} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df,$$

т. е. получаем равенства (1.10) и (1.11)

Функция $S(f)$, определенная равенством (1.10), называется спектральной плотностью или спектром сигнала $s(t)$. Также функция $S(f)$ называется преобразованием или образом функции $s(t)$, которая иногда называется оригиналом. Преобразование Фурье является взаимно-однозначным преобразованием; символически это преобразование будет обозначаться как $s(t) \leftrightarrow S(f)$. В настоящем курсе рассматриваются вещественные сигналы. Спектр даже в этом случае представляет собой комплекснозначную (принимаящую комплексные значения) функцию вещественной переменной. Поэтому можно записать, что

$$S(f) = |S(f)| e^{j\theta(f)} = |S(f)| \cos \theta(f) + j |S(f)| \sin \theta(f),$$

где $|S(f)|$ – амплитудный спектр (модуль комплексного спектра); $\theta(f)$ – фазовый спектр. Квадрат амплитудного спектра $|S(f)|^2$ назы-

вается энергетическим спектром. Кроме того, имеют место соотношения $|S(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re} S(f))^2 + (\operatorname{Im} S(f))^2}$, $\theta(f) = \arctan \frac{\operatorname{Im} S(f)}{\operatorname{Re} S(f)}$.

Рассмотрим подробнее вопрос о соотношении вещественной и мнимой составляющей спектра. Для этого рассмотрим произвольный вещественный сигнал $s(t)$. Он может быть представлен в виде суммы четной $s_{\text{ч}}(t)$ и нечетной $s_{\text{н}}(t)$ функций, т. е. $s(t) = s_{\text{ч}}(t) + s_{\text{н}}(t)$, где $s_{\text{ч}}(t) = (s(t) + s(-t))/2$, и $s_{\text{н}}(t) = (s(t) - s(-t))/2$. Найдем преобразование Фурье от $s(t)$.

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_{\text{ч}}(t) + s_{\text{н}}(t)) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (s_{\text{ч}}(t) + s_{\text{н}}(t)) (\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ч}}(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{н}}(t) \sin 2\pi f t dt + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{н}}(t) \cos 2\pi f t dt}_{=0} - \\ &\quad - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ч}}(t) \sin 2\pi f t dt}_{=0}. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых равны нулю, потому что они получены в результате интегрирования нечетной функции в симметричных пределах интегрирования. Таким образом,

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ч}}(t) \cos 2\pi f t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{н}}(t) \sin 2\pi f t dt,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re} S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ч}}(t) \cos 2\pi f t dt, \quad \operatorname{Im} S(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{н}}(t) \sin 2\pi f t dt.$$

Два последних равенства означают, что четная функция имеет вещественный спектр, а нечетная – мнимый, или $s_{\text{ч}}(t) \leftrightarrow \operatorname{Re} S(f)$, $s_{\text{н}}(t) \leftrightarrow \operatorname{Im} S(f)$. Повторим, что в общем случае спектр комплексный.

Рассмотрим важные примеры.

Пример 1. Пусть сигнал задан равенством

$$s(t) = \begin{cases} (A/T)e^{-t/T}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $A > 0$, $T > 0$. График сигнала показан на рис. 1.11. Вычислим его спектр.

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{T} \int_0^{\infty} e^{-t(1/T + j2\pi f)} dt = \\ &= -\frac{A/T}{1/T + j2\pi f} e^{-t(1/T + j2\pi f)} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{1 + j2\pi fT}. \end{aligned}$$

Амплитудный и фазовый спектры равны соответственно

$$|S(f)| = \frac{A}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}}, \quad \theta(f) = \arctan(-2\pi fT).$$

Графики амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 1.11.

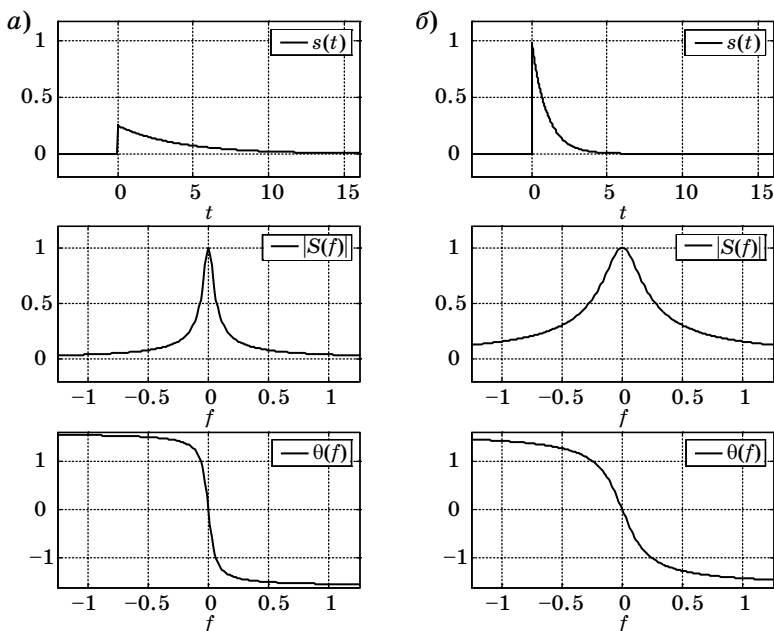


Рис. 1.11. Сигнал из примера 1, его амплитудный и фазовый спектры:

а) $A=1, T=4$; б) $A=1, T=1$

Пример 2. Спектр прямоугольного импульса. Пусть сигнал задан равенством

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases}$$

где $A > 0$, $T > 0$. График сигнала показан на рис. 1.12. Вычислим его спектр.

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = -\frac{A}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{A}{j2\pi f} \left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right) = \frac{A}{\pi f} \sin \pi f T = AT \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}. \end{aligned}$$

Графики спектра и амплитудного спектра показаны на рис. 1.12.

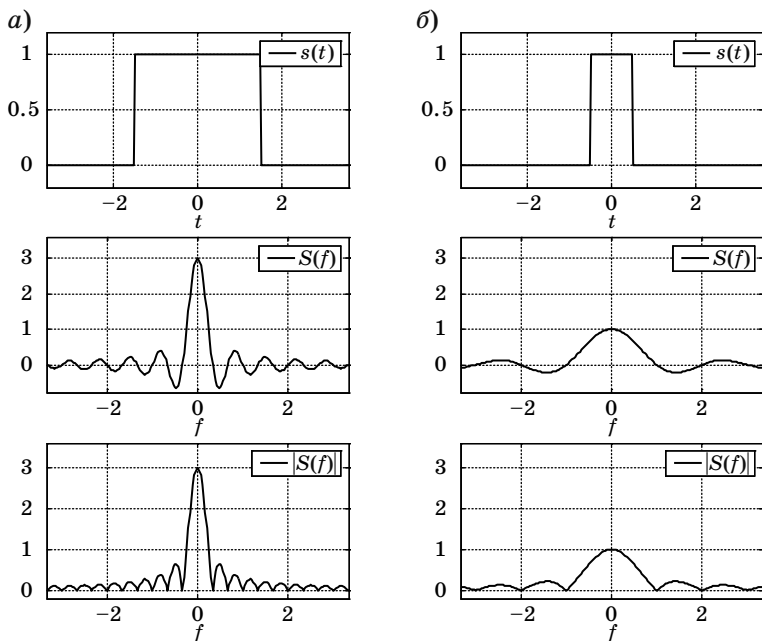


Рис. 1.12. Сигнал из примера 2, его спектр и амплитудный спектр:

а) $T=3, A=1$; б) $T=1, A=1$

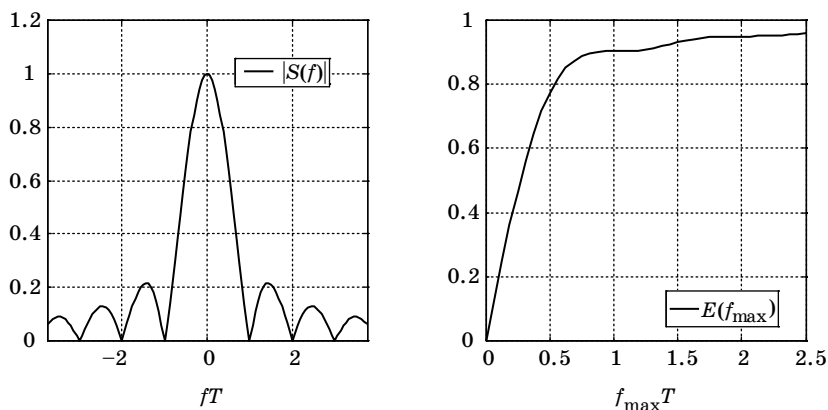


Рис. 1.13. Амплитудный спектр прямоугольного импульса и его энергия в зависимости от полосы частот

Как видно из выражений для спектра и из графиков, показанных на рис. 1.12, спектр прямоугольного импульса имеет бесконечную ширину. Это значит, что на практике в точности прямоугольный импульс не может существовать. То, что в инженерной практике называется прямоугольным импульсом, представляет собой лишь некоторое приближение к нему с передним и задним фронтами конечной, а не бесконечной, крутизны. На практике за ширину спектра прямоугольного сигнала принимается величина, равная $W=1/T$, где T — длительность сигнала. Это так называемая ширина главного лепестка графика спектра. Такое соглашение обосновывается тем, что в интервале частот от $-W$ до W содержится более 90% энергии прямоугольного импульса. На рис. 1.13 приведены амплитудный спектр и график величины

$$E(f_{\max}) = \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} |S(f)|^2 df,$$

представляющей собой часть энергии сигнала в полосе $[-f_{\max}, f_{\max}]$. Видно, что $E(1/T) > 0,9E(\infty)$.

Сигналы с прямоугольными огибающими представляют собой наиболее простой и важный для практики пример сигналов. В приложении 2 можно найти сведения о некоторых сигналах с огибающими, отличными от прямоугольных.

Пример 3. Спектр δ -функции.

Напомним основное свойство δ -функции, которое можно рассматривать как ее определение. Пусть $g(t)$ – некоторая функция, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0). \quad (1.14)$$

Равенство (1.14) известно также как фильтрующее свойство δ -функции. Функция $\delta(t)$ может также рассматриваться как «предел» функции $\delta_\tau(t)$, определенной как

$$\delta_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| \geq \tau/2. \end{cases}$$

Поясним смысл этого утверждения. Для этого рассмотрим предел

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta_\tau(t-t_0)dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} g(t)dt.$$

Пусть $G(t)$ – первообразная функции $g(t)$, т. е. $G'(t) = g(t)$. Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} g(t)dt = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (G(t_0 + \tau/2) - G(t_0 - \tau/2)) = G'(t_0) = g(t_0).$$

Таким образом

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta_\tau(t-t_0)dt = g(t_0). \quad (1.15)$$

Сравнивая равенства (1.14) и (1.15), можно заметить, что δ -функция может рассматриваться как предельный случай короткого и мощного прямоугольного импульса. Заметим, что это не единственный способ такого «предельного» описания δ -функции.

Вернемся к рассмотрению спектра δ -функции. Преобразование Фурье δ -функции имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1.$$

Последнее равенство означает, что спектральная плотность δ -функции постоянна на всей частотной оси.

1.6. Свойства преобразования Фурье

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются как

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df,$$

и символически обозначаются как $s(t) \leftrightarrow S(f)$. Рассмотрим важнейшие свойства преобразования Фурье.

Линейность. Если $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $h(t) \leftrightarrow H(f)$, то $ag(t) + bh(t) \leftrightarrow aG(f) + bH(f)$, где a и b — постоянные.

Доказательство очевидно.

Площадь под кривой. Пусть $g(t) \leftrightarrow G(f)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = G(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df = g(0).$$

Доказательство.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Положив в левой и правой части этого равенства $f = 0$, получим искомое утверждение. Второе равенство доказывается аналогично с заменой прямого преобразования на обратное. (Полезно проверить это свойство для примеров, рассмотренных ранее.)

Сдвиг по времени и по частоте. Пусть $g(t) \leftrightarrow G(f)$, тогда $g(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi ft_0} G(f)$, $G(f - f_0) \leftrightarrow e^{j2\pi f_0 t} g(t)$.

Доказательство. Найдем преобразование Фурье от функции $g(t - t_0)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt &= \left. \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{-j2\pi f(t_1 + t_0)} dt_1 \right|_{\substack{t_1 = t - t_0 \\ dt_1 = dt \\ t = t_1 + t_0}} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{-j2\pi f(t_0 + t_1)} dt_1 = \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{-j2\pi ft_1} dt_1 = e^{-j2\pi ft_0} G(f). \end{aligned}$$

Свойство сдвига по частоте доказывается аналогично. Из этого свойства следует, что при сдвиге по времени амплитудный спектр не меняется, так как

$$\left| e^{-j\pi f t_0} G(f) \right| = \underbrace{\left| e^{-j\pi f t_0} \right|}_{=1} |G(f)| = |G(f)|.$$

Дифференцирование. Пусть $g(t) \leftrightarrow G(f)$. Тогда

$$dg(t)/dt \leftrightarrow (j2\pi f)G(f), \quad dG(f)/df \leftrightarrow (-j2\pi t)g(t).$$

Доказательство.

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f) G(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Отсюда непосредственно следует, что $dg(t)/dt \leftrightarrow (j2\pi f)G(f)$. Утверждение о дифференцировании в частотной области доказывается аналогично. Очевидно, что амплитудный спектр производной сигнала равен $|2\pi f| \cdot |G(f)|$; это выражение значит, что при дифференцировании спектральные составляющие в области высоких частот усиливаются, а в области низких – ослабляются.

Интегрирование. Пусть $g(t) \leftrightarrow G(f)$. Тогда

$$\int g(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} G(f), \quad \int G(f) df \leftrightarrow \frac{1}{-j2\pi t} g(t).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \int \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df}_{=g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \int e^{j2\pi f t} dt df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \frac{1}{j2\pi f} e^{j2\pi f t} df. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует доказываемое утверждение. Свойство об интегрировании в частотной области доказывается аналогично. Очевидно, что амплитудный спектр проинтегрированного сигнала равен $|G(f)|/|2\pi f|$; это выражение значит, что при интегрировании спектральные составляющие в области высоких частот ослабляются, а в области низких – усиливаются.

Теорема умножения (теорема о свертке). Напомним определение операции свертки. Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – некоторые функции.

Сверткой функций $g(t)$ и $h(t)$ называется функция (обозначается $g(t)*h(t)$), полученная как

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Пусть $g(t) \leftrightarrow G(f)$, $h(t) \leftrightarrow H(f)$, тогда $g(t)*h(t) \leftrightarrow G(f)H(f)$, $G(f)*H(f) \leftrightarrow g(t)h(t)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(t) * h(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)G(f)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = H(f)G(f). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается теорема о свертке в частотной области. В качестве важного частного примера применения теоремы о свертке укажем

$$s(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow S(f) * \delta(f - f_0) = S(f - f_0).$$

Теорема о свертке может быть проиллюстрирована на примере линейной фильтрации. Напомним некоторые первоначальные сведения из теории линейных фильтров. Линейный фильтр задается импульсной переходной характеристикой фильтра $h(t)$. Пусть $x(t)$ – сигнал на входе линейного фильтра, тогда выходной сигнал $y(t)$ связан с входным сигналом соотношением

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (1.16)$$

Если взять преобразование Фурье от обеих частей этого равенства и применить теорему о свертке, то получим, что $Y(f) = H(f)X(f)$, где $Y(f) \leftrightarrow y(t)$, $X(f) \leftrightarrow x(t)$ и $H(f) \leftrightarrow h(t)$. Функция $H(f)$ называется частотной переходной характеристикой фильтра. Рис. 1.14 поясняет сказанное.

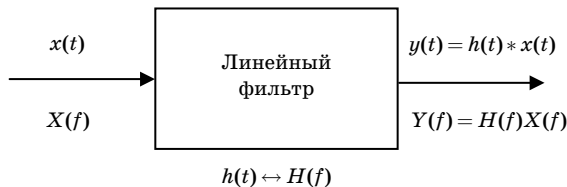


Рис. 1.14. Линейная фильтрация

Заметим, что если положить $x(t) = \delta(t)$, то, как следует из равенства (1.16), $y(t) = h(t)$. Это соотношение служит основанием для определения импульсной переходной характеристики фильтра как реакции фильтра на входной сигнал в виде δ -функции. Заметим также, что частотная характеристика фильтра может быть определена как отношение спектров выходного и входного сигналов, т. е. $H(f) = Y(f)/X(f)$.

Равенство Парсеваля. Пусть $s(f) \leftrightarrow S(t)$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df}_{=s(t)} s(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{j2\pi ft} dt df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \end{aligned}$$

Это свойство означает, что энергия сигнала может быть вычислена во временной или в частотной области.

1.7. Частные случаи вычисления спектра

Спектр гармонического сигнала. Рассмотрим сигнал вида $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Найдем его спектр, используя ранее установленные соотношения $A \leftrightarrow A\delta(f)$ и $g(t)\exp(j2\pi f_0 t) \leftrightarrow G(f - f_0)$, где $g(t) \leftrightarrow G(f)$. Используя формулу Эйлера для косинуса, $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$, имеем

$$s(t) = \frac{A}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\theta} \right) \leftrightarrow \frac{A}{2} \left(\delta(f - f_0) e^{j\theta} + \delta(f + f_0) e^{-j\theta} \right).$$

Аналогично для синусоидального сигнала $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \theta)$

$$s(t) = A \frac{1}{2j} \left(e^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} - e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\theta} \right) \leftrightarrow \frac{A}{2j} \left(\delta(f - f_0) e^{j\theta} - \delta(f + f_0) e^{-j\theta} \right).$$

При $\theta = 0$

$$A \cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{A}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)),$$

т. е. спектр в этом случае вещественный, так как сигнал задается четной функцией, и

$$A \sin 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{A}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)),$$

т. е. спектр здесь мнимый, так как сигнал задается нечетной функцией.

Спектр произведения произвольного сигнала и гармонического сигнала. Пусть сигнал определен как $s(t) = g(t)c(t)$, где $g(t)$ – некоторая произвольная функция (огibaющая), а $c(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ – гармонический сигнал (несущая). Найдем спектр $S(f)$ сигнала $s(t)$. По теореме о свертке $S(f) = G(f) * C(f)$, где $G(f) \leftrightarrow g(t)$, $C(f) \leftrightarrow c(t)$. Поскольку $c(t)$ – гармонический сигнал, то

$$C(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0)e^{j\theta} + \delta(f + f_0)e^{-j\theta}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2}G(f) * (\delta(f - f_0)e^{j\theta} + \delta(f + f_0)e^{-j\theta}) = \\ &= \frac{e^{j\theta}}{2}G(f) * \delta(f - f_0) + \frac{e^{-j\theta}}{2}G(f) * \delta(f + f_0) = \\ &= (e^{j\theta}G(f - f_0) + e^{-j\theta}G(f + f_0)) / 2. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что при умножении на гармонику с частотой f_0 спектр сигнала локализуется около частоты f_0 .

Рассмотрим важный пример.

Пример. Спектр отрезка гармоник с прямоугольной огibaющей. Пусть

$$g(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases}$$

где $A > 0$, $T > 0$. Найдем спектр сигнала $s(t) = g(t) \cos 2\pi f_0 t$. Поскольку $G(f) = AT \sin(\pi f T) / (\pi f T)$, то

$$S(f) = \frac{AT}{2} \left(\frac{\sin \pi(f - f_0)T}{\pi(f - f_0)T} + \frac{\sin \pi(f + f_0)T}{\pi(f + f_0)T} \right).$$

Графики сигнала, его спектра и амплитудного спектра показаны на рис. 1.15.

Как видно из выражения и графиков, частотный спектр локализован около центральной частоты f_0 и имеет бесконечную ширину. Это значит, что идеальный отрезок гармоника не может быть воспроизведен практически. На практике при $f_0 \gg 1/T$ за ширину спектра принимается значение $W = 2/T$. Это обусловлено тем, что в полосе $[f_0 - 1/T, f_0 + 1/T]$ сосредоточено более 90% энергии идеализированного сигнала.

В приложении 2 рассматриваются сигналы с непрямоугольными огибающими, имеющие более узкий спектр.

Спектр последовательности сигналов. Пусть $\{s_i(t)\}$ – сигнальное множество, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Определим последовательность индексов (мультииндекс) $\mathbf{i} = (i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$ длины N , где $i_l \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $0 \leq l \leq N-1$. Определим также последовательность сигналов длины N , определяемую последовательностью индексов \mathbf{i} , $s_{\mathbf{i}}(t) = \sum_{l=0}^{N-1} s_{i_l}(t - lT)$, где T – период следования сигналов. Напри-

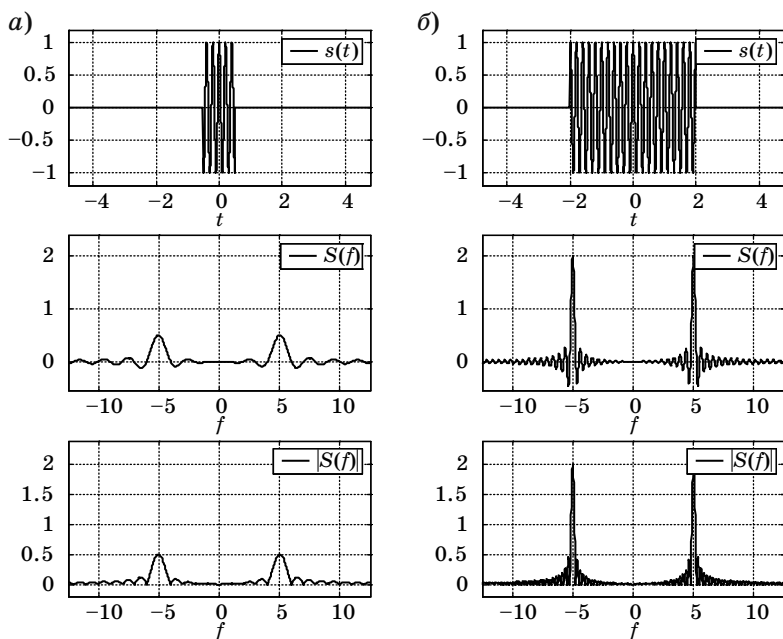


Рис. 1.15. Сигнал из примера, его спектр и амплитудный спектр:

а) $A=1, T=1, f_0=5$; б) $A=1, T=4, f_0=5$

мер, для $N=7$ и $\mathbf{i} = (5, 2, 0, 3, 1, 3, 3)$, сигнальная последовательность образована сигналами $s_5(t), s_2(t), s_0(t), s_3(t), s_1(t), s_3(t), s_3(t)$. Найдем спектр $S_i(f)$ последовательности $s_i(t)$. Пусть $S_i(f)$ – спектр i -го сигнала из сигнального множества, тогда используя свойство линейности и сдвига во временной области, имеем

$$S_i(f) = \sum_{l=0}^{N-1} S_{i_l}(f) e^{-j2\pi f l T}.$$

Как следует из последней формулы, спектр последовательности сигналов представляет собой линейную комбинацию спектров сигналов, образующих последовательность.

1.8. Стационарные гауссовские случайные процессы

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_L)$ – L -мерный случайный вектор. Обозначим многомерную функцию распределения вектора \mathbf{z} как $F_{\mathbf{z}}(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$. Она определена как $F_{\mathbf{z}}(\alpha) = \Pr[z_1 < \alpha_1, z_2 < \alpha_2, \dots, z_L < \alpha_L]$. Обозначим многомерную плотность вероятности вектора \mathbf{z} как $w_{\mathbf{z}}(\alpha)$, она равна

$$w_{\mathbf{z}}(\alpha) = \frac{\partial^L F_{\mathbf{z}}(\alpha)}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_L}.$$

Введем обозначение для набора моментов времени $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, $k > 0$. Обозначим вектор отсчетов одномерного случайного процесса $x(t)$, взятых в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_k , как $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k))$.

Случайный процесс называется стационарным, если $w_{\mathbf{x}(\mathbf{t})}(\alpha) = w_{\mathbf{x}(\mathbf{t}+\boldsymbol{\tau})}(\alpha)$ для всякого вектора $\boldsymbol{\tau}$ с одинаковыми компонентами, $\boldsymbol{\tau} = (\tau, \tau, \dots, \tau)$; это значит, что функция плотности вероятности набора отсчетов не зависит от сдвига по оси времени.

Определение. Стационарный случайный процесс называется гауссовским, или нормальным, если для любого k и любого набора моментов времени $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$

$$w_{\mathbf{x}(\mathbf{t})}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} (\det \Lambda)^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\alpha - \mathbf{m}) \Lambda^{-1} (\alpha - \mathbf{m})^T \right). \quad (1.17)$$

Поясним выражение (1.17). В нем использовано обозначение \mathbf{m} для вектора математических ожиданий, $\mathbf{m} = (\overline{x(t_1)}, \overline{x(t_2)}, \dots, \overline{x(t_k)})$,

черта сверху здесь и далее обозначает математическое ожидание. Заметим, что в силу стационарности процесса $x(t)$ справедливо равенство $\overline{x(t_1)} = \overline{x(t_2)} = \dots = \overline{x(t_k)} = m$. Далее, Λ – корреляционная матрица $k \times k$, определенная как

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} \end{bmatrix}.$$

Элементы корреляционной матрицы задаются как

$$\lambda_{il} = \overline{(x(t_i) - \overline{x(t_i)})(x(t_l) - \overline{x(t_l)})} = \overline{(x(t_i) - m)(x(t_l) - m)}. \quad (1.18)$$

Заметим, что $\lambda_{ii} = \overline{(x(t_i) - m)^2} = \sigma_i^2$, где σ_i^2 – дисперсия i -го отсчета. В силу стационарности процесса $x(t)$ дисперсии всех отсчетов равны между собой, т. е. $\sigma_i^2 = \sigma^2$ для всех i . И наконец, $\det \Lambda$ – обозначение определителя матрицы Λ . Из равенства (1.17) следует, что многомерное гауссовское распределение полностью определяется корреляционной матрицей Λ и вектором математических ожиданий \mathbf{m} .

Величины $\lambda_{il} / \sigma_i \sigma_l = \lambda_{il} / \sigma^2$ называются коэффициентами корреляции случайных величин $x(t_i)$ и $x(t_l)$. Коэффициенты корреляции принимают значения из множества $[-1, +1]$. Величины, имеющие нулевой коэффициент корреляции, называются некоррелированными.

Выражение, стоящее в показателе экспоненты в выражении (1.17), может быть записано в компонентной форме, т. е.

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{m}) \Lambda^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{m})^T = \\ & = [\alpha_1 - m \quad \alpha_2 - m \quad \dots \quad \alpha_k - m] \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{k1} & \lambda_{k2} & \dots & \lambda_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 - m \\ \alpha_2 - m \\ \dots \\ \alpha_k - m \end{bmatrix} = \\ & = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k (\alpha_i - m) \lambda_{il}^{(-1)} (\alpha_l - m), \end{aligned}$$

где $\lambda_{il}^{(-1)}$ – элементы матрицы Λ^{-1} (обратной к Λ).

Пример 4. Пусть величины $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$ имеют нулевые математические ожидания и не коррелированы, т. е., $\mathbf{m} = (0, 0, \dots, 0)$, и

$$\Lambda = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det \Lambda = (\sigma^2)^k$ и $\Lambda^{-1} = \text{diag}(1/\sigma^2, 1/\sigma^2, \dots, 1/\sigma^2)$, то не трудно видеть, что

$$w_{\mathbf{x}(\mathbf{t})}(\boldsymbol{\alpha}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^k \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left(-\frac{\alpha_i^2}{2\sigma^2} \right) = \prod_{i=1}^k w_{x(t_i)}(\alpha_i).$$

Последнее равенство означает, что компоненты вектора $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k))$ независимы. Это значит, что некоррелированные гауссовские случайные величины независимы. Обратное верно для любого распределения, т. е. независимые случайные величины не коррелированы. Иначе говоря, некоррелированность и независимость для гауссовских случайных величин эквивалентны.

Пример 5. Пусть $k = 2$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ и $\Lambda = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$; величина ρ на-

зывается коэффициентом корреляции и лежит в интервале $[-1, +1]$. На рис. 1.16 показаны графики функций плотности вероятности $w_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\alpha})$ вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ для различных значений параметров распределения. Видно, что при $\rho = 0$ функция плотности вероятности имеет круговую симметрию относительно вертикальной оси, проходящей через точку (m_1, m_2) . В общем случае (при $\rho \neq 0$) линии уровня функции плотности вероятности имеют вид эллипсов.

Вернемся к рассмотрению непрерывного времени. Далее будем считать, что процесс $x(t)$ имеет нулевое математическое ожидание, т. е. $\overline{x(t)} = 0$. Корреляционная функция стационарного процесса $x(t)$ определяется как $K_x(t, \tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}$. В силу стационарности она не зависит от t , и поэтому можно писать $K_x(\tau)$. Заметим, что $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$, и $K_x(0) = \sigma^2$. С учетом равенства (1.18) легко заметить, что $\lambda_{il} = K_x(t_i - t_l)$. Это значит, что корреляционная функция определяет корреляционную матрицу для любого набора отсчетов, следовательно корреляционная функция полностью задает опи-

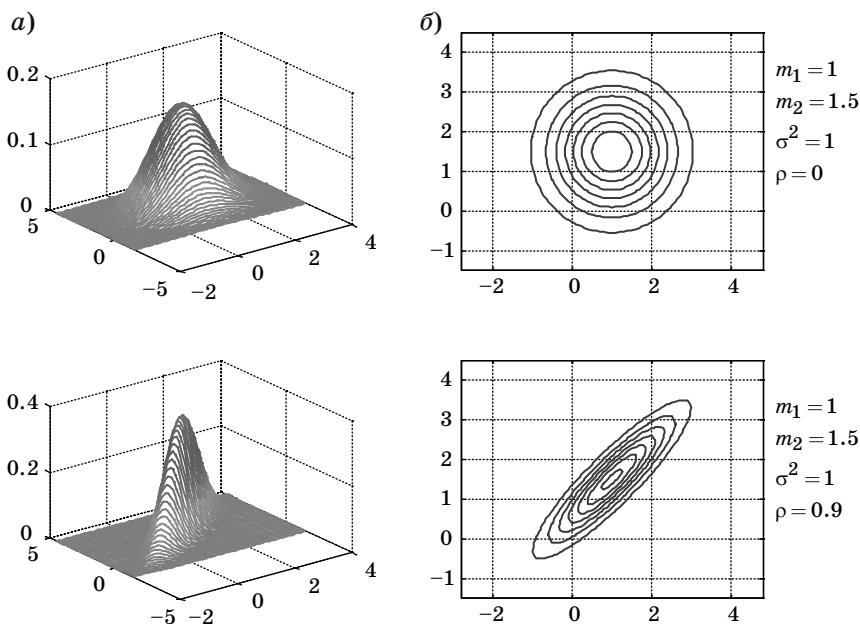


Рис. 1.16. Двумерная гауссовская функция плотности вероятности:
а) графики плотности; б) линии уровня

сание стационарного гауссовского процесса с нулевым средним. Преобразование Фурье корреляционной функции процесса $x(t)$ называется спектральной плотностью мощности процесса $x(t)$, т. е.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \text{ и наоборот } K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

Функция $S_x(f)$ принимает действительные и неотрицательные значения. Спектральная плотность мощности называется так потому, что интеграл вида $\int_{-F}^F S_x(f) df$ определяет среднюю мощность процесса $x(t)$ в частотном интервале $[-F, F]$. Полная мощность процесса может быть вычислена как $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$. Из одного из свойств преобразования Фурье (площадь под кривой) следует, что $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = K_x(0) = \sigma^2$, т. е. средняя мощность процесса с ну-

левым математическим ожиданием численно равна его дисперсии. Поскольку спектральная плотность мощности однозначно связана с корреляционной функцией процесса, то она так же, как и корреляционная функция, полностью определяет стационарный гауссовский процесс с нулевым средним.

На рис. 1.17 показаны три примера корреляционной функции, спектральной плотности мощности и типичной реализации гауссовского случайного процесса. Первый пример соответствует слабо коррелированному (быстро изменяющемуся) процессу, его спектр мощности почти равномерен. Во втором примере корреляция больше, а спектр – уже. Третий пример соответствует процессу с наибольшей корреляцией и наименее узким спектром.

Линейное преобразование (в частности, фильтрация) гауссовского случайного процесса не изменяет распределение (т. е. процесс остается гауссовским), но меняет его спектральную плотность мощности. Линейный фильтр задается импульсной переходной характеристикой $h(t)$ или связанной с ней преобразованием Фурье

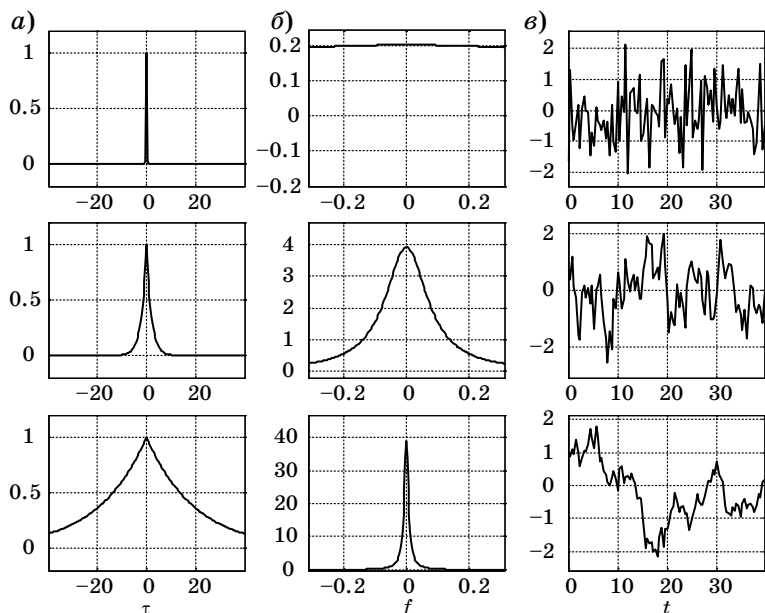


Рис. 1.17. Примеры гауссовских случайных процессов:
а) корреляционная функция; б) спектральная плотность мощности;
в) типичная реализация

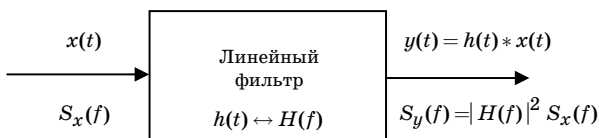


Рис. 1.18. Линейная фильтрация случайного процесса

частотной характеристикой $H(f)$, $H(f) \leftrightarrow h(t)$. Реализация случайного процесса на выходе фильтра равна свертке реализации на входе с импульсной переходной характеристикой фильтра. Спектральная плотность процесса на выходе равна $S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$. Таким образом, линейное преобразование меняет в общем случае спектр и корреляционную функцию процесса (рис. 1.18).

1.9. Белый гауссовский шум

Формально белый гауссовский шум (БГШ) определяется как гауссовский случайный процесс $n(t)$ с нулевым средним, $\overline{n(t)} = 0$, и постоянной спектральной плотностью мощности $S_n(f) = N_0/2$. Пусть $g(t)$ – произвольная функция с конечной нормой, т. е. $\|g\| < \infty$. Тогда

случайная величина, определенная как $n_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)n(t)dt$, облада-

ет следующими свойствами: n_g – гауссовская случайная величина; $\overline{n_g} = 0$; $n_g^2 = (N_0/2)\|g\|^2$. Случайная величина n_g может рассматриваться как скалярное произведение $n(t)$ и $g(t)$, т. е. $n_g = (g, n)$.

Найдем корреляционную функцию БГШ. Известно, что $K_n(\tau) \leftrightarrow S_n(f)$. Поскольку $S_n(f) = N_0/2$, то $K_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$.

В дальнейшем будет использоваться одно важное свойство БГШ, сформулированное в виде следующего утверждения.

Утверждение. Скалярные произведения БГШ и ортогональных функций независимы.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – ортогональные функции, т. е. $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Скалярные произведения БГШ и функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определены как

$$n_1 = (n, \varphi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)\varphi_1(t)dt, \quad n_2 = (n, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)\varphi_2(t)dt.$$

Требуется доказать, что n_1 и n_2 независимы. По определению БГШ n_1 и n_2 – это гауссовские случайные величины. Найдем корреляционный момент (корреляцию) этих величин $\overline{n_1 n_2}$. Эта величина равна

$$\overline{n_1 n_2} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} n(t) \varphi_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} n(t') \varphi_2(t') dt'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t') \overline{n(t) n(t')} dt dt'.$$

Поскольку $\overline{n(t) n(t')} = K_n(t - t') = (N_0 / 2) \delta(t - t')$, то

$$\begin{aligned} \overline{n_1 n_2} &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t') \delta(t - t') dt dt' = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t') \delta(t - t') dt' \right) dt = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Переход в третьем равенстве основан на использовании фильтрующего свойства δ -функции, а последний переход – на ортогональности функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Таким образом доказано, что n_1 и n_2 – гауссовские случайные величины; n_1 и n_2 не коррелированы. Отсюда следует, что n_1 и n_2 независимы.

Дисперсия случайного процесса, как уже отмечалось, может быть вычислена как $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df$. Для БГШ $S_n(f) = N_0/2$ для $-\infty < f < \infty$. Таким образом, для БГШ $\sigma^2 = \infty$. Это значит, что БГШ реально не может существовать, так как имеет бесконечно большую мощность. В то же время БГШ часто используется в качестве математической модели для описания помех, действующих в реальных системах, и расчета характеристик таких систем. Приведем объяснение этого кажущегося противоречия (рис. 1.19).

Шум, действующий в реальных условиях, имеет спектр мощности, гладкий в некоторой полосе и спадающий к нулю за ее пределами. Полоса любого реального устройства имеет ширину, меньшую, чем ширина полосы реального шума. Поэтому реакция реального устройства на реальный шум и реакция реального устройства на идеализированный шум (БГШ) совпадают. Иными словами, поскольку БГШ никогда не рассматривается сам по себе, а рассматривается только результат его фильтрации (реакция устройства на шум), то проблем, связанных с бесконечно большой дисперсией на входе устройства, просто не возникает. На выходе реального

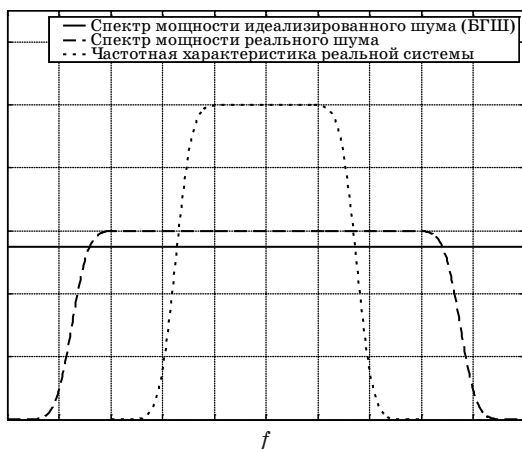


Рис. 1.19. Спектры мощности реального и идеализированного шума

устройства появляется в точности такой же процесс, как если бы на входе был БГШ.

Упражнения

1. Покажите, что функции, графики которых показаны на рис. 1.7, образуют ортонормированный базис.

2. Пусть $\|s_0\| = \sqrt{2}$, $\|s_1\| = 2$ и $(s_0, s_1) = 2$. Чему равно расстояние $d(s_0, s_1)$?

3. Пусть $s_0(t)$ и $s_1(t)$ – два сигнала, для которых $\|s_0(t)\|^2 = 8$, $\|s_1(t)\|^2 = 8$ и $(s_0(t), s_1(t)) = 2$. Постройте геометрическое представление этих сигналов.

4. Сигнал $s(t)$ задан равенством $s(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$, $-\infty < t < \infty$. Вычислите спектр этого сигнала. Повторите вычисления для случая, когда $-T/2 < t < T/2$.

5. Сигнал $s(t)$ задан равенством

$$s(t) = \begin{cases} 2\cos(2\pi \cdot 5t / T) + 4\cos(2\pi \cdot 6t / T), & -T/2 < t < T/2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Оцените ширину спектра этого сигнала.

6. Пусть сигнал $s(t)$ задан равенством $s(t) = e^{-\alpha|t|} \cos 2\pi f_0 t$, $\alpha > 0$, $-\infty < t < \infty$. Вычислите спектр этого сигнала.

7. Сигнал $u(t)$ представляет собой отрезок синусоиды частоты f_0 длительности T . Оцените ширину спектра этого сигнала при

а) $f_0 = 100$ кГц, $T = 2$ мс; б) $f_0 = 100$ кГц, $T = 200$ мс; в) $f_0 = 1$ кГц, $T = 2$ мс; г) $f_0 = 100$ Гц, $T = 2$ мс.

8. Пусть u и v – независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией. Покажите, что случайные величины $x = u + v$ и $y = u - v$ независимы.

9. Пусть x_1 и x_2 – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми средними и $\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = 1$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – вектор, компонентами которого являются величины x_1 и x_2 . Вычислите $|\overline{\mathbf{x}}|^2$ и $|\overline{\mathbf{x}^2}|$.

10. В условиях предыдущей задачи выразите через функцию $Q(x)$, определенную как $Q(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_x^\infty \exp(-\alpha^2/2) d\alpha$, вероятности событий:

а) $\{-1/2 < x_1 < 1, 2 < x_2 < \infty\}$;

б) $\{x_1 > 2x_2 - 1, -\infty < x_2 < \infty\}$; в) $\{x_1^2 + x_2^2 > 2\}$.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ И ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДИСКРЕТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

2.1. Оптимальный прием дискретных сигналов

Задача оптимального приема дискретных сигналов формулируется следующим образом. Имеется q сигналов $s_0(t), \dots, s_{q-1}(t)$. При передаче случайно выбирается один из них в соответствии с вероятностным распределением P_0, \dots, P_{q-1} , $P_i > 0$, $\sum_{i=0}^{q-1} P_i = 1$. Приемник наблюдает выход канала $r(t)$. Задача приемника состоит в определении номера переданного сигнала \hat{i} , $\hat{i} = 0, \dots, q-1$. При этом возможно, что решение приемника будет ошибочным. Оптимально построенный приемник обеспечивает наименьшую вероятность ошибки $P_e = \Pr[\hat{i} \neq i]$ (рис. 2.1).

Пусть для представления сигналов выбран базис $\{\phi_j(t)\}$, $j=1, \dots, D$. Тогда сигнальному множеству $\{s_i(t)\}$ с использованием этого базиса ставится в соответствие множество сигнальных точек $\{s_i\}$, $s_i \in \mathbb{R}^D$. Если разложить по базису сигнал на выходе канала $r(t)$, то получим точку (вектор) \mathbf{r} . Канал формально может быть задан набором условных плотностей вероятностей $w(\mathbf{r} | s_i)$, $i=0, 1, \dots, q-1$. Процесс передачи можно тогда описать, как показано на рис. 2.2.

Для описания приема (процесса формирования решения о переданном сигнале) используем понятие решающей области. Разобьем некоторым образом множество всех возможных значений вектора \mathbf{r}

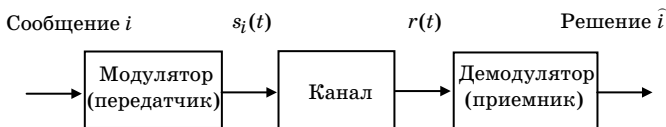


Рис. 2.1. Система передачи дискретных сигналов

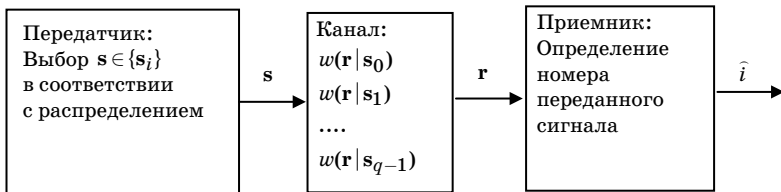


Рис. 2.2. Формальная модель передачи дискретных сигналов

на q непересекающихся областей $R_i, i=0, 1, \dots, q-1$, т. е. $\bigcup R_i = \mathbf{R}^D$, $R_i \cap R_j = \emptyset$. Решение о переданном сигнале принимается по правилу $\hat{i} = i$, если $\mathbf{r} \in R_i$. Понятно, что вероятность ошибки зависит от конфигурации решающих областей R_i . Поэтому задача построения оптимального приемника может быть переформулирована как задача построения решающих областей, обеспечивающих минимальную вероятность ошибки.

Пусть $P_e(\mathbf{r})$ – вероятность ошибки при условии, что принятый вектор равен \mathbf{r} . Тогда безусловная вероятность ошибки

$$P_e = \int_{\mathbf{R}^D} P_e(\mathbf{r})w(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{q-1} \int_{R_i} P_e(\mathbf{r})w(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

где $w(\mathbf{r})$ – безусловная функция плотности вероятности вектора \mathbf{r} . Для всякого $\mathbf{r} \in R_i$ имеем $P_e(\mathbf{r}) = 1 - \Pr[i | \mathbf{r}]$, где $\Pr[i | \mathbf{r}]$ – вероятность принятия решения в пользу i -го сигнала при условии, что полученный вектор равен \mathbf{r} . Тогда вероятность ошибки

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{q-1} \int_{R_i} \Pr[i | \mathbf{r}]w(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (2.1)$$

Чтобы вероятность ошибки была минимальной, должна быть максимальной сумма в правой части (2.1), т. е. нужно назначить решающие области таким образом, чтобы эта сумма была максимальной. Поскольку решающие области не пересекаются, то условие максимизации суммы эквивалентно максимизации каждого слагаемого этой суммы, т. е. значения интеграла $\int_{R_i} \Pr[i | \mathbf{r}]w(\mathbf{r})d\mathbf{r}$.

Так как подынтегральное выражение неотрицательно, то легко видеть, что значение этого интеграла максимально, если положить

$$R_i = \{\mathbf{r} : \Pr[i | \mathbf{r}]w(\mathbf{r}) > \Pr[i' | \mathbf{r}]w(\mathbf{r}), \forall i' \neq i\}.$$

Если исключить из этого определения решающей области несущественный множитель $w(\mathbf{r})$, то получим

$$R_i = \{\mathbf{r} : \Pr[i | \mathbf{r}] > \Pr[i' | \mathbf{r}], \forall i' \neq i\}. \quad (2.2)$$

Вероятности $\Pr[i | \mathbf{r}]$ в равенстве (2.2) – это апостериорные вероятности приема i . Поэтому прием решений с использованием решающих областей (2.2) называется приемом по максимуму апостери-

орной вероятности (МAB). С использованием формулы Байеса имеем $\Pr[i | \mathbf{r}] = w(\mathbf{r} | i)P_i / w(\mathbf{r})$, тогда равенство (2.2) можно переписать в окончательном виде

$$R_i^{(\text{MAB})} = \{\mathbf{r} : w(\mathbf{r} | i)P_i > w(\mathbf{r} | i')P_{i'}, \forall i' \neq i\}. \quad (2.3)$$

Тогда алгоритм оптимального приема можно записать следующим образом: по принятому из канала сигналу вычислить вектор \mathbf{r} коэффициентов разложения по базису и положить $\hat{i} = k$, если $\mathbf{r} \in R_k$, где решающие области определены равенством (2.3). Иллюстрация приведена на рис. 2.3.

На практике часто встречается случай, когда сигналы передаются равновероятно, т. е. $P_i = 1/q$ для всех $i, i=0, 1, \dots, q-1$. В этом случае определение решающих областей и оптимального приемника можно упростить, исключив из определения (2.3) одинаковые априорные вероятности. Получающийся в этом случае алгоритм носит название приема по максимуму правдоподобия (МП), а решающие области принимают вид

$$R_i^{(\text{МП})} = \{\mathbf{r} : w(\mathbf{r} | i) > w(\mathbf{r} | i'), \forall i' \neq i\}. \quad (2.4)$$

Схема приемника, принимающего решения по МП, показана на рис. 2.4.

Заметим, что приемник МП является оптимальным только в случае равновероятных сигналов.

На практике приемник может быть построен следующим образом. Сначала по принятому сигналу вычисляется вектор \mathbf{r} (рис. 2.5), а затем производится обработка этого вектора, как это показано на рис. 2.3 и 2.4.

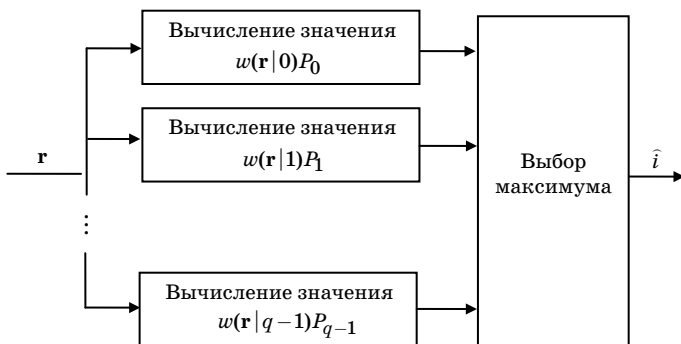


Рис. 2.3. Схема оптимального приемника (приемника по МAB)

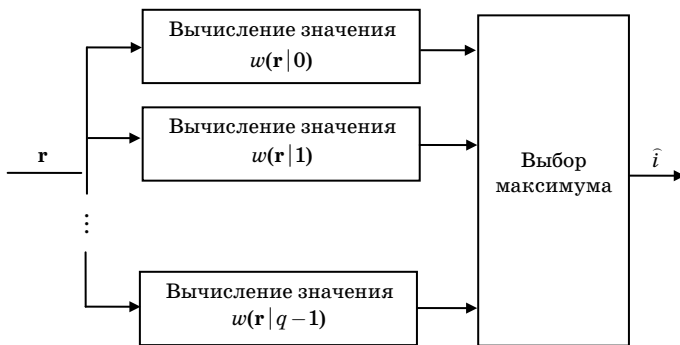


Рис. 2.4. Схема оптимального приемника (приемника по МП)

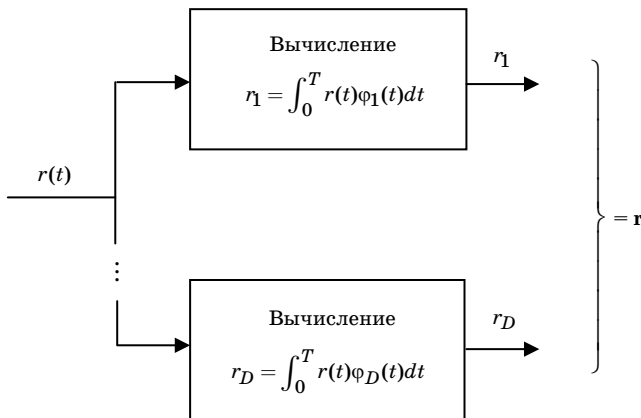


Рис. 2.5. Вычисление компонент вектора \mathbf{r}

2.2. Вероятность ошибки при оптимальном приеме дискретных сигналов

Вероятность ошибки может быть найдена как

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i, \quad (2.5)$$

где $P_e(i)$ – вероятность ошибки при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала. Выражение (2.5) дает точное значение вероятности ошибки. В ряде случаев воспользоваться этим

выражением не удастся, так как невозможно точно вычислить условные вероятности $P_e(i)$. В этом случае приходится пользоваться верхней оценкой вероятности ошибки

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{q-1} \tilde{P}_e(i) P_i, \quad (2.6)$$

где $\tilde{P}_e(i) \geq P_e(i)$ – верхняя оценка условной вероятности ошибки. Для вычисления этой оценки существует ряд подходов. Рассмотрим некоторые из них.

Аддитивная граница (аддитивное неравенство, неравенство Буля, граница объединения). Условная вероятность ошибки при передаче i -го сигнала определяется как

$$P_e(i) = \Pr[\hat{i} \neq i | i].$$

Используя понятие решающей области, это выражение можно переписать в виде

$$\Pr[\hat{i} \neq i | i] = \Pr[\mathbf{r} \notin R_i | i] = \Pr \left[\bigcup_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \{\mathbf{r} \in R_k | i\} \right]. \quad (2.7)$$

Аддитивное неравенство позволяет оценить сверху вероятность объединения любых событий. Оно записывается как

$$\Pr \left[\bigcup_i A_i \right] \leq \sum_i \Pr[A_i], \quad (2.8)$$

где $\{A_i\}$ – множество некоторых событий. Применяя (2.8) к (2.7), получим

$$\Pr[\hat{i} \neq i | i] \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\mathbf{r} \in R_k | i]. \quad (2.9)$$

Вероятность $\Pr[\mathbf{r} \in R_k | i]$ в свою очередь может быть оценена сверху вероятностью ошибки в системе передачи, использующей только два сигнала $s_i(t)$ и $s_k(t)$. В такой системе существуют только две решающие области $R_i^{(2)}$ и $R_k^{(2)}$ ¹, т. е. $R_i^{(2)} \cup R_k^{(2)} = \mathbf{R}^D$ и $R_i^{(2)} \cap R_k^{(2)} = \emptyset$.

¹ Верхний индекс 2 здесь означает, что в системе используется только два сигнала.

Очевидно, что $R_k^{(2)} \supseteq R_k$, поэтому $\Pr[\mathbf{r} \in R_k | i] \leq \Pr[\mathbf{r} \in R_k^{(2)} | i]$, и далее

$$P_e(i) \leq \tilde{P}_e(i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\mathbf{r} \in R_k^{(2)} | i].$$

Вычисление вероятности $\Pr[\mathbf{r} \in R_k^{(2)} | i]$ обычно оказывается сравнительно несложным в отличие от вероятности $\Pr[\mathbf{r} \in R_k | i]$. Окончательное выражение для аддитивной границы вероятности ошибки имеет вид

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\mathbf{r} \in R_k^{(2)} | i] P_i. \quad (2.10)$$

Аппроксимация решающей области. Условная вероятность ошибки при передаче i -го сигнала определяется как

$$P_e(i) = \Pr[\hat{i} \neq i | i].$$

Используя понятие решающей области, это выражение можно переписать в виде

$$\Pr[\hat{i} \neq i | i] = 1 - \Pr[\mathbf{r} \in R_i | i] = 1 - \int_{R_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Если интеграл в правой части равенства (2.11) вычислить не удастся, то можно оценить его снизу, используя подходящую аппроксимацию решающей области R_i . Пусть $\tilde{R}_i \subseteq R_i$ и конфигурация аппроксимирующей области \tilde{R}_i выбрана так, что интеграл $\int_{\tilde{R}_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r}$ вычисляется аналитически. Поскольку $w(\mathbf{r} | i) \geq 0$ для всех \mathbf{r} , так как это плотность вероятности, то $\int_{\tilde{R}_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r} \leq \int_{R_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r}$. Поэтому имеем верхнюю границу $P_e(i) \leq 1 - \int_{\tilde{R}_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r}$ и окончательно

$$P_e \leq 1 - \sum_{i=0}^{q-1} P_i \int_{\tilde{R}_i} w(\mathbf{r} | i) d\mathbf{r}. \quad (2.12)$$

В завершение отметим, что для вычисления вероятности ошибки следует использовать в тех случаях, когда это возможно, точ-

ное выражение (2.5) либо оценки, например оценки (2.10) и (2.12). Во всех случаях для вычисления вероятности ошибки необходимо знать априорное распределение на входе канала $\{P_i\}$, условные функции плотности вероятности $w(\mathbf{r} | i)$, описывающие канал, и алгоритм приема, т. е. конфигурацию решающих областей.

Число двоичных единиц (бит), переносимых q -ичным сигналом, равно $m = \log_2 q$. При ошибке, происходящей при передаче сигналов, формируется ошибочное решение относительно номера переданного сигнала и возникает от 1 до m ошибочных бит. Рассмотрим вероятность ошибки на бит P_b и ее связь с вероятностью ошибки на символ P_e . Определим вероятность принятия решения в пользу сигнала с номером i' при условии, что был передан сигнал с номером i , и обозначим ее как $P_e(i, i')$, $i \neq i'$, т. е. $P_e(i, i') = \Pr[\mathbf{r} \in R_{i'} | i]$. Тогда очевидно, что $P_e(i) = \sum_{i'=0, i' \neq i}^{q-1} P_e(i, i')$.

Пусть $n(i, i')$ – число разрядов, в которых различаются двоичные представления номеров сигналов i и i' . Например, $n(5, 6) = 2$, так как $5_{10} = 101_2$, $6_{10} = 110_2$. Очевидно, что $1 \leq n(i, i') \leq m$ при $i \neq i'$. Тогда можно записать

$$P_b = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} P_e(i, i') n(i, i') P_i.$$

В этом равенстве фактически записано отношение среднего числа ошибочно принятых бит к их общему числу. Точное вычисление вероятности ошибки на бит может оказаться затруднительным. Основная проблема состоит в вычислении или достаточно точном оценивании вероятностей $P_e(i, i')$. Тем не менее в ряде случаев она разрешима.

Заметим, что вероятность ошибки на бит может быть уменьшена, если назначить номера сигналов так, чтобы уменьшить величины произведений $P_e(i, i') n(i, i')$. На практике часто оказывается, что значения вероятностей $P_e(i, i')$ сильно различаются при различных i и i' . В частности, это так при использовании АМ, ФМ, КАМ-сигналов. Поэтому разумно назначить номера сигналов так, чтобы величина $n(i, i')$ была малой для тех пар (i, i') , для которых вероятность $P_e(i, i')$ велика. В этом случае можно добиться, что произведения $P_e(i, i') n(i, i')$ будут небольшими и общая вероятность ошибки на бит уменьшится. Такая нумерация может быть обеспечена с использованием кода Грея (Gray code).

Таблица 2.1

Код Грея длины 3

Десятичное представление	Двоичное представление	Код Грея
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Код Грея представляет собой переупорядочение двоичных кодовых последовательностей таким образом, что соседние последовательности отличаются только в одном двоичном разряде. Простой пример приведен в табл. 2.1.

Из табл. 2.1, в частности, следует, что $n(5,6) = 1$, так как $5_{10} = 111_{\text{Gray}}$, $6_{10} = 101_{\text{Gray}}$. Это значит, что при ошибочном решении в пользу сигнала 6 при условии, что был передан сигнал 5, произойдет ошибка только в одном двоичном разряде, а не в двух как при обычной нумерации сигналов. Это значит, что применение кода Грея вместо обычной нумерации сигналов желательно, если вероятность $P_e(5,6)$ велика.

Алгоритм построения кода Грея. Код Грея любой длины может быть построен рекуррентно. Обозначим код Грея длины n как $G(n)$. Очевидно, что $G(1) = \{0,1\}$. Построение кода $G(n+1)$ на основе кода $G(n)$ выполняется следующим образом:

1) построение вспомогательного списка $\tilde{G}(n)$. Список $\tilde{G}(n)$ представляет собой список $G(n)$, переупорядоченный в обратном порядке;

2) построение кода Грея $G(n+1)$ из $G(n)$ и $\tilde{G}(n)$. К началу каждого слова из $G(n)$ приписывается 0, к словам из $\tilde{G}(n)$ приписывается 1, и оба списка слов объединяются, т. е. $G(n+1) = ((0g, g \in G(n)), (1g, g \in \tilde{G}(n)))$.

Пример. Построение кода Грея длины 4.

По определению $G(1) = \{0,1\}$. Тогда $\tilde{G}(1) = (1,0)$, и $G(2) = \{00,01,11,10\}$. Следовательно $\tilde{G}(2) = \{10,11,01,00\}$, и $G(3) = \{000,001,011,010,110,111,101,100\}$. Поэтому $\tilde{G}(3) = (100,101,111,110,010,011,001,000)$, и окончательно $G(4) = \{0000, 0001,0011,0010,0110,0111,0101,0100,1100,1101,1111,1110,1010,1011,1001,1000\}$.

2.3. Оптимальный прием в канале с аддитивным белым гауссовским шумом

Пусть $\{s_i(t)\}$ – множество сигналов, используемых для передачи, заданных на интервале $[0, T]$, $i = 0, 1, \dots, q-1$; $\{P_i\}$ – априорное распределение, заданное на этом множестве. Сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) \in \{s_i(t)\}$, $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Задача приемника состоит в определении номера переданного сигнала \hat{i} по принятому сигналу $r(t)$.

Выберем базис $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, \dots, D$, для представления сигналов. Тогда вместо множества сигналов $\{s_i(t)\}$ можно рассматривать множество D -мерных вещественных сигнальных векторов (сигнальных точек) $\{\mathbf{s}_i\}$, где $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, \dots, s_{iD})$ и $s_{ij} = (s_i, \varphi_j) = \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt$ – скалярное произведение i -го сигнала и j -й базисной функции, $j = 1, \dots, D$. Аналогично можно построить разложение принятого сигнала $r(t)$ по базисным функциям $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_D)$, где $r_j = (r, \varphi_j) = \int_0^T r(t) \varphi_j(t) dt$. Очевидно, что $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_D)$ и $n_j = (n, \varphi_j) = \int_0^T n(t) \varphi_j(t) dt$ – скалярное произведение шума и j -й базисной функции. Отметим, что случайные величины n_j независимы между собой и имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием, поскольку шум имеет нулевое среднее, и дисперсией $N_0/2$, т. е. $\bar{n}_j = 0$, $\overline{n_j^2} = N_0/2$, и $\overline{n_j n_k} = 0$, $j, k = 1, \dots, D$, $j \neq k$. Эти свойства следуют из свойств БГШ.

Для построения алгоритма оптимального приема нужно знать вид условных плотностей вероятностей $w(\mathbf{r} | i)$, определяемых каналом. При условии, что передан i -й сигнал, $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$, поэтому для канала с АБГШ

$$w(\mathbf{r} | i) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left(-\frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^D (r_j - s_{ij})^2 \right),$$

или $w(\mathbf{r} | i) = K \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)/N_0)$ где $K = (\pi N_0)^{-D/2}$, $d(\cdot, \cdot)$ – евклидово расстояние между точками в \mathbf{R}^D . Теперь можно записать выражение для решающих областей оптимального приемника МАВ

$$R_i^{(\text{MAV})} = \left\{ \mathbf{r} : P_i \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i)/N_0) = \max_{0 \leq k \leq q-1} P_k \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k)/N_0) \right\}$$

или

$$R_i^{(\text{МAB})} = \left\{ \mathbf{r} : d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) - N_0 \ln P_i = \min_{0 \leq k \leq q-1} (d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) - N_0 \ln P_k) \right\}. \quad (2.13)$$

Схема приемника МАВ для канала с АБГШ показана на рис. 2.6. Решающие области МП имеют вид

$$R_i^{(\text{МП})} = \left\{ \mathbf{r} : \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) / N_0) = \max_{0 \leq k \leq q-1} \exp(-d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) / N_0) \right\}$$

или

$$R_i^{(\text{МП})} = \left\{ \mathbf{r} : d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \min_{0 \leq k \leq q-1} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) \right\}. \quad (2.14)$$

Последнее равенство означает, что прием по МП в канале с АБГШ эквивалентен приему по минимуму евклидова расстояния. Схема приемника МП для канала с АБГШ показана на рис. 2.7.

Решающая область R_i , заданная равенством (2.14), представляет собой множество точек из R^D , лежащих ближе к \mathbf{s}_i , чем к любой другой сигнальной точке \mathbf{s}_k , $i \neq k$. Для случая $D = 2$ эти области представляют собой выпуклые многоугольники и известны как области Вороного. На рис. 2.8 показано для примера некоторое произвольное двумерное сигнальное созвездие и соответствующее ему разбиение на решающие области (области Вороного).

На вход схем, показанных на рис. 2.6 и 2.7, подается вектор \mathbf{r} , полученный в результате конечномерного представления выходного сигнала канала $r(t)$. Рассмотрим более подробно, как выгля-

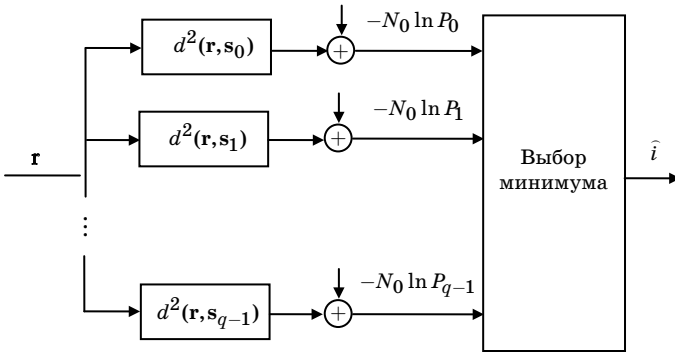


Рис. 2.6. Схема оптимального приемника для канала с АБГШ (приемник по МАВ)

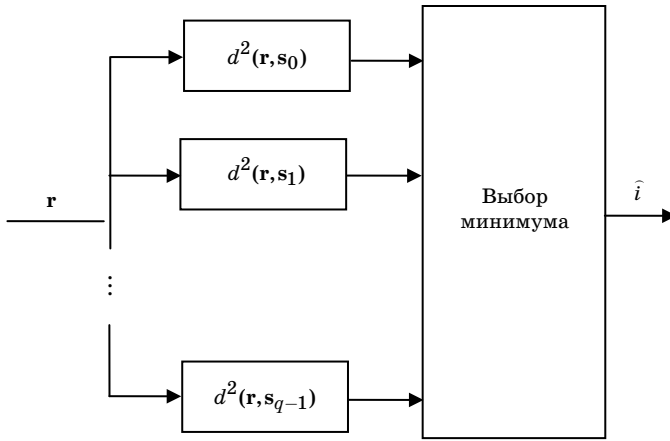


Рис. 2.7. Схема оптимального приемника для канала с АБГШ (приемника по МП)

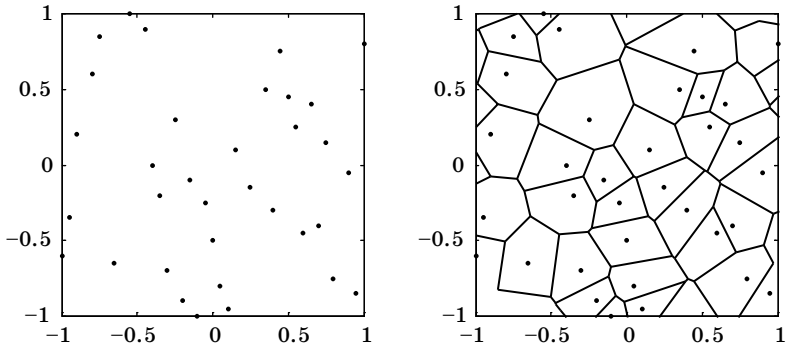


Рис. 2.8. Сигнальное созвездие и разбиение на решающие области (области Вороного)

дит приемник, обрабатывающий выходной сигнал канала $r(t)$. Поскольку конечномерное представление сохраняет расстояние, то

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) &= d^2(r(t), s_i(t)) = \\ &= \int_0^T (r(t) - s_i(t))^2 dt = \int_0^T r^2(t) dt - 2 \int_0^T r(t) s_i(t) dt + E_i, \end{aligned}$$

где $E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$ – энергия i -го сигнала. Тогда равенства (2.13) и (2.14) можно переписать в виде

$$R_i^{(\text{МAB})} = \left\{ \mathbf{r} : \int_0^T r(t) s_i(t) dt - C_i^{(\text{МAB})} = \max_{0 \leq k \leq q-1} \left\{ \int_0^T r(t) s_k(t) dt - C_k^{(\text{МAB})} \right\} \right\}, \quad (2.15)$$

где $C_k^{(\text{МAB})} = (E_k - N_0 \ln P_i) / 2$, $k = 0, 1, \dots, q-1$,

$$R_i^{(\text{МП})} = \left\{ \mathbf{r} : \int_0^T r(t) s_i(t) dt - C_i^{(\text{МП})} = \max_{0 \leq k \leq q-1} \left\{ \int_0^T r(t) s_k(t) dt - C_k^{(\text{МП})} \right\} \right\}, \quad (2.16)$$

где $C_k^{(\text{МП})} = E_k / 2$. Как видно из определения областей (2.15) и (2.16), решения по МАВ и по МП строятся почти одинаково, разница состоит лишь в постоянных $C_k^{(\text{МAB})}$ и $C_k^{(\text{МП})}$. На рис. 2.9 показана схема оптимального приемника. Эта схема эквивалентна ранее приведенным схемам.

Приемник, показанный на рис. 2.9, называется корреляционным, так как структура, приведенная на рис. 2.10, называется коррелятором.

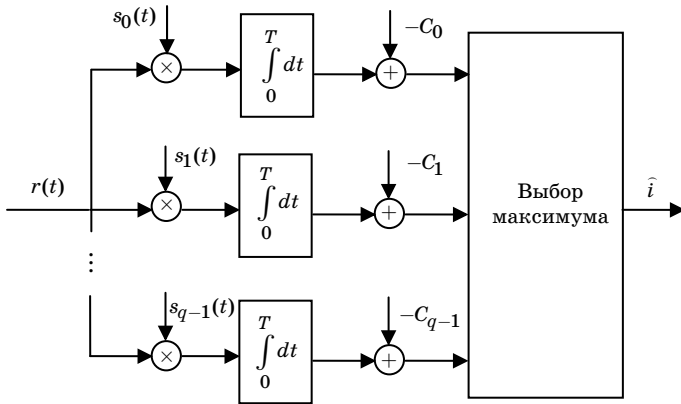


Рис. 2.9. Схема оптимального (корреляционного) приемника для канала с АБФС

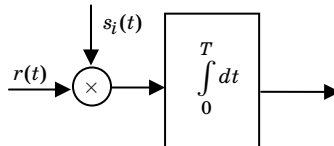


Рис. 2.10. Коррелятор

Еще одна эквивалентная приведенным структура оптимального приемника может быть получена с использованием так называемых согласованных фильтров. Фильтр называется согласованным с сигналом $s_i(t)$, если его импульсная переходная характеристика равна $h_i(t) = s_i(T-t)$. Рассмотрим реакцию фильтра, согласованного с сигналом $s_i(t)$, на сигнал $r(t)$.

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h_i(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) s_i(T-t+\tau) d\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t_1 = T-t+\tau \\ \tau = t_1 - T + t \\ d\tau = dt_1 \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} r(t_1 - T + t) s_i(t_1) dt_1.$$

Отсюда следует, что $y_i(t)|_{t=T} = y_i(T) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t_1) s_i(t_1) dt_1$. Это зна-

чит, что значение на выходе согласованного фильтра, взятое в момент $t=T$, равно значению на выходе коррелятора. Поэтому оптимальный приемник может быть построен по схеме с согласованными фильтрами и следующими за ними устройствами взятия отсчетов (рис. 2.11).

Свойства согласованного фильтра. Предположим, что имеется некоторый фильтр с конечной импульсной переходной характери-

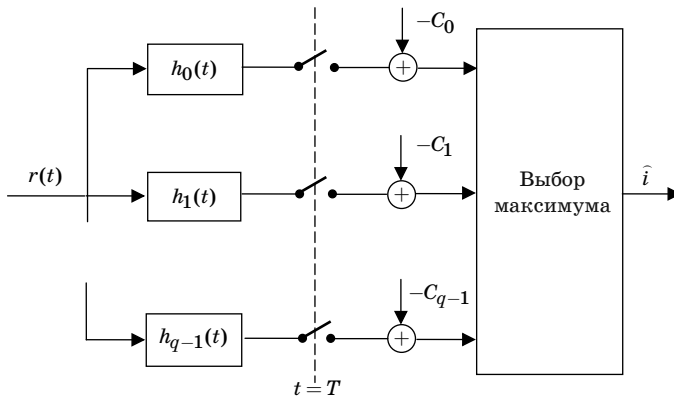


Рис. 2.11. Схема приемника с согласованными фильтрами для канала с АБГШ

стикой $h(t)$, $0 < t < T$. Пусть на его вход поступает сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t)$ – полезный сигнал, а $n(t)$ – АБГШ. Покажем, что если фильтр $h(t)$ согласован с сигналом $s(t)$, то отношение сигнал/шум на выходе фильтра будет максимальным.

Рассмотрим сигнал на выходе фильтра (символ $*$, как и ранее, обозначает свертку):

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Поскольку импульсная переходная характеристика фильтра $h(t)$ равна нулю вне интервала $(0, T)$, то можно записать

$$y(t) = \int_{t-T}^t s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{t-T}^t n(\tau) h(t - \tau) d\tau = s_h(t) + n_h(t),$$

где $s_h(t) = \int_{t-T}^t s(\tau) h(t - \tau) d\tau$, $n_h(t) = \int_{t-T}^t n(\tau) h(t - \tau) d\tau$ – сигнальная и

шумовая составляющие сигнала на выходе фильтра соответственно. Обозначим $\tilde{h}(t) = h(t - T)$ и рассмотрим значение отсчета сигнала на выходе фильтра, взятого в момент $t = T$. Оно равно

$$y(t)|_{t=T} = y(T) = \int_0^T s(t) \tilde{h}(t) dt + \int_0^T n(t) \tilde{h}(t) dt,$$

или

$$y(T) = s_h(T) + n_h(T) = (s, \tilde{h}) + (n, \tilde{h}), \quad (2.17)$$

где через (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение функций, $s_h(T) = (s, \tilde{h})$ – отсчет сигнальной составляющей на выходе фильтра, $n_h(T) = (n, \tilde{h})$ – отсчет шумовой составляющей на выходе фильтра. Величина $n_h(T)$ представляет собой гауссовскую случайную величину с нулевым средним и дисперсией $(N_0/2) \|\tilde{h}\|^2 = (N_0/2) \|h\|^2$.

В дальнейшем рассмотрении будет использовано неравенство $(f, g)^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$, известное как неравенство Коши–Шварца–Буняковского. Оно обращается в равенство, если функции $f(t)$ и $g(t)$ пропорциональны, т. е. если $f(t) = Cg(t)$, где C – некоторая константа.

Легко видеть, что если положить

$$\tilde{h}(t) = Cs(t), \quad (2.18)$$

то для величины квадрата сигнальной составляющей в равенстве (2.17) можно с использованием неравенства Коши–Шварца–Буняковского записать, что $s_h(T)^2 = (s, Cs)^2 = C^2 \|s\|^4 = C^2 E^2$, где E – энергия сигнала. При этом условии дисперсия шумовой компоненты будет равна $\sigma_h^2 = (N_0 / 2) \|Cs\|^2 = (N_0 / 2) C^2 \|s\|^2$, а отношение этих величин будет равно своему максимальному значению

$$\frac{s_h(T)^2}{\sigma_h^2} = \frac{E}{(N_0 / 2)}. \quad (2.19)$$

Заметим, что значение константы C не играет роли, так как она присутствует в числителе и знаменателе этого отношения. Поэтому в дальнейшем можно считать, что $C=1$. Из равенства (2.18) следует, что $h(t) = \tilde{s}(t) = s(T - t)$, что, в свою очередь, совпадает с определением согласованного фильтра.

Рассмотрим теперь свойства согласованного фильтра в частотной области. Обозначим через $H(f) \leftrightarrow h(t)$ частотную характеристику фильтра. Поскольку $h(t) = s(T - t)$, то

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(T - t) e^{-j2\pi f t} dt = \left. \begin{array}{l} \text{Замена} \\ T - t = t_1 \\ t = T - t_1 \\ dt = -dt_1 \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1) e^{-j2\pi f (T - t_1)} dt_1 = e^{-j2\pi f T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1) e^{j2\pi f t_1} dt_1 = e^{-j2\pi f T} S^*(f), \end{aligned}$$

где $S(f)$ – спектр сигнала. Спектр сигнальной составляющей на выходе согласованного фильтра

$$S_h(f) = S(f)H(f) = S(f)e^{-j2\pi f T} S^*(f) = e^{-j2\pi f T} |S(f)|^2.$$

Тогда сама сигнальная составляющая $s_h(t) \leftrightarrow S_h(f)$:

$$s_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f T} |S(f)|^2 e^{j2\pi f t} df,$$

а ее отсчет в момент $t = T$

$$s_h(T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f T} |S(f)|^2 e^{j2\pi f T} df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \|s\|^2 = E.$$

Здесь также использовано равенство Парсеваля. Отсюда следует, что, как и ранее, $s_h(T)^2 = E^2$.

Шум на выходе согласованного фильтра окрашен и имеет спектральную плотность мощности

$$N_h(f) = (N_0 / 2) |H(f)|^2 = (N_0 / 2) |S^*(f) e^{-j2\pi fT}|^2 = (N_0 / 2) |S(f)|^2.$$

Мощность шума на выходе фильтра (или дисперсия отсчета шума на выходе фильтра) равна, как и прежде,

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} N_h(f) df = (N_0 / 2) \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \\ &= (N_0 / 2) \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = (N_0 / 2) \|s\|^2 = (N_0 / 2) E. \end{aligned}$$

Следовательно получаем

$$\frac{s_h(T)^2}{\sigma_h^2} = \frac{E}{(N_0 / 2)},$$

и это выражение совпадает с (2.19).

2.4. Вероятность ошибки при передаче двоичных сигналов в канале с аддитивным белым гауссовским шумом

Рассмотрим простой случай передачи двоичных сигналов. Вероятность ошибки определяется по формуле полной вероятности

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i = P_e(0) P_0 + P_e(1) P_1,$$

где $P_e(i)$ – условная вероятность ошибки при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала. Найдем сначала вероятность $P_e(0)$. Как следует из определения алгоритма приема по МП:

$$P_e(0) = \Pr[d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0) > d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) | 0] = \Pr[\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_0\|^2 > \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^2 | 0].$$

При передаче сигнала $s_0(t)$ на выходе канала наблюдается $r(t) = s_0(t) + n(t)$, и, следовательно, $\mathbf{r} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{n}$. Тогда

$$P_e(0) = \Pr\left[\|\mathbf{n}\|^2 > \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}\|^2\right] = \Pr\left[\|\mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}\|^2 > 0\right].$$

Рассмотрим выражение $\|\mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}\|^2$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}\|^2 &= \|\mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|^2 - 2(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1, \mathbf{n}) - \|\mathbf{n}\|^2 = \\ &= -\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|^2 - 2(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1, \mathbf{n}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_e(0) = \Pr\left[\xi > \Delta^2\right], \quad (2.20)$$

где $\xi = -2(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1, \mathbf{n})$, $\Delta^2 = d^2(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) = \|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|^2$ – квадрат расстояния между сигналами. Определим характеристики случайной величины ξ .

$$\xi = -2(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1, \mathbf{n}) = -2 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j}) n_j, \quad (2.21)$$

где s_{0j} , s_{1j} – координаты соответствующих сигнальных точек; n_j – скалярные произведения АБГШ и базисных функций. Величины n_j – это независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины с параметрами $\overline{n_j} = 0$, $\overline{n_j^2} = N_0 / 2$ (см. свойства АБГШ в подразд. 1.9). Найдем параметры величины ξ , определенной равенством (2.21). Поскольку ξ представляет собой линейную комбинацию независимых гауссовских случайных величин, то она тоже гауссовская. Далее найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{aligned}\overline{\xi} &= \overline{-2 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j}) n_j} = -2 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j}) \overline{n_j} = 0, \\ D[\xi] &= D\left[-2 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j}) n_j\right] = 4 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j})^2 D[n_j] = \\ &= 2N_0 \sum_{j=1}^D (s_{0j} - s_{1j})^2 = 2N_0 \Delta^2.\end{aligned}$$

Итак, вероятность $P_e(0)$ вычисляется, как указано в (2.20), где ξ – гауссовская случайная величина параметрами $(0, 2N_0 \Delta^2)$.

Определим функцию

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz. \quad (2.22)$$

Легко видеть, что $Q(x) = \Pr[\zeta > x]$, где ζ – гауссовская случайная величина с параметрами $(0,1)$. С использованием функции $Q(x)$ (2.22) можно найти вероятность превышения некоторого порога A гауссовской случайной величины X общего вида с параметрами (m, σ^2) , т. е.

$$\Pr[X > A] = Q\left(\frac{A - m}{\sigma}\right).$$

С использованием равенств (2.20) и (2.22) можно записать

$$P_e(0) = Q\left(\frac{\Delta^2}{\sqrt{\Delta^2 2N_0}}\right) = Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right).$$

Аналогичное значение имеет и вероятность $P_e(1)$, поэтому

$$P_e = Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (2.23)$$

Как следует из выражения (2.23), вероятность ошибки при передаче двоичных сигналов по каналу с АБГШ зависит только от величины евклидова расстояния между сигналами (но не от их конкретного вида!) и от интенсивности шума.

Функция $Q(x)$, используемая в выражении (2.23), не выражается через элементарные функции и вычисляется численно. На практике она может быть найдена из таблиц. Чаще, однако, в руководствах по теории вероятностей встречаются таблицы значений гауссовской функции распределения, определенной как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz.$$

Связь между ней и функцией $Q(x)$ задается равенством $Q(x) = 1 - F(x)$. Часто встречаются также таблицы так называемой функции ошибок и дополнительной функции ошибок, определенных следующим образом:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz,$$

и

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(x),$$

соответственно. Связь функции $Q(x)$ с $\operatorname{erfc}(x)$ задается равенством $Q(x) = \operatorname{erfc}(x/\sqrt{2})/2$. Можно указать также просто вычисляемые верхние и нижние границы для $Q(x)$ для положительных значений ее аргумента

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}, \quad (2.24)$$

и наиболее простую верхнюю границу

$$Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}. \quad (2.25)$$

На рис. 2.12, а показан график функции $Q(x)$, а на рис. 2.12, б – графики этой функции, а также верхняя и нижняя границы (2.24) и простейшая верхняя граница (2.25) в полулогарифмическом масштабе.

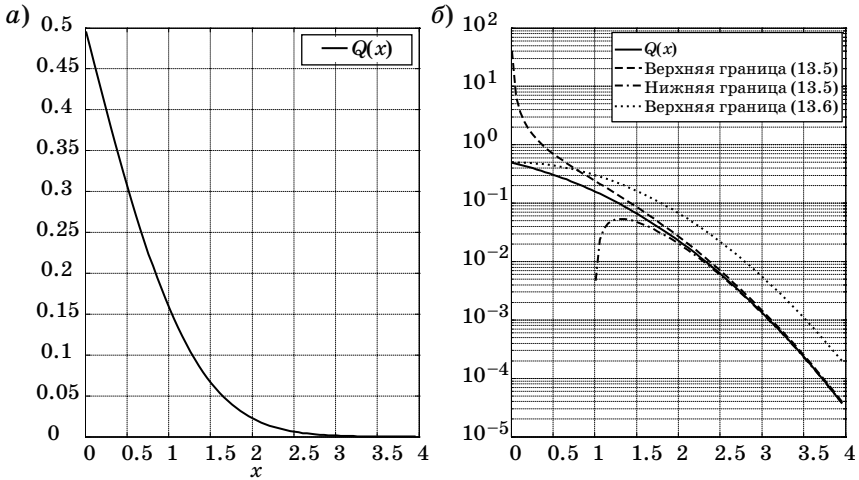


Рис. 2.12. Функция $Q(x)$ – а, функция $Q(x)$ и границы в полулогарифмическом масштабе – б

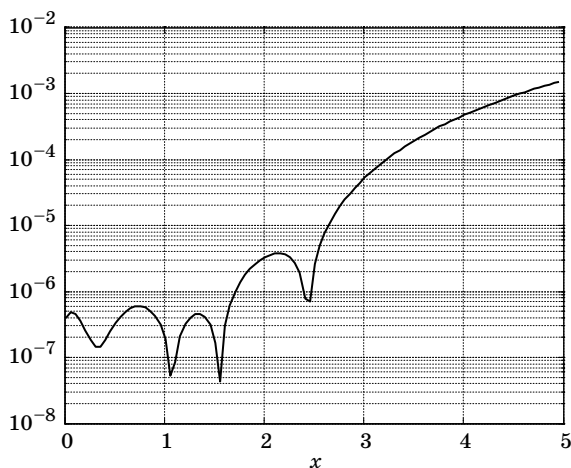


Рис. 2.13. Относительная ошибка приближения функции $Q(x)$

Весьма точно значения $Q(x)$ могут быть найдены с использованием приближенного выражения сравнительно удобного для программирования

$$Q(x) \approx \tilde{Q}(x) = f(x) \sum_{i=0}^5 a_i \left(\frac{1}{(1+px)} \right)^i, \quad (2.26)$$

где $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$, $p = 0,2316419$, $a_1 = 0,3193815$, $a_2 = -0,3565638$, $a_3 = 1,781478$, $a_4 = -1,821256$, $a_5 = 1,330274$. Качество приближения иллюстрируется графиком рис. 2.13, где показана в полулогарифмическом масштабе относительная ошибка приближения (2.26), вычисляемая как $|Q(x) - \tilde{Q}(x)|/Q(x)$.

2.5. Вероятность ошибки для различных систем двоичных сигналов в канале с аддитивным белым гауссовским шумом

Ранее получено, что вероятность ошибки для двоичных сигналов может быть найдена как $P_e = Q(\Delta/\sqrt{2N_0})$, где Δ — расстояние между сигналами; $N_0/2$ — значение спектральной плотности мощности АБГШ. Рассмотрим три различных набора двоичных сигналов.

1. *Противоположные сигналы.* Пусть $\phi_1(t)$ — некоторая нормированная функция, заданная на интервале $[0, T]$ и определяющая фор-

му сигнала, $\|\varphi_1\| = 1$. Положим, что $s_0(t) = \sqrt{E}\varphi_1(t)$, $s_1(t) = -\sqrt{E}\varphi_1(t)$, где E – энергия сигналов.

$$E = \int_0^T s_0^2(t) dt = \int_0^T s_1^2(t) dt.$$

Оба сигнала могут быть представлены с использованием всего одной базисной функции. Это значит, что противоположные сигналы образуют одномерное сигнальное множество, $\mathbf{s}_0 = (\sqrt{E})$, $\mathbf{s}_1 = (-\sqrt{E})$. Легко заметить, что решающие области в данном случае имеют вид бесконечных полупрямых $R_0 = [0, \infty)$, $R_1 = (-\infty, 0)$ (рис. 2.14).

Очевидно, что расстояние между сигналами $\Delta = 2\sqrt{E}$, тогда вероятность ошибки

$$P_e^{(\text{пр})} = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (2.27)$$

Величина E/N_0 называется отношением сигнал/шум. В инженерной практике принято выражать это отношение в децибелах (дБ). Величина отношения, измеренная в дБ, определяется как $(E/N_0)_{\text{дБ}} = 10 \log_{10}(E/N_0)$, и, наоборот, $E/N_0 = 10^{(E/N_0)_{\text{дБ}}/10}$. Перевод отношения в децибелы и обратно можно легко выполнять в уме, если запомнить несложные правила:

при увеличении отношения в два раза, соответствующая величина в децибелах увеличивается на 3 дБ (точнее на 3,01 дБ), так как $10 \log_{10} 2 = 3,01 \approx 3$.

при уменьшении отношения в два раза, соответствующая величина в децибелах уменьшается на 3 дБ (точнее на 3,01 дБ), так как $10 \log_{10}(1/2) = -3,01 \approx -3$.

Пример. Пусть $E/N_0 = 5$. Требуется оценить $(E/N_0)_{\text{дБ}}$. Легко видеть, что $(E/N_0)_{\text{дБ}} = 7$ дБ. Действительно

$$10 \log_{10} 5 = 10 \log_{10}(10/2) = 10 \log_{10} 10 - 10 \log_{10} 2 = 10 - 3 = 7.$$

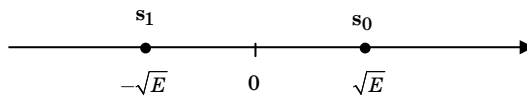


Рис. 2.14. Сигнальное множество (противоположные сигналы)

2. *Ортогональные сигналы.* Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – две ортонормированные функции, заданные на интервале $[0, T]$, $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ и $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$. Положим, что $s_0(t) = \sqrt{E}\varphi_1(t)$, $s_1(t) = \sqrt{E}\varphi_2(t)$, где E – энергия сигналов. В этом случае $\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = 0$, и сигналы имеют равную энергию

$$E = \int_0^T s_0^2(t)dt = \int_0^T s_1^2(t)dt.$$

Сигналы могут быть представлены с использованием двух базисных функций. Это значит, что ортогональные сигналы образуют двумерное сигнальное множество, $s_0 = (\sqrt{E}, 0)$, $s_1 = (0, \sqrt{E})$. Легко заметить, что решающие области в данном случае имеют вид бесконечных полуплоскостей $R_0 = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2): r_1 \geq r_2\}$, $R_1 = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2): r_1 < r_2\}$ (рис. 2.15).

Очевидно, что расстояние между сигналами равно $\Delta = \sqrt{2E}$, тогда вероятность ошибки

$$P_e^{(\text{орт})} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right). \quad (2.28)$$

3. *Сигналы с пассивной паузой.* В этом случае $s_0(t) = 0$, $s_1(t) \neq 0$ и $E = \int_0^T s_1^2(t)dt$. Базис для представления этого набора сигналов состоит из одной функции $\varphi_1(t) = s_1(t) / \sqrt{E}$. Тогда $s_1(t) = \sqrt{E}\varphi_1(t)$ и $\|\varphi_1\| = 1$. Сигналы с пассивной паузой образуют одномерное сигнальное множество, $s_0 = (0)$, $s_1 = (\sqrt{E})$. Легко заметить, что решающие области в данном случае имеют вид бесконечных полупрямых $R_0 = (-\infty, \sqrt{E}/2)$, $R_1 = (\sqrt{E}/2, \infty)$ (рис. 2.16).

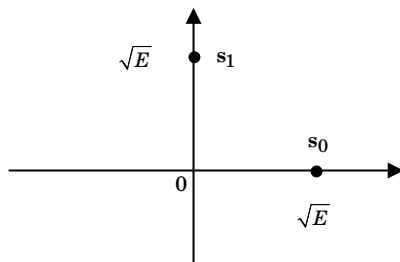


Рис. 2.15. Сигнальное множество (ортогональные сигналы)

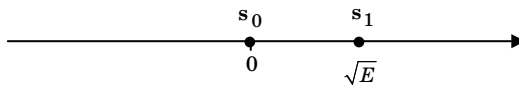


Рис. 2.16. Сигнальное множество
(сигналы с пассивной паузой)

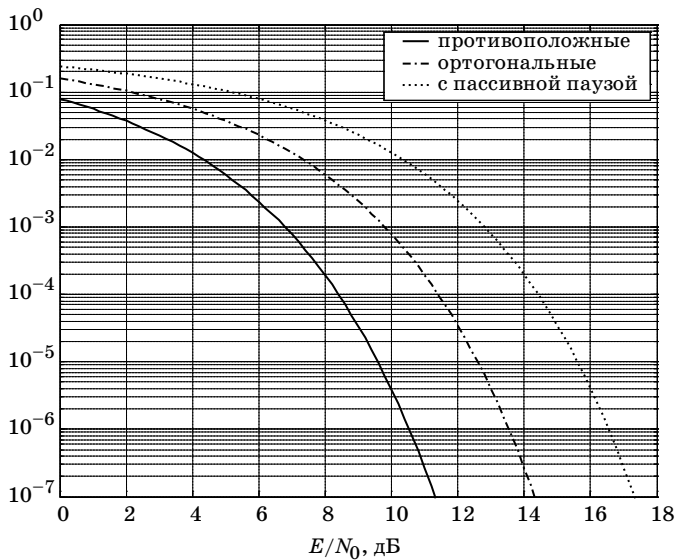


Рис. 2.17. Вероятность ошибки для двоичных сигналов

Очевидно, что расстояние между сигналами равно $\Delta = \sqrt{E}$, тогда вероятность ошибки

$$P_e^{(\text{пп})} = Q \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right). \quad (2.29)$$

Приведенные выражения для вероятности ошибки справедливы при любой форме сигналов (при сохранении противоположности или ортогональности). От формы сигналов зависят другие свойства сигналов, в частности спектральные свойства.

На рис. 2.17 показаны графики зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум E/N_0 .

Как видно из равенств (2.27)–(2.29) и графиков, представленных на рис. 2.17, наименьшую вероятность ошибки обеспечивают противоположные сигналы. При использовании ортогональных

сигналов для достижения той же вероятности ошибки требуется вдвое (или на 3 дБ) большее отношение сигнал/шум, чем при использовании противоположных сигналов. Сигналы с пассивной паузой уступают ортогональным 3 дБ, а противоположным – 6 дБ.

2.6. Дискретная амплитудная модуляция. Вероятность ошибки

Сигналы дискретной амплитудной модуляции (АМ) имеют вид $s_i(t) = A_i \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – некоторая нормированная функция, заданная на интервале $[0, T]$ и определяющая форму сигнала; A_i – амплитуда i -го сигнала; $i = 0, 1, \dots, q-1$. Определим амплитуду i -го сигнала.

$$A_i = \sqrt{E} \left(1 - \frac{2i}{q-1} \right).$$

Тогда $A_0 = \sqrt{E}$, $A_{q-1} = -\sqrt{E}$, а все промежуточные значения амплитуды расположены с равномерным шагом в интервале $[-\sqrt{E}, \sqrt{E}]$. Сигнальное множество АМ показано на рис. 2.18.

Минимальное расстояние между сигналами, как видно из рис. 2.18, составляет $\Delta = 2\sqrt{E} / (q-1)$. Определим энергию каждого сигнала. Очевидно, что энергия i -го сигнала $E_i = A_i^2 = E(1 - 2i / (q-1))^2$, т. е. энергия сигналов принимает различные значения. Величина E имеет смысл максимальной энергии. Как обычно будем полагать, что сигналы передаются равновероятно. Найдем значение средней энергии.

$$\bar{E} = \sum_{i=0}^{q-1} E_i P_i = \frac{E}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(1 - \frac{2i}{q-1} \right)^2 = \frac{E}{q} \left(\sum_{i=0}^{q-1} 1 - \frac{4}{(q-1)} \sum_{i=0}^{q-1} i + \frac{4}{(q-1)^2} \sum_{i=0}^{q-1} i^2 \right).$$

Найдем значение выражения $\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(1 - \frac{2i}{q-1} \right)^2$. Используя тожде-

ства $\sum_{i=0}^k i = k(k+1) / 2$ и $\sum_{i=0}^k i^2 = k(k+1)(2k+1) / 6$, получим

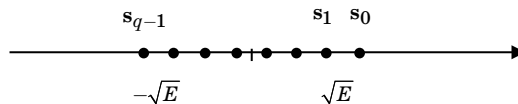


Рис. 2.18. Сигнальное множество АМ-сигналов

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(1 - \frac{2i}{q-1} \right)^2 &= \frac{1}{q} \left(\sum_{i=0}^{q-1} 1 - \frac{4}{(q-1)} \sum_{i=0}^{q-1} i + \frac{4}{(q-1)^2} \sum_{i=0}^{q-1} i^2 \right) = \\ &= \frac{1}{q} \left(q - \frac{4}{(q-1)} \frac{q(q-1)}{2} + \frac{4}{(q-1)^2} \frac{(q-1)q(2q-1)}{6} \right) = \frac{1}{3} \frac{q+1}{q-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\bar{E} = \frac{E}{3} \frac{q+1}{q-1}. \quad (2.30)$$

Решающие области для $i = 1, 2, \dots, q-2$ представляют собой отрезки длиной Δ с центрами в сигнальных точках $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{q-2}$, т. е. $R_i = [A_i - \Delta/2, A_i + \Delta/2]$. Решающие области для крайних точек \mathbf{s}_0 и \mathbf{s}_{q-1} представляют собой бесконечные полупрямые $R_0 = [A_0 - \Delta/2, \infty)$ и $R_{q-1} = (-\infty, A_{q-1} + \Delta/2]$.

Сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) \in \{s_i(t)\}$, $n(t)$ – АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. В силу того, что сигнальное множество АМ-сигналов одномерно, имеем следующее конечномерное представление $r = A + n$, где $A \in \{A_i\}$, n – гауссовская случайная величина с параметрами $\bar{n} = 0$, $\bar{n}^2 = N_0/2$. Найдем вероятность ошибки. По формуле полной вероятности имеем

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i), \quad (2.31)$$

где $P_e(i)$ – вероятность при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала, $P_i = 1/q$. Рассмотрим сначала вычисление $P_e(i)$ при $i = 1, 2, \dots, q-2$.

$$\begin{aligned} P_e(i) &= \Pr[r \notin R_i | i] = \Pr[A_i + n \notin [A_i - \Delta/2, A_i + \Delta/2]] = \\ &= \Pr[n \notin [-\Delta/2, \Delta/2]] = \\ &= \int_{-\infty}^{-\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x^2/N_0} dx + \int_{\Delta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x^2/N_0} dx = 2Q \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Найдем оставшиеся вероятности $P_e(0)$ и $P_e(q-1)$.

$$\begin{aligned} P_e(0) &= \Pr[r \notin R_0 | 0] = \Pr[A_0 + n \notin [A_0 - \Delta/2, \infty)) = \\ &= \Pr[n \notin [-\Delta/2, \infty)) = \\ &= \int_{-\infty}^{-\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x^2/N_0} dx = Q \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}} \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Аналогично можно показать, что

$$P_e(q-1) = Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (2.34)$$

Подстановка выражений (2.32)–(2.34) в (2.31) с учетом того, что $\Delta = 2\sqrt{E} / (q-1)$, дает окончательное выражение

$$P_e = \frac{2q-2}{q} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \frac{1}{q-1}\right), \quad (2.35)$$

определяющее зависимость вероятности ошибки от максимального отношения сигнал/шум E/N_0 . С использованием равенства (2.30) получим выражение, определяющее зависимость вероятности ошибки от среднего значения отношения сигнал/шум \bar{E}/N_0 :

$$P_e = \frac{2q-2}{q} Q\left(\sqrt{\frac{6\bar{E}}{N_0}} \frac{1}{q^2-1}\right). \quad (2.36)$$

При $q=2$ равенства (2.35) и (2.36) обращаются в $P_e = Q(\sqrt{2E/N_0})$, т. е. в формулу для вероятности ошибки для двоичных противоположных сигналов; при этом также имеет место равенство $\bar{E} = E$.

Рассмотрим вывод выражения для вероятности ошибки на бит для сигналов АМ. Среднее значения отношения сигнал/шум на бит

$$\left(\frac{\bar{E}}{N_0}\right)_{bit} = \frac{1}{\log_2 q} \frac{\bar{E}}{N_0}.$$

Вероятность ошибки на бит зависит от отображения сообщений (номеров сигналов) в сигнальные точки. Предпочтительным будет такое отображение, при котором близко расположенные сигнальные точки соответствуют сообщениям, различающимся в малом числе двоичных разрядов. Такое отображение для сигналов АМ достигается с использованием кода Грея. В этом случае блоки двоичных данных, соответствующие соседним сигнальным точкам, будут отличаться только в одной позиции (см. пример для АМ-8 на рис. 2.19).

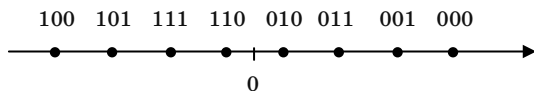


Рис. 2.19. Сигнальное множество АМ-8
(отображение в соответствии с кодом Грея)

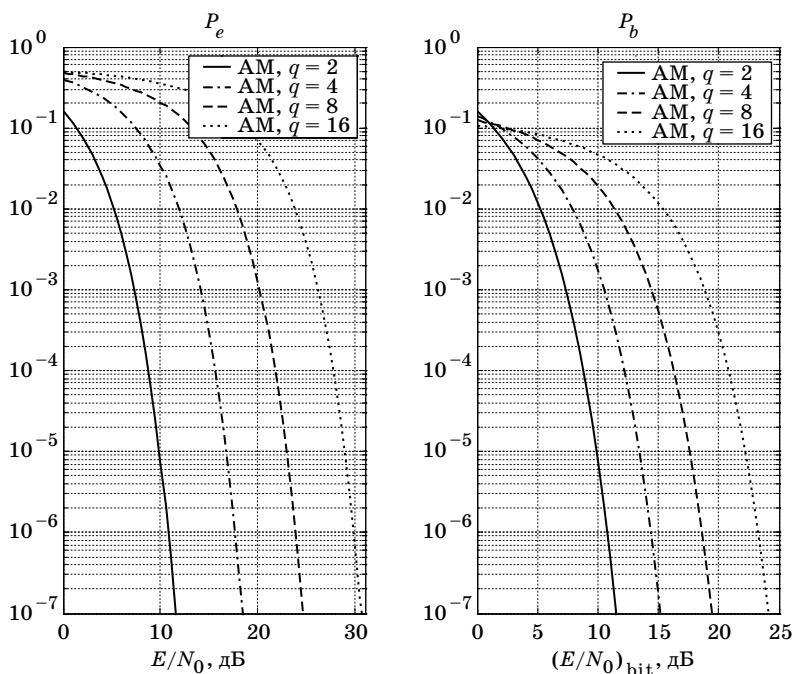


Рис. 2.20. Вероятности ошибки
для АМ-сигналов P_e (слева) и P_b (справа)

Поскольку ошибочное решение относительно переданного сигнала наиболее вероятно в пользу соседних сигналов, то оно будет приводить к ошибке только в одном бите. Это значит, что в большинстве случаев доля ошибочных двоичных разрядов при ошибочном решении равна $1/\log_2 q = 1/m$. Отсюда следует, что вероятность ошибки на бит как функции от отношения сигнал/шум на бит задается выражением

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 q} P_e = \frac{1}{\log_2 q} \frac{2q-2}{q} Q \left(\sqrt{6 \left(\frac{\bar{E}}{N_0} \right)_{\text{bit}} \frac{\log_2 q}{q^2 - 1}} \right). \quad (2.37)$$

Графики, показанные на рис. 2.20, дают представление о зависимости вероятности ошибки от среднего значения отношения сигнал/шум и вероятности ошибки на бит от отношения сигнал/шум на бит. Важно отметить, что вероятность ошибки P_e резко возрастает с увеличением объема сигнального алфавита.

2.7. Квадратурная амплитудная модуляция. Вероятность ошибки

Сигналы квадратурной амплитудной модуляции (КАМ) (quadrature amplitude modulation, QAM) имеют вид $s_i(t) = s_{i1} \varphi_1(t) + s_{i2} \varphi_2(t)$, где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – две ортонормированные функции, заданные на интервале $[0, T]$ и определяющие форму сигнала, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Из определения сигналов КАМ следует, что $D = 2$. Величины s_{i1} , s_{i2} для сигналов КАМ принимают дискретные значения, равномерно расположенные в некотором конечном интервале. Они могут рассматриваться как амплитудные множители при функциях $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, поэтому сигнал КАМ представляет собой сумму двух ортогональных АМ-сигналов $s_{i1} \varphi_1(t)$ и $s_{i2} \varphi_2(t)$.

Как обычно будем считать, что $q = 2^m$, где m – целое; число m может рассматриваться как число бит, переносимых сигналом (при отсутствии кодирования). Положим для начала, что $m = 2k$, k – целое. Тогда $\sqrt{q} = 2^k$ тоже целое. Поставим в соответствие номеру сигнала i , $i = 0, 1, \dots, q-1$, пару целых i_1 и i_2 , $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, \sqrt{q} - 1$, по правилу $i = i_1 \sqrt{q} + i_2$. Иначе говоря, i_1, i_2 – это цифры в \sqrt{q} -ичном представлении числа i . Положим

$$s_{i1} = A \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right), \quad s_{i2} = A \left(1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q}-1} \right),$$

где A – максимальное абсолютное значение величин s_{i1} и s_{i2} . Очевидно, что значения величин s_{i1} и s_{i2} расположены с равномерным шагом в интервале $[-A, A]$. Сигнальное множество КАМ показано на рис. 2.21.

При $q = 2^m$, где $m = 2k-1$, сигнальное множество строится путем «прореживания» сигнального множества для $q = 2^{2k}$. Примеры приведены на рис. 2.22 – множество для КАМ-8 построено из

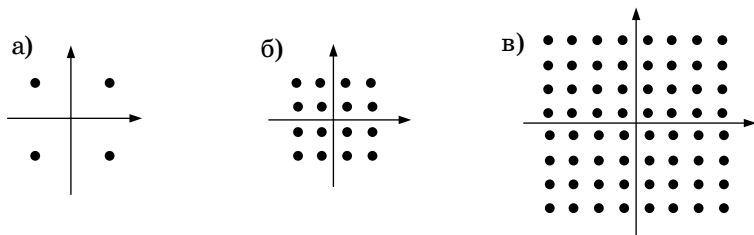


Рис. 2.21. Сигнальное множество КАМ: а) $q = 4$; б) $q = 16$; в) $q = 64$

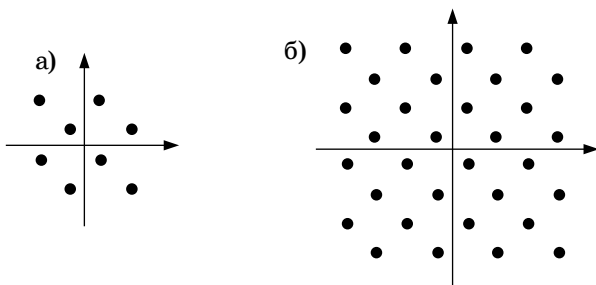


Рис. 2.22. Сигнальное множество КАМ: а) $q=8$; б) $q=32$

множества КАМ-16, а множество для КАМ-32 – из множества для КАМ-64 путем выбрасывания половины точек.

Минимальное расстояние между сигналами, как видно из рис. 2.21, составляет

$$\Delta = 2A / (\sqrt{q} - 1). \quad (2.38)$$

Определим энергию каждого сигнала. Очевидно, что энергия i -го сигнала

$$E_i = s_{i1}^2 + s_{i2}^2 = A^2 \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right)^2 + A^2 \left(1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q}-1} \right)^2,$$

т. е. энергия сигналов принимает различные значения. Как обычно будем полагать, что сигналы передаются равновероятно. Найдем значение средней энергии.

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} E_i = \frac{A^2}{q} \sum_{i_1=0}^{\sqrt{q}-1} \sum_{i_2=0}^{\sqrt{q}-1} \left(\left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right)^2 + \left(1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q}-1} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{A^2}{q} \left(\sum_{i_1=0}^{\sqrt{q}-1} \sqrt{q} \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right)^2 + \sum_{i_2=0}^{\sqrt{q}-1} \sqrt{q} \left(1 - \frac{2i_2}{\sqrt{q}-1} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{2A^2}{\sqrt{q}} \sum_{i_1=0}^{\sqrt{q}-1} \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right)^2. \end{aligned}$$

Ранее получено, что $\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(1 - \frac{2i}{q-1} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{q+1}{q-1}$. Отсюда следует

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{i_1=0}^{\sqrt{q}-1} \left(1 - \frac{2i_1}{\sqrt{q}-1} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{q}+1}{\sqrt{q}-1}.$$

Тогда с учетом (2.38) имеем соотношение между средней энергией сигналов КАМ и минимальным расстоянием между ними:

$$\overline{E} = \frac{2A^2}{3} \frac{\sqrt{q}+1}{\sqrt{q}-1} = \frac{\Delta^2}{6} (q-1). \quad (2.39)$$

Решающие области для сигнальных точек, находящихся в середине сигнального созвездия, представляют собой квадраты. Для точек на краях сигнального созвездия они бесконечны (рис. 2.23).

Оценим вероятность ошибки для КАМ-сигналов. Вероятность ошибки вычисляется как

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i), \quad (2.40)$$

где $P_e(i)$ – вероятность ошибки при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала, $P_i = 1/q$. Рассмотрим вычисление $P_e(i)$. По определению $P_e(i) = \Pr[\mathbf{r} \notin R_i | i]$, где R_i – i -я решающая область; $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ – точка в сигнальном пространстве, соответствующая принятому сигналу. Обозначим квадрат с длиной стороны Δ и центром в некоторой точке $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ как $S(\mathbf{z})$. Он может быть описан как $S(\mathbf{z}) = [z_1 - \Delta/2, z_1 + \Delta/2] \times [z_2 - \Delta/2, z_2 + \Delta/2]$. Тогда $S(\mathbf{s}_i)$ – это квадрат с центром в i -й сигнальной точке и $S(\mathbf{s}_i) \subseteq R_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_e(i) &= \Pr[\mathbf{r} \notin R_i | i] \leq \Pr[\mathbf{r} \notin S(\mathbf{s}_i) | i] = \Pr[\mathbf{s}_i + \mathbf{n} \notin S(\mathbf{s}_i)] = \\ &= \Pr[\mathbf{n} \notin S(\mathbf{0})] = 1 - \Pr[\mathbf{n} \in S(\mathbf{0})] = \\ &= 1 - \Pr[(n_1, n_2) \in [-\Delta/2, +\Delta/2] \times [-\Delta/2, +\Delta/2]] = \\ &= 1 - \Pr[n_1 \in [-\Delta/2, +\Delta/2]] \Pr[n_2 \in [-\Delta/2, +\Delta/2]] = \\ &= 1 - \left(\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x^2/N_0} dx \right)^2 = 1 - \left(1 - 2Q \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}} \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подстановка (2.41) в (2.40) дает с учетом (2.39) оценку

$$P_e \leq 1 - \left(1 - 2Q \left(\sqrt{\frac{3\overline{E}}{N_0}} \frac{1}{q-1} \right) \right)^2. \quad (2.42)$$

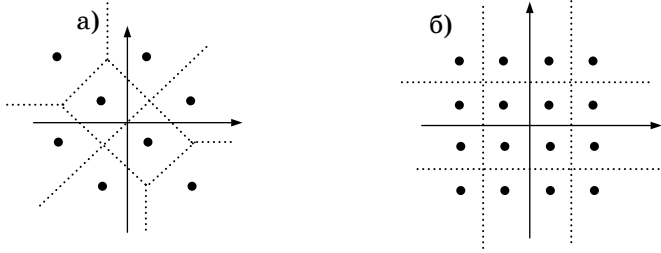


Рис. 2.23. Решающие области КАМ: а) $q=8$; б) $q=16$

Рассмотрим получение более простой, но менее точной, чем (2.42) оценки вероятности ошибки при использовании КАМ-сигналов. Пусть $C(\mathbf{z})$ – круг радиуса $\Delta/2$ с центром \mathbf{z} . Заметим, что $R_i \supseteq S(\mathbf{s}_i) \supset C(\mathbf{s}_i)$, тогда

$$P_e(i) \leq \Pr[\mathbf{n} \notin S(\mathbf{0})] < \Pr[\mathbf{n} \notin C(\mathbf{0})] = \Pr[n_1^2 + n_2^2 > (\Delta/2)^2].$$

Далее

$$\begin{aligned} & \Pr[n_1^2 + n_2^2 > (\Delta/2)^2] = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 > (\Delta/2)^2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x^2/N_0} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-y^2/N_0} dx dy = \\ &= \iint_{x^2 + y^2 > (\Delta/2)^2} (\pi N_0)^{-1} e^{-(x^2 + y^2)/N_0} dx dy = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{Переход к полярным координатам:} \\ x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \\ \{x^2 + y^2 > (\Delta/2)^2\} = \{\rho > \Delta/2, 0 < \theta < 2\pi\} \\ dx dy = \rho d\rho d\theta \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\Delta/2}^{\infty} (\pi N_0)^{-1} \rho e^{-\rho^2/N_0} d\rho d\theta = \int_{\Delta/2}^{\infty} \frac{2\rho}{N_0} e^{-\rho^2/N_0} d\rho = \\ &= -e^{-\rho^2/N_0} \Big|_{\Delta/2}^{\infty} = e^{-\Delta^2/4N_0}. \end{aligned}$$

Следовательно $P_e(i) < \exp(-\Delta^2/4N_0)$. Отсюда с использованием (2.39) и (2.40) получаем

$$P_e < \exp\left(-\frac{3}{2(q-1)} \frac{\bar{E}}{N_0}\right). \quad (2.43)$$

На рис. 2.24 показаны графики границ вероятности ошибки, вычисленных по формулам (2.42) и (2.43). Вывод точного выражения для вероятности ошибки приема КАМ-сигналов приведен в приложении 4.

Рассмотрим вывод выражения для вероятности ошибки на бит для сигналов КАМ. Среднее значения отношения сигнал шум/шум на бит

$$\left(\frac{\bar{E}}{N_0}\right)_{bit} = \frac{1}{\log_2 q} \frac{\bar{E}}{N_0}. \quad (2.44)$$

Для отображения сообщений в сигнальные точки КАМ может использоваться код Грея. Для нумерации строк и столбцов в сигнальном созвездии применяются два кода Грея длиной $m/2$, $m = \log_2 q$. Сообщение строится как конкатенация слов кода Грея для номеров

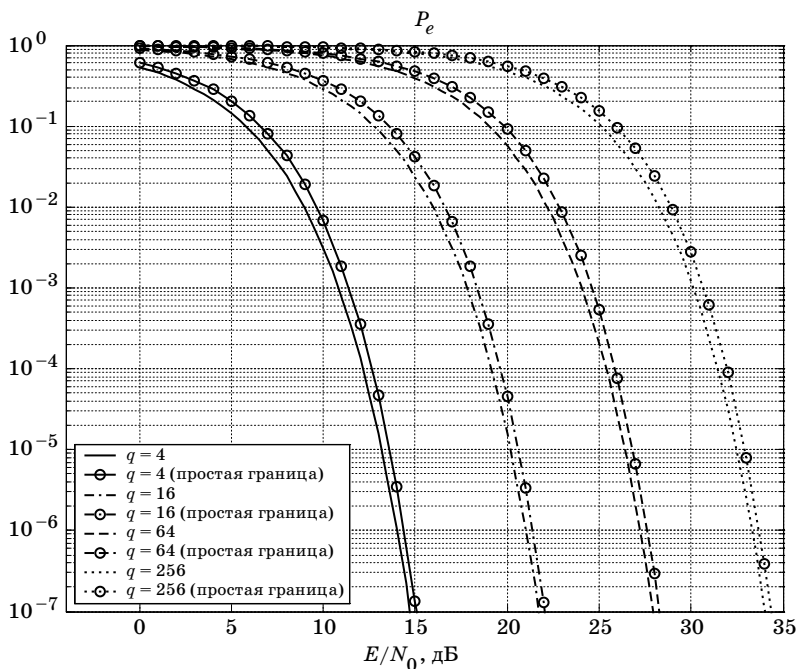


Рис. 2.24. Верхние границы вероятности ошибки для КАМ

строки и столбца, соответствующих сигнальной точке. Пример для КАМ-16 показан на рис. 2.25.

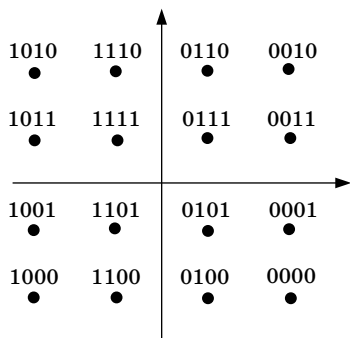


Рис. 2.25. Сигнальное множество КАМ-16
(отображение в соответствии с кодом Грея для строк и столбцов)

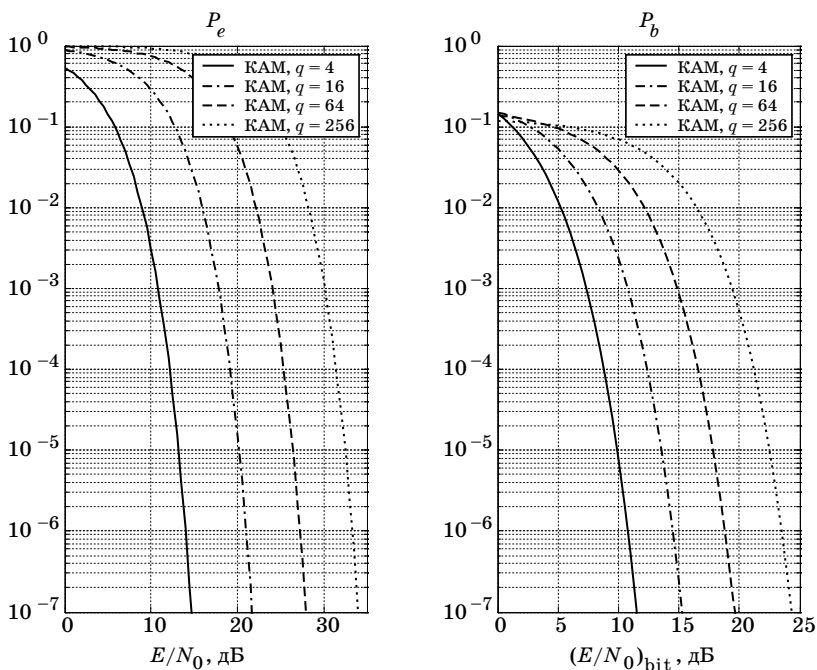


Рис. 2.26. Вероятности ошибки
для КАМ-сигналов P_e (слева) и P_b (справа)

Очевидно, что в этом случае соседним точкам соответствуют сообщения, отличающиеся в одном двоичном разряде. Поэтому формула для вероятности ошибки на бит может быть получена из выражений (2.42) и (2.44):

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 q} P_e \approx \frac{1}{\log_2 q} \left[1 - \left(1 - 2Q \left(\sqrt{3 \left(\frac{E}{N_0} \right)_{bit} \frac{\log_2 q}{q-1}} \right) \right)^2 \right]. \quad (2.45)$$

На рис. 2.26 показаны графики границ для вероятности ошибки, вычисленных по формулам (2.42) и (2.45).

2.8. Фазовая модуляция. Вероятность ошибки

Сигналы фазовой модуляции (ФМ) (phase shift keying, PSK) имеют вид

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_0 t - \theta_i), \quad 0 < t < T, \quad (2.46)$$

где E – энергия сигнала; T – период следования сигналов; f_0 – несущая частота; $f_0 = l/T$, l – целое; θ_i – фаза i -го сигнала, $\theta_i = i(2\pi/q)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Равенство (2.46) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \sqrt{E} \cos \theta_i \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_0 t + \sqrt{E} \sin \theta_i \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_0 t = \\ &= s_{i1} \varphi_1(t) + s_{i2} \varphi_2(t), \end{aligned} \quad (2.47)$$

где $s_{i1} = \sqrt{E} \cos \theta_i$, $s_{i2} = \sqrt{E} \sin \theta_i$ – коэффициенты разложения по ортонормированным функциям $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t$ и $\varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t$. Из равенства (2.47) следует, что $D = 2$ в случае сигналов ФМ. Сигнальное множество ФМ показано на рис 2.27. Сигнальные точки равномерно расположены на окружности радиуса \sqrt{E} ; угол между радиусами, соединяющими соседние сигнальные точки, равен $2\pi/q$. Следовательно минимальное расстояние между сигналами равно $\Delta = 2\sqrt{E} \sin(\pi/q)$.

Решающая область R_k для k -го ФМ-сигнала представляют собой угол величиной $2\pi/q$ с вершиной в начале координат, биссектриса которого проходит через точку s_k (рис. 2.27). Оценим вероятность ошибки для ФМ-сигналов. Вероятность ошибки вычисляется как

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i), \quad (2.48)$$

где $P_e(i)$ – вероятность ошибки при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала, $P_i = 1/q$. Рассмотрим вычисление вероятности $P_e(i)$. По определению $P_e(i) = \Pr[\mathbf{r} \notin R_i | i]$, где R_i – i -я решающая область; $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ – точка в сигнальном пространстве, соответствующая принятому сигналу. Рассмотрим рис. 2.28.

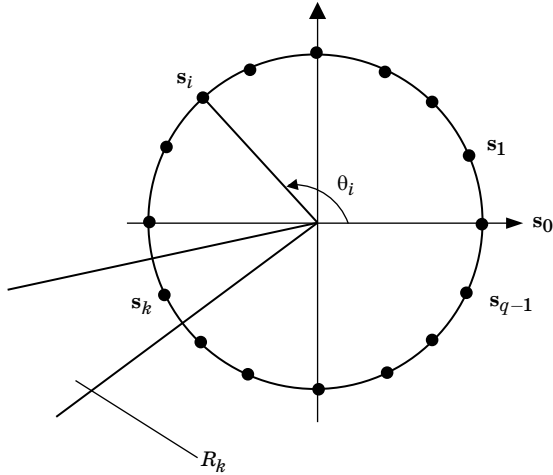


Рис. 2.27. Сигнальное множество ФМ

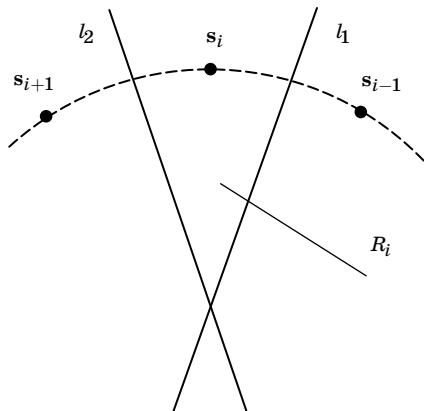


Рис. 2.28. К вычислению вероятности ошибки для ФМ

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}
 P_e(i) &= \Pr[\mathbf{r} \notin R_i | i] = \Pr[\mathbf{r} \text{ лежит правее прямой } l_1 \\
 &\text{или } \mathbf{r} \text{ лежит левее прямой } l_2 | i] < \\
 &< \Pr[\mathbf{r} \text{ лежит правее прямой } l_1 | i] + \\
 &+ \Pr[\mathbf{r} \text{ лежит левее прямой } l_2 | i] = \\
 &= \Pr[d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{i-1}) < d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) | i] + \Pr[d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{i+1}) < d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) | i] = \\
 &= Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \sin \frac{\pi}{q}\right). \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

При переходе от второй к третьей строке (2.49) использовано аддитивное неравенство. Далее использовано общее выражение для вероятности ошибочного приема в системе передачи с двоичными сигналами и выражение для минимального расстояния сигналов ФМ. В итоге после подстановки (2.49) в (2.48) получаем

$$P_e < 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \sin \frac{\pi}{q}\right). \tag{2.50}$$

Заметим, что для случаев $q = 2$, формула (2.50) дает завышенную оценку. В этом случае вероятность ошибки вычисляется точно $P_e = Q(\sqrt{2E/N_0})$, а граница (2.50) дает оценку $P_e < 2Q(\sqrt{2E/N_0})$.

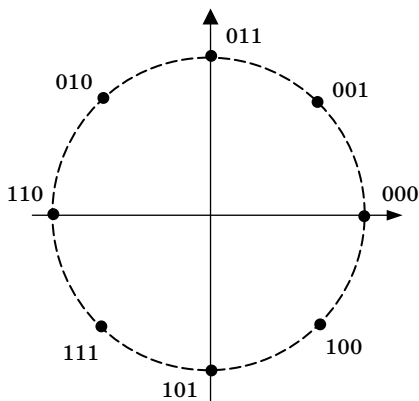


Рис. 2.29. Сигнальное множество ФМ-8
(отображение в соответствии с кодом Грея)

Для сигналов ФМ номера сигналов обычно отображаются в сигнальные точки с использованием кода Грея. В этом случае блоки двоичных данных, соответствующие соседним сигнальным точкам, отличаются только в одной позиции (см. пример для ФМ-8 на рис. 2.29).

Поскольку ошибочное решение относительно переданного сигнала наиболее вероятно в пользу соседних сигналов, то оно будет приводить к ошибке только в одном бите. Это значит, что доля ошибочных двоичных разрядов при ошибочном решении почти всегда равна $1/\log_2 q$. Отсюда следует, что вероятность ошибки на бит как функция от отношения сигнал/шум на бит задается выражением

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 q} P_e < \frac{2}{\log_2 q} Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{E}{N_0} \right)_{\text{bit}} \log_2 q \sin \frac{\pi}{q}} \right), \quad q > 4. \quad (2.51)$$

На рис. 2.30 показаны графики границ для вероятности ошибки, вычисленных по формулам (2.50) и (2.51).

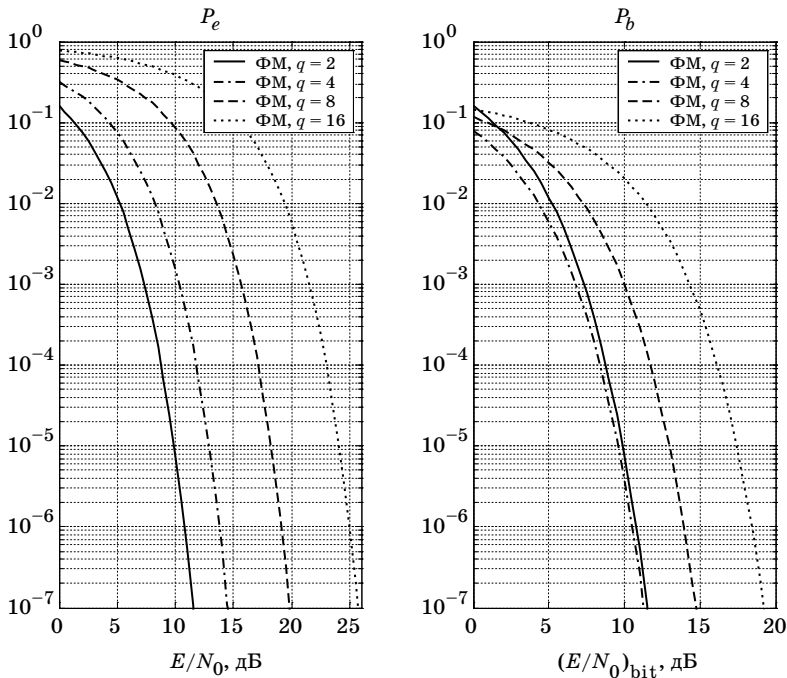


Рис. 2.30. Вероятности ошибки для ФМ сигналов P_e (слева) и P_b (справа)

Из графиков, в частности, следует, что зависимости P_b от $(E/N_0)_{bit}$ для $q = 2$ и $q = 4$ очень близки, при этом при $q = 4$ обеспечивается вдвое большая скорость передачи, чем при $q = 2$ при прочих равных условиях.

2.9. Частотная модуляция. Вероятность ошибки

Сигналы частотной модуляции (ЧМ) (frequency shift keying, FSK) имеют вид

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t, \quad 0 < t < T,$$

где E – энергия сигнала; T – период следования сигналов; f_i – центральная частота i -го сигнала; $f_i = l_i / T$, l_i – целое, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Величины l_i должны быть различными при различных i . При таком выборе центральных частот сигналы ЧМ будут ортогональными.

Естественно выбрать в качестве базиса функции вида $\phi_i(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t$, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Можно проверить, что

$$(\phi_i, \phi_k) = \frac{\sin 2\pi(l_i + l_k)}{2\pi(l_i + l_k)} + \frac{\sin 2\pi(l_i - l_k)}{2\pi(l_i - l_k)} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \quad (2.52)$$

Число базисных функций совпадает в этом случае с числом сигналов, т. е. $D = q$. Тогда можно записать, что $s_i(t) = \sqrt{E}\phi_i(t)$, а сигнальные точки будут иметь вид $s_0 = (\sqrt{E}, 0, 0, \dots, 0)$, $s_1 = (0, \sqrt{E}, 0, \dots, 0)$, ..., $s_{q-1} = (0, 0, \dots, \sqrt{E})$. Сигнальное созвездие может быть изображено только в случаях $q = 2$ и $q = 3$. Наглядное описание решающих областей также возможно только в этих случаях.

Оценим вероятность ошибки для ЧМ-сигналов. Вероятность ошибки вычисляется следующим образом:

$$P_e = \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i), \quad (2.53)$$

где $P_e(i)$ – вероятность ошибки при передаче i -го сигнала; P_i – вероятность передачи i -го сигнала; $P_i = 1/q$. Рассмотрим вычисление вероятности $P_e(i)$. Условная вероятность ошибки может быть записана как

$$P_e(i) = 1 - P_c(i), \quad (2.54)$$

где $P_c(i)$ – вероятность правильного решения при передаче i -го сигнала. При оптимальном приеме в канале с АБГШ вероятность правильного приема

$$P_c(i) = \Pr[d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \min_{0 \leq k < q} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) | i] = \Pr[d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \min_{0 \leq k < q} d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) | i].$$

Это равенство можно переписать в виде

$$P_c(i) = \Pr \left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{ d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) < d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) \right\} | i \right].$$

Поскольку $d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_j) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_j\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 - 2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_j) + \|\mathbf{s}_j\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 - 2\sqrt{E}r_j + E$ для любого $j = 0, 1, \dots, q-1$, то условие $d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) < d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k)$ эквивалентно условию $r_i > r_k$. Поэтому можно записать

$$P_c(i) = \Pr \left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{ r_i > r_k \right\} | i \right].$$

При передаче i -го сигнала $r_i = \sqrt{E} + n_i$, $r_k = n_k$, где $n_i, n_k, k = 0, 1, \dots, q-1, k \neq i$, независимые гауссовские случайные величины с параметрами $(0, N_0/2)$. Следовательно

$$P_c(i) = \Pr \left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{ \sqrt{E} + n_i > n_k \right\} \right],$$

или, переходя к нормированным переменным $\eta_i = n_i / \sqrt{N_0/2}$, $\eta_k = n_k / \sqrt{N_0/2}$, можно записать

$$P_c(i) = \Pr \left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{ \sqrt{2E/N_0} + \eta_i > \eta_k \right\} \right].$$

Здесь $\eta_i, \eta_k, k = 0, 1, \dots, q-1, k \neq i$ – независимые гауссовские случайные величины с параметрами $(0, 1)$.

Для получения результата поступим следующим образом:
 1) зафиксируем значение $z = \sqrt{2E/N_0} + \eta_i$; 2) найдем значение вероятности $\Pr\left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \{z > \eta_k\}\right]$; 3) усредним по значению $z = \sqrt{2E/N_0} + \eta_i$.

$$\begin{aligned}
 P_c(i) &= \Pr\left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{\sqrt{2E/N_0} + \eta_i > \eta_k\right\}\right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \{z > \eta_k\}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z - \sqrt{2E/N_0})^2/2} dz. \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Далее

$$\Pr\left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \{z > \eta_k\}\right] = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[z > \eta_k] = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} (1 - Q(z)) = (1 - Q(z))^{q-1}. \quad (2.56)$$

Подстановка (2.56) в (2.55) и далее в (2.54) и в (2.53) дает в результате

$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(z))^{q-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z - \sqrt{2E/N_0})^2/2} dz. \quad (2.57)$$

Формула (2.57) дает точное значение вероятности ошибки, но его вычисление требует численного интегрирования. Для этой вероятности можно легко получить просто вычисляемую верхнюю границу. Ее вывод основан на использовании аддитивного неравенства. Условная вероятность ошибки может быть найдена как

$$P_e(i) = \Pr\left[\bigcup_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left\{d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) > d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k)\right\} \middle| i\right].$$

Применяя аддитивную границу, имеем

$$\begin{aligned}
P_e(i) &\leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) > d^2(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) | i] = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[r_i < r_k | i] = \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\sqrt{E} + n_i < n_k] = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\sqrt{2E/N_0} + \eta_i < \eta_k] = \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} Q(\sqrt{E/N_0}) = (q-1)Q(\sqrt{E/N_0}).
\end{aligned}$$

И окончательно

$$P_e \leq (q-1)Q(\sqrt{E/N_0}). \quad (2.58)$$

Аддитивная граница (2.58) вычисляется гораздо проще, чем точное значение (2.57). Точность оценки (2.58) во многих случаях оказывается вполне приемлемой. Заметим также, что при $q = 2$ граница и точное значение совпадают. На рис. 2.31 показаны графики вероятности ошибки (сплошная линия) и оценки вероятности ошибки (пунктир) в зависимости от отношения сигнал/шум.

Рассмотрим вывод выражения для вероятности ошибки на бит. Ранее было показано, что вероятность ошибки на бит может быть вычислена как

$$P_b = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} P_e(i, i') n(i, i') P_i,$$

где $P_e(i, i')$ – вероятность принятия решения в пользу сигнала с номером i' при условии, что был передан сигнал с номером i , $i' \neq i$; $n(i, i')$ – число разрядов, в которых различаются двоичные представления номеров сигналов i и i' . При использовании ортогональных сигналов и, в частности, сигналов ЧМ

$$P_e(i, i') = P_e(i) / (q-1)$$

для всех $i' \neq i$. Тогда

$$P_b = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} \frac{P_e(i)}{q-1} n(i, i') P_i = \frac{1}{m(q-1)} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i) P_i \sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} n(i, i'). \quad (2.59)$$

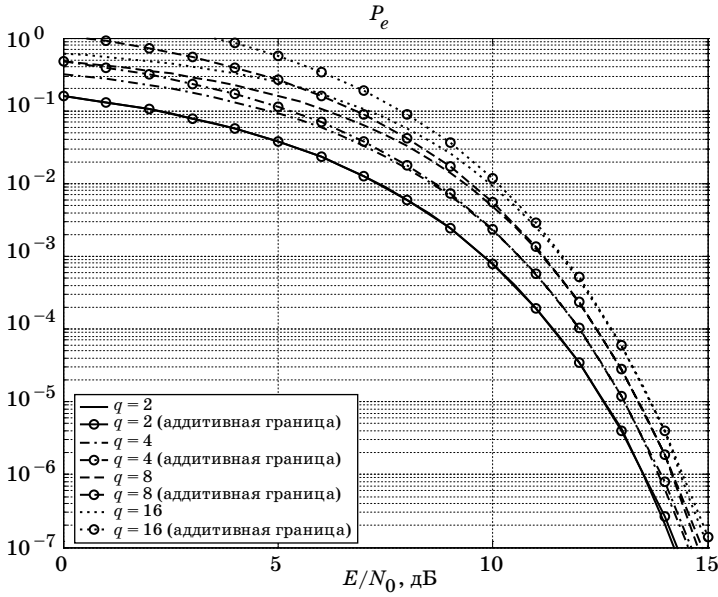


Рис. 2.31. Вероятность ошибки и аддитивная верхняя граница вероятности ошибки для сигналов ЧМ

Рассмотрим сумму $\sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} n(i, i')$. Пусть j – число различий в двоич-

ной записи величин i и i' ; ясно, что $1 \leq j \leq m$. Тогда легко заметить, что

$$\sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} n(i, i') = \sum_{j=1}^m j C_m^j,$$

и далее

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m j C_m^j &= \sum_{j=1}^m j \frac{m!}{j!(m-j)!} = \sum_{j=1}^m \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} = \sum_{j=1}^m \frac{m(m-1)!}{(j-1)!((m-1)-(j-1))!} = \\ &= m \sum_{j=1}^m C_{m-1}^{j-1} = m \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l = m 2^{m-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{\substack{i'=0 \\ i' \neq i}}^{q-1} n(i, i') = m 2^{m-1}.$$

Подставляя полученное выражение в (2.59) и принимая во внимание, что $q=2^m$, для ортогональных сигналов получаем

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} P_e.$$

Заметим, что для двоичных сигналов, т. е. когда $q = 2$ и $m = 1$, $P_b = P_e$, а при $q \gg 1$ $P_b \approx P_e / 2$.

Отношение сигнал/шум на бит $(E / N_0)_{bit} = (1/m) E / N_0$, поэтому окончательное выражение для вероятности ошибки на бит, как следует из формулы (2.57), имеет вид

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(z))^{q-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(z - \sqrt{2m(E/N_0)_{bit}}\right)^2 / 2} dz \right). \quad (2.60)$$

На рис. 2.32 показаны графики значений вероятности ошибки, вычисленных по формулам (2.57) и (2.60).

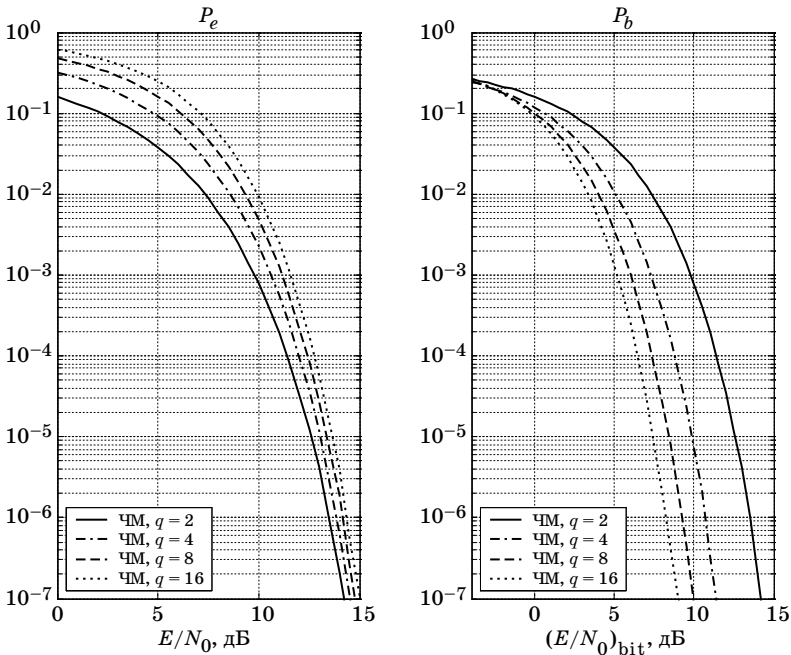


Рис. 2.32. Вероятности ошибки для ЧМ-сигналов P_e (слева) и P_b (справа)

2.10. Предельные характеристики достижимые при использовании ортогональных сигналов

Рассмотрим передачу с использованием ортогональных сигналов. Пусть $s_i(t) = \sqrt{E}\phi_i(t)$, где $\phi_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, q-1$, – ортонормированные функции, заданные на интервале $[0, T]$; E – энергия сигнала. В качестве базисных функций могут рассматриваться, в частности, отрезки гармоник соответствующим образом выбранных различных частот. Получающиеся при этом сигналы соответствуют сигналам ЧМ.

Выражение для вероятности ошибки, полученное при рассмотрении ЧМ, справедливо для любых ортогональных сигналов и имеет вид

$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(z))^{q-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z - \sqrt{2E/N_0})^2/2} dz, \quad (2.61)$$

и, кроме того,

$$P_e \leq (q-1)Q\left(\sqrt{E/N_0}\right). \quad (2.62)$$

Рассмотрим передачу при различных значениях q . Число двоичных единиц (бит), переносимых q -ичным сигналом, равно $m = \log_2 q$. При этом энергия, приходящаяся на один переданный бит, равна $E_b = E / m$; определим также отношение сигнал/шум на бит $(E / N_0)_{bit} = E_b / N_0$. Логично рассмотреть вероятность ошибки на бит P_b в отличие от вероятности ошибки на символ (сигнал) P_e и построить зависимость P_b от $(E / N_0)_{bit}$ при различных q . Ранее было показано, что вероятность ошибки на бит может быть вычислена как

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} P_e. \quad (2.63)$$

Заметим, что для двоичных сигналов, т. е. когда $q = 2$ и $m = 1$, $P_b = P_e$, а при $q \gg 1$ $P_b \approx P_e / 2$. Из (2.61) и (2.63) следует, что

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(z))^{q-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z - \sqrt{2m(E/N_0)_{bit}})^2/2} dz \right].$$

На рис. 2.33 показаны графики вероятности ошибки на бит в зависимости от отношения сигнал/шум на бит.

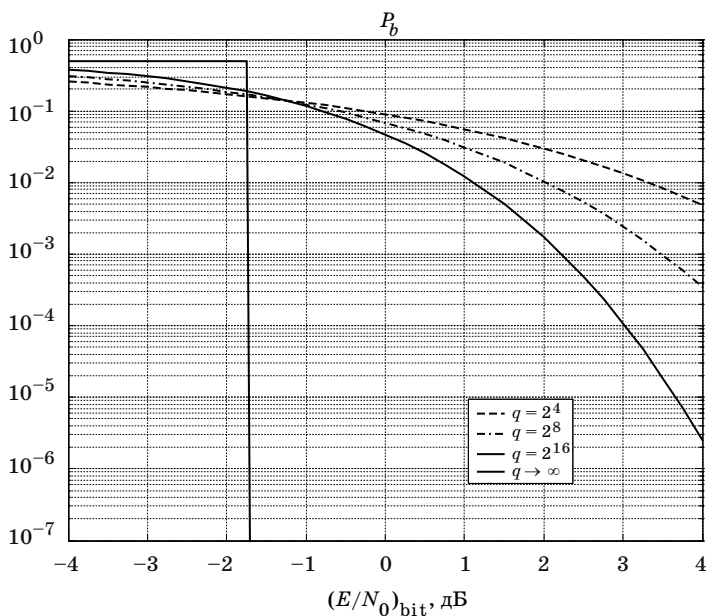


Рис. 2.33. Вероятность ошибки на бит для ортогональных сигналов

Как следует из рассмотрения графиков, вероятность ошибки на бит убывает с ростом числа сигналов, если отношение сигнал/шум на бит оказывается не слишком малым. Оценим величину этого порогового значения. Для этого, основываясь на оценке (2.62), получим соответствующую оценку для P_b . Из (2.62) и (2.63) следует, что

$$P_b \leq 2^{m-1} Q\left(\sqrt{m(E/N_0)_{bit}}\right).$$

Используя оценку $Q(x) < \exp(-x^2/2)$, получим

$$\begin{aligned} P_b &< 2^{m-2} \exp(-(m/2)(E/N_0)_{bit}) = \\ &= \exp(-(m/2)((E/N_0)_{bit} - 2\ln 2))/4. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Последнее равенство означает, что если $(E/N_0)_{bit} > 2\ln 2^1$ (что соответствует только 1,41 дБ), то вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой при возрастании m . Из этого утверждения можно было бы сделать вывод о возможности построения

¹ На самом деле пороговое значение отношения сигнал/шум на бит равно не $2\ln 2$, а $\ln 2$ (−1,59 дБ). Неточность в определении порогового значения связана с использованием сравнительно слабой границы вероятности ошибки.

сколь угодно надежного метода передачи с использованием ортогональных сигналов. Например, если $(E / N_0)_{bit} = 2$ дБ, то при $m = 50$ из (2.64) следует, что $P_b < 2 \cdot 10^{-7}$; если же взять $m = 80$, то $P_b < 3 \cdot 10^{-11}$. На практике такой метод оказывается нереализуемым. При увеличении m экспоненциально возрастает число ортогональных сигналов, так как $q = 2^m$. В рассмотренных примерах число сигналов равно $1,1 \cdot 10^{15}$ и $1,2 \cdot 10^{24}$ соответственно. Это приводит к экспоненциальному возрастанию полосы частот, требуемой для передачи, и экспоненциальному возрастанию сложности формирования и приема сигналов. Практически реализуемые методы передачи с использованием ортогональных сигналов основываются на применении сигналов из сравнительного небольшого алфавита и формирования из них длинных последовательностей (кодирования). При возрастании длины этих последовательностей можно добиться требуемой надежности передачи без неприемлемого расширения полосы частот и увеличения сложности обработки.

2.11. Сравнительная характеристика АМ, КАМ, ФМ и ЧМ

Сигналы АМ имеют вид

$$s_i(t) = A_i \varphi(t),$$

где $A_i = \sqrt{E} (1 - 2i / (q - 1))$; $i = 0, 1, \dots, q-1$; E – максимальная энергия сигналов.

Сигналы КАМ могут быть представлены в виде

$$s_i(t) = s_{i1} \varphi_1(t) + s_{i2} \varphi_2(t),$$

где $s_{i1} = A (1 - 2i_1 / (\sqrt{q} - 1))$; $s_{i2} = A (1 - 2i_2 / (\sqrt{q} - 1))$; $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, \sqrt{q} - 1$.

Сигналы ФМ имеют вид

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_0 t - 2\pi i / q),$$

где $i = 0, 1, \dots, q-1$; E – энергия сигналов. И, наконец, выражение для ЧМ-сигналов

$$s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t,$$

где E – энергия сигнала; f_i – несущая (центральная) частота i -го сигнала, $f_i = f_0 + i\Delta_f$; f_0 – частота сигнала с номером 0, $f_0 = 1/T$, где

l – целое число, а Δ_f – частотный интервал, разделяющий соседние несущие. Величины Δ_f и f_0 должны быть выбраны так, чтобы сигналы были ортогональными.

Вид сигналов АМ и КАМ во временной области зависит от вида базисных функций, используемых для их представления. Предположим, что в качестве базисных функций выбраны отрезки гармоник: для АМ отрезок синусоиды длительности T с частотой f_0 , а для КАМ отрезки синусоиды и косинусоиды длительности T с частотой f_0 . Тогда во всех рассматриваемых здесь видах модуляции используются сигналы, представляющие собой отрезки гармонического колебания длительности T . На рис. 2.34 показаны примеры q -ичных ($q = 16$) сигнальных последовательностей длиной 8, соответствующих передаче одной и той же последовательности сообщений. Отметим некоторые очевидные особенности представленных сигнальных последовательностей. Сигналы ФМ и ЧМ имеют постоянную амплитуду и, следовательно, постоянную энергию. Сигналы АМ, КАМ и ФМ передаются с использованием одной несущей частоты, а для передачи ЧМ требуется несколько частот. Поэтому АМ, КАМ и ФМ относятся к узкополосным методам модуляции, а

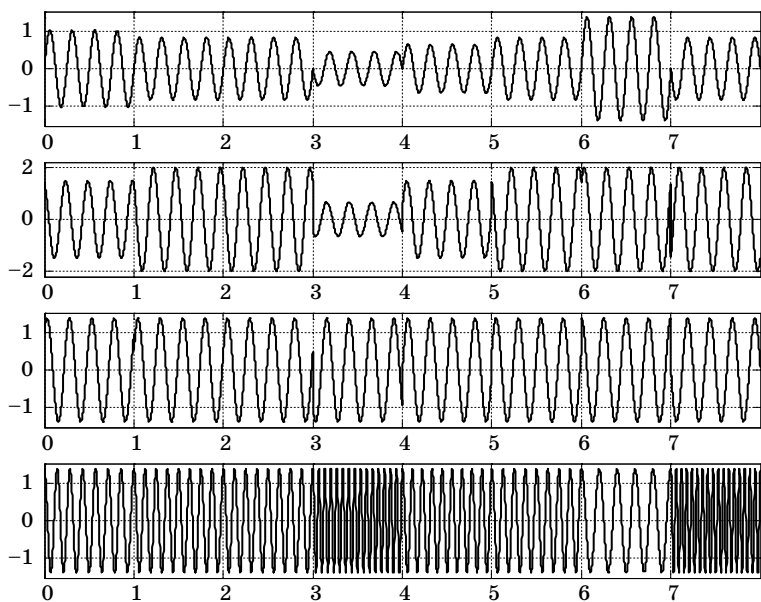


Рис. 2.34. Примеры сигнальных последовательностей АМ, КАМ, ФМ и ЧМ (сверху вниз)

ЧМ – к широкополосным. По внешнему виду сигналы АМ и КАМ близки; для АМ существует два варианта изменения фазы в момент смены сигналов: изменение на противоположную и сохранение предыдущего значения. Для КАМ это изменение возможно в более широких пределах. Последнее утверждение справедливо и для ФМ.

Важным является сравнение видов модуляции по их энергетической эффективности. Рассмотрим значение отношения сигнал/шум, требуемое для достижения фиксированного значения вероятности ошибки P_e , скажем $P_e = 10^{-5}$, и исследуем изменение этого значения с увеличением числа сигналов q и связанного с ним значения числа бит, переносимых одним сигналом, $m = \log_2 q$. Эти данные приведены в табл. 2.2.

Из приведенных в табл. 2.2 данных следует, что для увеличения m на 1 при сохранении значения вероятности ошибки требуется увеличить отношение сигнал/шум для АМ примерно на 6 дБ, для ФМ – тоже примерно на 6 дБ, для КАМ – примерно на 3 дБ. Для ЧМ это увеличение измеряется долями дБ. На рис. 2.35 приведены эти зависимости. Из приведенных данных следует, что наибольшей энергетической эффективностью обладает ЧМ, потом идут КАМ, ФМ и АМ.

В табл. 2.3 приведены значения отношения сигнал/шум на бит, требуемые для обеспечения вероятности ошибки на бит $P_b = 10^{-5}$. При вычислении этих данных предполагалось, что модуляционное отображение построено с использованием кода Грея.

В графической форме эти данные показаны на рис. 2.36. Видно, что ЧМ обладает наибольшей энергетической эффективностью. Для этого вида модуляции значение отношения сигнал/шум на бит, требуемое для обеспечения заданного уровня вероятности ошибки на бит, уменьшается при увеличении числа сигналов. Следующей по энергетической эффективности идет КАМ, а АМ как и ранее занимает последнее место.

Таблица 2.2

Отношение сигнал/шум (дБ), требуемое для достижения значения $P_e = 10^{-5}$

	$q = 4$ $m = 2$	$q = 8$ $m = 3$	$q = 16$ $m = 4$	$q = 32$ $m = 5$	$q = 64$ $m = 6$	$q = 128$ $m = 7$
ЧМ	13	13,4	13,7	14,0	14,2	14,4
АМ	16,8	23,1	29,2	35,2	41,2	47,3
ФМ	13,2	18,2	24,1	30,1	36,1	42,1
КАМ	13,2	16,9	20,2	23,3	26,4	29,5

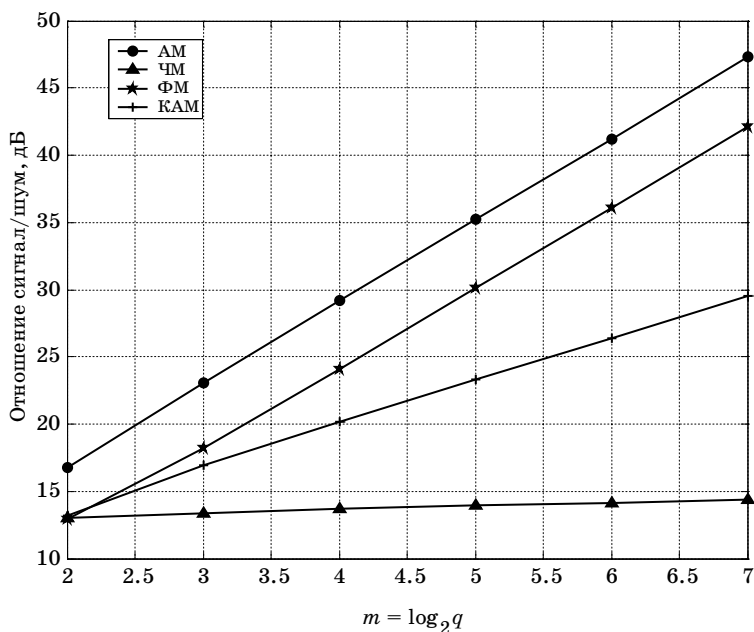


Рис. 2.35. Энергетическая эффективность различных видов модуляции (отношение сигнал/шум, требуемое для достижения $P_e = 10^{-5}$)

Таблица 2.3

Отношение сигнал/шум на бит (дБ), требуемое для достижения $P_b = 10^{-5}$

	$q = 4$ $m = 2$	$q = 8$ $m = 3$	$q = 16$ $m = 4$	$q = 32$ $m = 5$	$q = 64$ $m = 6$	$q = 128$ $m = 7$
ЧМ	9,9	8,4	7,5	6,7	6,2	5,8
АМ	13,4	17,8	22,5	27,5	32,6	37,9
ФМ	10,0	13,0	17,4	22,3	27,5	32,7
КАМ	10,0	11,6	13,6	15,7	17,9	20,2

Рассмотрим теперь спектральную эффективность, или удельную скорость передачи. Эта величина определяется как $V_{\text{уд}} = V/W$, где $V = \log_2 q / T = m/T$ – скорость передачи, бит/с, а W – ширина полосы частот. Для сигналов КАМ, АМ, ФМ, полученных на основе отрезков гармоник с прямоугольными огибающими, $W \approx 2/T$; заметим, что ширина полосы в этом случае не зависит от объема сигнального алфавита. Для ЧМ-сигналов с прямоугольными огибающими

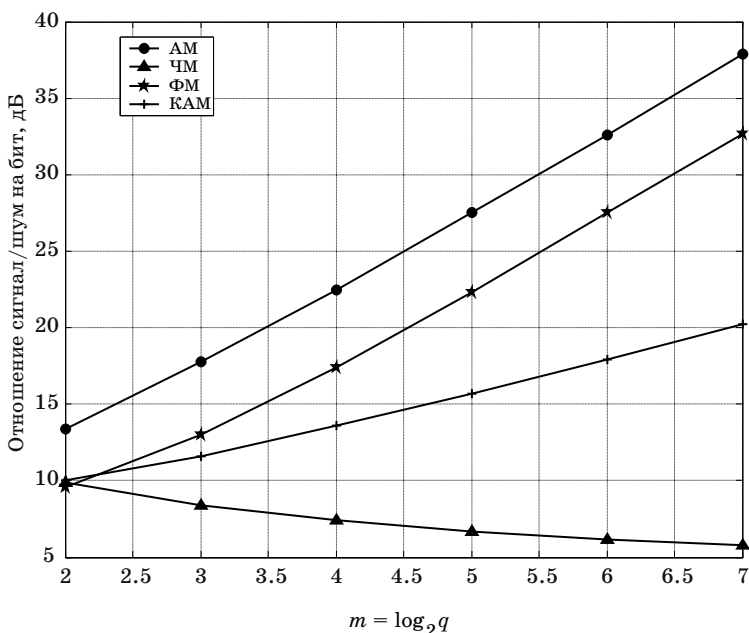


Рис. 2.36. Энергетическая эффективность различных видов модуляции (отношение сигнал/шум на бит, требуемое для достижения $P_b = 10^{-5}$)

щими и несущими, выбранными с постоянным шагом по частоте, $W = 2/T + (q-1)\Delta_f$, где Δ_f – частотный интервал между соседними несущими. Известно, что минимальное значение $\Delta_f = 1/(2T)$ (в общем случае для обеспечения ортогональности сигналов ЧМ нужно, чтобы выполнялось условие $\Delta_f = l/(2T)$, где l – целое). Тогда для полосы частот, занимаемой ЧМ-сигналами, имеем выражение

$$W = \frac{2}{T} + \frac{q-1}{2T} = \frac{q+3}{2T} = \frac{2^m + 3}{2T}.$$

В итоге

$$V_{\text{уд}} = \begin{cases} \frac{m}{2}, & \text{для КАМ, АМ, ФМ;} \\ \frac{2m}{2^m + 3}, & \text{для ЧМ.} \end{cases}$$

Графики спектральной эффективности (удельной скорости передачи) для этих видов модуляции показаны на рис. 2.37.

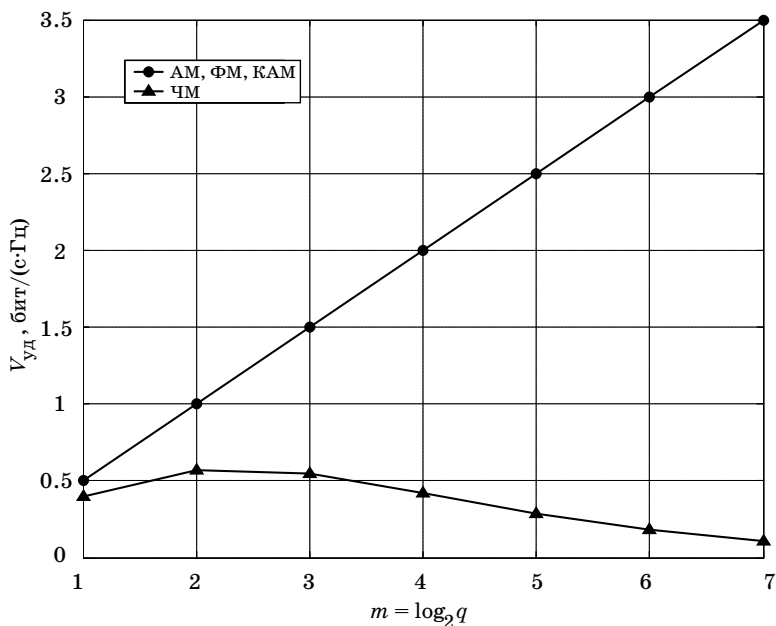


Рис. 2.37. Спектральная эффективность различных видов модуляции

Из приведенного графика видно, что наименьшей спектральной эффективностью (удельной скоростью передачи) обладает ЧМ, а КАМ, АМ и ФМ по этому показателю эквивалентны. Табл. 2.4 содержит основные параметры сигналов рассмотренных видов модуляции.

Таблица 2.4

Основные параметры сигналов АМ, КАМ, ФМ и ЧМ

	Скорость V , бит/с	Постоян- ная амплитуда	Полоса W , Гц	$V_{уд}$, бит/ (с·Гц)	Место по энергетической эффективности	Место по спектральной эффективности	Раз- мер- ность
АМ	$\log_2 q / T$	—	$2/T$	$m/2$	4	1–3	1
КАМ	$\log_2 q / T$	—	$2/T$	$m/2$	2	1–3	2
ФМ	$\log_2 q / T$	+	$2/T$	$m/2$	3	1–3	2
ЧМ	$\log_2 q / T$	+	$\frac{q+3}{2T}$	$\frac{2m}{2^m+3}$	1	4	q

2.12. Частотное разделение с использованием ортогональных несущих (OFDM)

Сигналы OFDM (OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing) формируются как сумма сигналов КАМ или ФМ, передаваемых на различных несущих частотах. Общая полоса частот, отведенная для передачи, делится на N параллельных частотных подканалов, число которых на практике может лежать в пределах от нескольких десятков до нескольких тысяч. В подканале с номером n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, передается сигнал вида

$$s_i^{(n)}(t) = s_{i1}^{(n)} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_n t + s_{i2}^{(n)} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\pi f_n t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.65)$$

где T – длительность сигнала; f_n – несущая частота¹, используемая для передачи в n -м частотном подканале, $i = 0, 1, \dots, q_n-1$, q_n – число сигналов, используемых в n -м подканале. На практике все величины q_n обычно равны между собой, но в общем случае они могут быть различными: например, в части подканалов может использоваться КАМ-16, а в другой части подканалов – КАМ-4. Пара коэффициентов $(s_{i1}^{(n)}, s_{i2}^{(n)})$ находится во взаимно-однозначном соответствии с индексом i и определяет i -ю точку в двумерном сигнальном созвездии КАМ или ФМ, используемом в n -м подканале.

Обозначим индекс сигнала, передаваемого в n -м подканале, как i_n , $i_n = 0, 1, \dots, q_n-1$. Пусть \mathbf{i} – набор этих индексов (мультииндекс), т. е. $\mathbf{i} = (i_0, i_1, \dots, i_{N-1})$. Тогда совокупный OFDM-сигнал, соответствующий мультииндексу \mathbf{i} , определяется как сумма сигналов в подканалах

$$s_{\mathbf{i}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{i_n}^{(n)}(t). \quad (2.66)$$

Общее число OFDM-сигналов q равно числу различных мультииндексов \mathbf{i} , т. е. $q = q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$. Значение мультииндекса может рассматриваться как сообщение, подлежащее передаче. Тогда очевидно, что скорость передачи (информационная скорость)

$$V = \frac{1}{T} \log_2 q = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \log_2 q_n, \text{ бит/с.}$$

¹ Эти частоты иногда называют поднесущими частотами (subcarrier).

Передаваемое сообщение представляет собой значение мультииндекса, т. е. блок из $\sum_{n=0}^{N-1} \log_2 q_n$ бит. Он разбивается на N подблоков длиной $\log_2 q_n$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ и n -й подблок, т. е. величина i_n задает номер пары $(s_{i1}^{(n)}, s_{i2}^{(n)})$, которая определяет КАМ или ФМ-сигнал, передаваемый в n -м подканале. Очевидно, что один сигнал OFDM может переносить много бит информации. Например, при числе подканалов $N = 64$ и КАМ-16 в каждом подканале, сигнал OFDM переносит $N \log_2 q_0 = 64 \cdot 4 = 256$ бит. Значение мультииндекса представляет собой в этом случае любую 256-битную последовательность.

Несущие частоты f_n выбираются так, чтобы подканалы были ортогональными, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_n t \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_k t dt = \\ & = \int_0^T \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_n t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_n t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = 0 \text{ для всех } n, k.$$

Это условие достигается, если $f_n = f_0 + n\Delta_f$, где $f_0 = l_0 / T$, l_0 – целое число или $l_0 \gg 1$, и $\Delta_f = l / T$, l – целое. Минимальный шаг по частоте Δ_f , при котором достигается ортогональность подканалов, равен $1/T$. Тогда полоса частот, занимаемая совокупным OFDM-сигналом:

$$W = 2/T + (N-1)\Delta_f = 2/T + (N-1)/T = (N+1)/T.$$

Отсюда следует, что OFDM-сигналы являются широкополосными¹ сигналами; их спектр лежит в диапазоне от $f_0 - 1/T$ до $f_0 + N/T$.

Удельная скорость передачи (эффективность использования полосы) при использовании OFDM

¹ Напомним, что широкополосными называются сигналы, для которых $WT \gg 1$.

$$V_{\text{уд}} = V / W = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \log_2 q_n.$$

Рассмотрим частный случай, когда во всех подканалах передается одинаковое число сигналов, т. е. $q_n = q_0$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда

$$V_{\text{уд}} = \frac{N}{N+1} \log_2 q_0 \rightarrow \log_2 q_0 = m \text{ при } N \gg 1.$$

Последнее соотношение означает, что OFDM обладает очень высокой удельной скоростью, т. е. очень эффективно использует полосу частот (сравните с данными, приведенными в табл. 2.4).

В канале с АБГШ вероятность ошибки при оптимальном приеме OFDM-сигналов может быть легко оценена. Поскольку несущие частоты в подканалах выбраны так, что обеспечивается ортогональность, то искажения, возникающие из-за влияния АБГШ, независимы в различных подканалах. Поэтому вероятность ошибки (вероятность неправильного определения значения мультииндекса \mathbf{i} на приемной стороне) может быть найдена следующим образом:

$$P_e = 1 - \prod_{n=0}^{N-1} (1 - P_e^{(n)}),$$

где $P_e^{(n)}$ – вероятность ошибки в n -м подканале, т. е. вероятность ошибки КАМ или ФМ-сигналов (см. соответствующие выражения в разделах о КАМ и ФМ).

Формирование и прием OFDM-сигналов может выполняться:

- непосредственным путем по формулам (2.65) и (2.66);
- более эффективным цифровым способом с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) (Fast Fourier Transform, FFT).

Идея цифрового способа формирования OFDM-сигнала состоит в том, что в цифровой форме вычисляются значения отсчетов сигнала в моменты времени $t = 0, T/N, 2T/N, \dots, (N-1)T/N$, а затем с помощью цифроаналогового преобразования и интерполяции восстанавливается сигнал в непрерывной форме. Рассмотрим этот алгоритм более подробно.

Сигнал OFDM имеет вид

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(s_{i_n 1}^{(n)} \cos 2\pi f_n t + s_{i_n 2}^{(n)} \sin 2\pi f_n t \right).$$

Обозначим $X_{i_n}^{(n)} = s_{i_n 1}^{(n)} - j s_{i_n 2}^{(n)}$. Покажем, что

$$s_i(t) = \sqrt{2/T} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} X_{i_n}^{(n)} e^{j2\pi f_n t}. \quad (2.67)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} X_{i_n}^{(n)} e^{-j2\pi f_n t} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(s_{i_n 1}^{(n)} - j s_{i_n 2}^{(n)} \right) (\cos 2\pi f_n t + j \sin 2\pi f_n t) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(s_{i_n 1}^{(n)} \cos 2\pi f_n t + s_{i_n 2}^{(n)} \sin 2\pi f_n t \right) + \\ &+ j \sum_{n=0}^{N-1} \left(-s_{i_n 2}^{(n)} \cos 2\pi f_n t + s_{i_n 1}^{(n)} \sin 2\pi f_n t \right), \end{aligned}$$

откуда следует выражение (2.67). Поскольку $f_n = f_0 + n\Delta_f = f_0 + n/T$, где $n = 0, 1, \dots, N-1$, то из (2.67) следует

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \sqrt{2/T} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} X_{i_n}^{(n)} e^{j2\pi f(f_0 + n/T)t} = \\ &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{2/T} e^{j2\pi f_0 t} \sum_{n=0}^{N-1} X_i^{(n)} e^{j2\pi(n/T)t} \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Обозначим

$$x_i(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_i^{(n)} e^{j2\pi(n/T)t}. \quad (2.69)$$

Функция $x_i(t)$ принимает комплексные значения и может быть представлена в виде $x_i(t) = \operatorname{Re} x_i(t) + j \operatorname{Im} x_i(t)$. Тогда из равенств (2.68) и (2.69) следует, что

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \operatorname{Re} \left((\sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t + j \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t) (\operatorname{Re} x_i(t) + j \operatorname{Im} x_i(t)) \right) = \\ &= \operatorname{Re} x_i(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t - \operatorname{Im} x_i(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t. \end{aligned}$$

Последнее выражение означает, что для формирования OFDM-сигнала, зависящего от значения мультииндекса i , нужно уметь вычислять значения функций $\operatorname{Re} x_i(t)$ и $\operatorname{Im} x_i(t)$ для $0 < t < T$. Рассмотрим отсчеты функции $x_i(t)$ в моменты $t = kT/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, т. е. величины

$$x_i^{(k)} = x_i(t) \big|_{t=kT/N} = \sum_{n=0}^{N-1} X_i^{(n)} e^{j2\pi n k/N}.$$

Легко заметить, что комплексный вектор $\mathbf{x}_i = (x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(N-1)})$ представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ)¹ комплексного вектора $\mathbf{X}_i = (X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(N-1)})$. При определенных значениях длины преобразования N , в частности когда $N = 2^p$, p – целое, получение вектора \mathbf{x}_i из вектора \mathbf{X}_i может быть выполнено очень эффективно с использованием быстрого преобразования Фурье.

Поэтому формирование OFDM-сигнала выполняется так:

- по значению мультииндекса i вычисляются величины $X_i^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, (отображение КАМ или ФМ), и формируется вектор $\mathbf{X}_i = (X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(N-1)})$;

- по вектору \mathbf{X}_i вычисляется комплексный вектор \mathbf{x}_i (быстрое ДПФ);
- по $\text{Re } \mathbf{x}_i$ и $\text{Im } \mathbf{x}_i$ восстанавливаются непрерывные сигналы $\text{Re } x_i(t)$ и $\text{Im } x_i(t)$ (цифроаналоговое преобразование и интерполяция);
- формируется OFDM-сигнал как $\text{Re } x_i(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t - \text{Im } x_i(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t$.

Иллюстрация показана на рис. 2.38.

Рассмотрим поясняющий условный пример со значениями параметров, близкими к реальным (стандарт IEEE 802.11b для локальных беспроводных сетей). Пусть число подканалов $N = 64$ и в каждом подканале используется КАМ-16. Пусть частотный интервал между соседними несущими равен $\Delta_f = 312,5$ кГц, следовательно длительность сигнала равна $T = 1/312500 = 3,2$ мкс. Положим для примера, что значение минимальной несущей $f_0 = 2,4$ ГГц. Каждый сигнал переносит в этом случае $64 \cdot \log_2 q = 256$ бит за время 3,2 мкс, т. е. скорость передачи составляет 80 Мбит/с. Заметим, что реальная скорость передачи, обеспечиваемая стандартом, значительно меньше указанного значения из-за потерь в скорости, требуемых для обеспечения работы всей системы (временные защитные интервалы, управление, помехоустойчивое кодирование и др.).

На рис. 2.39 и 2.40 показаны графики, иллюстрирующие формирование OFDM-сигнала с указанными параметрами для некоторого случайного информационного набора из 256 бит.

¹ Прямое и обратное ДПФ определяются как $X^{(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} x^{(k)} e^{-j2\pi nk/N}$ и $x^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^{(n)} e^{j2\pi nk/N}$ соответственно.

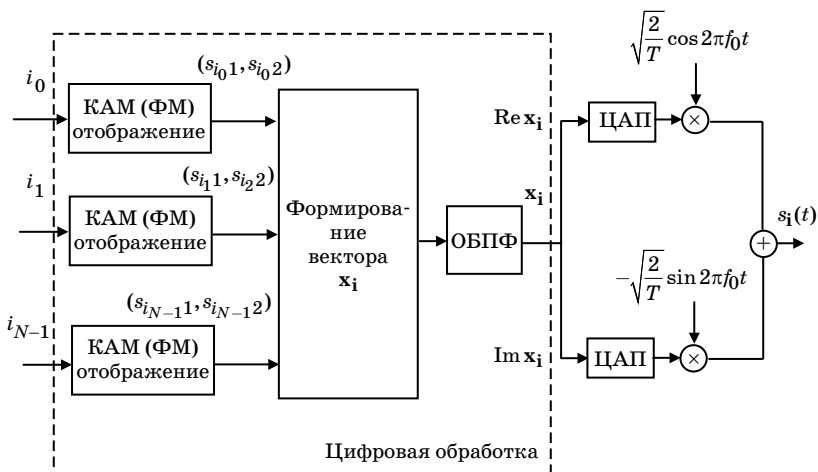


Рис. 2.38. Схема формирования OFDM-сигнала

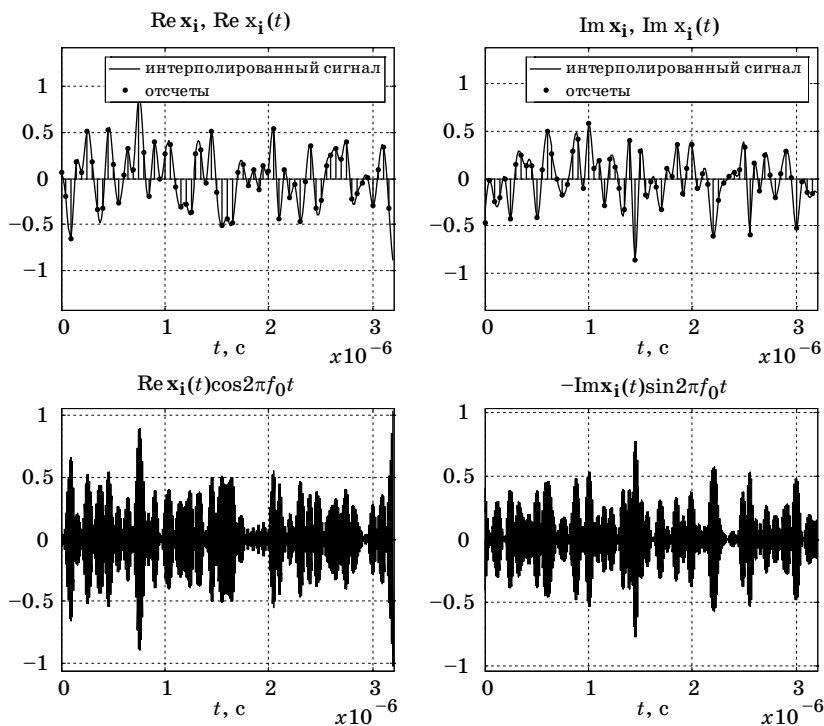


Рис. 2.39. Компоненты OFDM-сигнала. Пример

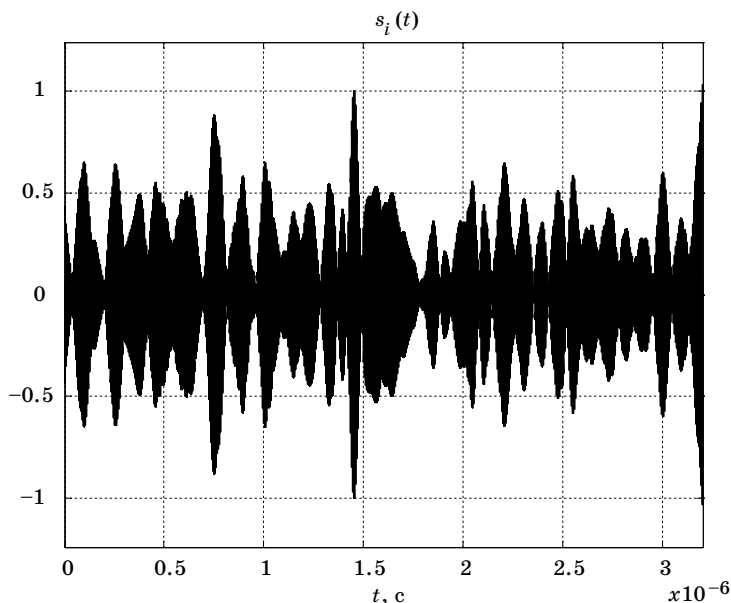


Рис. 2.40. Пример OFDM-сигнала

Схема приемника OFDM-сигнала показана на рис. 2.41.

Поясним работу этой схемы. После умножения принятого сигнала на гармонические функции и НЧ-фильтрации получаются низкочастотные компоненты сигнала. Они соответствуют непрерывным функциям, показанным на рис. 2.39. Аналого-цифровые преобразования формируют векторы \mathbf{r}_c и \mathbf{r}_s , состоящие из N отсче-

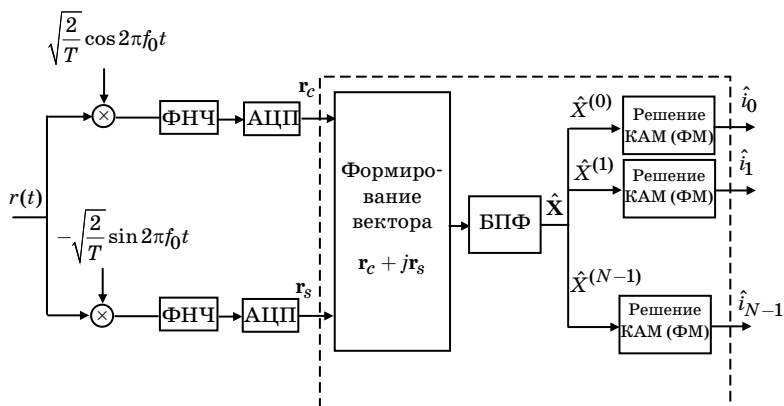


Рис. 2.41. Схема приема OFDM-сигнала

тов. Из векторов \mathbf{r}_c и \mathbf{r}_s строится комплексный вектор $\mathbf{r}_c + j\mathbf{r}_s$ и подвергается преобразованию Фурье (БПФ). В результате получается комплексный вектор $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}^{(0)}, \hat{X}^{(1)}, \dots, \hat{X}^{(N-1)})$. По величинам $\hat{X}^{(n)}$ строятся решения \hat{i}_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$.

2.13. Тактовая синхронизация.

Устройство установления тактовой синхронизации

Схема оптимального приемника содержит корреляторы либо согласованные фильтры, соединенные с устройством взятия отсчетов (рис. 2.42).

Работа этих устройств должна быть синхронизирована с поступающей из канала последовательностью: должны быть точно известны моменты начала и конца интегрирования в случае использования корреляторов или моменты взятия отсчетов при использовании приемника с согласованными фильтрами. В обоих случаях достаточным будет знание в точке приема моментов времени $T, 2T, 3T, 4T, \dots$. Получение этих моментов времени («меток времени») называется синхронизацией. Возможны следующие подходы к установлению синхронизации: 1) использование общего внешнего источника сигналов точного времени для передатчика и приемника; 2) передача меток времени по отдельному каналу; 3) получение меток времени из принятой сигнальной последовательности. Очевидно, что наиболее практически значимым является третий подход. Иллюстрация приведена на рис. 2.43.

Существует ряд подходов к решению задачи установления тактовой синхронизации. Рассмотрим один из них. Ограничимся случаем передачи двоичных противоположных сигналов по каналу с АБГШ.

Предположим, что временной сдвиг (ошибка синхронизации) τ равномерно распределен на интервале $[0, T]$, и на интервале наблюдения NT этот сдвиг постоянен. Возьмем на длительности сигнала

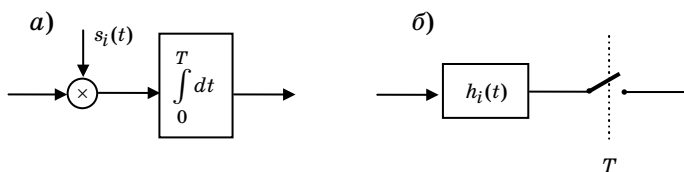


Рис. 2.42. Коррелятор (а) и согласованный фильтр с устройством взятия отсчетов (б)

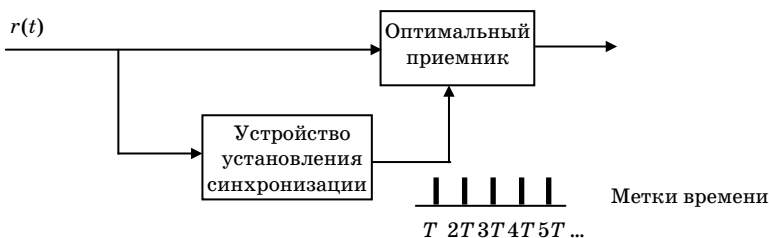


Рис. 2.43. Установление синхронизации по принятому сигналу

n отсчетов и будем оценивать этот временной сдвиг с точностью до величины T/n , т. е. будем оценивать величину $\tau_m = mT/n$, где $m = 0, 1, \dots, n-1$. Обозначим значение i -го отсчета принятого сигнала на j -м интервале наблюдения как $r^{(ij)}$, $j = 1, 2, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим последовательность отсчетов принятой сигнальной последовательности как

$$\mathbf{r} = (r^{(11)}, r^{(21)}, \dots, r^{(n1)}, r^{(12)}, r^{(22)}, \dots, r^{(n2)}, \dots, r^{(1N)}, r^{(2N)}, \dots, r^{(nN)}).$$

Можно записать также, что $\mathbf{r} = (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(N)})$, где $\mathbf{r}^{(j)} = (r^{(1j)}, r^{(2j)}, \dots, r^{(nj)})$. Обозначим отсчеты сигнала в пределах одного j -го сигнального интервала как $s^{(ij)}(\tau_m)$. Каждый отсчет выходного сигнала канала может быть записан как $r^{(ij)} = s^{(ij)}(\tau_m) + n^{(ij)}$, где $n^{(ij)}$ – отсчет шума, соответствующий i -му отсчету j -го сигнала в последовательности. Все $\overline{n^{(ij)}}$ – независимые гауссовские случайные величины, и $\overline{n^{(ij)}} = 0$, $\overline{(n^{(ij)})^2} = \sigma^2$. Обозначим вектор отсчетов сигнальной последовательности, взятых в пределах j -го интервала, как $\mathbf{s}^{(j)}(\tau_m) = (s^{(1j)}(\tau_m), s^{(2j)}(\tau_m), \dots, s^{(nj)}(\tau_m))$.

Оптимальное решение (решение по максимуму апостериорной вероятности) относительно τ_m вычисляется следующим образом:

$$\hat{\tau}_m = \arg \max_{\tau_m} P(\tau_m | \mathbf{r}),$$

где $P(\tau_m | \mathbf{r})$ – апостериорное распределение величины τ_m , $m = 0, 1, \dots, n-1$. По формуле Байеса имеем

$$P(\tau_m | \mathbf{r}) = \frac{P(\tau_m)}{w(\mathbf{r})} w(\mathbf{r} | \tau_m).$$

Поскольку величина τ_m распределена равномерно, т. е. $P(\tau_m) = 1/n$, то очевидно, что оптимальная оценка

$$\hat{\tau}_m = \arg \max_{\tau_m} w(\mathbf{r} | \tau_m). \quad (2.70)$$

Плотность вероятности $w(\mathbf{r} | \tau_m)$ может быть записана следующим образом:

$$w(\mathbf{r} | \tau_m) = \prod_{j=1}^N w(\mathbf{r}^{(j)} | \tau_m).$$

Для плотности $w(\mathbf{r}^{(j)} | \tau_m)$ имеем следующее выражение (формула полной вероятности):

$$w(\mathbf{r}^{(j)} | \tau_m) = w(\mathbf{r}^{(j)} | 0, \tau_m) P_0 + w(\mathbf{r}^{(j)} | 1, \tau_m) P_1, \quad (2.71)$$

где P_0, P_1 – вероятности передачи нуля и единицы соответственно; $w(\mathbf{r}^{(j)} | 0, \tau_m), w(\mathbf{r}^{(j)} | 1, \tau_m)$ – условные плотности вероятности величины $\mathbf{r}^{(j)}$ при передаче нуля и единицы при фиксированном временном сдвиге τ_m . При передаче противоположных сигналов в канале с АБГШ имеем

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}^{(j)} | 0, \tau_m) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r^{(ij)} - s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= K \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(r^{(ij)} - s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}^{(j)} | 1, \tau_m) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(r^{(ij)} + s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= K \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(r^{(ij)} + s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned}$$

где $K = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}$. При записи этих выражений учтено, что отсчеты сигналов, соответствующих передаче нуля и единицы, различаются только знаком. Далее, с учетом этих выражений из равенства (2.71) следует

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r} | \tau_m) &= K^N \prod_{j=1}^N \left(P_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(r^{(ij)} - s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + P_1 \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(r^{(ij)} + s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2}\right) \right), \end{aligned}$$

Полагая сигналы равновероятными, т. е. $P_0 = P_1 = 1/2$, получим

$$w(\mathbf{r} | \tau_m) = K_1(\mathbf{r}) \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{2} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)}{\sigma^2} \right) \right), \quad (2.72)$$

где

$$K_1(\mathbf{r}) = \prod_{j=1}^N K \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(r^{(ij)})^2 + (s^{(ij)}(\tau_m))^2}{2\sigma^2} \right)$$

– множитель, не зависящий от величины τ_m . Используя определение функции гиперболического косинуса $\cosh(x) = (e^x + e^{-x}) / 2$, получим из (2.72)

$$w(\mathbf{r} | \tau_m) = K_1(\mathbf{r}) \prod_{j=1}^N \cosh \left(\sum_{i=1}^n \frac{r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)}{\sigma^2} \right).$$

Поэтому оптимальная оценка величины временного сдвига

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_m &= \arg \max_{\tau_m} \prod_{j=1}^N \cosh \left(\sum_{i=1}^n \frac{r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)}{\sigma^2} \right) = \\ &= \arg \max_{\tau_m} \sum_{j=1}^N \log \cosh \left(\sum_{i=1}^n \frac{r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)}{\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим величину $Y^{(j)}(\tau_m) = \sum_{i=1}^n r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m)$. Нетрудно заметить, что

$$Y^{(j)}(\tau_m) = \sum_{i=1}^n r^{(ij)} s^{(ij)}(\tau_m) \approx C \int_{(j-1)T - \tau_m}^{jT - \tau_m} r(t) s(t - (j-1)T + \tau_m) dt,$$

где C – некоторая константа; т. е. значение, пропорциональное величине $Y^{(j)}(\tau_m)$, может быть вычислено с использованием коррелятора, похожего на показанный на рис. 2.42, *a*. Ранее отмечалось, что коррелятор может быть реализован с использованием согласованного фильтра. Пусть $h(t) = s(T-t)$ – импульсная переходная

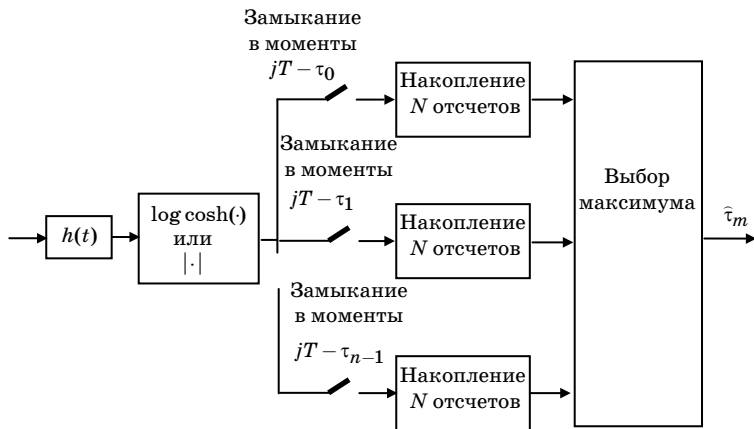


Рис. 2.44. Устройство оптимальной оценки временного сдвига

характеристика фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$. Заметим, что импульсная переходная характеристика фильтра $h(t)$ имеет конечную длительность. Обозначим сигнал на выходе согласованного фильтра как $y(t)$.

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t_1) h(t - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} r(t_1) s(T - t + t_1) dt_1.$$

С учетом конечной длительности импульсной переходной характеристики фильтра имеем

$$y(t) = \int_{t-T}^t r(t_1) s(T - t + t_1) dt_1.$$

Тогда очевидно, что $Y(j)(\tau_m) = Cy(jT - \tau_m)$, т. е. требуемое значение может быть получено как отсчет сигнала на выходе согласованного фильтра, взятый в момент $jT - \tau_m$.

Таким образом, устройство установления синхронизации должно иметь в своем составе согласованный фильтр, нелинейный элемент с характеристикой $\log \cosh(\cdot)$, устройства взятия отсчетов, накопители и блок выбора максимума. Схема показана на рис. 2.44. Нелинейная функция $\log \cosh(\cdot)$ на практике с успехом может быть заменена более простой в реализации функцией взятия модуля $|\cdot|$. Основанием для такой замены является соотношение $\log \cosh(x) \approx \approx |x| - \log 2$ при не слишком малых $|x|$.

2.14. Влияние неточности тактовой синхронизации на вероятность ошибки

Предположим, что синхронизация установлена с ошибкой τ . Оценим влияние неточно установленной синхронизации на вероятность ошибки. Как и прежде, ограничимся рассмотрением двоичной передачи с использованием противоположных сигналов. Обозначим $s_i(t) = A_i \varphi(t)$, где $A_0 = -\sqrt{E}$, $A_1 = \sqrt{E}$, $\varphi(t)$ – нормированная функция, определенная на интервале $[0, T]$. При синхронизации, установленной с ошибкой τ , приемник может быть описан схемой, показанной на рис. 2.45. Заметим, что при $\tau = 0$ эта схема в точности соответствует оптимальному приемнику.

Рассмотрим передачу двух последовательно идущих сигналов. Их можно описать как $A^{(1)}\varphi(t)$ и $A^{(2)}\varphi(t - T)$, где $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ – амплитуды текущего и следующего сигналов соответственно, $A^{(1)}, A^{(2)} = \pm\sqrt{E}$. Пусть $n(t)$ как обычно обозначает АБГШ. Тогда величина на выходе коррелятора

$$\xi_\tau = \int_{\tau}^{T+\tau} r(t)\varphi(t-\tau)dt = A^{(1)} \int_{\tau}^T \varphi(t)\varphi(t-\tau)dt + A^{(2)} \int_T^{T+\tau} \varphi(t-T)\varphi(t-\tau)dt + n,$$

где $n = \int_{\tau}^{T+\tau} n(t)\varphi(t-\tau)dt$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $N_0/2$. Для дальнейшего рассмотрения требуется ввести некоторые обозначения. Пусть

$$R_\tau^{(1)} = \int_{\tau}^T \varphi(t)\varphi(t-\tau)dt \quad (2.73)$$

и

$$R_\tau^{(2)} = \int_T^{T+\tau} \varphi(t-T)\varphi(t-\tau)dt. \quad (2.74)$$

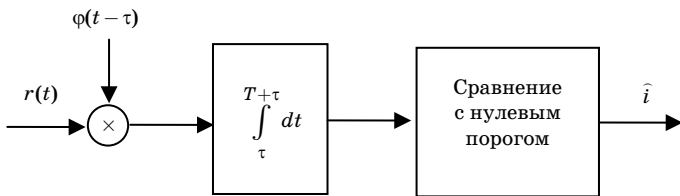


Рис. 2.45. Оптимальный прием противоположных сигналов при неточно установленной синхронизации

Очевидно, что $R_0^{(1)} = 1$, $R_0^{(2)} = 0$, $R_T^{(1)} = 0$, $R_T^{(2)} = 1$.

Оценим вероятность ошибки. Как обычно, сигналы предполагаются равновероятными, поэтому $P_e = (P_e(0) + P_e(1))/2$, где $P_e(0)$, $P_e(1)$ – условные вероятности ошибки при передаче нуля и единицы соответственно. Рассмотрим вероятность $P_e(0)$. При передаче нуля и при фиксированном значении амплитуды следующего за текущим сигнала вероятность ошибки

$$P_e(0, A^{(2)}) = \Pr[\xi_\tau > 0 | 0, A^{(2)}] = \Pr[-\sqrt{E}R_\tau^{(1)} + A^{(2)}R_\tau^{(2)} + n > 0].$$

Поскольку амплитуда $A^{(2)}$ равновероятно принимает значения $\pm\sqrt{E}$, то после усреднения по этим значениям имеем

$$P_e(0) = (1/2)\Pr[-\sqrt{E}(R_\tau^{(1)} + R_\tau^{(2)}) + n > 0] + \\ + (1/2)\Pr[-\sqrt{E}(R_\tau^{(1)} - R_\tau^{(2)}) + n > 0].$$

Отсюда следует, что

$$P_e(0) = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(R_\tau^{(1)} + R_\tau^{(2)})\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(R_\tau^{(1)} - R_\tau^{(2)})\right).$$

Правая часть этого выражения не зависит от номера переданного сигнала; это значит, что условная вероятность ошибки в данном случае совпадает с безусловной вероятностью, т. е.

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(R_\tau^{(1)} + R_\tau^{(2)})\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(R_\tau^{(1)} - R_\tau^{(2)})\right). \quad (2.75)$$

Вероятность ошибки, как это следует из выражения (2.75), зависит от отношения сигнал/шум и косвенно, т. е. через величины $R_\tau^{(1)}$ и $R_\tau^{(2)}$, от временного сдвига τ и формы сигналов.

Рассмотрим частный случай. Пусть сигналы представляют собой противоположные прямоугольные импульсы, т. е.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда с использованием определений (2.73) и (2.74), можно показать, что $R_\tau^{(2)} = \tau/T$, $R_\tau^{(1)} = (T - \tau)/T$. Отсюда

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\left(1 - \frac{2\tau}{T}\right)\right). \quad (2.76)$$

Аналогичное выражение можно получить, если рассмотреть не положительное, а отрицательное значение временного сдвига τ . В итоге будет получена формула, совпадающая с (2.76), в которой вместо τ будет $-\tau$. Окончательное выражение, учитывающее как положительную ошибку синхронизации (опоздание), так и отрицательную (опережение), имеет вид

$$P_e = \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\left(1 - \frac{2|\tau|}{T}\right)\right).$$

Графики вероятности ошибки для различных величин отношения τ / T показаны на рис. 2.46. Видно, что при увеличении этого отношения вероятность ошибки убывает с ростом отношения сигнал/шум все медленнее, а при $\tau / T = 1/2$ передача становится невозможной.

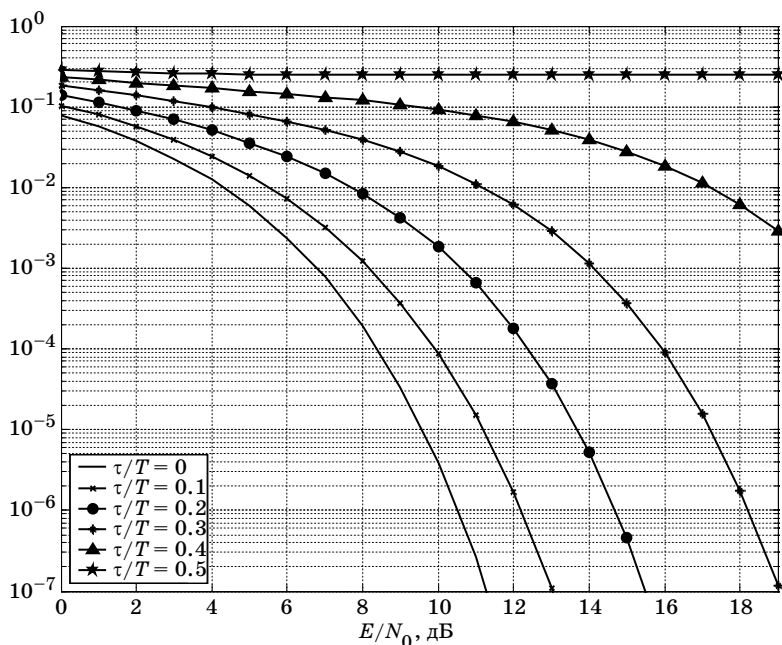


Рис. 2.46. Вероятность ошибки для двоичных противоположных сигналов при различных значениях ошибки синхронизации

Упражнения

1. Для передачи по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ используются два сигнала

$$s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_0 t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi(f_0 + \Delta_f)t, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $T = 2$ мс, $f_0 = 500$ кГц, $\Delta_f = 250$ Гц. Вычислите вероятность ошибки при условии, что $E/N_0 = 6$. Повторите вычисления для $\Delta_f = 500$ Гц.

2. Некоторые функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные на интервале $[0, T]$, используются для передачи по каналу с АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Вт/Гц. Известно, что при рассеянии на сопротивлении 1 Ом

$$\int_0^T x^2(t) dt = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}, \quad \int_0^T y^2(t) dt = 11 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}, \quad \int_0^T x(t)y(t) dt = 3 \cdot 10^{-8}.$$

Определите вероятность ошибки в системе связи, использующей сигналы $x(t)$ и $y(t)$.

3. Два сигнала

$$s_0(t) = -s_1(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

используются для передачи по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом с $N_0/2 = 0,1$. Приемник строит решение, наблюдая принятый сигнал $r(t) = s(t) + n(t)$ на интервале времени $0 < t < 2$. Чему равна вероятность ошибки? Насколько изменится вероятность ошибки, если приемник будет наблюдать процесс $r(t)$ при $-\infty < t < \infty$?

4. Определите среднее число ошибок, сделанных за сутки оптимальным приемником ФМ-2 сигналов. Скорость передачи 5000 бит/с, сигналы имеют вид $s_0(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, $s_1(t) = -A \cos 2\pi f_0 t$, где $A = 1$ мВ, а значение односторонней спектральной плотности мощности равно $N_0 = 10^{-11}$ Вт/Гц.

5. Непрерывно работающая система связи использует канал с АБГШ и ФМ-2 сигналы (противоположные). Скорость передачи 1000 бит/с. Среднее число ошибок за сутки 1500, спектральная плотность мощности шума задана как $N_0/2 = 10^{-10}$ Вт/Гц. Чему равна вероятность ошибки? Если значение средней мощности принятого сигнала равно 10^{-6} Вт, то будет ли ее достаточно для поддержания найденной вероятности ошибки?

6. В канале с АБГШ передача ведется с использованием сигналов ФМ-16 или КАМ-16. В обоих случаях предполагается прямоугольная огибающая. Ширина полосы частот, отведенной для передачи, составляет $W = 2$ МГц. Какая скорость передачи может быть обеспечена в каждом случае? Какое значение отношения сигнал/шум на бит нужно в обоих случаях для обеспечения вероятности ошибки на бит, равной 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} , 10^{-6} ? Какой из рассмотренных видов модуляции обеспечивает выигрыш по отношению сигнал/шум на бит и какова величина этого выигрыша?

7. В канале с АБГШ для передачи используется ФМ. Модуляционная скорость составляет величину $V_{\text{mod}} = 19200$ Бод. Отношение сигнал/шум $E/N_0 = 26$ дБ. Какую информационную скорость можно обеспечить при вероятности ошибки 10^{-5} ?

8. В канале с АБГШ для передачи используется КАМ. Модуляционная скорость равна 34800 Бод. Требуется обеспечить информационную скорость не менее 128 Кбит/с. Какое значение отношения сигнал/шум должно быть в точке приема, чтобы обеспечить вероятность ошибки $P_e < 10^{-5}$?

9. Докажите равенство (2.52).

3. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ КАНАЛОВ

Ранее была рассмотрена передача сигналов по каналу с аддитивным белым гауссовским шумом. Такая модель канала является сравнительно простой, но вместе с тем важнейшей как с теоретической, так и с практической точек зрения. На практике искажения, вносимые каналом, не всегда могут быть описаны аддитивной моделью, и требуют поэтому для своего описания применения более сложных моделей. В этом разделе кратко излагается описание некоторых более сложных моделей мешающих воздействий, возникающих при передаче. Рассматриваются каналы со случайной фазой, каналы с замираниями и каналы с межсимвольной интерференцией.

3.1. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом и случайной фазой

Основной моделью канала, рассматривавшейся до сих пор, был канал с аддитивным белым гауссовским шумом. В этой модели сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t)$ – переданный сигнал, принимающий значения из конечного сигнального множества; $s(t) \in \{s_i(t)\}_{i=0}^{q-1}$; $n(t)$ – белый гауссовский шум.

Более сложный класс моделей каналов образуют каналы со случайными параметрами. В канале со случайными параметрами сигнал на выходе канала имеет вид $r(t) = s(t, \mathbf{a}) + n(t)$, где \mathbf{a} – вектор параметров сигнала, случайно изменяемых при передаче по каналу, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_L)$; L – число случайных параметров; $n(t)$ – белый гауссовский шум. Обычно случайные параметры и шум статистически независимы. При некотором значении вектора случайных параметров, скажем при $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, имеет место равенство $s(t) = s(t, \mathbf{a}_0)$ где $s(t) \in \{s_i(t)\}_{i=0}^{q-1}$. Иначе говоря, если значения параметров сигнала не меняются и равны \mathbf{a}_0 , то имеет место канал с АБГШ. Канал со случайными параметрами задан, если задано распределение вектора случайных параметров \mathbf{a} . Обычно предполагается, что значение вектора случайных параметров неизвестно или не точно известно в точке приема и приемник должен быть построен с учетом этого обстоятельства. Иллюстрация приведена на рис. 3.1.

Как правило, число случайных параметров невелико, например, в модели канала со случайной фазой рассматривается только один случайный параметр – фазовый сдвиг приходящего сигнала. При

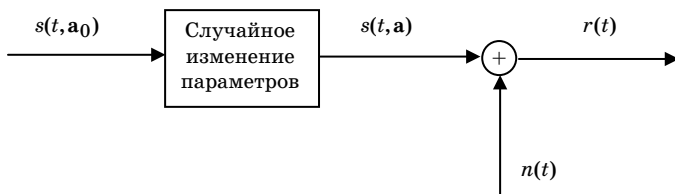


Рис. 3.1. Общая модель канала со случайными параметрами

рассмотрении канала со случайной фазой предполагается использование сигнала, передаваемого на одной несущей частоте (или на одной из нескольких несущих). Рассмотрим для примера передачу с использованием ЧМ, т. е.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos 2\pi f_i t, \quad 0 < t < T, \quad i = 0, 1, \dots, q-1.$$

Сигнал на выходе канала со случайной фазой имеет вид

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t),$$

где θ – случайный фазовый сдвиг. Распределение случайного фазового сдвига может быть задано различным образом. Наиболее простым и распространенным является предположение о равномерном распределении фазового сдвига, т. е. функция плотности вероятности величины θ задается как

$$w(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta < 2\pi, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Причины случайного фазового сдвига могут быть различными; в частности, он может возникать из-за условий распространения сигнала и/или из-за нестабильного формирования сигнала в передатчике.

3.2. Оптимальный прием дискретных ЧМ-сигналов в канале со случайной фазой

Рассмотрим равновероятную передачу ЧМ-сигналов по каналу со случайной фазой. Сигналы ЧМ имеют вид $s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t$, $0 < t < T$, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Частоты сигналов f_i выбираются так, чтобы

сигналы были ортогональны в усиленном смысле. Ортогональность в усиленном смысле означает выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_k t dt = \\ & = \int_0^T \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_k t dt = 0.$$

Эти условия достигаются если $f_i = f_0 + i\Delta_f$, где $f_0 = l_0/T$, l_0 – целое, и $\Delta_f = l/T$, l – целое. Минимальный шаг по частоте, при котором достигается ортогональность в усиленном смысле, равен $1/T$. Заметим, что ортогональность в обычном смысле означает лишь, что

$$\int_0^T \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_k t dt = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

и достигается при $\Delta_f = l/(2T)$, l – целое.

Сигнал на выходе канала со случайной фазой имеет вид

$$r(t) = \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t), \quad (3.1)$$

где θ – случайный фазовый сдвиг; $n(t)$ – белый гауссовский шум. С использованием тождества $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ равенство (3.1) можно представить в виде

$$r(t) = (\sqrt{E} \cos \theta) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t + (\sqrt{E} \sin \theta) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t + n(t). \quad (3.2)$$

Функции $\sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t$ и $\sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t$ ($i = 0, 1, \dots, q-1$) образуют ортонормированный базис, состоящий из $2q$ функций. Обозначим скалярные произведения принятого сигнала и косинуса и синуса i -й частоты ($i = 0, 1, \dots, q-1$) как r_{ci} и r_{si} , т. е. $r_{ci} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_i t dt$, $r_{si} = \int_0^T r(t) \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_i t dt$. Аналогично скалярные произведения шума и косинуса и синуса i -й частоты обозначим как n_{ci} и n_{si} . Далее введем векторы $\mathbf{r}_c = (r_{c0}, \dots, r_{cq-1})$, $\mathbf{r}_s = (r_{s0}, \dots, r_{sq-1})$ и $\mathbf{n}_c = (n_{c0}, \dots, n_{cq-1})$, $\mathbf{n}_s = (n_{s0}, \dots, n_{sq-1})$, а также

$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_s)$, $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_c, \mathbf{n}_s)$. Тогда для принятого сигнала (3.2) можно получить векторное представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i(\theta) + \mathbf{n}, \quad (3.3)$$

где все векторы имеют размерность $2q$, а $\mathbf{s}_i(\theta) = (\mathbf{s}_i \cos \theta, \mathbf{s}_i \sin \theta)$ и $\mathbf{s}_i = (s_{i0}, \dots, s_{iq-1})$, причем

$$s_{ki} = \begin{cases} \sqrt{E}, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

При получении представления (3.3) использовано свойство усиленной ортогональности сигналов.

Обозначим условную плотность вероятности вектора \mathbf{r} при условии передачи i -го сигнала как $w(\mathbf{r} | i)$. Оптимальный приемник принимает решение по правилу $\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} w(\mathbf{r} | i)$. Рассмотрим вы-

ражение для плотности $w(\mathbf{r} | i)$. Ясно, что

$$w(\mathbf{r} | i) = \int_0^{2\pi} w(\mathbf{r} | i, \theta) w(\theta) d\theta = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} w(\mathbf{r} | i, \theta) d\theta, \quad (3.4)$$

где $w(\mathbf{r} | i, \theta)$ – условная функция плотности вероятности при фиксированном значении случайной фазы; $w(\theta)$ – функция плотности вероятности случайной фазы; $w(\theta) = (2\pi)^{-1}$, $0 < \theta < 2\pi$. Для условной плотности вероятности $w(\mathbf{r} | i, \theta)$ можно записать, что

$$w(\mathbf{r} | i, \theta) = w(\mathbf{r}_c | i, \theta) w(\mathbf{r}_s | i, \theta), \quad (3.5)$$

где

$$w(\mathbf{r}_c | i, \theta) = \left(\frac{1}{\pi N_0} \right)^{q/2} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_c - \mathbf{s}_i \cos \theta\|^2}{N_0} \right), \quad (3.6a)$$

$$w(\mathbf{r}_s | i, \theta) = \left(\frac{1}{\pi N_0} \right)^{q/2} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{r}_s - \mathbf{s}_i \sin \theta\|^2}{N_0} \right). \quad (3.6b)$$

После подстановки равенств (3.6) в (3.5) имеем

$$w(\mathbf{r} | i, \theta) = K(\mathbf{r}) \exp \left(\frac{2(\mathbf{r}_c, \mathbf{s}_i) \cos \theta + 2(\mathbf{r}_s, \mathbf{s}_i) \sin \theta}{N_0} \right), \quad (3.7)$$

где $K(\mathbf{r}) = (\pi N_0)^{-q} \exp(-(\|\mathbf{r}_c\|^2 + \|\mathbf{r}_s\|^2 + E)/N_0)$ – величина, не зависящая от i и θ . Рассмотрим скалярные произведения в показателе экспоненты в (3.7). Они равны $(\mathbf{r}_c, \mathbf{s}_i) = \sum_{k=0}^{q-1} r_{ck} s_{ik} = r_{ci} \sqrt{E}$ и $(\mathbf{r}_s, \mathbf{s}_i) = \sum_{k=0}^{q-1} r_{sk} s_{ik} = r_{si} \sqrt{E}$. Поэтому показатель экспоненты в (3.7) может быть записан в виде

$$\frac{2\sqrt{E}}{N_0} (r_{ci} \cos \theta + r_{si} \sin \theta) m$$

или с использованием тождества $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \arctan(b/a))$ преобразован к виду

$$\frac{2\sqrt{E}}{N_0} \sqrt{(r_{ci})^2 + (r_{si})^2} \cos(\theta - \varphi_i),$$

где $\varphi_i = \arctan(r_{si} / r_{ci})$. Тогда для плотности $w(\mathbf{r} | i, \theta)$ имеем выражение

$$w(\mathbf{r} | i, \theta) = K(\mathbf{r}) \exp \left(\frac{2\sqrt{E}}{N_0} \sqrt{(r_{ci})^2 + (r_{si})^2} \cos(\theta - \varphi_i) \right).$$

Подставляя это выражение в (3.4), получаем

$$w(\mathbf{r} | i) = K(\mathbf{r}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left(\frac{2\sqrt{E}}{N_0} \sqrt{(r_{ci})^2 + (r_{si})^2} \cos(\theta - \varphi_i) \right) d\theta.$$

Выражение вида

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos(\alpha - \beta)) d\alpha,$$

где β – любое, известно как функция Бесселя первого рода нулевого порядка. График функции $I_0(x)$ показан на рис. 3.2.

С использованием определения функции $I_0(\cdot)$ имеем $w(\mathbf{r} | i) = K(\mathbf{r}) I_0 \left((2\sqrt{E} / N_0) \sqrt{(r_{ci})^2 + (r_{si})^2} \right)$. Оптимальное решение строится по правилу $\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} w(\mathbf{r} | i)$. Поскольку функция ква-

дратного корня и функция Бесселя монотонно возрастают, то эквивалентное правило принятия решения имеет вид

$$\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} \left((r_{ci})^2 + (r_{si})^2 \right).$$

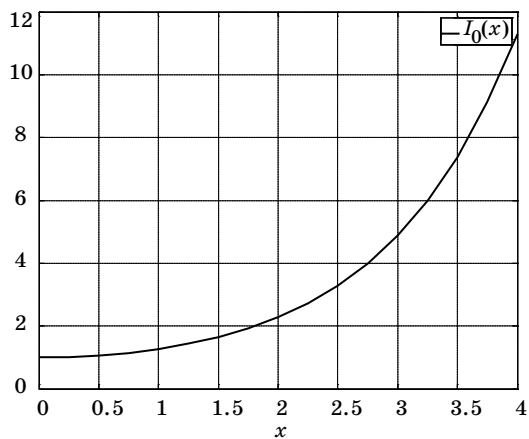


Рис.3.2. График функции $I_0(x)$

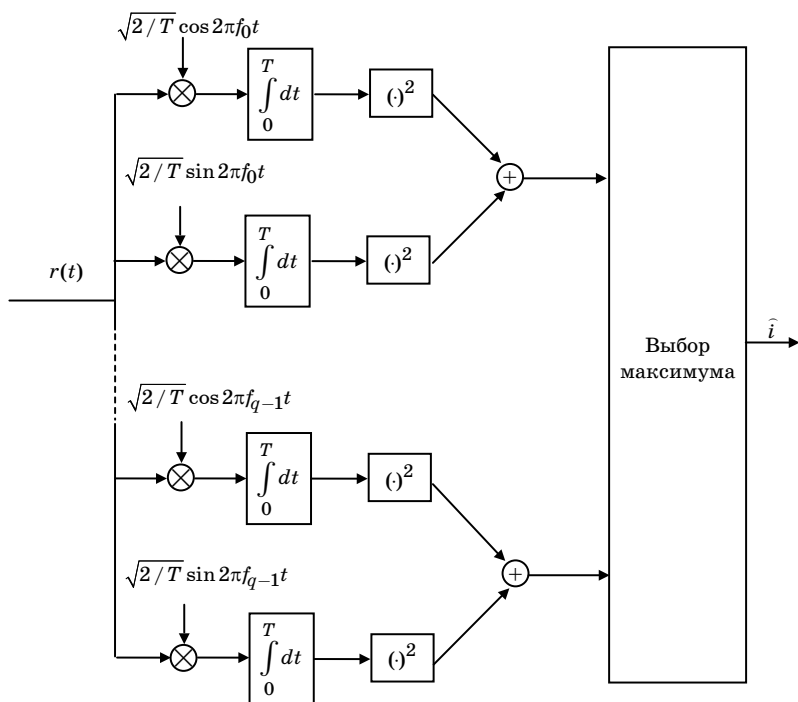


Рис.3.3. Схема оптимального приемника ЧМ-сигналов в канале со случайной фазой

Схема, реализующая это правило, показана на рис. 3.3.

3.3. Сигналы с ортогональными огибающими. Оптимальный прием в канале со случайной фазой

Рассмотрим теперь кратко другой метод передачи сигналов по каналу со случайной фазой – передачу с использованием сигналов с ортогональными огибающими. В этом случае сигналы передаются на одной несущей частоте и имеют вид $s_i(t) = m_i(t)\sqrt{2E} \cos 2\pi f_0 t$, где $m_i(t)$ – ортонормированные на интервале $[0, T]$ огибающие, $i = 0, 1, \dots, q-1$. В качестве огибающих могут быть использованы любые ортонормированные функции. Важно только чтобы они были низкочастотными по сравнению со значением несущей частоты f_0 . Часто в качестве огибающих используются кусочно-постоянные функции, полученные с использованием кода Адамара¹ соответствующего порядка. Например, для $q = 8$ огибающие показаны на рис. 3.4. Огибающие, построенные с использованием кода Адамара, состоят из q элементов сигнала, или чипов (chip), длительностью $T_c = T / q$.

Условие низкочастотности огибающей, упомянутое выше, состоит в данном случае в том, что $f_0 \gg 1 / T_c$, т. е. на длительности чипа должно помещаться много периодов несущей.

Принятый сигнал в отсутствие шума имеет вид

$$r(t) = m_i(t)\sqrt{2E} \cos(2\pi f_0 t - \theta) = m_i(t)\sqrt{2E} (\cos \theta \cos 2\pi f_0 t + \sin \theta \sin 2\pi f_0 t).$$

В приемнике сначала выполняется низкочастотная демодуляция (перенос спектра в низкочастотную область). Эта операция выполняется следующим образом. Сначала принятый сигнал умножается на $\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ и $\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$ и потом пропускается через фильтр низких частот, т. е. вычисляются $r_c(t) = \left(r(t)\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t \right)_{\text{НЧ}}$ и $r_s(t) = \left(r(t)\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t \right)_{\text{НЧ}}$. Здесь через $(\cdot)_{\text{НЧ}}$ обозначена операция низкочастотной фильтрации выражения, стоящего в скобках. Рассмотрим вычисление $r_c(t)$.

¹ Код Адамара определяется как набор векторов, совпадающих со строками матрицы Адамара. Матрица Адамара порядка $n = 2^k$ может быть определена рекурсивно как $H_n = \begin{bmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & -H_{n/2} \end{bmatrix}$, и $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

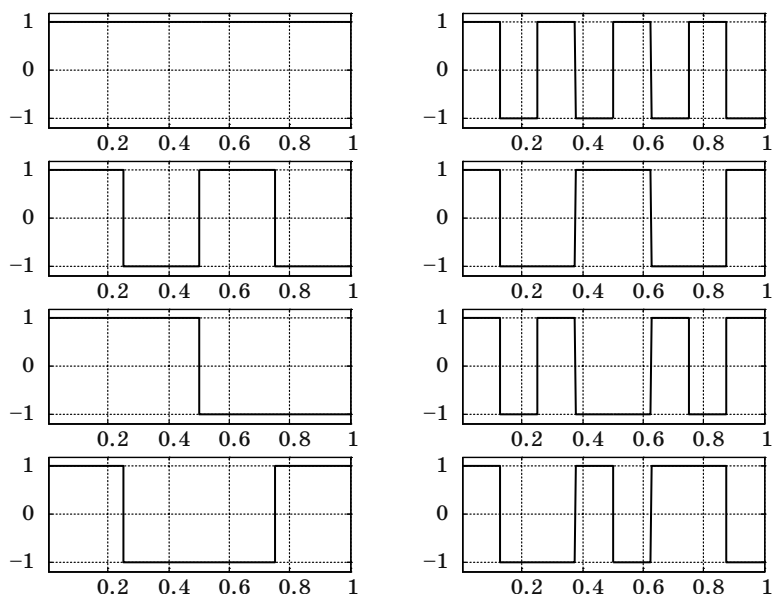


Рис. 3.4. Ортогональные огибающие, построенные на основе кода Адамара, $q=8$, $T=1$

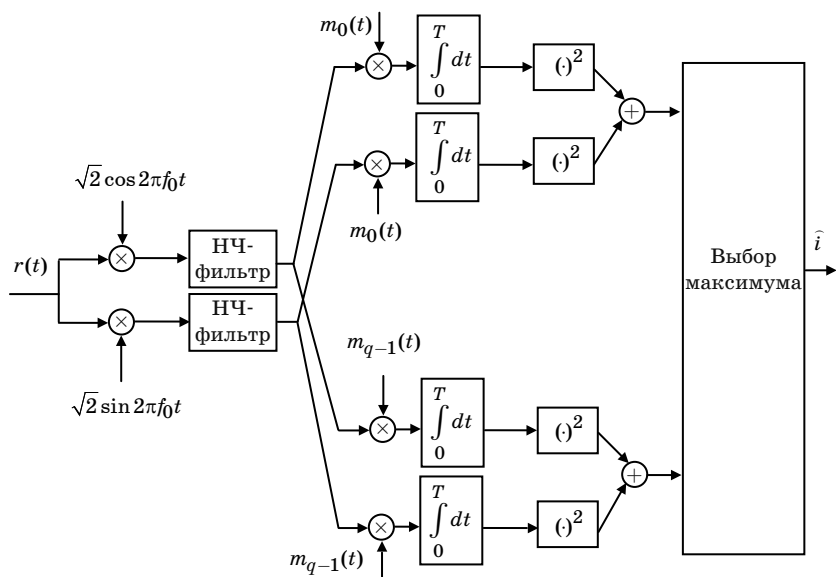


Рис. 3.5. Схема некогерентного приемника для сигналов с ортогональными огибающими

$$\begin{aligned}
r_c(t) &= \left(r(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t \right)_{\text{НЧ}} = \sqrt{2E} \sqrt{2} (m_i(t) \cos(2\pi f_0 t - \theta) \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\
&= 2\sqrt{E} (m_i(t) \cos \theta \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t + \sin \theta \sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t)_{\text{НЧ}} = \\
&= \sqrt{E} (m_i(t) (\cos \theta (1 + \cos 4\pi f_0 t) + \sin \theta \sin 4\pi f_0 t))_{\text{НЧ}} = \sqrt{E} m_i(t) \cos \theta.
\end{aligned}$$

При переходе к последнему выражению учтено, что НЧ-фильтр полностью подавляет составляющие удвоенной частоты. Также при выводе выражения для $r_c(t)$ использованы тождества $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ и $\cos x \sin x = \sin 2x / 2$. Аналогично можно показать, что $r_s(t) = \sqrt{E} m_i(t) \sin \theta$.

Далее в приемнике вычисляются скалярные произведения функций $r_c(t)$ и $r_s(t)$ и ортогональных огибающих, возведение в квадрат, сложение и принятие окончательного решения. Схема некогерентного приемника для сигналов с ортогональными огибающими показана на рис. 3.5.

3.4. Вероятность ошибки при оптимальном приеме в канале со случайной фазой

Рассмотрим равновероятную передачу ЧМ-сигналов по каналу со случайной фазой. Вероятность ошибки в этом случае вычисляется как

$$P_e = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} P_e(i),$$

где $P_e(i)$ – вероятность ошибки при передаче i -го сигнала. Всегда справедливо равенство $P_e(i) = 1 - P_c(i)$, где $P_c(i)$ – вероятность правильного приема при передаче i -го сигнала. Оптимальное правило принятия решения имеет вид $\hat{i} = \arg \max_{0 \leq i \leq q-1} \xi_i^2$, где $\xi_i^2 = (r_{ci})^2 + (r_{si})^2$.

Следовательно

$$P_c(i) = \Pr \left[\bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} (\xi_i^2 > \xi_k^2) \mid i \right].$$

При передаче i -го сигнала $\xi_i^2 = (\sqrt{E} \cos \theta + n_{ci})^2 + (\sqrt{E} \sin \theta + n_{si})^2$, и $\xi_k^2 = (n_{ck})^2 + (n_{sk})^2$, где θ – случайный фазовый сдвиг; n_{ci} , n_{si} , n_{ck} , n_{sk} – независимые гауссовские случайные величины, распределенные с параметрами $(0, N_0/2)$.

При вычислении величины $P_c(i)$ поступим следующим образом. Поскольку величины ξ_k ($k = 0, 1, \dots, q-1, k \neq i$) и ξ_i независимы, то можно фиксировать значение ξ_i , найти значение условной вероятности при фиксированном ξ_i , т. е. $P_c(i, \xi_i)$, а потом усреднить полученное выражение по ξ_i .

Пусть ξ_i фиксировано. Тогда в силу независимости величин ξ_k

$$\begin{aligned} P_c(i, \xi_i) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\xi_i^2 > \xi_k^2] = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \Pr[\xi_i^2 > (n_{ck})^2 + (n_{sk})^2] = \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{N_0}\right) \right) = \left(1 - \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{N_0}\right) \right)^{q-1}. \end{aligned}$$

Переход от первой ко второй строке этого равенства выполняется путем перехода к полярным координатам при интегрировании гауссовских плотностей по той же схеме, как это было сделано при получении верхней границы вероятности ошибки для КАМ. Далее имеем

$$P_c(i) = \overline{P_c(i, \xi_i)} = \overline{\left(1 - \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{N_0}\right) \right)^{q-1}}, \quad (3.8)$$

где черта сверху означает усреднение по ξ_i (т. е. по всем случайным величинам, определяющим величину ξ_i). Рассмотрим выражение под чертой в правой части (3.8). Используя тождество $(a+b)^N = \sum_{l=0}^N C_N^l a^{N-l} b^l$, где C_N^l – биномиальный коэффициент, $C_N^l = N!/(l!(N-l)!)$, можно записать, что

$$\left(1 - \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{N_0}\right) \right)^{q-1} = \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^l \exp\left(-\frac{l\xi_i^2}{N_0}\right). \quad (3.9)$$

После подстановки (3.9) в (3.8) имеем

$$\begin{aligned} P_c(i) &= \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^l \overline{\exp\left(-\frac{l\xi_i^2}{N_0}\right)} = \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^l \exp\left(-\frac{l((\sqrt{E} \cos \theta + n_{ci})^2 + (\sqrt{E} \sin \theta + n_{si})^2)}{N_0}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

При усреднении в правой части (3.10) полезной оказывается следующая лемма.

Лемма. Пусть x – гауссовская случайная величина, распределенная с параметрами (m, σ^2) , α – постоянная, такая что $\alpha < 1/(2\sigma^2)$. Тогда

$$\overline{\exp(\alpha x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sigma^2}} \exp\left(\frac{\alpha m^2}{1-2\alpha\sigma^2}\right). \quad (3.11)$$

Доказательство этой леммы предлагается выполнить в качестве упражнения.

Применяя эту лемму к усреднению правой части (3.10), получим

$$P_c(i) = \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^l \frac{1}{1+l} \exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{E}{N_0}\right).$$

Правая часть этого равенства не зависит от номера переданного сигнала; это значит, что и безусловная вероятность правильного приема P_c вычисляется по этой же формуле. Поскольку $P_e = 1 - P_c$, то имеем окончательное выражение для вероятности ошибки

$$P_e = \sum_{l=1}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^{l+1} \frac{1}{1+l} \exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{E}{N_0}\right). \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) дает точное значение вероятности ошибки. Простая верхняя оценка может быть получена на основе аддитивной границы. Она имеет вид

$$P_e \leq \frac{q-1}{2} \exp(-E/2N_0). \quad (3.13)$$

При $q = 2$, т. е. для двоичных сигналов, из (3.12) следует, что

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-E/2N_0). \quad (3.14)$$

Заметим, что выражение (3.14) следует из равенств (3.13) и из (3.12), т. е. аддитивная граница (3.13) при $q = 2$ дает точное значение. Соотношение между точным значением вероятности ошибки (3.12) и верхней границей (3.13) иллюстрирует рис. 3.6.

На рис. 3.7 показаны графики вероятности ошибки для ЧМ-сигналов в канале с АБГШ и в канале с АБГШ и случайной фазой. Из этих графиков следует, что в канале со случайной фазой вероятность ошибки больше и может быть компенсирована незначитель-

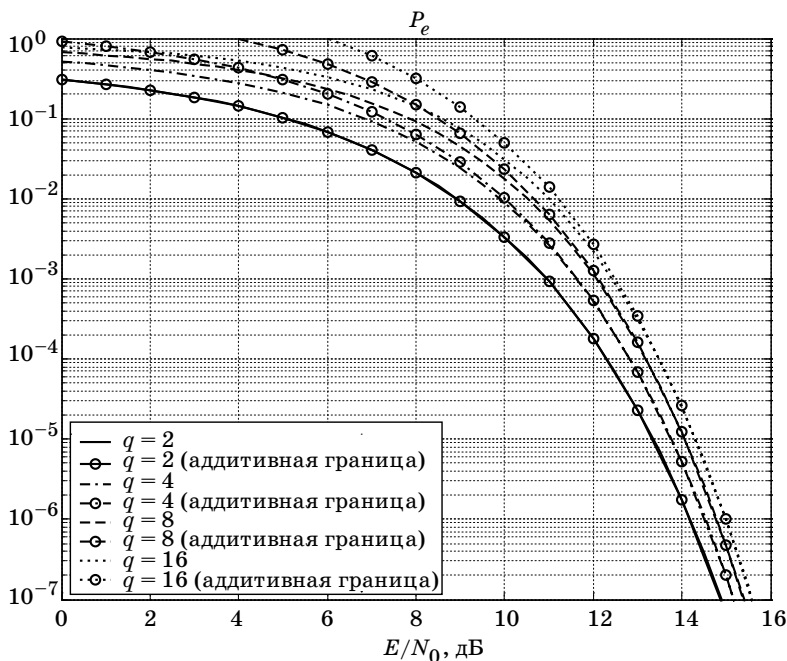


Рис. 3.6. Вероятность ошибки P_e и верхняя граница вероятности ошибки при оптимальном приеме сигналов ЧМ в канале со случайной фазой

ным (в практически важных случаях на 0,5...0,8 дБ) увеличением отношения сигнал/шум. С увеличением отношения сигнал/шум дополнительные энергетические затраты, связанные со случайным фазовым сдвигом, быстро уменьшаются.

Ранее было показано, что вероятность ошибки на бит может быть вычислена как

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} P_e.$$

Заметим, что для двоичных сигналов, т. е. когда $q = 2$ и $m = 1$, $P_b = P_e$, а при $q \gg 1$ $P_b \approx P_e / 2$. Отношение сигнал/шум на бит равно $E_b / N_0 = (1/m) E / N_0$, поэтому окончательное выражение для вероятности ошибки на бит имеет вид

$$P_b = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1} \sum_{l=1}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^{l+1} \frac{1}{1+l} \exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{mE_b}{N_0}\right). \quad (3.15)$$

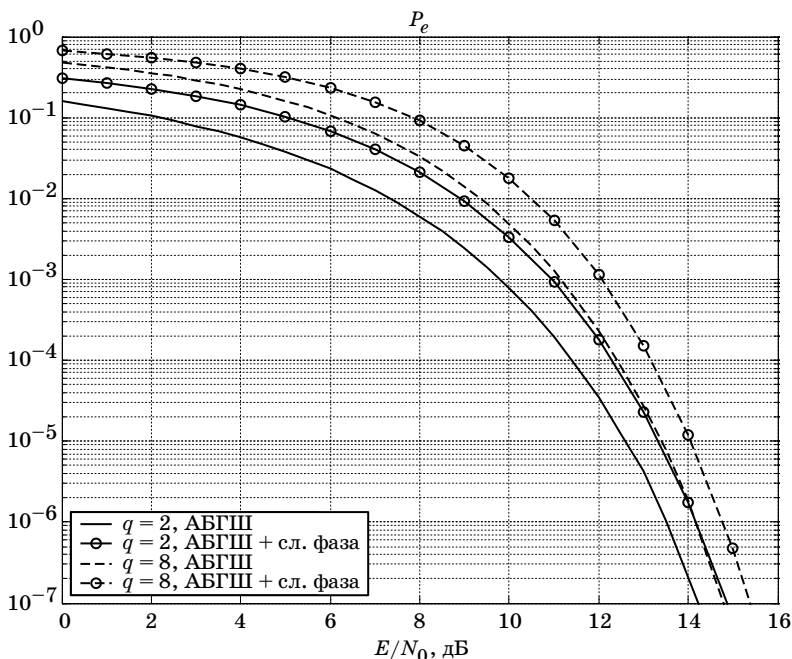


Рис. 3.7 Вероятность ошибки для сигналов ЧМ в канале с АБГШ и канале с АБГШ и случайной фазой

На рис. 3.8 показаны графики значений вероятности ошибки, вычисленных по формулам (3.12) и (3.15).

В заключение отметим, что выражения (3.12), (3.13) и (3.14) справедливы для передачи по каналу с АБГШ и случайной фазой при использовании не только ЧМ-сигналов, но и сигналов с ортогональными огибающими.

3.5. Относительная фазовая модуляция

В канале со случайной фазой нельзя использовать сигналы ФМ. Эти сигналы различаются между собой начальной фазой, а случайный фазовый сдвиг, вносимый каналом, делает их неразличимыми на выходе канала даже в отсутствие шума. В частности, в двоичной системе передачи нельзя использовать двоичные противоположные сигналы, которые обеспечивают наилучшее соотношение между отношением сигнал/шум и вероятностью ошибки в канале с АБГШ.

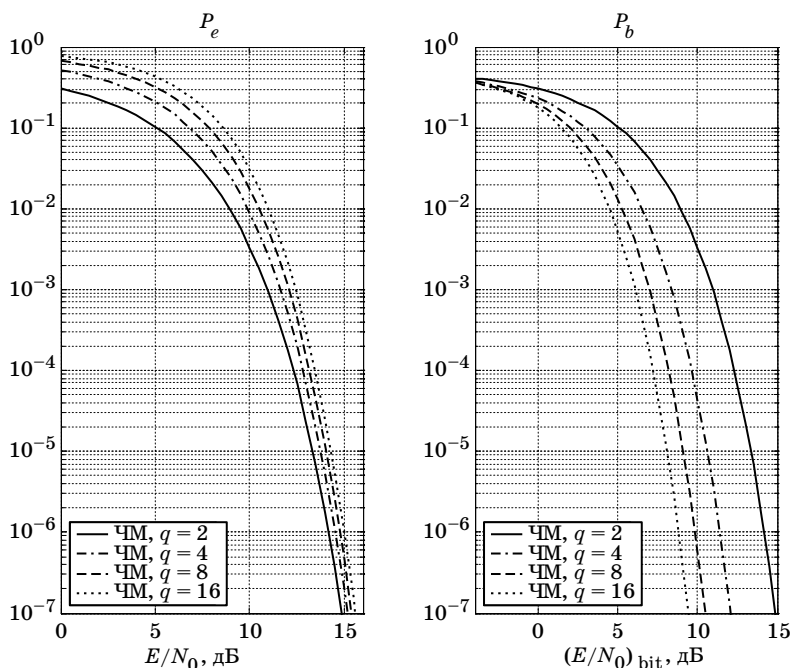


Рис. 3.8. Вероятности ошибки для ЧМ-сигналов P_e (слева) и P_b (справа), канал со случайной фазой, некогерентный прием

Двоичные сигналы ЧМ в канале с АБГШ обеспечивают вероятность ошибки

$$P_e = Q(\sqrt{E/N_0}), \quad (3.16)$$

а в канале с АБГШ и случайной фазой

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_0}}, \quad (3.17)$$

что незначительно уступает (3.16). Однако в канале с АБГШ и неслучайной фазой можно применить ФМ (противоположные сигналы) и вероятность ошибки при этом станет равной $P_e = Q(\sqrt{2E/N_0})$, что соответствует выигрышу в 3 дБ в отношении сигнал/шум по сравнению с сигналами ЧМ [см. (3.16)]. Применение ФМ в канале со случайной фазой не только не дает выигрыша, но и вообще делает передачу невозможной. Однако при некоторых условиях в канале

с АБГШ и случайной фазой можно получить зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум, определяемую равенством

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{N_0}}, \quad (3.18)$$

что соответствует такому же выигрышу в 3 дБ по сравнению с сигналами ЧМ. Такую вероятность ошибки обеспечивает применение относительной фазовой модуляции (ОФМ) (DPSK, differential phase shift keying).

Сигналы двоичной ОФМ строятся следующим образом: при передаче символа «0» фаза текущего сигнала совпадает с фазой предыдущего сигнала, а при передаче «1» фаза текущего сигнала меняется на противоположную по сравнению с предыдущим. Рис. 3.9 дает представление о различии между сигналами двоичной ФМ и двоичной ОФМ.

Из построения сигналов ОФМ следует, что информация передается разностью фаз двух смежных во времени сигналов в отли-

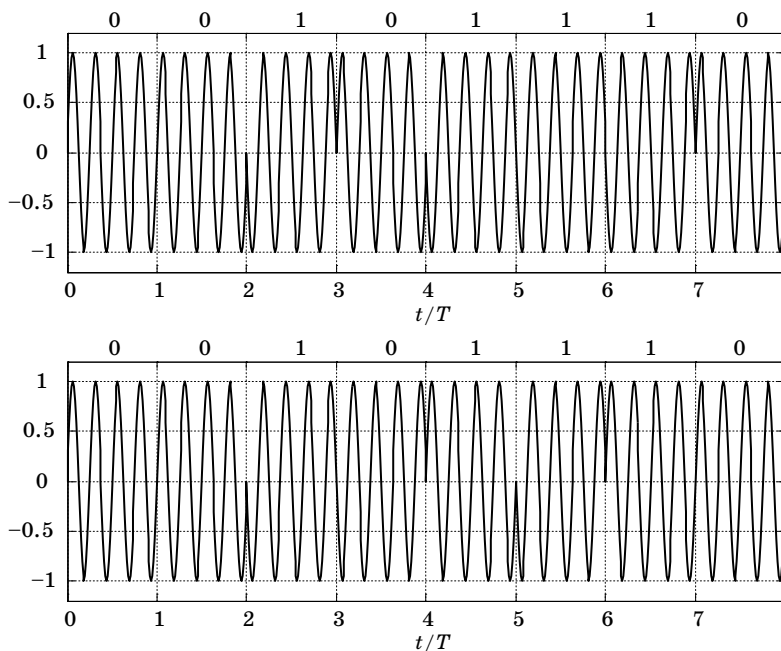


Рис. 3.9. Примеры сигнальных последовательностей ФМ (вверху) и ОФМ (внизу)

чие от сигналов ФМ, в которых информация заключена в значении фазы текущего сигнала.

Сигналы ОФМ могут применяться в канале со случайной фазой, если случайный фазовый сдвиг, определяемый каналом, меняется *медленно* по сравнению с *длительностью сигнала*. Это значит, что сдвиг на двух соседних временных позициях остается примерно *постоянным*, и, следовательно, разность фаз двух соседних по времени сигналов остается *неизменной*.

Рассмотрим сигналы ОФМ на двух соседних временных позициях. Легко заметить, что они представляют собой две пары сигналов с ортогональными огибающими, состоящими из двух чипов (рис. 3.10), соответствующих знакам амплитуды $(+,+)$ $(+,-)$ или $(-,-)$ $(-,+)$ в зависимости от значения фазы предыдущего сигнала и текущего передаваемого бита.

Пара возможных сигналов ОФМ, соответствующих одному значению фазы предыдущего сигнала, может рассматриваться как пара сигналов с ортогональными огибающими длительности $2T$; очевидно, что энергия сигнала двойной длительности равна $2E$, где E – энергия одиночного сигнала. Отсюда следует, что прием сиг-

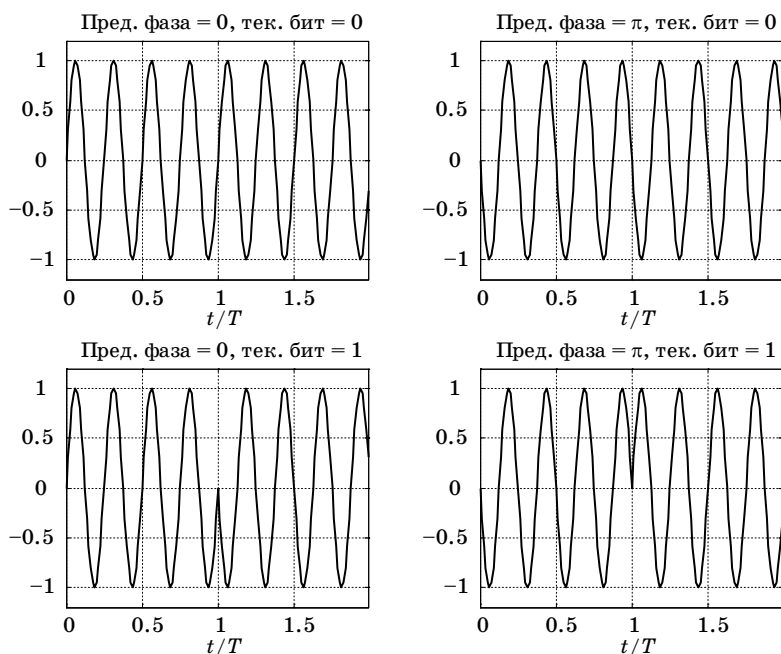


Рис. 3.10. Пары смежных ОФМ-сигналов

налов ОФМ может быть реализован как прием двоичных сигналов с ортогональными огибающими на интервале $2T$, т. е. после небольшой модификации может быть использована схема, показанная на рис. 3.5. Для вероятности ошибки при использовании двоичных сигналов с ортогональными огибающими справедливо равенство (3.17), где E – энергия сигнала. Поскольку в случае ОФМ решение принимается на основе анализа сигнала двойной длительности, т. е. на основе анализа сигнала, имеющего двойную энергию, то для двоичных ОФМ-сигналов формула для вероятности ошибки получается путем замены в (3.17) E на $2E$ что дает в итоге выражение (3.18). Подчеркнем в заключение, что применение ОФМ возможно только при медленно изменяющейся фазе приходящих сигналов. Заметим также, что это условие не является очень сильным ограничением и часто выполняется на практике.

Кроме двоичных сигналов ОФМ широко используются четверичные сигналы ОФМ (ОФМ-4, QDPSK). В этом случае фаза текущего сигнала изменяется по сравнению с фазой предыдущего сигнала на $0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$ по сравнению с предыдущим в зависимости от значения поступившей на вход модулятора пары бит, принимающей значения из множества $\{00, 01, 10, 11\}$.

Вероятность ошибки в этом случае вычисляется следующим образом. Пусть $\gamma = E / N_0$ – отношение сигнал/шум в канале с АБГШ и случайной фазой; очевидно, что отношение сигнал/шум на бит в этом случае равно $\gamma_b = \gamma / 2$. Пусть величины a и b определены как $a = \sqrt{\gamma(1 - \sqrt{2}/2)}$ и $b = \sqrt{\gamma(1 + \sqrt{2}/2)}$. Тогда вероятность ошибки при использовании ОФМ-4 в канале с АБГШ и случайной фазой вычисляется по формуле, которая приводится здесь без вывода:

$$P_e = Q_1(a, b) - \frac{1}{2} I_0(ab) \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right),$$

где $Q_1(a, b)$ и $I_0(ab)$ – Q-функция Маркума и функция Бесселя первого рода нулевого порядка, определенные соответственно как

$$Q_1(a, b) = \int_b^\infty x \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) I_0(ax) dx,$$

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos y) dy.$$

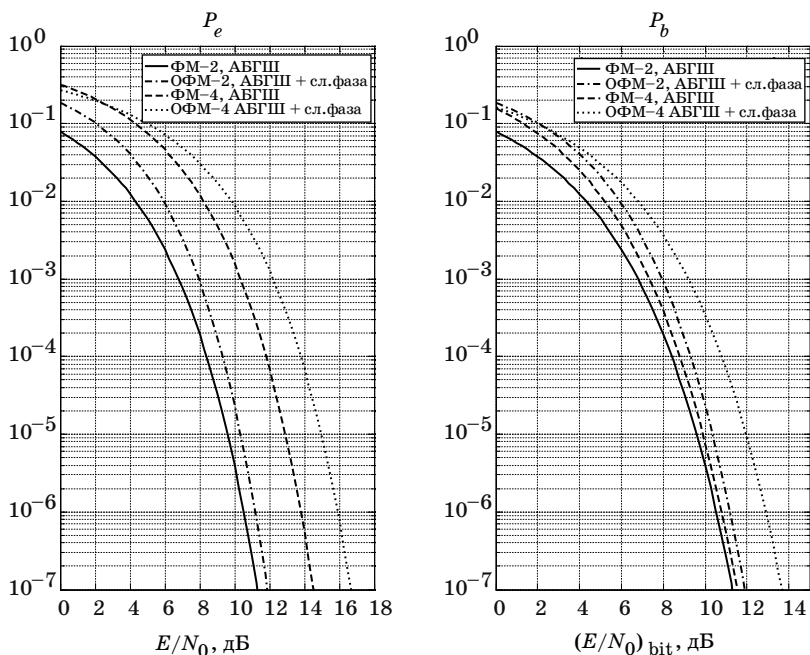


Рис. 3.11. Вероятности ошибки P_e (слева) и P_b (справа) для сигналов ФМ и ОФМ в канале с АВГШ и в канале с АВГШ и случайной фазой

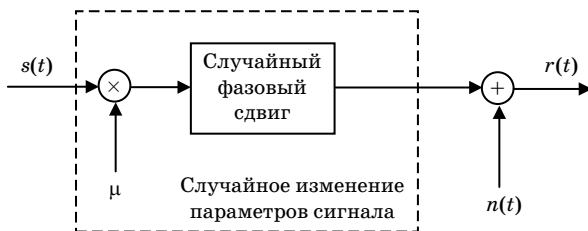


Рис. 3.12. Простейшая модель канала с замираниями и случайной фазой

Отметим, что функция Маркума $Q_1(a, b)$ не совпадает, несмотря на сходное обозначение, с функцией $Q(\cdot)$. На рис. 3.11 приводятся графики зависимости вероятности ошибки и вероятности на бит от отношения сигнал/шум и отношения сигнал/шум на бит соответственно. Эти графики построены для ФМ-2 и ФМ-4 для канала

с АБГШ и для ОФМ-2 и ОФМ-4 для канала с АБГШ и случайной фазой. Для ФМ-4 и ОФМ-4 предполагается, что модуляционное отображение выполнено в соответствии с кодом Грея. Для ФМ-4 показана верхняя граница вероятности ошибки. Еще раз отметим, что передача с использованием сигналов ФМ возможна в канале с АБГШ, но невозможна в канале с АБГШ и случайной фазой.

3.6. Каналы с замираниями. Распределения Релея и Райса

В канале с замираниями амплитуда приходящего на приемник сигнала случайна. Поэтому влияние канала с замираниями на передаваемый сигнал можно описать как умножение сигнала на случайный коэффициент передачи канала μ . Поясняющая иллюстрация показана на рис. 3.12.

В наиболее распространенной модели замираний случайный коэффициент μ распределен в соответствии с распределением Релея или Райса. Рассмотрим эти распределения. Пусть x и y – независимые гауссовские случайные величины, $\bar{x} = m_x$, $\bar{y} = m_y$, $(x - m_x)^2 = (y - m_y)^2 = \sigma^2$. Требуется найти функцию распределения и функцию плотности вероятностей величины $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

По определению $w_\mu(\alpha) = F'_\mu(\alpha) = dF_\mu(\alpha)/d\alpha$, где $F_\mu(\alpha)$ – функция распределения, а $w_\mu(\alpha)$ – функция плотности вероятности случайной величины μ . Функция распределения определяется как $F_\mu(\alpha) = \Pr[\mu < \alpha]$. С учетом определения случайной величины μ имеем

$$F_\mu(\alpha) = \Pr[x^2 + y^2 < \alpha^2] = \iint_{\xi^2 + \eta^2 < \alpha^2} w_x(\xi)w_y(\eta)d\xi d\eta, \quad (3.19)$$

где $w_x(\xi)$, $w_y(\eta)$ – функции плотности вероятности величин x и y , определенные как

$$w_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - m_x)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$w_y(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\eta - m_y)^2}{2\sigma^2}\right).$$

После подстановки этих выражений в (3.19) имеем

$$F_{\mu}(\alpha) = \iint_{\xi^2 + \eta^2 < \alpha^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(\xi - m_x)^2 + (\eta - m_y)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi d\eta. \quad (3.20)$$

Рассмотрим показатель экспоненты в (3.20):

$$(\xi - m_x)^2 + (\eta - m_y)^2 = \xi^2 + \eta^2 + m_x^2 + m_y^2 - 2m_x\xi - 2m_y\eta. \quad (3.21)$$

Заменим в (3.21) прямоугольные координаты (ξ, η) на полярные (ρ, θ) , имея в виду что $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$, тогда

$$(\xi - m_x)^2 + (\eta - m_y)^2 = \rho^2 + m_x^2 + m_y^2 - 2m_x\rho\cos\theta - 2m_y\rho\sin\theta. \quad (3.22)$$

Обозначим $m^2 = m_x^2 + m_y^2$ и используем тождество

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \arctan(B/A)),$$

тогда выражение (3.22) принимает вид

$$(\xi - m_x)^2 + (\eta - m_y)^2 = \rho^2 + m^2 - 2\rho m \cos(\theta - \varphi), \quad (3.23)$$

где $\varphi = \arctan(m_y / m_x)$. После подстановки (3.23) в (3.20) и замены $d\xi d\eta = \rho d\rho d\theta$, $\{\xi^2 + \eta^2 < \alpha^2\} = \{\rho < \alpha, 0 < \theta < 2\pi\}$ имеем

$$F_{\mu}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2 - 2\rho m \cos(\theta - \varphi)}{2\sigma^2}\right) d\rho d\theta$$

или

$$F_{\mu}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\rho m}{\sigma^2} \cos(\theta - \varphi)\right) d\theta \right) d\rho. \quad (3.24)$$

Интеграл вида

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos(\theta - \varphi)) d\theta, \quad \varphi - \text{любое,}$$

называется функцией Бесселя первого рода нулевого порядка. Заметим, что $I_0(0) = 1$. Использование этого соотношения в (3.24) дает выражение для функции распределения

$$F_{\mu}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho m}{\sigma^2}\right) d\rho$$

и функции плотности вероятности

$$w_{\mu}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\alpha m}{\sigma^2}\right), \quad \alpha \geq 0. \quad (3.25)$$

Плотность вероятности (3.25) называется плотностью вероятности Райса (Rice). Она зависит от двух параметров m и σ . Если $m = 0$, то имеем частный случай распределения Райса известный как распределения Релея (Rayleigh)

$$w_{\mu}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right), \quad \alpha \geq 0.$$

Графики функции (3.25) для различных значений параметров m и σ показаны на рис. 3.13.

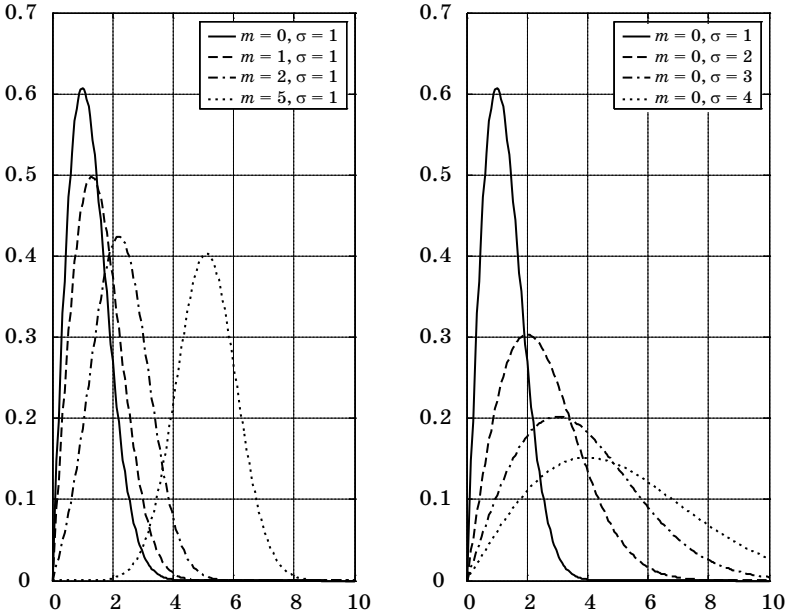


Рис. 3.13. Плотности вероятности Райса для различных значений параметров m и σ

3.7. Канал с замираниями. Модель с рассеивателями

Рассмотрим передачу ЧМ-сигналов $s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t$, $0 < t < T$, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Частоты сигналов f_i выбраны так, чтобы сигналы были ортогональны в усиленном смысле. Пусть был передан i -й сигнал; на выходе канала с замираниями сигнал описывается как

$$r(t) = \mu \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t), \quad (3.26)$$

где μ – случайный коэффициент передачи канала, $\mu > 0$; θ – случайный фазовый сдвиг, $0 \leq \theta < 2\pi$; $n(t)$ – белый гауссовский шум. Модель канала с замираниями относится к классу каналов со случайными параметрами, которыми в данном случае являются величины μ и θ . Величины μ и θ статистически независимы друг от друга и от шума. Случайный фазовый сдвиг распределен равномерно в интервале $[0, 2\pi]$, а коэффициент передачи канала распределен по закону Релея или Райса. Рассмотрим простую, но реалистичную модель, которая приводит к описанию (3.26).

Пусть сигнал распространяется через передающую среду, которая может быть описана как множество рассеивателей (отражателей) (рис. 3.14).

Тогда в отсутствие шума сигнал на выходе канала с рассеивателями может быть описан как

$$r(t) = \sum_k c_k s_i(t - \tau_k), \quad (3.27)$$

где c_k – коэффициент отражения k -го рассеивателя; τ_k – задержка, вносимая k -м рассеивателем. Подставляя в (3.27) выражение для сигнала, получаем, что

$$r(t) = \sum_k c_k \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i (t - \tau_k) = \sum_k c_k \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \phi_{ik}), \quad (3.28)$$

где $\phi_{ik} = 2\pi f_i \tau_k$ – фазовый сдвиг, возникающий из-за задержки, связанной с распространением сигнала до и от k -го рассеивателя. Из (3.28) следует, что

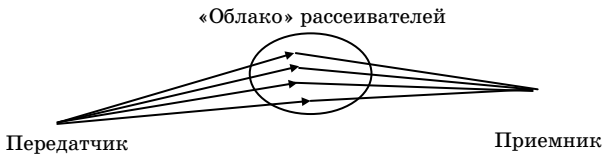


Рис. 3.14. Модель канала с рассеивателями

$$\begin{aligned}
r(t) &= \left(\sum_k c_k \cos \varphi_{ik} \right) \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t + \left(\sum_k c_k \sin \varphi_{ik} \right) \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t = \\
&= x \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t + y \sqrt{2E/T} \sin 2\pi f_i t,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

где использовано обозначение

$$x = \sum_k c_k \cos \varphi_{ik}, \tag{3.30}$$

$$y = \sum_k c_k \sin \varphi_{ik}. \tag{3.31}$$

Равенство (3.29) можно тогда переписать в виде

$$r(t) = \mu \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta), \tag{3.32}$$

где $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$. Случайные величины x и y называются квадратурными компонентами коэффициента передачи. Заметим, что амплитуда и энергия принятого сигнала даже в отсутствие шума случайны, в этом собственно и состоит смысл явления, называемого замираниями сигнала (fading). Поэтому можно говорить о средней энергии принятого сигнала и среднем отношении сигнал/шум. Средняя энергия принятого сигнала определяется как

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= \overline{\int_0^T r^2(t) dt} = \int_0^T \overline{r^2(t)} dt = \int_0^T \mu^2 \left(\sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta) \right)^2 dt = \\
&= \mu^2 \int_0^T \left(\sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta) \right)^2 dt = \mu^2 E = (x^2 + y^2) E.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Правая часть равенства (3.32) при прибавлении всегда присутствующего шума совпадает с правой частью (3.26). Таким образом, модель с рассеивателями приводит к описанию (3.26). Для завершения рассмотрения модели с рассеивателями осталось дать статистическое описание случайных параметров канала и показать, что при некоторых разумных предположениях это распределение будет задаваться распределениями Релея и Райса.

Предположим, что рассеивателей много, они статистически независимы и вклад каждого рассеивателя в суммы (3.30), (3.31) невелик. При этих предположениях, можно считать распределения величин x и y примерно гауссовскими независимо от того, как были распределены образующие их слагаемые. Это следует из централь-

ной предельной теоремы теории вероятностей. Поскольку x и y – гауссовские случайные величины, то для завершения их описания надо определить параметры их совместного распределения. Для гауссовских величин необходимо и достаточно определить только первые и вторые моменты. Для математических ожиданий имеем

$$\overline{x} = \sum_k \overline{c_k \cos \varphi_{ik}} = \sum_k \overline{c_k} \overline{\cos \varphi_{ik}} = 0,$$

$$\overline{y} = \sum_k \overline{c_k \sin \varphi_{ik}} = \sum_k \overline{c_k} \overline{\sin \varphi_{ik}} = 0,$$

так как $\overline{\sin \alpha} = \overline{\cos \alpha} = 0$ при равномерно распределенном аргументе α , $0 \leq \alpha < 0$. Далее

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \overline{\sum_k c_k \cos \varphi_{ik} \sum_l c_l \sin \varphi_{il}} = \sum_k \sum_l \overline{c_k \cos \varphi_{ik} c_l \sin \varphi_{il}} = \\ &= \sum_k \overline{c_k^2 \cos \varphi_{ik} \sin \varphi_{ik}} + \sum_k \sum_{l \neq k} \overline{c_k c_l \cos \varphi_{ik} \sin \varphi_{il}} = 0, \end{aligned}$$

так как $\overline{\sin \alpha} = \overline{\cos \alpha} = \overline{\sin \alpha \cos \alpha} = 0$ при равномерно распределенном аргументе α , $0 \leq \alpha < 0$. И наконец,

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \overline{\left(\sum_k c_k \cos \varphi_{ik} \right)^2} = \overline{\left(\sum_k c_k \cos \varphi_{ik} \right) \left(\sum_l c_l \cos \varphi_{il} \right)} = \\ &= \overline{\sum_k \sum_l c_k \cos \varphi_{ik} c_l \cos \varphi_{il}} = \\ &= \sum_k \overline{c_k^2 \cos^2 \varphi_{ik}} + \sum_k \sum_{l \neq k} \overline{c_k \cos \varphi_{ik} c_l \cos \varphi_{il}} = \frac{1}{2} \sum_k \overline{c_k^2}, \\ \overline{y^2} &= \overline{\left(\sum_k c_k \sin \varphi_{ik} \right)^2} = \overline{\left(\sum_k c_k \sin \varphi_{ik} \right) \left(\sum_l c_l \sin \varphi_{il} \right)} = \\ &= \overline{\sum_k \sum_l c_k \sin \varphi_{ik} c_l \sin \varphi_{il}} = \\ &= \sum_k \overline{c_k^2 \sin^2 \varphi_{ik}} + \sum_k \sum_{l \neq k} \overline{c_k \sin \varphi_{ik} c_l \sin \varphi_{il}} = \frac{1}{2} \sum_k \overline{c_k^2}, \end{aligned}$$

так как $\overline{\sin^2 \alpha} = \overline{\cos^2 \alpha} = 1/2$ при равномерно распределенном аргументе α , $0 \leq \alpha < 0$. Введем нормировку $\sum_k \overline{c_k^2} = 1$. При такой нор-

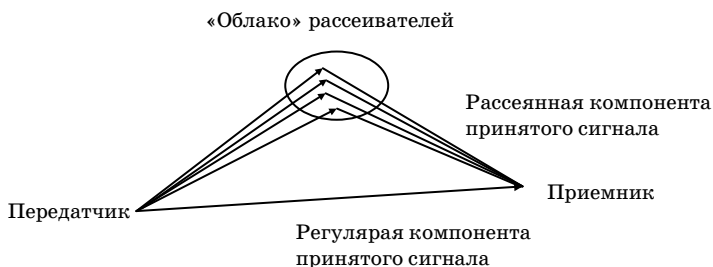


Рис. 3.15. Модель канала с рассеянной и регулярной компонентами

мировке средняя принятая энергия равна энергии E [см. равенство (3.33)].

Итак, получено, что x и y – гауссовские случайные величины, и $\bar{x} = \bar{y} = \overline{xy} = 0$, $\overline{x^2} = \overline{y^2} = 1/2$. Это значит, что они независимы и одинаково распределены с параметрами $(0, 1/2)$. Отсюда следует, случайный коэффициент передачи канала $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ распределен по закону Релея.

Более общий случай, приводящий в итоге к замираниям, распределенным по закону Райса, возникает когда x и y распределены по гауссовскому закону, независимы, имеют одинаковые дисперсии, но ненулевые математические ожидания. В этом случае можно положить, что, как и прежде, $\overline{x^2} + \overline{y^2} = 1$, но $\bar{x} = \bar{y} = \sqrt{\varepsilon/2}$, а $(x - \bar{x})^2 = (y - \bar{y})^2 = (1 - \varepsilon)/2$, где величина ε имеет смысл доли энергии сигнала, переданной по не рассеянной (регулярной) компоненте, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ (рис. 3.15). При $\varepsilon = 0$ имеет место канал с релевскими замираниями (нет регулярной компоненты), а при $\varepsilon = 1$ – канал с АВГШ и случайной фазой (нет рассеянной компоненты, т. е. в канале нет замираний).

3.8. Вероятность ошибки при передаче ЧМ-сигналов по каналу с замираниями

Рассмотрим передачу ЧМ-сигналов $s_i(t) = \sqrt{2E/T} \cos 2\pi f_i t$, $0 < t < T$, $i = 0, 1, \dots, q - 1$, по каналу с замираниями. Частоты сигналов f_i выбраны так, чтобы сигналы были ортогональны в усиленном смысле. Пусть был передан i -й сигнал; на выходе канала с замираниями сигнал описывается как

$$r(t) = \mu \sqrt{2E/T} \cos(2\pi f_i t - \theta) + n(t),$$

где μ – случайный коэффициент передачи канала, $\mu > 0$; θ – случайный фазовый сдвиг, $0 \leq \theta < 2\pi$; $n(t)$ – белый гауссовский шум. Случайный фазовый сдвиг распределен равномерно в интервале $[0, 2\pi]$, а коэффициент передачи канала распределен по закону Райса. Случайный коэффициент передачи канала может быть представлен в виде $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$, где x и y – независимые гауссовские случайные величины с параметрами $\bar{x} = \bar{y} = \sqrt{\varepsilon/2}$, а $(x - \bar{x})^2 = (y - \bar{y})^2 = (1 - \varepsilon)/2$, где величина ε имеет смысл доли энергии сигнала, переданной по нерассеянной (регулярной) компоненте, $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Оптимальный приемник для канала с замираниями совпадает в рассматриваемом случае с оптимальным приемником для канала с АБГШ и случайной фазой, рассмотренным ранее. Вероятность ошибки при передаче по каналу с замираниями может быть вычислена как $P_e = \overline{P_e(\mu)}$, где $P_e(\mu)$ – вероятность ошибки при фиксированном значении коэффициента передачи канал μ , черта сверху означает усреднение по случайным параметрам канала. При фиксированном значении коэффициента передачи канала энергия принятого сигнала равна $\mu^2 E$. Поэтому условная вероятность ошибки $P_e(\mu)$ равна вероятности ошибки при передаче ЧМ-сигналов по каналу со случайной фазой при замене E на $\mu^2 E$, т. е. [см. формулу (3.12)]

$$P_e(\mu) = \sum_{l=1}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^{l+1} \frac{1}{1+l} \exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{\mu^2 E}{N_0}\right).$$

Отсюда следует

$$P_e = \sum_{l=1}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^{l+1} \frac{1}{1+l} \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{\mu^2 E}{N_0}\right)}. \quad (3.34)$$

Рассмотрим среднее в выражении (3.34). Для него можно записать

$$\begin{aligned} \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{\mu^2 E}{N_0}\right)} &= \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{(x^2 + y^2)E}{N_0}\right)} = \\ &= \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{x^2 E}{N_0}\right)} \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{y^2 E}{N_0}\right)}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

поскольку x и y независимы.

Ранее приводилась следующая лемма [см. равенство (3.11)].

Лемма. Пусть x – гауссовская случайная величина, распределенная с параметрами (m, σ^2) , α – постоянная, такая что $\alpha < 1/(2\sigma^2)$. Тогда

$$\overline{\exp(\alpha x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sigma^2}} \exp\left(\frac{\alpha m^2}{1-2\alpha\sigma^2}\right).$$

Применяя лемму к вычислению средних в (3.35) со значениями $\alpha = -lE/N_0(l+1)$, $m = \sqrt{\varepsilon/2}$, $\sigma^2 = (1-\varepsilon)/2$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{x^2 E}{N_0}\right)} &= \overline{\exp\left(-\frac{l}{l+1} \frac{y^2 E}{N_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{l}{1+l}(1-\varepsilon)E/N_0}} \exp\left(-\frac{l\varepsilon E/N_0}{2(1+l+l(1-\varepsilon)E/N_0)}\right). \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (3.35) и далее в (3.34) приводит к окончательному выражению

$$P_e = \sum_{l=1}^{q-1} C_{q-1}^l (-1)^{l+1} \frac{1}{1+l+l(1-\varepsilon)E/N_0} \exp\left(-\frac{l\varepsilon E/N_0}{1+l+l(1-\varepsilon)E/N_0}\right). \quad (3.36)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть $q = 2$, тогда

$$P_e = \frac{1}{2+(1-\varepsilon)E/N_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon E/N_0}{2+(1-\varepsilon)E/N_0}\right). \quad (3.37)$$

Для двух крайних случаев $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ имеем соответственно

$$P_e = \frac{1}{2+E/N_0} \quad (3.38)$$

и

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_0}}. \quad (3.39)$$

Сравнение выражений (3.38) и (3.39) показывает, что в канале с релейскими замираниями (при $\varepsilon = 0$) вероятность ошибки убывает с ростом отношения сигнал/шум очень медленно (обратно про-

порционально). При отсутствии замираний (при $\varepsilon = 1$) вероятность ошибки убывает с ростом отношения сигнал/шум гораздо быстрее (экспоненциально). Примерно такие же соотношения имеют место и для недвоичных сигналов.

Графики вероятности ошибки для различных значений параметров показаны на рис. 3.16–3.19.

Графики, показанные на рис. 3.16 для параметра $\varepsilon = 1$, соответствуют случаю, когда вся передаваемая энергия сосредоточена в регулярной компоненте сигнала. В этом случае замирания отсутствуют и условия передачи совпадают с условиями передачи в канале с АБГШ и случайной фазой. Вероятность ошибки при этом быстро (экспоненциально) убывает с ростом отношения сигнал/шум. Рис. 3.17 иллюстрирует другой крайний случай, когда $\varepsilon = 0$, что соответствует отсутствию регулярной компоненты принятого сигнала, т. е. передаче по каналу с релеевскими замираниями. Вероят-

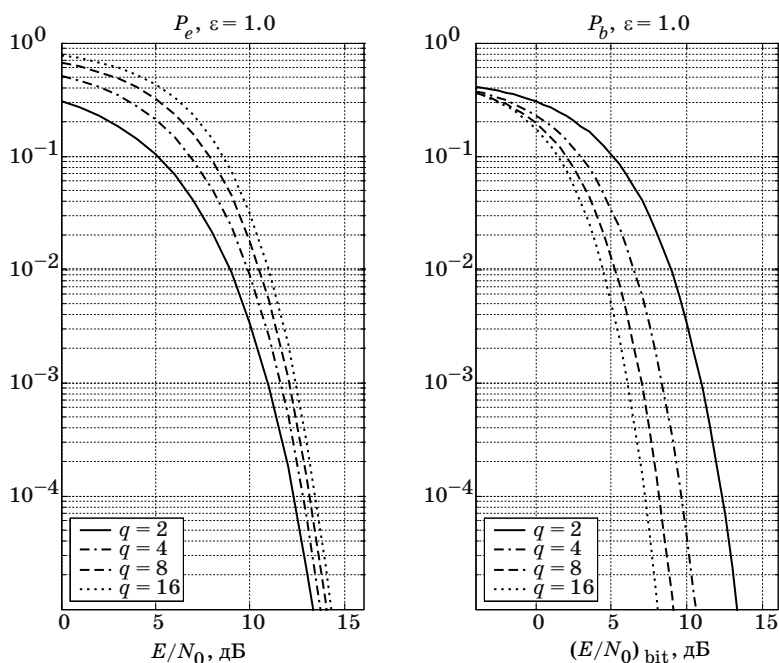


Рис. 3.16. Вероятность ошибки при передаче ЧМ-сигналов по каналу с АБГШ и случайной фазой ($\varepsilon = 1$)

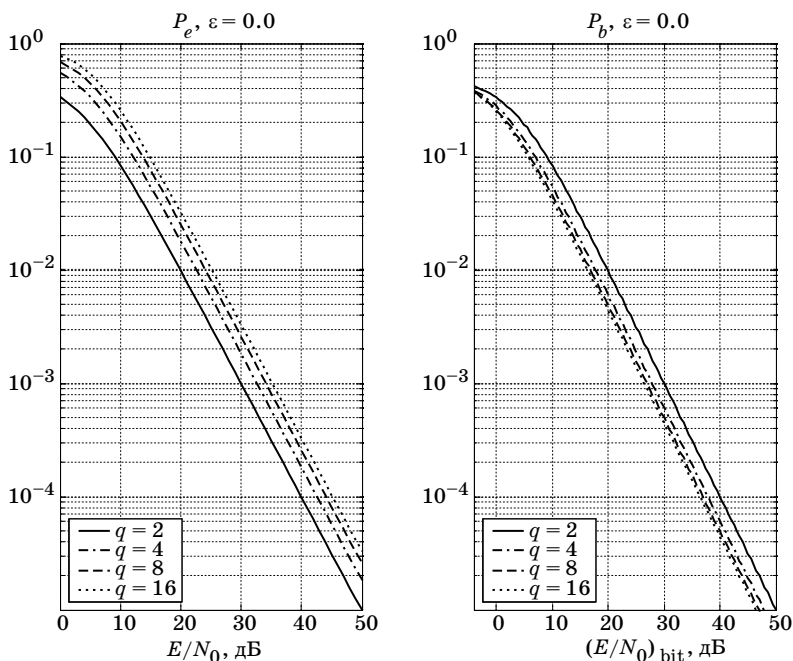


Рис. 3.17. Вероятность ошибки при передаче ЧМ сигналов по каналу с релевскими замираниями ($\epsilon = 0$)

ность ошибки в этих условиях убывает медленно (обратно пропорционально) с ростом отношения сигнал/шум.

На рис. 3.18 показаны зависимости для промежуточного случая, когда $0 < \epsilon < 1$, в частности для $\epsilon = 0,8$. Это соответствует передаче по каналу с райсовскими замираниями. Вероятность ошибки в этом случае тоже убывает медленно, но кривая проходит ниже, чем в канале с релевскими замираниями.

На рис. 3.19 показаны графики зависимости вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для сигналов двоичной ЧМ, передаваемых в каналах без замираний и в канале с замираниями. Из графиков следует, что вероятность ошибки в канале с замираниями убывает с ростом отношения сигнал/шум очень медленно по сравнению со случаем каналов без замираний. Это иллюстрирует тот факт, что обеспечение надежной передачи по каналу с замираниями требует больших энергетических затрат и представляет серьезную проблему.

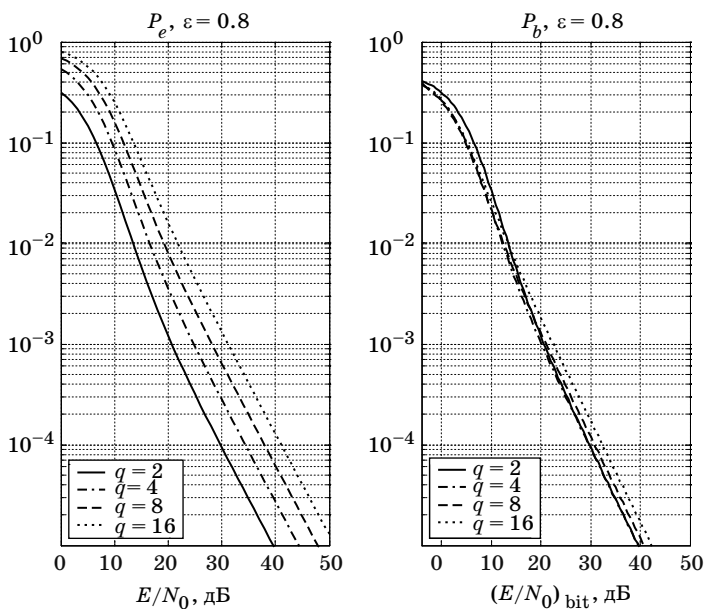


Рис. 3.18. Вероятность ошибки при передаче ЧМ-сигналов по каналу с райсовскими замираниями ($\epsilon = 0,8$)

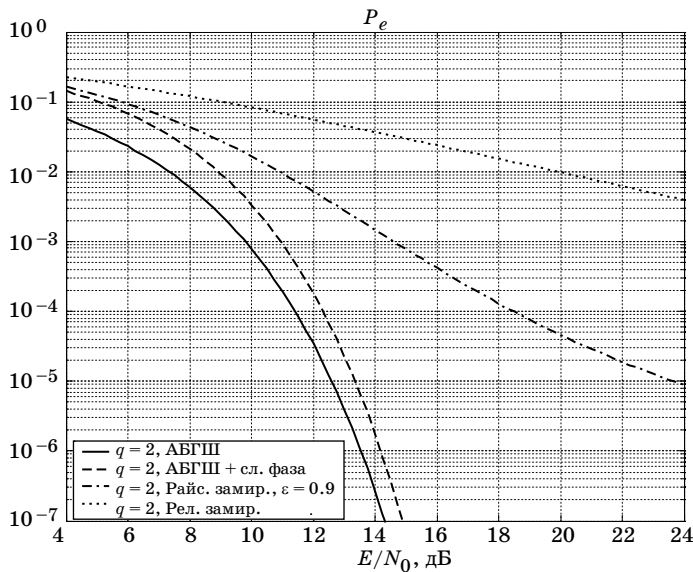


Рис. 3.19. Вероятность ошибки при передаче двоичных ЧМ-сигналов в различных каналах

3.9. Передача с разнесением по каналу с замираниями. Перемежение

Рассмотрим передачу двоичных ЧМ-сигналов $s_i(t) = \sqrt{2E/T} \times \cos 2\pi f_i t$, $0 < t < T$, $i = 0, 1$, по каналу с релеевскими замираниями. Частоты сигналов f_0 и f_1 выбраны так, чтобы сигналы были ортогональными в усиленном смысле. Вероятность ошибки в этом случае

$$P_e = \frac{1}{2 + E/N_0}.$$

Это выражение показывает, что в канале с релеевскими замираниями вероятность ошибки убывает с ростом отношения сигнал/шум очень медленно (обратно пропорционально). Улучшить соотношение между величиной отношения сигнал/шум и вероятностью ошибки можно, если применить передачу с разнесением.

Передача с разнесением состоит в том, что энергия передаваемого сигнала делится на L частей и сигнал передается по L независимым подканалам (ветвям разнесения). Независимость ветвей разнесения обеспечивается за счет перемежения.

Ветви разнесения могут быть организованы:

а) во временной области; в этом случае имеет место временное разнесение;

б) в частотной области; в этом случае имеет место частотное разнесение;

в) во временной и в частотной области; в этом случае имеет место частотно-временное разнесение.

Во всех случаях при передаче с разнесением в L раз снижается удельная скорость передачи. Действительно, удельная скорость определяется как $V_{\text{уд}} = V / W$, V – скорость передачи, W – полоса частот. При использовании двоичной ЧМ и передаче без разнесения $V = 1/T$, а $W = 3/T$, т. е. $V_{\text{уд}} = 1/3$. При L -кратном разнесении имеем $V_{\text{уд}} = 1/(3L)$, так как при временном разнесении скорость уменьшается в L раз, а при частотном разнесении в L раз расширяется полоса частот.

Пусть сигнал, приходящий в приемник по l -й ветви разнесения, $l = 1, 2, \dots, L$, имеет вид

$$r^{(l)}(t) = \mu^{(l)} \sqrt{2(E/L)/T} \cos(2\pi f_i t - \theta^{(l)}) + n^{(l)}(t), \quad (3.40)$$

$i = 0, 1$. В этом равенстве учтено, что энергия сигнала разделена поровну между L ветвями разнесения. Обозначим через $r_{ci}^{(l)}$ ска-

лярное произведение сигнала, принятого в l -й ветви разнесения, и $\sqrt{2/T} \cos(2\pi f_i t)$, а через $r_{si}^{(l)}$ скалярное произведение сигнала, принятого в l -й ветви разнесения, и $\sqrt{2/T} \sin(2\pi f_i t)$, $i = 0, 1, l = 0, 1, \dots, L$.

Пусть приемник вычисляет величины $X_0 = \sum_{l=1}^L \left((r_{c0}^{(l)})^2 + (r_{s0}^{(l)})^2 \right)$, и $X_1 = \sum_{l=1}^L \left((r_{c1}^{(l)})^2 + (r_{s1}^{(l)})^2 \right)$ и формирует решение по правилу

$$\hat{i} = \begin{cases} 0, & \text{если } X_0 > X_1, \\ 1, & \text{если } X_0 < X_1. \end{cases}$$

Приемник, принимающий решение по такому критерию, называется приемником с аналоговым квадратичным сложением.

Вероятность ошибки вычисляется как обычно для двоичных равновероятных сигналов

$$P_e = (P_e(0) + P_e(1)) / 2.$$

Найдем условную вероятность $P_e(0)$. Она определена как

$$P_e(0) = \Pr[X_1 > X_0 | 0]. \quad (3.41)$$

При передаче нулевого сигнала имеют место соотношения:

$$X_0 = \sum_{l=1}^L \left((r_{c0}^{(l)})^2 + (r_{s0}^{(l)})^2 \right) = \sum_{l=1}^L \left((x^{(l)} \sqrt{E/L} + n_{c0}^{(l)})^2 + (y^{(l)} \sqrt{E/L} + n_{s0}^{(l)})^2 \right), \quad (3.42)$$

$$X_1 = \sum_{l=1}^L \left((r_{c1}^{(l)})^2 + (r_{s1}^{(l)})^2 \right) = \sum_{l=1}^L \left((n_{c1}^{(l)})^2 + (n_{s1}^{(l)})^2 \right), \quad (3.43)$$

где $x^{(l)}$, $y^{(l)}$ – гауссовские компоненты коэффициента передачи канала в l -й ветви разнесения; $\mu^{(l)}$, $n_{ci}^{(l)}$, $n_{si}^{(l)}$ – скалярные произведения шума в l -й ветви разнесения и \cos и \sin i -й частоты соответственно, $i = 0, 1, l = 1, \dots, L$. В релеевском канале с независимыми ветвями разнесения $x^{(l)}$, $y^{(l)}$ – независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и дисперсией $1/2$, $n_{ci}^{(l)}$, $n_{si}^{(l)}$ – независимые от них и независимые между собой гауссовские случайные величины с нулевым средним и дисперсией $N_0 / 2$. Чтобы оценить вероятность (3.41), применим границу Чернова (см. приложение 5)

$$\Pr[X_1 > X_0 | 0] < \overline{\exp(\lambda(X_1 - X_0))},$$

где λ – параметр оценки Чернова, $\lambda > 0$, черта сверху означает усреднение по всем случайным величинам, входящим в выражение. Используя определения (3.42) и (3.43), получим

$$\begin{aligned} P_e(0) < \prod_{l=1}^L \overline{\exp(-\lambda(x^{(l)} \sqrt{E/L + n_{c0}^{(l)})^2)} \exp(-\lambda(y^{(l)} \sqrt{E/L + n_{s0}^{(l)})^2)} \times \\ \times \prod_{l=1}^L \overline{\exp(\lambda(n_{c1}^{(l)})^2)} \overline{\exp(\lambda(n_{s1}^{(l)})^2)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

При записи этого выражения учтена независимость ветвей разнесения и независимость шума от случайного коэффициента передачи канала.

Ранее приводилась следующая лемма [см. равенство (3.11)].

Лемма. Пусть x – гауссовская случайная величина, распределенная с параметрами (m, σ^2) , α – постоянная, такая что $\alpha < 1/(2\sigma^2)$. Тогда

$$\overline{\exp(\alpha x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\sigma^2}} \exp\left(\frac{\alpha m^2}{1 - 2\alpha\sigma^2}\right).$$

Применяя лемму к вычислению средних в (3.44) со значениями $\alpha = -\lambda$, $m = 0$, $\sigma^2 = (E/L + N_0)/2$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\exp(-\lambda(x^{(l)} \sqrt{E/L + n_{c0}^{(l)}})^2)} \overline{\exp(-\lambda(y^{(l)} \sqrt{E/L + n_{s0}^{(l)}})^2)} = \\ = \frac{1}{1 + \lambda(E/L + N_0)}. \end{aligned}$$

Далее, применяя эту же лемму со значениями $\alpha = \lambda$, $m = 0$, $\sigma^2 = N_0/2$, получаем

$$\overline{\exp(\lambda(n_{c0}^{(l)})^2)} \overline{\exp(\lambda(n_{s0}^{(l)})^2)} = \frac{1}{1 - \lambda N_0}.$$

Здесь возникает дополнительное ограничение на параметр границы Чернова: $\lambda < 1/N_0$, следующее из условия леммы. Подстановка этих выражений в (3.44) дает оценку

$$P_e(0) < \left(\frac{1}{1 + \lambda(E/L + N_0)} \frac{1}{1 - \lambda N_0} \right)^L, \quad (3.45)$$

где $0 < \lambda < 1/N_0$. Отыскание значения параметра λ , оптимизирующего оценку (3.45), сводится к максимизации знаменателя, т. е. к решению уравнения

$$\frac{d}{d\lambda}(1 + \lambda(E/L + N_0))(1 - \lambda N_0) = 0$$

или

$$(E/L + N_0)(1 - \lambda N_0) - (1 + \lambda(E/L + N_0))N_0 = 0,$$

откуда находим оптимальное значение параметра

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{E/L}{(E/L + N_0)N_0}.$$

Подставляя это значение в (3.45), получаем наиболее точную границу Чернова для вероятности $P_e(0)$

$$P_e(0) < \left(\frac{1}{1 + \frac{E}{2N_0L}} \frac{1}{1 - \frac{E/L}{2(E/L + N_0)}} \right)^L. \quad (3.46)$$

Упростив (3.46) и приняв во внимание, что в данном случае условная вероятность ошибки совпадает с безусловной, имеем окончательное выражение

$$P_e < \left(\frac{4 \left(\frac{E}{LN_0} + 1 \right)}{\left(\frac{E}{LN_0} + 2 \right)^2} \right)^L. \quad (3.47)$$

Графики верхней границы вероятности ошибки, вычисленной по формуле (3.47), показаны на рис. 3.20. Для $L = 1$ на рис. 3.20 приведен график точного выражение для вероятности ошибки.

Можно показать, что для каждого значения отношения сигнал/шум существует оптимальное число ветвей разнесения. Оно может быть найдено численно и оказывается равным $L \approx (E/N_0) / 3$. Если подставить это значение в (3.47), то получится выражение для оценки вероятности ошибки, оптимизированной по числу ветвей разнесения. Оно имеет вид

$$P_e < e^{-0.149 \frac{E}{N_0}}.$$

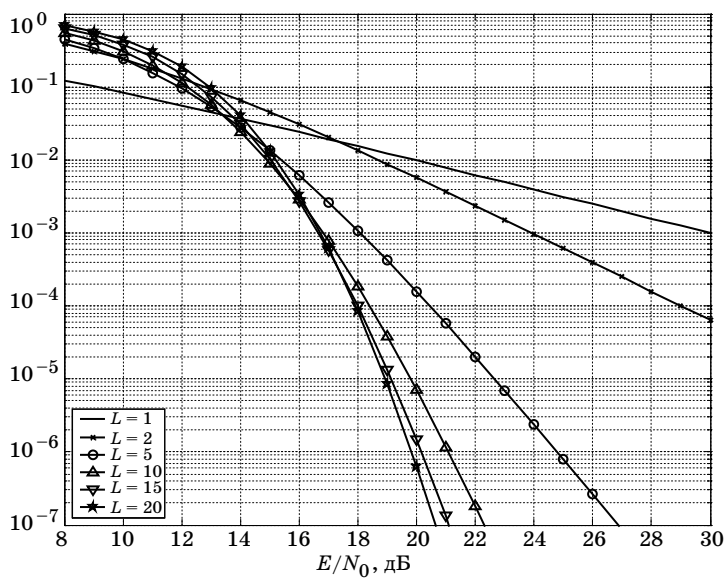


Рис. 3.20. Вероятность ошибки при двоичной передаче с разнесением в канале с релейскими замираниями

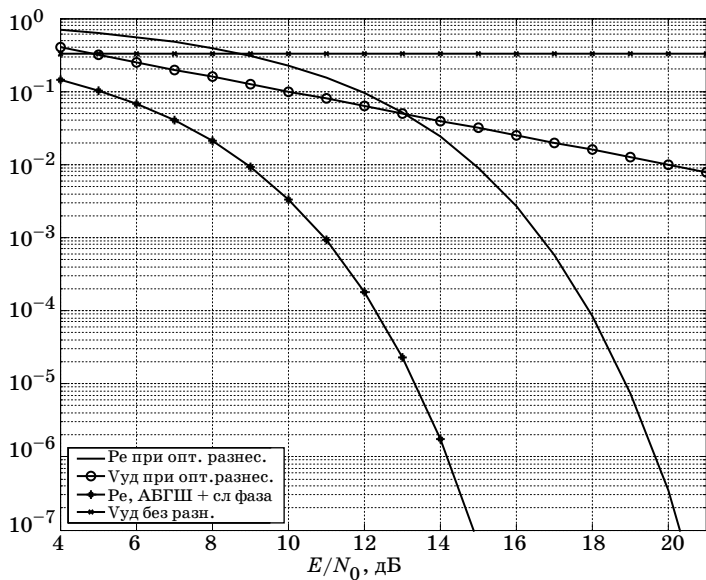


Рис. 3.21. Вероятность ошибки и удельная скорость передачи при передаче по релейскому каналу с оптимальным разнесением и при передаче по каналу без замираний

Отсюда следует, что в канале с релеевскими замираниями при передаче с *оптимальным разнесением* вероятность ошибки убывает с ростом отношения сигнал/шум *экспоненциально*. Напомним, что в канале без замираний вероятность ошибки

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_0}}.$$

Сравнение этих выражений показывает, что в канале с релеевскими замираниями и оптимальным разнесением проигрыш в отношении сигнал/шум составляет величину около 5,25 дБ ($5,25 = 10 \log_{10}(0,5/0,149)$) и не возрастает бесконечно, как при передаче без разнесения. Серьезным недостатком при передаче с оптимальным разнесением является сильное убывание скорости передачи (и/или увеличение полосы частот) с ростом отношения сигнал/шум. Легко показать, что удельная скорость передачи меняется как $V_{уд} = 1/(3L) = (E/N_0)^{-1}$. Это ухудшение удельной скорости передачи в L раз (т. е. в $(E/N_0)/3$ раз при оптимальном разнесении) зачастую препятствует применению оптимального разнесения на практике. На рис. 3.21 приведены иллюстрирующие графики.

3.10. Сравнительная характеристика методов передачи в радиоканалах

Рассмотрим передачу двоичных сигналов $s_i(t)$, $0 < t < T$, $i = 0, 1$ по каналам, которые могут быть заданы следующими моделями:

- канал с АБГШ;
- канал с АБГШ и случайной фазой;
- канал с релеевскими замираниями.

Таблица 3.1

Основные характеристики некоторых схем двоичной передачи

Канал, вид модуляции, прием	Вероятность ошибки, P_e	Проигрыш в отношении сигнал/шум, дБ	Удельная скорость передачи, $V_{уд}$
АБГШ, ФМ, когерентный прием	$Q(\sqrt{2E/N_0})$	0	1/2
АБГШ, ЧМ, когерентный прием	$Q(\sqrt{E/N_0})$	3 дБ по сравнению с ФМ в канале с АБГШ	1/3

Канал, вид модуляции, прием	Вероятность ошибки, P_e	Проигрыш в отношении сигнал/шум, дБ	Удельная скорость передачи, $V_{уд}$
АБГШ + случайная фаза, ЧМ, некогерентный прием	$\frac{1}{2}e^{-\frac{E}{2N_0}}$	≤ 1 дБ по сравнению с ЧМ в канале с АБГШ; ≤ 4 дБ по сравнению с ФМ в канале с АБГШ	1/3
АБГШ + случайная фаза, (медленно изменяющаяся), ОФМ, некогерентный прием	$\frac{1}{2}e^{-\frac{E}{N_0}}$	≤ 1 дБ по сравнению с ФМ в канале с АБГШ	1/2
Релеевские замирания, ЧМ, некогерентный прием	$\frac{1}{2 + E/N_0}$	проигрыш $\rightarrow \infty$ при $E/N_0 \rightarrow \infty$, по сравнению с ЧМ в канале без замираний	1/3
Релеевские замирания, ЧМ, некогерентный прием, L -кратное разнесение	$\left(\frac{4 \left(1 + \frac{E}{LN_0} \right)}{\left(2 + \frac{E}{LN_0} \right)^2} \right)^L$	проигрыш $\rightarrow \infty$ при $E/N_0 \rightarrow \infty$, по сравнению с каналом без замираний, но медленнее, чем при отсутствии разнесения	1/(3L)
Релеевские замирания, ЧМ, некогерентный прием, оптимальное разнесение, ($L = (E/N_0)/3$)	$e^{-0,149E/N_0}$	проигрыш около 5,25 дБ по сравнению с ЧМ в канале без замираний	1/(E/N_0)

Эти модели могут использоваться для описания условий передачи по различным радиоканалам. В рамках перечисленных моделей могут использоваться различные виды модуляции и приема, рассмотренные в предыдущих разделах курса.

В табл. 3.1 приводятся основные характеристики некоторых методов передачи применительно к перечисленным моделям. На рис. 3.22 приведены иллюстрирующие графики.

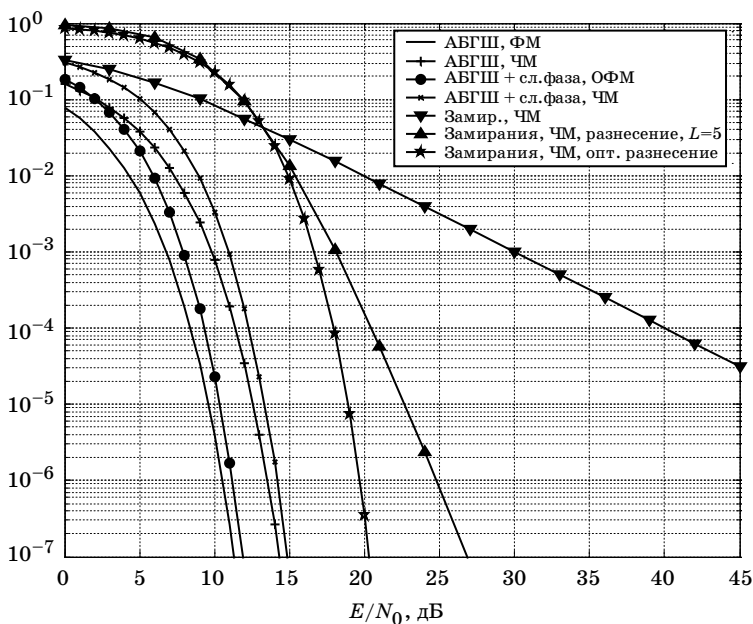


Рис. 3.22. Зависимость вероятности ошибки P_e от отношения сигнал/шум для различных каналов и видов модуляции, $q = 2$

3.11. Каналы с межсимвольной интерференцией

Рассмотрим передачу по каналу с линейным фильтром, схема которого показана на рис. 3.23.

Здесь $g(t)$ – импульсная переходная характеристика фильтра, описывающего канал; $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум. Межсимвольная интерференция возникает, когда сигнал проходит через линейный фильтр, частотная характеристика которого отлична от константы в полосе частот сигнала.

Предположим, что для передачи используются двоичные противоположные сигналы вида $s_0(t) = s(t)$, $s_1(t) = -s(t)$, где $s(t)$ – некоторая сигнальная функция, заданная на интервале $[0, T]$. Рассмотрим передачу последовательности сигналов. Она может быть записана как

$$s(t, \mathbf{u}) = \sum_l u^{(l)} s(t - lT),$$

где величина $u^{(l)} = \pm 1$ однозначно определяется значением передаваемого двоичного символа по правилу $0 \rightarrow +1$, $1 \rightarrow -1$, а \mathbf{u} – по-

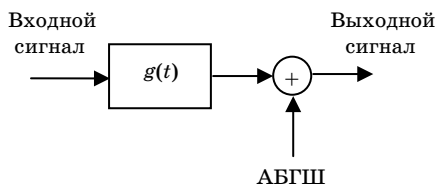


Рис. 3.23 Общая схема передачи по каналу с линейным фильтром

следовательность величин $u(l)$. Положим, что длина передаваемой последовательности равна $2N$ и индекс l меняется в пределах от $-N$ до $N-1$, т. е.

$$\mathbf{u} = (u^{(-N)}, u^{(-N+1)}, \dots, u^{(-2)}, u^{(-1)}, u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N-1)}).$$

Обозначим сигнал на выходе фильтра канала (отклик канала на последовательность $s(t, \mathbf{u})$) как $x(t, \mathbf{u})$. Очевидно, что $x(t, \mathbf{u}) = s(t, \mathbf{u}) * g(t)$, где $*$ — обозначение свертки, или

$$\begin{aligned} x(t, \mathbf{u}) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau, \mathbf{u}) g(\tau) d\tau = \\ &= \sum_l u^{(l)} \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau - lT) g(\tau) d\tau = \sum_l u^{(l)} h(t - lT), \end{aligned}$$

где $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau) g(\tau) d\tau = s(t) * g(t)$. Иначе говоря, функция $h(t)$

представляет собой отклик фильтра канала на входной сигнал $s(t)$. Функция $h(t)$ может также рассматриваться как импульсная переходная характеристика пары «модулятор — фильтр канала».

Пример. Пусть сигнальная функция $s(t)$ задана в виде прямоугольного импульса. Рассмотрим два примера канала: с относительно широкой и относительно узкой полосой, т. е. с относительно слабой и относительно сильной интерференцией соответственно. На рис. 3.24 приведены графики импульсной переходной характеристики канала $g(t)$ для двух примеров каналов. Там же показаны графики функции $h(t)$ для этих каналов.

Видно, что при слабой интерференции функция $h(t)$ слабо отличается от сигнальной функции $s(t)$. Иными словами, широкополосный канал вносит небольшие линейные искажения, приводящие к слабой межсимвольной интерференции.

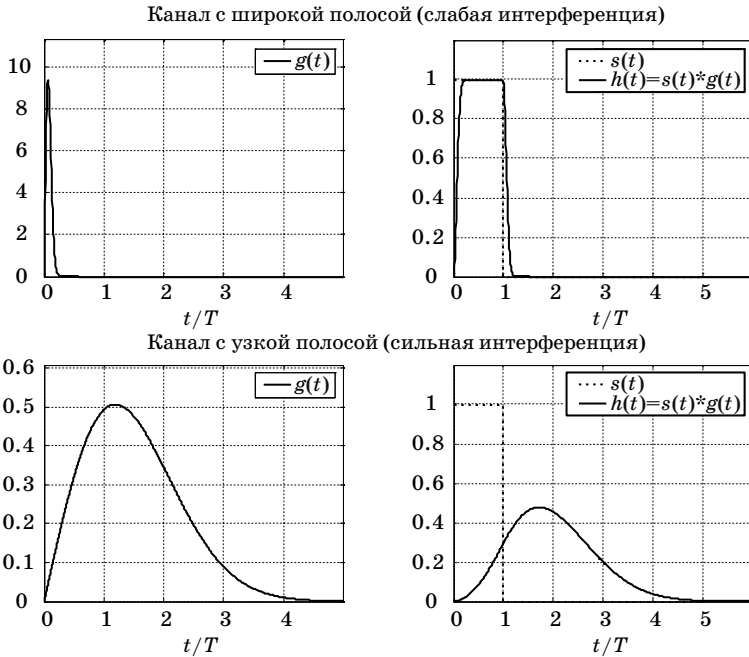


Рис. 3.24. Примеры импульсной переходной характеристики канала $g(t)$ и импульсного отклика пары «модулятор-фильтр канала» $h(t)$

Сигнал на выходе канала с интерференцией может быть записан как

$$r(t) = x(t, \mathbf{u}) + n(t) = \sum_{l=-N}^{N-1} u^{(l)} h(t - lT) + n(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3.48)$$

где $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$.

Пример (продолжение). На рис. 3.25 и 3.26 показано влияние фильтра канала на переданную последовательность $x(t, \mathbf{u})$ в случае слабой и сильной интерференции соответственно.

Каналы со слабой и с сильной интерференцией определены так же, как в начале примера (см. рис. 3.24). Видно, что в канале со слабой интерференцией отклик канала практически совпадает с входной сигнальной последовательностью (см. рис. 3.25). В канале с сильной интерференцией различие между входной последовательностью и откликом на нее становится очень заметным. От-

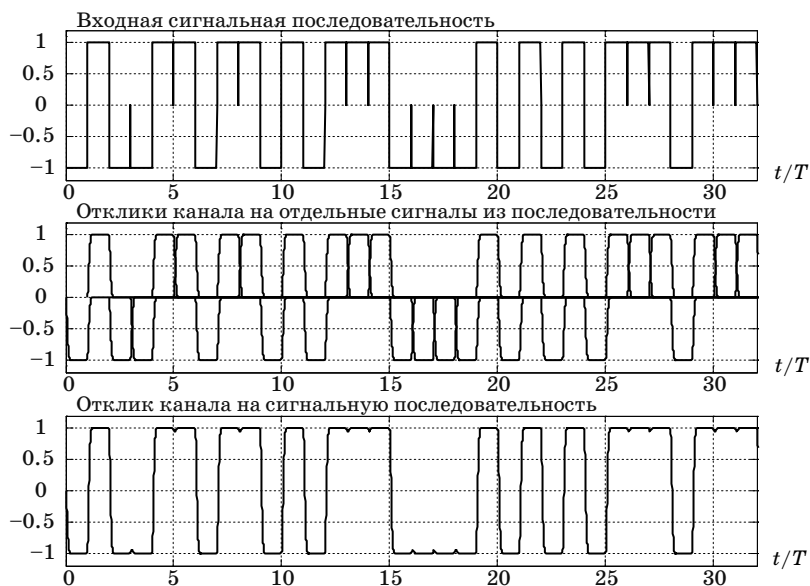


Рис. 3.25. Влияние фильтра канала на передаваемую последовательность. Случай слабой интерференции

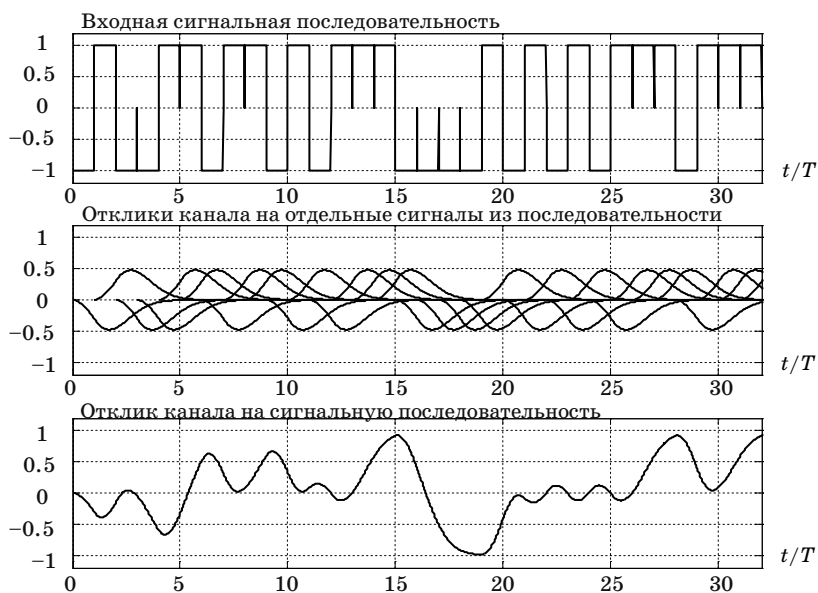


Рис. 3.26. Влияние фильтра канала на передаваемую последовательность. Случай сильной интерференции

метим, что графики, приведенные на рис. 3.25 и 3.26, не содержат аддитивного шума.

3.12. Оптимальный прием в канале с межсимвольной интерференцией

Рассмотрим задачу построения оптимального приемника для канала с интерференцией. Поскольку при прохождении по каналу с интерференцией символы сигнальной последовательности оказывают взаимное влияние, то естественным становится рассмотрение оптимального приема последовательности сигналов, а не одиночного сигнала, как это делалось ранее. Обратимся вновь к равенству (3.48). Нетрудно заметить, что число различных функций $x(t, \mathbf{u})$ конечно и равно числу различных последовательностей \mathbf{u} , т. е. равно 2^{2N} . Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ и \mathbf{r} – коэффициенты разложения функций $x(t, \mathbf{u})$ и $r(t)$ по некоторому ортогональному базису, размерность которого ограничена сверху величиной 2^{2N} . Решение по максимуму правдоподобия относительно последовательности \mathbf{u} формируется по правилу

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u}} w(\mathbf{r} | \mathbf{x}(\mathbf{u})),$$

где $w(\cdot | \cdot)$ – условная плотность вероятности, задающая аддитивный шум, действующий в канале. Для канала с АБГШ это правило может быть переписано в виде

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{r} - \mathbf{x}(\mathbf{u})\|^2 = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(\|\mathbf{x}(\mathbf{u})\|^2 - 2(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{r}) \right).$$

Используя свойства разложения сигналов по ортогональному базису, можно записать, что $\|\mathbf{x}(\mathbf{u})\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t, \mathbf{u}) dt$ и $(\mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \mathbf{u}) r(t) dt$. Тогда

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t, \mathbf{u}) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \mathbf{u}) r(t) dt \right). \quad (3.49)$$

Рассмотрим по отдельности интегралы из правой части (3.49).

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t, \mathbf{u}) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^{N-1} u^{(k)} h(t-kT) \sum_{j=-N}^{N-1} u^{(j)} h(t-jT) dt = \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} u^{(k)} u^{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-kT) h(t-jT) dt = \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} u^{(k)} h_{k-j} u^{(j)} = \mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{u}^T,
\end{aligned}$$

где

$$h_{k-j} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-kT) h(t-jT) dt = h_{j-k}, \quad (3.50)$$

а \mathbf{H} – матрица $2N \times 2N$ с элементами h_{k-j} , или в явном виде

$$\mathbf{H} = [h_{k-j}] = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{2N-2} \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & h_{2N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{2N-1} & h_{2N-2} & h_{2N-3} & \dots & h_0 \end{bmatrix}.$$

Величины h_i называются коэффициентами межсимвольной интерференции. Далее имеем

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t, \mathbf{u}) r(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-N}^{N-1} u^{(k)} h(t-kT) r(t) dt = \\
&= \sum_{k=-N}^{N-1} u^{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h(t-kT) dt = \sum_{k=-N}^{N-1} r^{(k)} u^{(k)} = (\rho, \mathbf{u}),
\end{aligned}$$

где $r^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h(t-kT) dt$, и $\rho = (r^{(-N)}, r^{(-N+1)}, \dots, r^{(N-1)})$.

Для того, чтобы дать интерпретацию величины $r^{(k)}$, рассмотрим свертку $r(t)$ и некоторой функции $c(t)$

$$r(t) * c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) c(t-\tau) d\tau.$$

Если положить $c(t) = h(-t)$, то можно записать

$$r^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)h(t-kT)dt = r(t) * h(-t)|_{t=kT}.$$

Это значит, что величины $r^{(k)}$ представляют собой отсчеты сигнала на выходе фильтра, согласованного с $h(t)$, взятые в моменты kT . Оптимальное решение относительно последовательности \mathbf{u} , основанное на рассмотрении принятой последовательности ρ , принимается по правилу

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^{2N}} (-\mathbf{u} \mathbf{H} \mathbf{u}^T + 2(\rho, \mathbf{u})). \quad (3.51)$$

Схема приемника, реализующая прием последовательности, переданной по каналу с межсимвольной интерференцией согласно (3.51), показана на рис. 3.27.

Для величин h_i , определенных равенством (3.50), справедливо равенство $h_i = h_{-i}$. Предположим, что $h_i = 0$ при $i \geq L$, где $L \ll N$. Это означает, что интерференция распространяется на конечное число соседних символов. При таком предположении матрица \mathbf{H} имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2}h_{L-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 & \dots & h_{L-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1}h_{L-2} & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

Ввиду симметричности матрицы \mathbf{H} квадратичная форма \mathbf{uHu}^T в (3.51) может быть представлена в виде удвоенной суммы слагаемых, относящихся к верхней треугольной матрице, сложенной с суммой слагаемых по диагонали, т. е.

$$\begin{aligned}\mathbf{uHu}^T &= \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} u^{(k)} h_{k-j} u^{(j)} = \\ &= 2 \sum_{k=-N}^{N-1} \sum_{j=-N}^{k-1} u^{(k)} h_{k-j} u^{(j)} + \sum_{k=-N}^{N-1} (u^{(k)})^2 h_0 = \\ &= \sum_{k=-N}^{N-1} (u^{(k)})^2 h_0 + 2 \sum_{k=-N}^{N-1} u^{(k)} \sum_{i=1}^{k+N} h_i u^{(k-i)}.\end{aligned}$$

Поскольку $u^{(k)} = 0$ при $k < -N$, и $h_i = 0$ при $i \geq L$, то

$$\begin{aligned}-\mathbf{uHu}^T + 2(\rho, \mathbf{u}) &= \sum_{k=-N}^{N-1} \left(2r^{(k)} u^{(k)} - (u^{(k)})^2 h_0 - 2u^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} h_i u^{(k-i)} \right) = \\ &= \sum_{k=-N}^{N-1} m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}),\end{aligned}\quad (3.52)$$

где использовано обозначение

$$\begin{aligned}m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}) &= \\ &= 2r^{(k)} u^{(k)} - (u^{(k)})^2 h_0 - 2u^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} h_i u^{(k-i)}.\end{aligned}\quad (3.53)$$

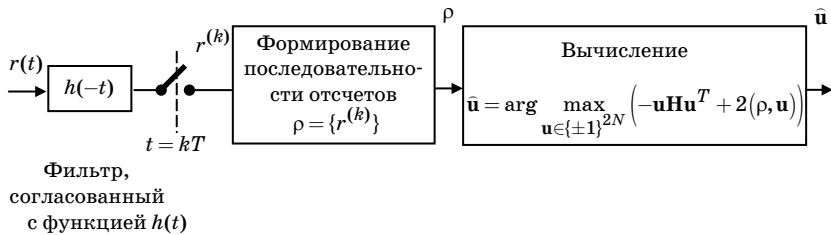


Рис. 3.27. Схема оптимального приема последовательности при передаче по каналу с межсимвольной интерференцией

Из формулы (3.52) следует, что

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^{2N}} \sum_{k=-N}^{N-1} m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}). \quad (3.54)$$

Максимизация в правой части равенства (3.54) соответствует максимизации суммы слагаемых, каждое из которых зависит от текущего значения отсчета на выходе согласованного фильтра $r^{(k)}$, текущего значения переданного символа $u^{(k)}$ и $L-1$ предыдущих значений переданных символов $u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}$.

Пример (продолжение). Вычислим величины h_0, h_1, \dots, h_{L-1} для каналов с сильной и слабой интерференции. На рис. 3.28 они показаны в графической форме.

Из этих графиков следует, что можно принять $L = 1$ для канала со слабой интерференцией и $L = 3$ для канала с относительно сильной интерференцией.

Заметим, что значение $L = 1$ означает отсутствие интерференции. Матрицы \mathbf{H} для этих двух случаев имеют вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_0 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

соответственно. Отсюда следует, что выражение (3.53) принимает вид

$$\begin{aligned} m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}) &= m(r^{(k)}; u^{(k)}) = \\ &= 2r^{(k)}u^{(k)} - (u^{(k)})^2 h_0 = 2r^{(k)}u^{(k)} - h_0 \end{aligned}$$

для канала со слабой интерференцией, и

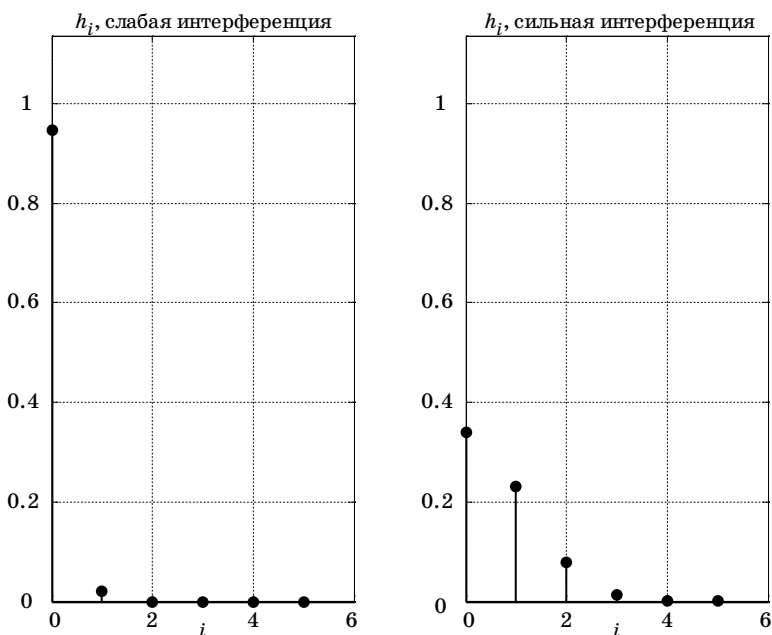


Рис. 3.28. Коэффициенты интерференции для каналов с относительно слабой и относительно сильной интерференцией

$$\begin{aligned}
 m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}) &= m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, u^{(k-2)}) = \\
 &= 2r^{(k)}u^{(k)} - (u^{(k)})^2 h_0 - 2u^{(k)}(h_1 u^{(k-1)} + h_2 u^{(k-2)}) = \\
 &= 2r^{(k)}u^{(k)} - h_0 - 2u^{(k)}(h_1 u^{(k-1)} + h_2 u^{(k-2)})
 \end{aligned}$$

для канала с сильной интерференцией.

Назовем набор предыдущих $L - 1$ значений $(u^{(k-L+1)}, \dots, u^{(k-1)})$ состоянием некоторого конечного автомата. Состояния $(u^{(k-L+1)}, \dots, u^{(k-1)})$ и $(u^{(k-L+2)}, \dots, u^{(k)})$ являются, очевидно, смежными во времени. Нетрудно заметить, что величина $m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)})$, зависящая от величин $u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)}$, соответствует переходу $(u^{(k-L+1)}, \dots, u^{(k-1)}) \rightarrow (u^{(k-L+2)}, \dots, u^{(k)})$.

Пример (продолжение). Для рассматриваемого случая, когда $L = 3$, имеются следующие переходы $(u^{(k-2)}, u^{(k-1)}) \rightarrow (u^{(k-1)}, u^{(k)})$. Поскольку величины $u^{(l)} = \pm 1$ для всех l , то пары величин, или состояния, $(u^{(l-1)}, u^{(l)})$ могут принимать одно из четырех значений: $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$ и $(-1, -1)$. Все возможные переходы из некоторого состояния в смежное с ним, т. е. переходы вида $(u^{(k-2)}, u^{(k-1)}) \rightarrow (u^{(k-1)}, u^{(k)})$, изображены на рис. 3.29.

Переходы, показанные на рис. 3.29, относятся к случаю, когда имеется четыре состояния, т. е. для $L = 3$. В общем случае число состояний равно 2^{L-1} .

Если изобразить последовательность переходов, то получится граф, называемый решеткой. Каждому переходу, или ребру, в решетке $(u^{(k-L+1)}, \dots, u^{(k-1)}) \rightarrow (u^{(k-L+2)}, \dots, u^{(k)})$ поставим в соответствие значение $m(r^{(k)}; u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u^{(k-L+1)})$ и назовем его метрикой ребра. Любой путь в решетке, начинающийся в начальном узле, соответствует последовательности величин $u^{(l)}$, $l = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Поэтому максимизация в правой части (3.54) может быть интерпретирована как поиск пути с максимальной накопленной метрикой в решетке с 2^{L-1} состояниями, аналогичной кодовой решетке сверточного кода. Отыскание последовательности, имеющей максимальное значение метрики (3.54), может быть выполнено с использованием алгоритма Витерби.

Пример (окончание). Для двух рассматриваемых случаев имеем решетки следующего вида (рис. 3.30).

Для канала со слабой интерференцией (практически без интерференции) решетка имеет только одно состояние. Это означает,

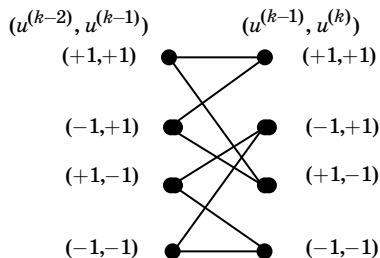


Рис. 3.29. Возможные переходы $(u^{(k-2)}, u^{(k-1)}) \rightarrow (u^{(k-1)}, u^{(k)})$, $L = 3$

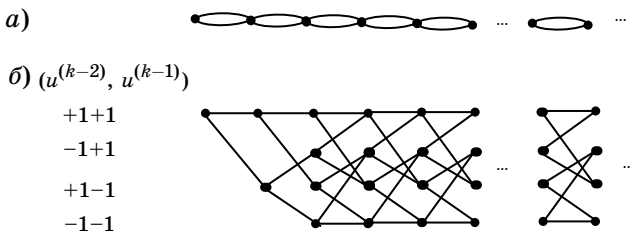


Рис. 3.30. Решетки для каналов со слабой (а) и сильной интерференцией (б)

что зависимости от предыдущих символов нет, и оптимальный прием состоит в одиночном приеме каждого сигнала. В этом случае понятие решетки вообще не нужно использовать для описания процедуры приема. В канале с относительно сильной интерференцией решетка имеет четыре состояния, задающие четыре возможных значения пары предыдущих символов $(u^{(k-2)}, u^{(k-1)})$, т. е. $(+1, +1)$, $(+1, -1)$, $(-1, +1)$ и $(-1, -1)$. Алгоритм оптимального приема в этом случае может быть реализован с использованием алгоритма Витерби. Метрикой ребра, соединяющего узлы $(u^{(k-2)}, u^{(k-1)})$ и $(u^{(k-1)}, u^{(k)})$, будет значение, вычисляемое по формуле (3.54).

Упражнения

1. Покажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^T \sqrt{2/T} \cos\left(2\pi \frac{i}{T} t\right) \sqrt{2/T} \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt = \\ = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4\pi k}{4\pi k}, & i = k \\ \frac{(i+k)\cos 2\pi(i-k) - (i-k)\cos 2\pi(i+k) - 2k}{2\pi(i^2 - k^2)}, & i \neq k; \end{cases} \\ \text{б) } \int_0^T \sqrt{2/T} \cos\left(2\pi \frac{i}{T} t\right) \sqrt{2/T} \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt = \frac{\sin 2\pi(i+k)}{2\pi(i+k)} + \frac{\sin 2\pi(i-k)}{2\pi(i-k)}; \\ \text{в) } \int_0^T \sqrt{2/T} \sin\left(2\pi \frac{i}{T} t\right) \sqrt{2/T} \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) dt = \frac{\sin 2\pi(i-k)}{2\pi(i-k)} - \frac{\sin 2\pi(i+k)}{2\pi(i+k)}. \end{aligned}$$

2. Докажите лемму [равенство (3.11)].

3. В канале с АБГШ и случайной фазой передача ведется с использованием сигналов ЧМ-4 с прямоугольной огибающей со скоростью 384 Кбит/с. Оцените ширину полосы частот, требуемую для этого. Какое отношение сигнал/шум на бит нужно обеспечить, чтобы вероятность ошибки на бит была не более, чем 10^{-5} ?

4. В канале с АБГШ и случайной фазой используется ЧМ-2. Требуется оценить проигрыш в отношении сигнал/шум, возникающий из-за наличия случайной фазы, по сравнению с каналом, где есть только АБГШ, для вероятности ошибки на бит, равной 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} . Повторите вычисления для ЧМ-4.

5. Замирания описываются релеевской моделью. Какова вероятность того, что мгновенная энергия принятого сигнала уменьшится более чем на 3, 7, 10 дБ?

Метод ортогонализации Грама – Шмидта

Метод ортогонализации Грама – Шмидта позволяет строить ортогональный базис по множеству функции (сигналов). Пусть имеется множество сигналов $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q - 1$. Требуется построить множество ортонормированных функций (базис) $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, D$. Не теряя общности, можно считать, что $\|s_i(t)\| \neq 0$ для всех i . Это условие означает, что среди сигналов нет тождественно равных нулю. Построение базиса можно описать в виде алгоритма. Исходными данными для этого алгоритма служат сигналы $s_0(t)$, ..., $s_{q-1}(t)$, а в результате формируется множество ортонормированных функций (базис) $\{\varphi_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, D$, $D \leq q$. Алгоритм построения ортонормированного базиса представлен ниже:

```

 $\varphi_1(t) \leftarrow s_0(t) / \|s_0(t)\|;$ 
 $D \leftarrow 1;$ 

for  $i = 1, 2, \dots, q - 1$ 
     $\psi(t) \leftarrow s_i(t) - \sum_{j=1}^D (s_i(t), \varphi_j(t)) \varphi_j(t);$ 
    if  $\|\psi(t)\| \neq 0$ 
         $D \leftarrow D + 1;$ 
         $\varphi_D(t) \leftarrow \psi(t) / \|\psi(t)\|;$ 
    end
end
end
```

Поясним этот алгоритм. В качестве первой базисной функции выбирается любой сигнал, например, $s_0(t)$, деленный на норму этого сигнала. Этим достигается выполнение условия $\|\varphi_1(t)\| = 1$. Далее в цикле последовательно рассматриваются остальные сигналы и формируются базисные функции. Для этого вычисляется вспомогательная функция $\psi(t)$ как разность очередного сигнала и его разложения по построенным к этому моменту базисным функциям. Если функция $\psi(t)$ не равна тождественно нулю, то очередная базисная функция вычисляется как $\psi(t)/\|\psi(t)\|$. Процесс оканчивается, если исследованы все сигнальные функции. В результате выполнения алгоритма формируется $D \leq q$ базисных функций. Равенство $D = q$

выполняется только в случае, если все сигналы из множества $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, q - 1$, оказываются линейно независимыми. Очевидно, что все построенные таким образом функции $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, D$, $D \leq q$, будут нормированными. Нетрудно показать, что они при этом будут ортогональными.

Рассмотрим пример. Пусть сигнальное множество содержит следующие четыре функции, заданные на интервале $[0, T]$, $s_0(t) = 2\sin(2\pi(3/T))$, $s_1(t) = -4\cos(2\pi(3/T) - \theta)$, $s_2(t) = -3\cos(2\pi(3/T) + \pi/4)$, $s_3(t) = -(3/2)\cos(2\pi(3/T) - 5\pi/6)$, где θ и T – параметры. Графики этих сигналов показаны на рис. П1.1 для значений $T = 1$ и $\theta = 3\pi/8$.

Последовательно выполняя шаги алгоритма, получаем следующее.

1. Выражение для функции $\varphi_1(t)$ имеет вид

$$\varphi_1(t) = s_0(t) / \|s_0(t)\| = \sqrt{2/T} \sin(2\pi(3/T)t), \quad (\text{П1.1})$$

поскольку $\|s_0(t)\| = \sqrt{\int_0^T s_0(t)^2 dt} = \sqrt{2T}$.

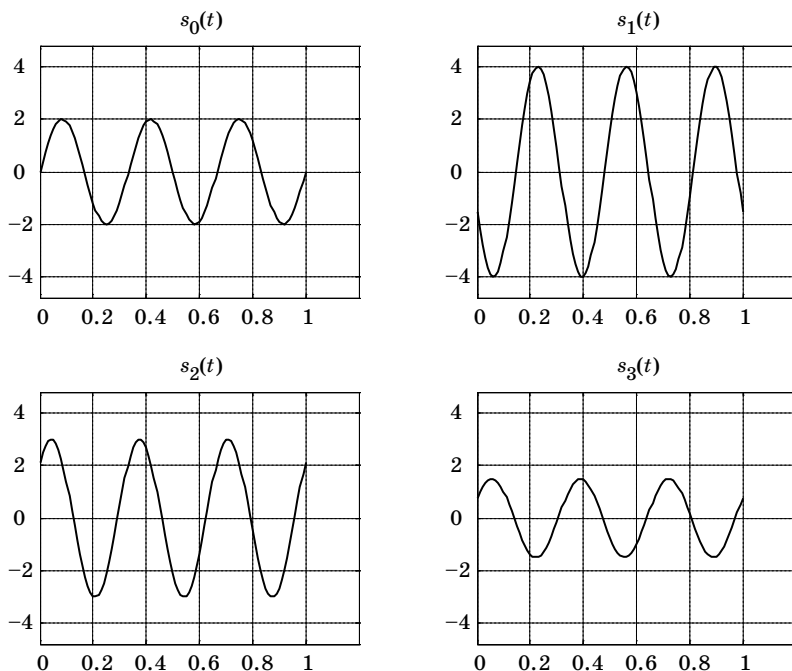


Рис. П1.1. Графики сигнальных функций $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$

2. Далее, применяя тождество $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ к выражению для сигнала $s_1(t)$, вычисляем, что

$$(s_1, \varphi_1) = \int_0^T s_1(t) \varphi_1(t) dt = -2\sqrt{2T} \sin \theta.$$

Отсюда следует, что разностная функция на этом шаге алгоритма $\psi(t) = s_1(t) - (s_1, \varphi_1) \varphi_1(t) = -4 \cos(2\pi(3/T)t - \theta) + 4 \sin \theta \sin(2\pi(3/T)t)$.

Нетрудно вычислить, что $\|\psi(t)\| = \sqrt{\int_0^T \psi(t)^2 dt} = \sqrt{6T} |\cos \theta|$. Далее будем считать, что $\theta = 3\pi/8$. Отсюда следует, что $\|\psi(t)\| \neq 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \psi(t) / \|\psi(t)\| = \\ &= \frac{4(-\cos(2\pi(3/T)t - 3\pi/8) + \sin(3\pi/8) \sin(2\pi(3/T)t))}{\sqrt{2T} \cos 3\pi/8}. \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

3. Рассмотрим функцию $s_2(t)$ и определим вид функции $\psi(t)$ на этом шаге алгоритма. Функция $\psi(t)$ для этого шага алгоритма определяется как

$$\psi(t) = s_2(t) - (s_2, \varphi_1) \varphi_1(t) - (s_2, \varphi_2) \varphi_2(t). \quad (\text{П1.3})$$

Используя выражения (П1.1) и (П1.2), после некоторых по сути несложных, но громоздких преобразований получаем, что $(s_2, \varphi_1) = 3\sqrt{T}/2$ и $(s_2, \varphi_2) = -3\sqrt{T}/2$. Подстановка этих значений в (П1.3) в итоге приводит к равенству $\psi(t) = 0$. Это равенство означает, что рассмотрение функции $s_2(t)$ не влечет увеличения числа базисных функций.

4. Осталось рассмотреть последнюю сигнальную функцию $s_3(t)$. Разностная функция в этом случае равна $\psi(t) = s_3(t) - (s_3, \varphi_1) \varphi_1(t) - (s_3, \varphi_2) \varphi_2(t)$. Здесь после вычислений получаем, что $(s_3, \varphi_1) = 3\sqrt{6T}/8$ и $(s_3, \varphi_2) = -3\sqrt{2T}/8$, и в итоге вновь оказывается, что $\psi(t) = 0$. Выполнение алгоритма на этом шаге заканчивается.

Рассмотрев таким образом сигнальные функции $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$, получаем, что для их представления достаточно иметь две базисные функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, заданные равенствами (П1.1) и (П1.2) соответственно. Графики базисных функций показаны на рис. П1.2.

Координаты сигнальных точек, соответствующие сигналам $s_0(t)$, $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$, равны $s_0 = (\sqrt{2T}, 0)$, $s_1 = (-2\sqrt{2T} \sin 3\pi/8, 2\sqrt{2T} \cos 3\pi/8)$, $s_2 = (3\sqrt{T}/2, -3\sqrt{T}/2)$, $s_3 = (3\sqrt{6T}/8, -3\sqrt{2T}/8)$.

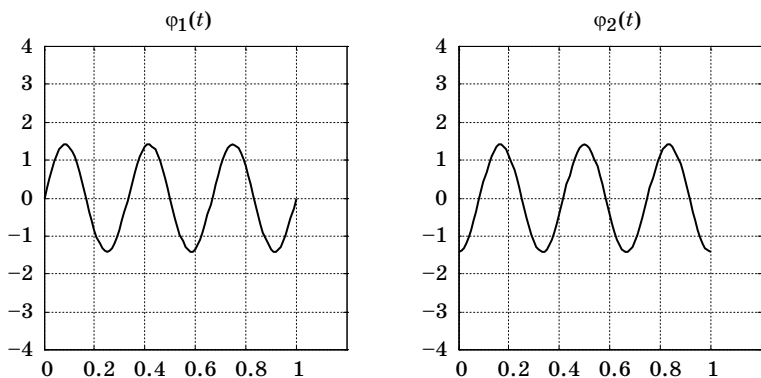


Рис. П1.2. Графики ортонормированных базисных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

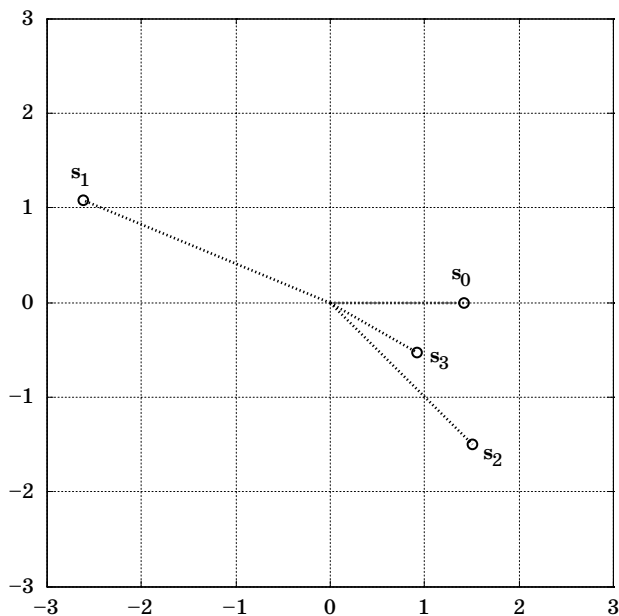


Рис. П1.3. Множество сигнальных точек s_0 , s_1 , s_2 , s_3

Множество сигнальных точек (сигнальное созвездие) для этих функций, полученное с использованием построенного базиса, показано на рис. П1.3.

Сигналы с прямоугольными огибающими

Двумерные сигналы, в частности сигналы КАМ и ФМ, представимы в виде

$$s_i(t) = s_{i1}\varphi_1(t) + s_{i2}\varphi_2(t), \quad (\text{П2.1})$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – ортонормированные функции; s_{i1} , s_{i2} – коэффициенты, задающие конкретный сигнал. В частности, если $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos 2\pi f_0 t$, $\varphi_2(t) = \sqrt{2/T} \sin 2\pi f_0 t$, $0 < t < T$, то сигнал $s_i(t)$ имеет вид отрезка гармонической функции длительности T с постоянной амплитудой.

В общем случае функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ могут быть заданы как $\varphi_1(t) = m(t)\cos 2\pi f_0 t$, $\varphi_2(t) = m(t)\sin 2\pi f_0 t$, где $m(t)$ – огибающая, выбранная таким образом, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ образуют ортонормированный базис, $-\infty < t < \infty$. Пусть $M(f) \leftrightarrow m(t)$, тогда спектр сигнала $s_i(t)$

$$S_i(f) = \frac{s_{i1}}{2}(M(f - f_0) + M(f + f_0)) + \frac{s_{i2}}{2j}(M(f - f_0) - M(f + f_0)).$$

Очевидно, что спектр сигнала сосредоточен около несущей частоты f_0 , а его форма и ширина полосы частот определяются видом функции $M(f)$, однозначно определяемой огибающей $m(t)$. Выбор огибающей $m(t)$ в виде кусочно-постоянной функции на интервале $[0, T]$ приводит к спектру вида $\sin x/x$. Ширина полосы частот при этом равна $W = 2/T$.

При другом выборе огибающей возможно сокращение полосы до величины $1/T$. В частности, это достигается путем применения огибающей вида $\sin x/x$. В последующем рассмотрении используется функция $\text{sinc}(x)$, которая связана с функцией $\sin x/x$.

Функция $\text{sinc}(x)$ определена как $\text{sinc}(x) = \sin \pi x / (\pi x)$. Определим также функцию прямоугольного импульса

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Графики этих функций показаны на рис. П2.1

Рассмотрим некоторые свойства этих функций.

1. Четность функций. $\text{sinc}(x) = \text{sinc}(-x)$, $\text{rect}(x) = \text{rect}(-x)$.
2. Частные значения. $\text{sinc}(0) = 1$, $\text{sinc}(k) = 0$ для $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
3. Преобразование Фурье $\text{sinc}(x) \leftrightarrow \text{rect}(x)$.

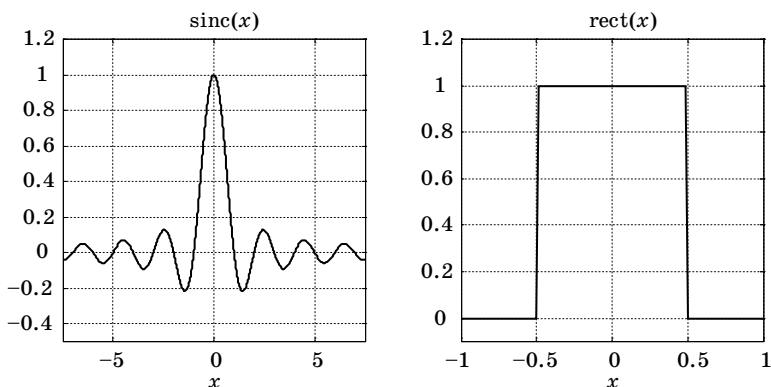


Рис. П2.1. Графики функций $\text{sinc}(x)$ и $\text{rect}(x)$

Доказательство. Вычисляя обратное преобразование Фурье от функции $\text{rect}(y)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(y) e^{j2\pi xy} dy &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi xy} dy = \\ &= \frac{e^{j2\pi xy}}{j2\pi x} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{j\pi x} - e^{-j\pi x}}{2j} \frac{1}{\pi x} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc}(x). \end{aligned}$$

4. Произведение двух $\text{rect}(\cdot)$ функций: $\text{rect}(x) \cdot \text{rect}(x) = \text{rect}(x)$.

5. Свертка двух $\text{sinc}(\cdot)$ функций: $\text{sinc}(x) * \text{sinc}(x) = \text{sinc}(x)$.

Доказательство. Обозначим $\psi(x) = \text{sinc}(x) * \text{sinc}(x)$. Пусть $\Psi(y)$ – преобразование Фурье функции $\psi(y)$, т. е. $\psi(y) \leftrightarrow \Psi(y)$. По опреде-

лению $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x_1) \text{sinc}(x - x_1) dx_1$. Используя теорему о свертке для преобразования Фурье и свойства 3 и 4, получаем $\Psi(y) = \text{rect}(y) \cdot \text{rect}(y) = \text{rect}(y)$. Поскольку $\psi(y) \leftrightarrow \Psi(y)$ и $\text{sinc}(x) \leftrightarrow \text{rect}(x)$, то $\psi(x) = \text{sinc}(x)$.

6. Автокорреляция функции $\text{sinc}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) \text{sinc}(x - x_1) dx = \text{sinc}(x_1).$$

Доказательство. Используя четность функции $\text{sinc}(\cdot)$ и свойство 5, получаем требуемое утверждение.

7. Функции $\varphi_k(x) = \text{sinc}(x-k)$, k – целое, образуют ортонормированный базис на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = \delta_{kl}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x-k) \text{sinc}(x-l) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x) \text{sinc}(x+k-l) dx = \text{sinc}(l-k) = \delta_{kl}. \end{aligned}$$

8. Связь с функцией интегрального синуса $\text{Si}(\cdot)$. Функция интегрального синуса определена как $\text{Si}(t) = \int_0^t \sin x / x dx$. График функции $\text{Si}(\cdot)$ показан на рис. П2.2.

Выполняются равенства $\int_0^t \text{sinc}(x) dx = \pi^{-1} \text{Si}(\pi t)$, $\text{sinc}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi t)$.

Доказательство.

$$\int_0^t \text{sinc}(x) dx = \int_0^t \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx = \left. \begin{array}{l} \pi x = y \\ x = \pi^{-1} y \\ dx = \pi^{-1} dy \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi t} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi t).$$

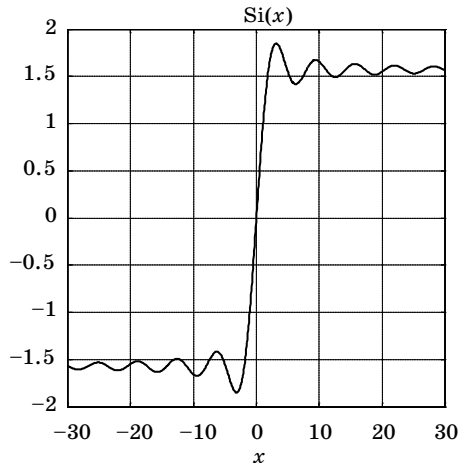


Рис. П2.2. График функции $\text{Si}(x)$

9. Спектр отрезка функции $\text{sinc}(x)$. Пусть функция $s(t)$ определена как

$$s(t) = \begin{cases} \text{sinc}(t), & |t| < T_s / 2, \\ 0, & |t| \geq T_s / 2. \end{cases}$$

Этот сигнал представляет собой отрезок функции $\text{sinc}(\cdot)$ длительностью T_s . Найдем спектр этой функции $S(f) \leftrightarrow s(t)$. Легко заметить, что $s(t) = \text{sinc}(t)\text{rect}(t/T_s)$, $-\infty < t < \infty$. Тогда используя теорему о свертке и учитывая, что $\text{rect}(t/T_s) \leftrightarrow T_s \text{sinc}(fT_s)$, $\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f)$, получаем

$$\begin{aligned} S(f) &= \text{rect}(f) * T_s \text{sinc}(fT_s) = T_s \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(xT_s) \text{rect}(f-x) dx = \\ &= T_s \int_{f-1/2}^{f+1/2} \text{sinc}(xT_s) dx = \left| \begin{array}{l} y = xT_s \\ dy = T_s dx \\ dx = (1/T_s) dy \end{array} \right| = \int_{(f-1/2)T_s}^{(f+1/2)T_s} \text{sinc}(y) dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\text{Si}((f+1/2)\pi T_s) - \text{Si}((f-1/2)\pi T_s) \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Здесь в последнем переходе использовано свойство 8. Графики функций $s(t)$ и $S(f)$ для различных значений T_s показаны на рис. П2.3. Видно, что с ростом значения T_s форма спектра приближается к прямоугольной, и в пределе спектр равен $\text{rect}(f)$.

Для формирования сигналов $s_i(t)$, определенных равенством (П2.1), следующих с периодом T и занимающих полосу $W = 1/T$, выберем функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ следующим образом:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{2W} \text{sinc}(Wt) \cos 2\pi f_0 t, \quad (\text{П2.3})$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{2W} \text{sinc}(Wt) \sin 2\pi f_0 t, \quad (\text{П2.4})$$

где $-\infty < t < \infty$, $f_0 > W/2$. Покажем, что $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ образуют ортонормированный базис

1. *Ортогональность.* Поскольку $\varphi_1(t)$ – четная функция, а $\varphi_2(t)$ – нечетная, то их произведение $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ – нечетная функция.

Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0$.

2. *Норма.* Пусть $\Phi_1(f) \leftrightarrow \varphi_1(t)$. Найдем выражение для $\Phi_1(f)$. Поскольку $\text{sinc}(Wt) \leftrightarrow W^{-1}\text{rect}(f/W)$, то

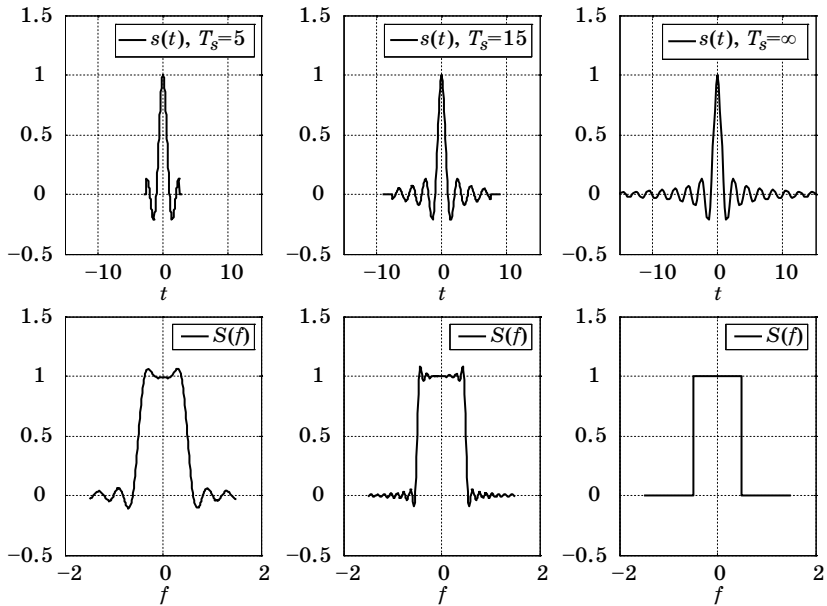


Рис. П2.3. Графики функций $s(t)$ и $S(f)$

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(f) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2W}}{W} \text{rect} \left(\frac{f-f_0}{W} \right) + \frac{\sqrt{2W}}{W} \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{W} \right) \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect} \left(\frac{f-f_0}{W} \right) + \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{W} \right) \right). \quad (\text{П2.5})
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $f_0 > W/2$ и $\text{rect}(x)^2 = \text{rect}(x)$, получаем

$$|\Phi_1(f)|^2 = \frac{1}{2W} \left(\text{rect} \left(\frac{f-f_0}{W} \right) + \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{W} \right) \right)^2,$$

откуда следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(f)|^2 df = 1$.

Для $\Phi_2(f) \leftrightarrow \varphi_2(t)$ имеем

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(f) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{\sqrt{2W}}{W} \text{rect} \left(\frac{f-f_0}{W} \right) - \frac{\sqrt{2W}}{W} \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{W} \right) \right) = \\
 &= -j \sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect} \left(\frac{f-f_0}{W} \right) - \text{rect} \left(\frac{f+f_0}{W} \right) \right) \quad (\text{П2.6})
 \end{aligned}$$

и

$$|\Phi_2(f)|^2 = \frac{1}{2W} \left(\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{W}\right) \right)^2.$$

$$\text{Следовательно } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_2(f)|^2 df = 1.$$

Поскольку функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют бесконечную длительность, то при передаче сигналов вида (П2.1) с периодом следования $T = 1/W$ неизбежно их перекрытие, иначе говоря, возможна межсимвольная интерференция. Для того чтобы исключить влияния перекрытия сигналов во временной области, должны выполняться условия ортогональности сдвигов функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Это значит, что для целых ненулевых k должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_1(t-k/W)dt &= 0, \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t)\varphi_2(t-k/W)dt = 0, \\ 3) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t)\varphi_2(t-k/W)dt &= 0. \end{aligned}$$

Докажем выполнение этих условий.

Доказательство условия 1. Обозначим свертку

$$\psi_{11}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_1(t-x)dx.$$

Пусть $\Psi_{11}(f)$ – преобразование Фурье функции $\psi_{11}(t)$. По теореме о свертке

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(f) &= \Phi_1(f)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{W}\right) \right) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2W} \left(\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+f_0}{W}\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\psi_{11}(t) \leftrightarrow \Psi_{11}(f)$ и учитывая, что

$$\text{rect}\left(\frac{f-f_0}{W}\right) \leftrightarrow W e^{j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt), \quad (\text{П2.7})$$

$$\text{rect}\left(\frac{f+f_0}{W}\right) \leftrightarrow W e^{-j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt), \quad (\text{П2.8})$$

получаем

$$\psi_{11}(t) = \frac{1}{2W} \left(W e^{j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt) + W e^{-j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt) \right) = \text{sinc}(Wt) \cos 2\pi f_0 t.$$

В силу четности функции $\varphi_1(t)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_1(t - k/W) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_1(k/W - t) dt = \\ &= \psi_{11}(kW) = \text{sinc}(k) \cos(2\pi f_0 k/W) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство условия 2. Поступая аналогично предыдущему пункту, обозначим свертку $\psi_{22}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x) \varphi_2(t - x) dx$. Пусть $\Psi_{22}(f)$ – преобразование Фурье функции $\psi_{22}(t)$. По теореме о свертке

$$\begin{aligned} \Psi_{22}(f) &= \Phi_2(f)^2 = \left(-j \sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect}\left(\frac{f - f_0}{W}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{W}\right) \right) \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{2W} \left(\text{rect}\left(\frac{f - f_0}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{W}\right) \right). \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание нечетность функции $\varphi_2(t)$ и используя равенства (П2.7) и (П2.8), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t) \varphi_2(t - k/W) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(t) \varphi_2(k/W - t) dt = \\ &= -\psi_{22}(kW) = \text{sinc}(k) \cos(2\pi f_0 k/W) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство условия 3. Пусть $\psi_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(t - x) dx$ и

$\Psi_{12}(f)$ – преобразование Фурье функции $\psi_{12}(t)$. По теореме о свертке

$$\begin{aligned} \Psi_{12}(f) &= \Phi_1(f) \Phi_2(f) = \\ &= \left(-j \sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect}\left(\frac{f - f_0}{W}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{W}\right) \right) \right) \left(\sqrt{\frac{1}{2W}} \left(\text{rect}\left(\frac{f - f_0}{W}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{W}\right) \right) \right) = \\ &= -j \frac{1}{2W} \left(\text{rect}\left(\frac{f - f_0}{W}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_0}{W}\right) \right). \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к функции $\Psi_{12}(f)$, получаем с использованием равенств (П2.7) и (П2.8)

$$\Psi_{12}(t) = -j \frac{1}{2W} \left(W e^{j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt) - W e^{-j2\pi f_0 t} \text{sinc}(Wt) \right) = \text{sinc}(Wt) \sin 2\pi f_0 t,$$

и тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(t - k/W) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_2(k/W - t) dt = -\Psi_{12}(k/W) = 0.$$

Итак, получено, что сигналы вида (П2.1), где базисные функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определены равенствами (П2.3) и (П2.4), обладают следующими свойствами:

– спектр сигналов, как следует из выражений (П2.5) и (П2.6), строго прямоугольный, локализован около частоты f_0 и ширина его равна W ;

– несмотря на то, что последовательно передаваемые сигналы перекрываются во времени (интерferируют), их влияние друг на друга в силу ортогональности сдвигов базисных функций отсутствует; минимальный временной сдвиг, при котором обеспечивается ортогональность, равен $T = 1/W$; величина T имеет смысл периода следования сигналов.

Поскольку на практике сигналы не могут иметь бесконечную длительность, то оценим влияние конечной длительности базисных функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Для этого рассмотрим функции вида

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & -T_s/2 < t < T_s/2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{cases} \varphi_2(t), & -T_s/2 < t < T_s/2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \text{rect}(t/T_s) \sqrt{2W} \text{sinc}(Wt) \cos 2\pi f_0 t, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \text{rect}(t/T_s) \sqrt{2W} \text{sinc}(Wt) \sin 2\pi f_0 t, \quad -\infty < t < \infty.$$

Пусть $m(t) = \sqrt{2W} \text{rect}(t/T_s) \text{sinc}(Wt)$ и $M(f)$ – преобразование Фурье функции $m(t)$, $M(f) \leftrightarrow m(t)$. По аналогии с выводом равенства (П2.2) имеем

$$\begin{aligned}
M(f) &= \sqrt{2W}T_s \operatorname{sinc}(fT_s) * \frac{1}{W} \operatorname{rect}(f/W) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{W}}T_s \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(xT_s) \operatorname{rect}((f-x)/W) dx = \\
&= \sqrt{\frac{2}{W}}T_s \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(xT_s) \operatorname{rect}((x-f)/W) dx = \left| \begin{array}{l} y = (x-f)/W \\ x = Wy + f \\ dx = Wdy \end{array} \right| = \\
&= \sqrt{2W}T_s \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}((Wy+f)T_s) \operatorname{rect}(y) dy = \\
&= \sqrt{2W}T_s \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sinc}((Wy+f)T_s) dy = \left| \begin{array}{l} u = (Wy+f)T_s \\ du = WT_s dy \\ dy = \frac{du}{WT_s} \end{array} \right| = \\
&= \sqrt{\frac{2}{W}} \int_{(f-W/2)T_s}^{(f+W/2)T_s} \operatorname{sinc}(u) du = \\
&= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{W}} (\operatorname{Si}((f+W/2)\pi T_s) - \operatorname{Si}((f-W/2)\pi T_s)),
\end{aligned}$$

т. е.

$$M(f) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{W}} (\operatorname{Si}((f+W/2)\pi T_s) - \operatorname{Si}((f-W/2)\pi T_s)). \quad (\text{П2.9})$$

Используя свойства преобразования Фурье, получаем окончательно

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_1(f) &= \frac{1}{2} (M(f-f_0) + M(f+f_0)), \\
\tilde{\Phi}_2(f) &= \frac{1}{2j} (M(f-f_0) - M(f+f_0)),
\end{aligned}$$

где функция $M(f)$ определена равенством (П2.9).

Рассмотрим иллюстрирующий пример. Пусть несущая частота $f_0 = 1800$ Гц, модуляционная скорость $V_{\text{мод}} = 2400$ Бод, длительность сигнала $T_s = 0,004$ с = 4 мс. Графики функций $\tilde{\Phi}_1(t)$ и $\tilde{\Phi}_2(t)$ и их амплитудных спектров показаны на рис. П2.4.

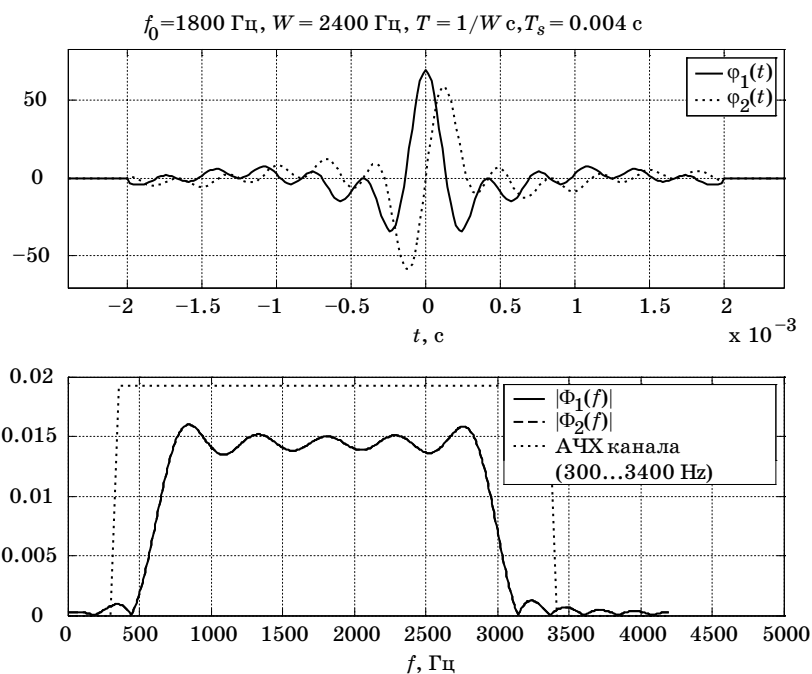


Рис. П2.4. Графики функций $\tilde{\varphi}_1(t)$ и $\tilde{\varphi}_2(t)$ и их амплитудных спектров

О моделировании передачи сигналов, заданных отсчетами во временной области

Пусть сигнал на выходе канала с АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$ задается выражением

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad (\text{ПЗ.1})$$

где $0 < t < T_s$, T_s – длительность сигнала, $i = 0, 1, \dots, q-1$. Каждый сигнал $s_i(t)$ может быть представлен как линейная комбинация базисных ортонормированных функций

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^D s_{ij} \varphi_j(t), \quad (\text{ПЗ.2})$$

где D – размерность сигнального пространства. Отношение сигнал/шум определяется как

$$\frac{E}{N_0} = \frac{1}{N_0} \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} E_i, \quad (\text{ПЗ.3})$$

где E_i – энергия i -го сигнала.

Для моделирования во временной области передачи по каналу с шумом, заданному выражением (ПЗ.1), представим принятый сигнал в виде последовательности отсчетов, взятых с интервалом Δ_t , т. е.

$$r^{(l)} = s_i^{(l)} + n^{(l)}, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где $r^{(l)} = r(l\Delta_t)$, $s_i^{(l)} = s_i(l\Delta_t)$ – отсчет сигнала на выходе канала и отсчет переданного сигнала соответственно, $l = 1, 2, \dots, N_s$, $\Delta_t = T_s / N_s$, а случайная величина $n^{(l)}$ учитывает влияние шума. Для канала с АБГШ $n^{(l)}$ представляет собой гауссовскую случайную величину, и $\overline{n^{(l)}} = 0$, $\overline{(n^{(l)})^2} = \sigma^2$. При моделировании величин $n^{(l)}$ требуется

определить значение дисперсии отсчета σ^2 и связать его с отношением сигнал/шум (ПЗ.3). Рассмотрим получение этой зависимости.

Для дискретизированного сигнала можно указать разложение, аналогичное равенству (ПЗ.2):

$$s_i^{(l)} = s_i(l\Delta_t) = \sum_{j=1}^D s_{ij} \varphi_j(l\Delta_t) = \sum_{j=1}^D s_{ij} \varphi_j^{(l)}, \quad (\text{ПЗ.5})$$

где $\varphi_j^{(l)} = \varphi_j(l\Delta_t)$ – отсчет базисной функции. Выберем число отсчетов N_s так, чтобы с приемлемой точностью выполнялись условия

$$\sum_{l=1}^N \varphi_k^{(l)} \varphi_j^{(l)} \Delta t \approx \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (\text{ПЗ.6})$$

для всех $j, k = 1, 2, \dots, D$. Энергия дискретизированного сигнала равна $E_i \approx \sum_{l=1}^N \left(s_i^{(l)}\right)^2 \Delta t$. С использованием равенств (ПЗ.5) и (ПЗ.6) несложно показать, что $E_i = \sum_{j=1}^D s_{ij}^2$.

Случайная величина n_j , определенная как $n_j = \int_0^{T_s} n(t) \varphi_j(t) dt$, где $n(t)$ – белый гауссовский процесс, имеет гауссовское распределение с параметрами $\overline{n_j} = 0$ и

$$\overline{n_j^2} = (N_0 / 2) \|\varphi_j(t)\|^2 = (N_0 / 2). \quad (\text{ПЗ.7})$$

Для базисной функции, заданной отсчетами, имеем

$$\begin{aligned} n_j &= \int_0^{T_s} n(t) \varphi_j(t) dt \approx \sum_{l=1}^{N_s} \int_{(l-1)\Delta_t}^{l\Delta_t} n(t) \varphi_j(l\Delta_t) dt = \\ &= \sum_{l=1}^{N_s} \int_{(l-1)\Delta_t}^{l\Delta_t} n(t) \varphi_j^{(l)} dt = \sum_{l=1}^{N_s} \varphi_j^{(l)} \int_{(l-1)\Delta_t}^{l\Delta_t} n(t) dt = \sum_{l=1}^{N_s} \varphi_j^{(l)} \xi^{(l)}, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.8})$$

где $\xi^{(l)} = \int_{(l-1)\Delta_t}^{l\Delta_t} n(t) dt$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma_{\xi}^2 = (N_0 / 2) \Delta_t. \quad (\text{ПЗ.9})$$

При достаточно большом числе отсчетов N_s , т. е. при малой длительности интервала Δ_t дискретизации, с приемлемой точностью выполняется равенство

$$n_j = \int_0^{T_s} n(t) \varphi_j(t) dt \approx \sum_{l=1}^{N_s} n^{(l)} \varphi_j(l\Delta_t) \Delta_t, \quad (\text{ПЗ.10})$$

где $n^{(l)}$ – гауссовские случайные величины, определенные в равенстве (ПЗ.4). Из равенств (ПЗ.7), (ПЗ.8), (ПЗ.9) и (ПЗ.10) следует, что $n^{(l)} \Delta_t = \xi^{(l)}$. Следовательно, $\sigma^2 = \overline{(n^{(l)})^2} = \sigma_{\xi}^2 / \Delta_t^2 = (N_0 / 2) / \Delta_t$, откуда следует, что $N_0 / 2 = \sigma^2 \Delta_t$. Тогда из формулы (ПЗ.3) получаем

$$\frac{E}{N_0} = \frac{1}{2\sigma^2\Delta_t} \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} E_i = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{l=1}^{N_s} \left(s_i^{(l)}\right)^2.$$

Это значит, что для моделирования передачи с отношением сигнал/шум $E / N_0 = \gamma$ нужно назначить

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\gamma} \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{l=1}^{N_s} \left(s_i^{(l)}\right)^2$$

и использовать гауссовские псевдослучайные величины $n^{(l)}$ с дисперсией σ^2 для моделирования выхода канала по формуле (ПЗ.4).

Точное выражение для вероятности ошибки для КАМ

В этом разделе выводится точное выражение для вероятности ошибки при передаче с использованием КАМ по каналу с АБГШ со спектральной плотностью мощности $N_0 / 2$. Рассматривается случай, когда число сигналов $q = 2^m$, где m – четное, т. е. $q = 4, 16, 64, 256, \dots$ и т.д. В этом случае сигнальное созвездие представляет собой полную решетку (см. рис. 2.21) и имеются три типа конфигурации решающих областей, как показано на рис. П4.1. На рис. П4.1 символом Δ обозначено минимальное евклидово расстояние между сигналами (сигнальными точками). Заметим, что существуют конфигурации решающих областей, полученных путем поворота конфигурации типов 1 и 2 на 90, 180 и 270 градусов. Они, очевидно, эквивалентны в канале с АБГШ конфигурациям типа 1 и типа 2 соответственно и поэтому отдельно не рассматриваются.

Точка в сигнальном пространстве, соответствующая принятому сигналу, записывается как $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$, где \mathbf{s} – сигнальная точка, соответствующая переданному двумерному сигналу; $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – гауссовский случайный вектор, определяемый шумом. Случайные величины n_1 и n_2 (компоненты вектора \mathbf{n}) – независимые и одинаково распределенные гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $N_0 / 2$.

Рассмотрим вероятности ошибки при условии, что переданный сигнал имеет решающую область, относящуюся к одному из показанных на рис. П4.1 типов. Для трех указанных типов имеем следующую

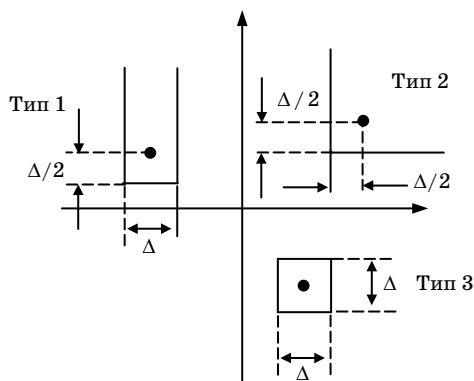


Рис. П4.1. Типы решающих областей

щие выражения для условных вероятностей ошибки; они получены как вероятности выхода точки, соответствующей принятому сигналу, из решающей области, соответствующей переданному сигналу:

$$P_e(\text{тип 1}) = 1 - \Pr[-\Delta/2 < n_1 < \Delta/2] \Pr[-\Delta/2 < n_2],$$

$$P_e(\text{тип 2}) = 1 - \Pr[-\Delta/2 < n_1] \Pr[-\Delta/2 < n_2], \quad (\text{П4.1})$$

$$P_e(\text{тип 3}) = 1 - \Pr[-\Delta/2 < n_1 < -\Delta/2] \Pr[-\Delta/2 < n_2 < -\Delta/2].$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \Pr[-\Delta/2 < n_1] &= \Pr[-\Delta/2 < n_2] = \int_{-\Delta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = \\ &= 1 - \int_{\Delta/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = 1 - Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{П4.2})$$

и

$$\begin{aligned} \Pr[-\Delta/2 < n_1 < -\Delta/2] &= \Pr[-\Delta/2 < n_2 < -\Delta/2] = \\ &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = 1 - 2Q\left(\frac{\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right), \end{aligned} \quad (\text{П4.3})$$

где $Q(x) = \int_x^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2) du$. Обозначим для удобства записи $p = Q(\Delta/\sqrt{2N_0})$. С учетом того, что $\Delta = \sqrt{6E/(q-1)}$ [см. равенство (2.39)], получаем

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{3E}{N_0} \frac{1}{q-1}}\right). \quad (\text{П4.4})$$

Подставляя (П4.2) и (П4.3) в (П4.1), получаем

$$\begin{aligned} P_e(\text{тип 1}) &= 1 - (1 - 2p)(1 - p) = 3p - 2p^2, \\ P_e(\text{тип 2}) &= 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2, \\ P_e(\text{тип 3}) &= 1 - (1 - 2p)^2 = 4p - 4p^2, \end{aligned} \quad (\text{П4.5})$$

где вероятность p определена равенством (П4.4).

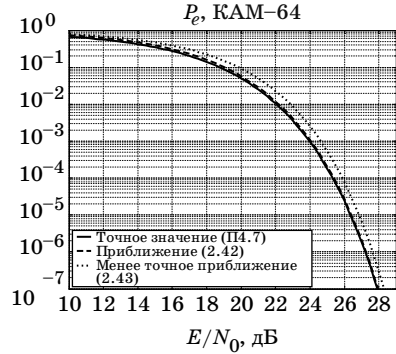
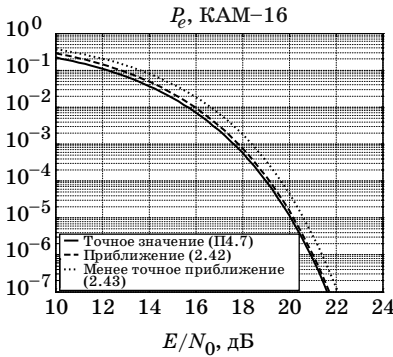


Рис. П4.2. Графики вероятности ошибки и двух верхних границ вероятности ошибки для КАМ-16 (слева) и КАМ-64 (справа)

Найдем теперь вероятности передачи сигналов, относящиеся к различным типам. Полагая равновероятную передачу всех сигналов, нетрудно видеть, что

$$P(\text{тип 1}) = 4(\sqrt{q} - 2) / q ,$$

$$P(\text{тип 2}) = 4 / q , \quad (\text{П4.6})$$

$$P(\text{тип 3}) = 1 - P(\text{тип 1}) - P(\text{тип 2}) = 1 - 4 / \sqrt{q} + 4 / q .$$

Безусловная вероятность ошибки вычисляется как

$$P_e = P_e(\text{тип 1})P(\text{тип 1}) + P_e(\text{тип 2})P(\text{тип 2}) + P_e(\text{тип 3})P(\text{тип 3}) ,$$

и окончательно, подставляя в это выражение правые части (П4.5), (П4.6) и (П.4.4), после несложных преобразований получаем

$$P_e = \frac{4(\sqrt{q} - 1)}{q} Q \left(\sqrt{\frac{3E}{N_0} \frac{1}{q-1}} \right) \left(\sqrt{q} - (\sqrt{q} - 1) Q \left(\sqrt{\frac{3E}{N_0} \frac{1}{q-1}} \right) \right) . \quad (\text{П4.7})$$

На рис. П4.2 показаны графики зависимости вероятности ошибки и ее верхних границ в зависимости от отношения сигнал/шум для $q = 16$ и $q = 64$. Видно, что точность верхних границ возрастает с увеличением числа сигналов q . Особенно точной оказывается граница, вычисленная по формуле (2.42).

Граница Чернова

Граница, или неравенство, Чернова дает оценку сверху для вероятности большого отклонения случайной величины. Эта граница широко используется для оценки вероятности ошибки в различных условиях и упоминается практически в каждой монографии или учебнике по теории связи, теории кодирования и теории информации.

Пусть Z – некоторая случайная величина. Требуется оценить вероятность $P = \Pr[Z \geq A]$, где A – некоторая константа. По определению эта вероятность равна $P = \int_A^\infty w_Z(x)dx$, где $w_Z(\cdot)$ – функция плотности вероятности случайной величины Z . Непосредственное вычисление этой вероятности может представлять собой проблему. Например, это может быть потому, что получить явное выражение для функции плотности вероятности $w_Z(\cdot)$ затруднительно или невозможно. Граница Чернова позволяет сравнительно просто вычислить верхнюю оценку этой вероятности.

Для построения границы Чернова для вероятности P рассмотрим функцию единичного скачка, определенную как

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{П5.1})$$

Тогда нетрудно заметить, что поскольку $e(x - A) = 1$, если $x \geq A$, и принимает нулевые значения во всех остальных случаях, то

$$P = \int_A^\infty w_Z(x)dx = \int_{-\infty}^\infty e(x - A)w_Z(x)dx = \overline{e(Z - A)}, \quad (\text{П5.2})$$

черта сверху в (П5.2) как обычно обозначает операцию усреднения. Для функции $e(x)$, определенной равенством (П5.1), справедливо неравенство $e(x) < \exp(\lambda x)$ и, следовательно, $e(x - A) < \exp(\lambda(x - A))$ для любого значения параметра $\lambda > 0$ (рис. П5.1).

Подстановка этого неравенства в (П5.2) приводит к выражению

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^\infty e(x - A)w_Z(x)dx < \int_{-\infty}^\infty \exp(\lambda(x - A))w_Z(x)dx = \\ &= e^{-\lambda A} \int_{-\infty}^\infty \exp(\lambda x)w_Z(x)dx = e^{-\lambda A} g_Z(\lambda), \end{aligned} \quad (\text{П5.3})$$

где функция $g_Z(\lambda)$ называется производящей функцией моментов случайной величины Z ; она определена следующим равенством

$$g_z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda x) w_Z(x) dx = \overline{\exp(\lambda Z)}. \quad (\text{П5.4})$$

В общем случае интеграл в правой части выражения (П5.4) может расходиться, если значение параметра λ слишком велико. Обозначим через λ_0 наибольшее значение параметра λ , при котором интеграл в (П5.4) сходится. Таким образом, можно записать, что $P \leq e^{-\lambda A} g_Z(\lambda)$, где $\lambda_0 > \lambda > 0$. Поскольку значение параметра λ сможет быть выбрано любым в указанном интервале, то его можно назначить таким, чтобы граница стала наиболее точной. Поэтому окончательное выражение для границы Чернова принимает вид

$$P = \Pr[Z > A] < \min_{\lambda_0 > \lambda > 0} e^{-\lambda A} g_z(\lambda). \quad (\text{П5.5})$$

Отдельно рассмотрим частный случай, когда случайная величина Z представляет собой сумму нескольких независимых одинаково распределенных случайных величин, т. е. $Z = \sum_{l=1}^L u_l$, где случайные величины u_l независимы и одинаково распределены. В этом случае с использованием определения (П5.4) получаем

$$\begin{aligned} g_z(\lambda) &= \overline{\exp(\lambda Z)} = \overline{\exp\left(\lambda \sum_{l=1}^L u_l\right)} = \overline{\prod_{l=1}^L \exp(\lambda u_l)} = \\ &= \prod_{l=1}^L \overline{\exp(\lambda u_l)} = \prod_{l=1}^L g_u(\lambda) = g_u(\lambda)^L, \end{aligned} \quad (\text{П5.6})$$

где $g_u(\lambda) = \overline{\exp(\lambda u)}$ – производящая функция моментов случайной величины u . Собирая вместе выражения (П5.5) и (П5.6), получаем

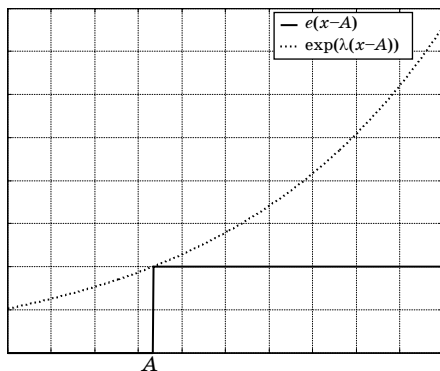


Рис. П5.1. Функция единичного скачка $e(x-A)$ и ее верхняя граница $\exp(\lambda(x-A))$, $\lambda > 0$

границу Чернова для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$P = \Pr[\sum_{l=1}^L u_l > A] < \min_{\lambda_0 > \lambda > 0} e^{-\lambda A} g_u(\lambda)^L. \quad (\text{П5.7})$$

Вычисление границ (П5.5) и (П5.7) в ряде практических случаев оказывается значительно более простой задачей, чем вычисление точного значения вероятности P .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Возенкрафт Дж., Джекобс И.* Теоретические основы техники связи. М.: Мир, 1969.
2. *Финк Л. М.* Передача дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970.
3. *Стейн С., Джонс Дж.* Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений. М.: Связь, 1971.
4. Теория электрической связи / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров; ред. Д. Д. Кловский. М.: Радио и связь, 1999.
5. *Прокис Дж.* Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000.
6. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.; СПб.; Киев: Издательский дом «Вильямс», 2003.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Введение и математические основы	4
1.1. Структура системы передачи информации. Модели каналов и помех	4
1.2. Геометрическое представление сигналов	9
1.3. Периодические сигналы и ряд Фурье	15
1.4. Комплексная форма ряда Фурье	17
1.5. Преобразование Фурье и спектры сигналов	19
1.6. Свойства преобразования Фурье	26
1.7. Частные случаи вычисления спектра	29
1.8. Стационарные гауссовские случайные процессы	32
1.9. Белый гауссовский шум	37
Упражнения	39
2. Оптимальный прием и основные виды дискретной модуляции	41
2.1. Оптимальный прием дискретных сигналов	41
2.2. Вероятность ошибки при оптимальном приеме дискретных сигналов	44
2.3. Оптимальный прием в канале с аддитивным белым гауссовским шумом	49
2.4. Вероятность ошибки при передаче двоичных сигналов в канале с аддитивным белым гауссовским шумом	56
2.5. Вероятность ошибки для различных систем двоичных сигналов в канале с аддитивным белым гауссовским шумом	60
2.6. Дискретная амплитудная модуляция. Вероятность ошибки ..	64
2.7. Квадратурная амплитудная модуляция. Вероятность ошибки	68
2.8. Фазовая модуляция. Вероятность ошибки	74
2.9. Частотная модуляция. Вероятность ошибки	78
2.10. Предельные характеристики достижимые при использовании ортогональных сигналов	84
2.11. Сравнительная характеристика АМ, КАМ, ФМ и ЧМ	86
2.12. Частотное разделение с использованием ортогональных несущих (OFDM)	92
2.13. Тактовая синхронизация. Устройство установления тактовой синхронизации	99
2.14. Влияние неточности тактовой синхронизации на вероятность ошибки	104
Упражнения	107
3. Некоторые модели каналов	109
3.1. Канал с аддитивным белым гауссовским шумом и случайной фазой	109
3.2. Оптимальный прием дискретных ЧМ-сигналов в канале со случайной фазой	110

3.3. Сигналы с ортогональными огибающими. Оптимальный прием в канале со случайной фазой	115
3.4. Вероятность ошибки при оптимальном приеме в канале со случайной фазой	117
3.5. Относительная фазовая модуляция	121
3.6. Каналы с замираниями. Распределения Релея и Райса	127
3.7. Канал с замираниями. Модель с рассеивателями.....	130
3.8. Вероятность ошибки при передаче ЧМ-сигналов по каналу с замираниями	133
3.9. Передача с разнесением по каналу с замираниями. Перемежение	139
3.10. Сравнительная характеристика методов передачи в радиоканалах	144
3.11. Каналы с межсимвольной интерференцией	146
3.12. Оптимальный прием в канале с межсимвольной интерференцией	150
<i>Упражнения</i>	157
Приложение 1. Метод ортогонализации Грама – Шмидта	158
Приложение 2. Сигналы с прямоугольными огибающими	162
Приложение 3. О моделировании передачи сигналов заданных отсчетами во временной области.....	172
Приложение 4. Точное выражение для вероятности ошибки для КАМ.....	175
Приложение 5. Граница Чернова.....	178
Литература	181

Учебное издание

Трофимов Андрей Николаевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ

Учебное пособие

Редактор *А. В. Подчепаева*
Компьютерная верстка *С. Б. Мацапуры*

Сдано в набор 18.02.15. Подписано к печати 07.05.15.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 10,7.
Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 100 экз. Заказ № 162.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67