

Principles
1. Action

1 : הוכח כי הפונקציה :

$$\log(f(n)) = \Theta(\log(g(n))) \iff$$

$$\begin{cases} f(n) = (\sqrt{n})^{\sqrt{n}} \\ g(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor! \end{cases}$$

1 0586

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^n)^{n^n}}{[n^n]!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x!} = \infty$$

$$\therefore x = \sqrt{n} \quad \text{[3.2]}$$

$$g(n) = \Omega(f(n)) \quad \text{iff} \quad f(n) = O(g(n))$$

108

$$f_n \neq O(g(n))$$

1081 $f(n) \neq \Omega(g(n))$ f2k

• $\log(f(n)) \neq \Theta(\log(g(n)))$ fsc

$$T(1) = 2$$

$$T(n) = \left(T\left(\frac{n}{2}\right)\right)^2 \cdot 2^n$$

$$T(n) = 2^{\theta(n)} \quad \therefore \text{SK}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= (T(\frac{n}{2}))^2 \cdot 2^n \\ &= (T(\frac{n}{4}) \cdot 2^{\frac{n}{2}}) \cdot 2^n \\ &= (T(\frac{n}{4})^2) \cdot 2^{\frac{3n}{2}} \\ &= (T(\frac{n}{8})^2 \cdot 2^{\frac{n}{4}}) \cdot 2^{\frac{3n}{2}} \\ &= (T(\frac{n}{8})^2) \cdot 2^{\frac{7n}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left(T \left(\frac{n}{2^k} \right)^2 \right) \cdot 2^{\frac{kn}{2^k}}$$

$$= (T(1))^2 \cdot 2^{n \log_2 n} : K = \log_2(n) \quad \text{Ans}$$

$$= (2^2) \cdot 2^{n \log_2 2} = \boxed{4n^n} : \text{JSD, } T(1) = 2 \quad \text{JSDIC}$$

$$T(n) = 2^{O(n)} \quad : n = 0 \quad \gamma \text{ (N)} \quad | \sqrt{1}$$

$$g(n) = O(n) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(n), \quad f(g(n)) = O(n) \quad : 3 \text{ n586}$$

$$(1) \quad f(m) = \Omega(m) \Leftrightarrow f(m) \geq c m, \quad \forall m \geq m_0$$

$$m_0 \in \mathbb{N}^+ - \exists c \in \mathbb{R} \exists N \text{ s.t. } \forall m \geq N, f(m) \geq c m$$

$$(2) \quad f(g(n)) = O(n) \Leftrightarrow f(g(n)) \leq K n, \quad \forall n \geq n_0$$

$$n_0 \in \mathbb{N}^+ - \exists K \in \mathbb{R} \exists N \text{ s.t. } \forall n \geq N, f(g(n)) \leq K n$$

$$f(g(n)) \geq c \cdot g(n) \Leftrightarrow f(m) \geq c m, \quad (1) \text{ of}$$

$$c \cdot g(n) \leq f(g(n)) \leq K \cdot n$$

$$g(n) = O(f(g(n))) \text{ of}$$

$$= O(n)$$

$$f_2 > f_6 > f_5 > f_4 > f_7 > f_1 > f_3 \quad : \text{asymptotic order} : 2 \text{ n ske}$$

$$2^{3^n} > n^n > 4^n > 2^{\log_{\sqrt{2}}(n)} > \log_3(3^n \cdot n^2) > 2019 > \frac{1}{n^{2020}} \quad : \text{asymptotic}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_2(n)}{f_6(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3^n}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{3^n})}{\log(n^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \log(2)}{n \log(n)} \quad : \text{asymptotic}$$

$$= \log(2) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n \log(n)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \log(2) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^n)'}{(n \log(n))'} \quad (*)$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a) \Rightarrow (3^n)' = 3^n \log(3)$$

$$(n \log(n))' : f(n) = n, g(n) = \log(n), (f \cdot g)' = f'g + fg' = \log(n) + \frac{1}{n} \cdot n = \log(n) + 1$$

$$(*) = \log(2) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \log(3)}{\log(n) + 1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \log(2) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \log^2(3)}{\frac{1}{n}} = \log(2) \cdot \log^2(3) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\frac{1}{n}} = \infty$$

$$\bullet \quad O f_2(n) = f_6(n) \quad \text{not}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_6(n)}{f_5(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^n)}{\log(4^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(n)}{n \log(4)}$$

$$\bullet \quad O f_6(n) = f_5(n) \quad \bullet$$

$$= \frac{1}{\log(4)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n) = \infty$$

$$\bullet \quad O f_6(n) = f_5(n) \quad \text{not}$$

$$c^{\log_c(n)} = n$$

asymptotic order

$$f_4(n) = 2^{\log_{\sqrt{2}}(n)}$$

$$\bullet \quad O f_5(n) = f_4(n) \quad \bullet$$

$$f_4(n) = (\sqrt{2})^{2 \log_{\sqrt{2}}(n)} = (\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}(n^2)} = n^2$$

asymptotic

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_5(n)}{f_4(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n^2} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \ln(4)}{2n} = \ln(4) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \ln(4)}{2} = \infty \quad \text{pf}$$

$$\bullet O f_5(n) = f_4(n) \quad \text{pf}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_4(n)}{f_7(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\log_3(3^n \cdot n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\log_3(3^n) + \log_3(n^2)}$$

$$\therefore O f_4(n) = f_7(n) \quad \bullet$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n \log_3(3) + 2 \log_3(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n + 2 \log_3(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{n} + \frac{2 \log_3(n)}{n}} = \infty$$

$$\bullet O f_4(n) = f_7(n) \quad \text{pf}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(3^n \cdot n^2)}{2019^{2020}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(3^n) + \log_3(n^2)}{2019^{2020}}$$

$$\therefore O f_7(n) = f_1(n) \quad \bullet$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_3(3) + 2 \log_3(n)}{2019^{2020}} = \frac{1}{2019^{2020}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n + 2 \log_3(n) = \infty$$

$$\bullet O f_7(n) = f_1(n) \quad \text{pf}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2019^{2020}}{\frac{1}{n^{2020}}} = 2019^{2020} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2020} = \infty$$

$$\therefore O f_1(n) = f_3(n) \quad \bullet$$

$$\bullet O f_1(n) = f_3(n) \quad \text{pf}$$

A: כזי שהסוגיה גורמת לנו בעיה נוספת
 כזי שהיא גורמת לנו בעיה נוספת
 כזי שהיא גורמת לנו בעיה נוספת

$n = 2^3$ $\Rightarrow \log(n) = \log(2^3) \Rightarrow \log(n) = 3 \log(2)$

$\Rightarrow k = \frac{\log(n)}{\log(2^3)}$

$\Rightarrow k = \log(n-2^3) \Rightarrow O(\log(n))$

B: עבור $i=1$ הסוגיה $\text{for}(j=1, j \leq i, j++)$ גורמת לנו בעיה נוספת

עבור $i=2$ היא גורמת לנו בעיה נוספת

עבור $i=n$ היא גורמת לנו בעיה נוספת

בעיה נוספת $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

כן, סך הכל הסוגיה גורמת לנו בעיה נוספת

אם בעיה היא קורא לבינוקציה $\text{mystery1}(n)$ סיבוכיותה $O(\log(n))$

$\log(n) + 2\log(n) + 3\log(n) + \dots + n\log(n)$

כן, נקודה

$\sum_{i=1}^n i \log(n) = \log(n) \cdot \sum_{i=1}^n i = \log(n) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2 \log(n))$

C: כל עוד $x < i$ מכפילים את x ב-2. כל יום $\log(i)$ פעמים

אם i זוגי, חלק הראשון של הקוד שווה ל- $O(\log(i))$

חלק השני x גדול מ- i , ולכן i^2

למעשה $i > 2$ נכנס תמיד שורש 2

כזי שנה ינוץ בעיה נוספת, זריק $i=2$

כזי שנה ינוץ בעיה נוספת, זריק $i=2^2$

כזי שנה ינוץ k בעיה נוספת, זריק $i=2^k$

$O(\log(i) + \log(i)) = O(\log(i))$

$k = \log(i-2^k) = O(\log(i)) \Rightarrow$

mystery2(1) 2x 101, mystery2(n-1) 5x1, mystery2(n) y'n n 3 ipn 0

$\therefore |D|, O(\text{mystery}(i)) = \log(i)$, $c \rightarrow$ some no

$$O(\text{mystery2}(n) + \text{mystery2}(n-1) + \dots + \text{mystery2}(1)) = O(\log(n) + \log(n-1) + \dots + \log(1))$$

$$\log(n) + \log(n-1) + \dots + \log(1) = \log(n \times (n-1) \times \dots \times 1) = \log(n!)$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

1901, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 25

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log(n!) &= \log\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \\ &= \log(\sqrt{2\pi n}) + \log\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= n \log(n) - n \log(e) + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(n) \\ &= O\left(n \log(n) - n + \frac{1}{2} \log(n)\right) \\ &= O(n \log(n)) \end{aligned}$$

: 4 nkte

ב. מנתפס אם האינדקס של המחרוזת arr אינו נמצא ב- K אז המחרוזת n פרס, $O(\log(n))$ של הסיבוכיות היא אכן \log_2 , binary search פרס היינו סוג פשוט
המחשבון חשבו'ק - arr.

נכנסים ל- $O(\log(n))$ פעמים, m הוא מספר האינדקסים של k שמתקיים $arr[i] \leq k$.
 כל פעם נבחר $low = 2^i$ ונבדוק אם $arr[low] \leq k$.
 אם כן, נבדוק את האינדקס $log(i)$ ונבדוק אם $arr[low] \leq k$.
 אם כן, נבדוק את האינדקס $high$ ונבדוק אם $arr[high] \leq k$.
 אם כן, נבדוק את האינדקס $high$ ונבדוק אם $arr[high] \leq k$.
 אם כן, נבדוק את האינדקס $high$ ונבדוק אם $arr[high] \leq k$.

1. חישוב, פרמטר high - 1 low פרמטר פרמטר $2^i - 1$ 2^{i-1} binary search $\log(n)$ n $16p$

$$i2m \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} \quad \checkmark \quad O(\log(i) + \log(i) + \log(i)) = O(\log(i)) \quad : 148-7 \quad 128$$

$O(\log(n))$ ←