ברוכים הבאים לקורס אלגוריתמים 2 ☺

שחר אנגל

shaharbel0@gmail.com

תרגול- ימי שני 14-16 וימי חמישי 13-15

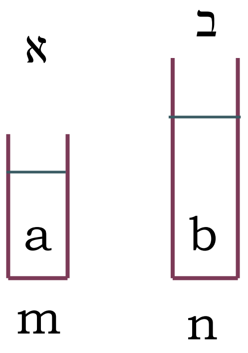
נושא התרגול

- בעיית הבקבוקים

תיאור הבעיה

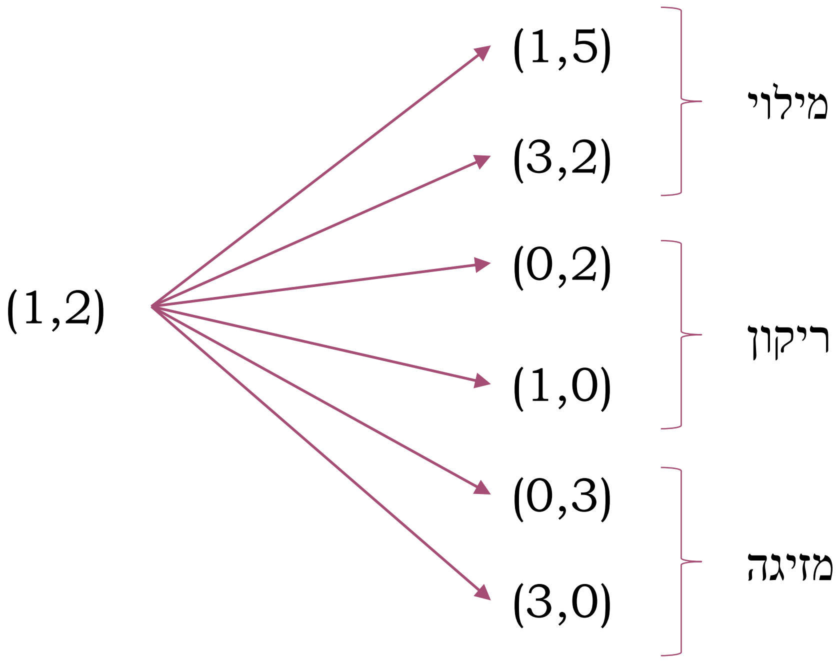
- נתונים 2 בקבוקים בשני גדלים שונים: בקבוק א' בגודל 5 ליטרים, ובקבוק ב' בגודל 3 ליטרים.
- נרצה למלא את בקבוק א' ב-4 ליטרים.
- הפעולות המותרות:
  - למלא בקבוק עד הסוף
  - לרוקן בקבוק עד הסוף
  - למזוג מבקבוק אחד לבקבוק שני
- איך נעשה זאת?

- המצב ההתחלתי יכול להיות כל מצב אפשרי: או שנתחיל ממצב $(0,0)$ שאומר ששני הבקבוקים ריקים, או לדוגמא אפשר להתחיל ממצב $(0,1)$ שאומר שבקבוק א' ריק, אבל בקבוק ב' מלא ב-1 ליטר.
- המטרה הסופית: לבדוק האם מכל מצב התחלתי אפשר להגיע למצב יעד כלשהו, עבור כל מצב יעד שנבחר.
- נגדיר רגע תיאור בעיה כללי: יש לנו 2 בקבוקים בגדלים n,m המלאים בתכולה כלשהי (a,b):

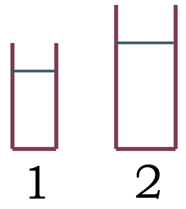


- כעת, נגדיר את הפעולות המותרות:
  - מילוי בקבוק א’- (m,b)
  - מילוי בקבוק ב’- (a,n)
  - ריקון בקבוק א’-$(0,b)$
  - ריקון בקבוק ב’- $(a,0)$
  - מזיגה מבקבוק א' ל-ב' – $(a+b-\min(n,a+b), \min(n,a+b))$
  - מזיגה מבקבוק ב' לבקבוק א’-$(\min(a+b,m), a+b-\min(a+b,m))$

- המשימה שלנו היום היא לייצר את גרף הבקבוקים. הגרף מכיל קודקודים וצלעות, כך שבעצם מכל קודקוד נסמן לאיזה קודקוד אחר ניתן להגיע.
- <u>לדוגמא:</u>
- מהקודקוד (1,2) לאן ניתן להגיע?



- כל צלע מקשרת לנו בין קודקוד לקודקוד

- בגרף הבקבוקים נרצה לעשות זאת עבור כל מצב אפשרי כמו: מ-(0,0) לאן ניתן לעבור, מ-(0,1) לאן ניתן לעבור וכו'.
- בשלב הראשוני נרצה לדעת רק לאן ניתן להגיע ממצב מסויים, ולא את כל המסלול (שאותו נראה בשבוע הבא בעז"ה)
- איך נייצג גרף במחשב?
- ע"י מטריצת שכנויות
- <u>לדוגמא:</u>
- עבור 

נקבל את המצבים הבאים:

(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)

- נשים לב שמכל מצב ניתן להגיע לכל אחד מהמצבים הללו ולכן כדי ליצור טבלת קשרים נצטרך מטריצה במימד רביעי- קורדינאטות i,j הן המצב שממנו באים, קורדינאטות k,l הן המצב שאליו מגיעים, ובכל תא במטריצה i,j,k,l נרשום 0 אם אין קשר בין המצבים ו-1 אם יש קשר.
- זה מאוד מסובך.. אז ננסה לצמצם את זה..
- איך?

- נצמצם את מטריצת השכנויות

(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)

למערך

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)

- וכעת נוכל לרשום מטריצת שכנויות דו מימדית, ולמלא אותה באחדות בכל תא שיש קשר בין המצבים שלו:

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,0)	1	0	1	1	0	0
(0,1)	1	1	1	1	1	0
(0,2)	1	0	1	0	1	1
(1,0)	1	1	0	1	0	1
(1,1)	0	1	1	1	1	1
(1,2)	0	0	1	1	0	1

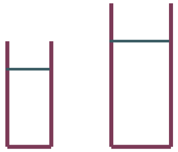
- בעצם, באלכסון קיבלנו שיש קשר בין מצב לעצמו. השאלה האם אפשר להגיע ממצב לעצמו היא שאלה פילוסופית. לכן, זה לא מאוד משנה לנו האם יהיה שם 0 או 1.
- מתי זה ישנה לנו?
  - תלוי בנו. אם בשימוש נוסף במטריצה יעזור לנו שיש באלכסון 1, אז נשים 1, אבל אם נצטרך 0 נשים 0.
- דבר נוסף, מה נשים באינדקסים של המטריצה? הם לא יכולים לכלול 2 קורדינאטות.. אז איך נבצע המרה?

- ננסה להבין את עיקרון ההמרה על ידי דוגמא:

(0,0) 0	(0,1) 1	(0,2) 2	(0,3) 3
(1,0) 4	(1,1) 5	(1,2) 6	(1,3) 7
(2,0) 8	(2,1) 9	(2,2) 10	(2,3) 11

- כל תא במטריצה בנוי כך: k (i,j) ואנו נרצה להבין איך לבצע המרה בין (i,j) לבין ה-k המתאים.
- במעבר משורה לשורה אנו קופצים בקפיצות של 4 - לפי מספר העמודות. וכדי להגיע לעמודה ספציפית, נוסיף את ה-j שבכל שורה.
- לדוגמא: כדי להגיע לתא $k=6$, נבצע $(4*i)+j = (4*1)+2 = 6$
- אבל איך נדע כמה עמודות יש לנו?
- המטריצה למעלה מתאימה לבעיה  . כמות המצבים שאנו מקבלים מבעיה זו היא $(3+1)*(2+1)=12$.

3 2

- סה"כ ניתן לומר שמספר העמודות הוא $(3+1)$ או עבור בעיה כללית יותר  $(n+1)$ ולכן באופן כללי נרשום: $k = (n+1)*i + j$

n m

- מכאן נסיק ש:
  - $i = k/(n+1)$ כי זה נותן לנו בדיוק את השלם
  - $j = k\%(n+1)$ כי זה נותן לנו את שארית החלוקה

אז מה צריך לתכנת?

- מטריצת שכנויות של גרף הבקבוקים
  - עבור 2 בקבוקים: 1 ליטרים ו-2 ליטרים

בהצלחה ☺