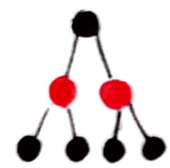
ג'ורדן ברז
336165733

מבני נתונים
מטלה 4

שאלה ①: (א): <u>טענה לא נכונה</u>: עץ אדום-שחור חייב להתחיל עם שורש שחור.

לכן העץ הזה הוא דוגמה נגדית: כי תת-עץ השמאלי שלו



עץ אדום-שחור תקין

לא תקין

עץ אדום-שחור לא תקין

■

(ב): <u>הטענה נכונה</u>: נניח בשלילה שקיים צומת עם בן יחיד שחור.
זאת אומרת שהמסלול איפה הוא נמצא יכלול יותר צמתים שחורים מהמסלול של הבן שלו (ל-null). ולכן זאת סתירה לתנאי הרביעי של עץ אדום-שחור. ■

(ג) <u>הטענה נכונה</u>: יהי עץ אדום-שחור בגובה k.
אחד התנאים של עצים אדום-שחור הוא שלא יכול להיות 2 צמתים אדומים ברצף.
לכן, לפחות כל 2 צמתים ברצף חייב להיות צומת שחור אחד, כלומר לכל k צמתים ברצף חייב להיות לפחות $\frac{k}{2}$ צמתים שחורים ועבור גובה אי-זוגי נקבל $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ צמתים שחורים בכל תת-עץ. ■

שאלה ②: (א) <u>הטענה נכונה</u>: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינארי כך שלכל צומת k מתקיים שהפרשי הגבהים של תת-עץ הימני ותת-עץ השמאלי הוא לכל היותר 1.
לכן תת-עץ השמאלי של עץ AVL גם שומר על המיון של עץ חיפוש בינארי וגם מקיים את התנאי של הפרשי הגבהים, ולכן גם עץ AVL ■

שאלה 2 (המשך):

ב הטענה נכונה: על פי הגדרת עץ AVL, לכל צומת בגובה K יש הפרש של לכל היותר 1 בין גובה התת-עץ הימני והתת-עץ השמאלי שלו. לכן במקרה הגרוע ביותר הבנים של K יהיו בגובה של $K-1$ והשני בגובה של $K-2$, וזאת כמו לכל אחד וכו'..

לכן במסלול הקצר ביותר בעץ יהיה לפחות $\frac{K}{2}$ רמות. ולכן עבור n צמתים נקבל כי $\frac{K}{2} \geq n$, כלומר המספר של צמתים יהיה לפחות $2^{\frac{K}{2}}$.

$$\log(5) - \log(4) < \frac{1}{2} \iff K(\log(5) - \log(4)) \leq \frac{K}{2} \quad (K \geq 0)$$

$$\iff K \cdot \log\left(\frac{5}{4}\right) \leq \frac{K}{2} \log(2)$$

$$\iff \log\left(\frac{5}{4}\right)^K \leq \log(2)^{\frac{K}{2}}$$

$$\iff \left(\frac{5}{4}\right)^K \leq 2^{\frac{K}{2}}$$

אזי $n \geq 2^{\frac{K}{2}}$ ולכן $n \geq \left(\frac{5}{4}\right)^K$ ■

שאלה 3: יהי עץ BVL עץ בינארי המקיים שלכל צומת ההפרש בין הגבהים של תתי-עצים של הצומת הוא לכל היותר 2.

נגדיר את n_K את מספר המינימלי של צמתים עבור גובה K. אז n_K מקיים את:

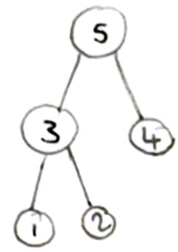
$$n_K \geq 2 \cdot n_{K-3} \geq 2 \cdot 2n_{K-6} \geq \dots \geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot c \Leftarrow n_{K-3} \geq 2 \cdot n_{K-6} \Leftarrow \begin{cases} n_K = n_{K-1} + n_{K-3} \\ n_K \geq 2n_{K-3} \end{cases}$$

עבור i איטרציות: $n_K \geq 2^i \cdot c$, כאשר c הוא מספר המינימלי של צמתים במקרה הבסיס, ו- $c \geq 1$. הרקורסיה נסתיים עבור $K-3-3i=0 \Rightarrow i = \frac{K-3}{3}$

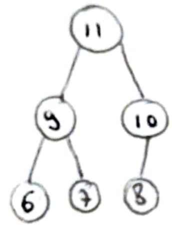
לכן $n_K \geq 2^{\frac{K-3}{3}} \Rightarrow K \leq 3(1+\log(n_K)) \Rightarrow K = O(\log(n))$ ■

שאלה 4:

א)

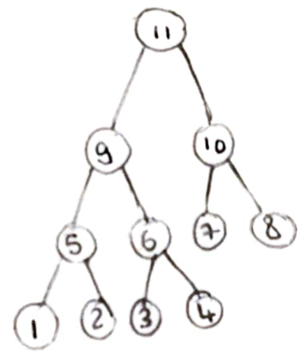


ערמה בינומית
A



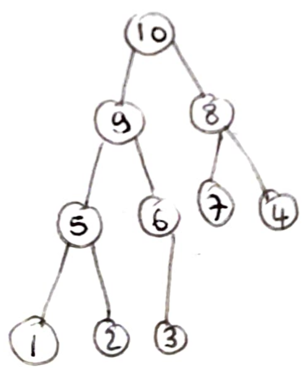
ערמה בינומית
B

ב)



ערמה בינומית C

ג) מחיקת 11:



ד) עבור עץ בגובה h, סיבוכיות של הוספת איבר ומחיקת איבר היא $O(h)$.

לכן סיבוכיות של חיבור עץ ערימה בינומית של n צמתים יהיה שווה ל $O(n.h)$.