PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 1
Automne 2018

Retour en classe

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. FAUX. Le vecteur vitesse du satellite change d'orientation (même si son module demeure constant) lorsqu'il parcourt une trajectoire circulaire, ce qui implique que la somme des forces sur le satellite est non nulle et donc que le système n'est pas pseudo-isolé. Ici, c'est le poids du satellite dirigé vers la Terre qui le fait changer de direction.

10 points de compréhension

B. Puisque la voiture est immobile (stationnée), il s'agit de frottement statique. En général, il n'existe pas de lien entre le frottement statique f_s et la normale N. Tout ce qu'on peut affirmer (sans poser les équations de l'équilibre statique), c'est que $0 \leq f_s \leq \mu_s N$.

10 points de compréhension

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

C. Le vide à l'intérieur de la demi-sphère n'exerce aucune force (pas de matière, donc pas de pression sur la paroi interne). Par contre, l'air ambiant exerce une force sur la demi-sphère. Parce qu'on suppose que la pression ambiante est uniforme, cette est force est égale à la pression multipliée par la section de la demi-sphère, i.e. un disque de rayon R. On a donc :

$$\boxed{F = p_0 A_\perp = p_0 \pi R^2 = 79{,}6\,\mathrm{kN}}$$

15 points de compréhension et de calculs

D. On utilise les angles de 15 et 73 degrés pour projeter le vecteur tension dirigé de A vers C.

$$T_x = T\sin 15°\sin 73° = 1{,}39\,\mathrm{kN}$$

$$T_y = -T\cos 15° = -5{,}41\,\mathrm{kN}$$

$$T_z = T\sin 15°\cos 73° = 0{,}424\,\mathrm{kN}$$

$$\boxed{\vec{T} = \left(1{,}39\vec{i} - 5{,}41\vec{j} + 0{,}424\vec{k}\right)\mathrm{kN}}$$

15 points de calculs

Q2 – Solution (1/2)

A. Force équivalente = résultante des deux forces :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{B} + \vec{C} = \left([B + C_x]\vec{\imath} - C_y\vec{\jmath} - C_z\vec{k}\right)\mathrm{N} = \left(35{,}0\vec{\imath} - 12{,}0\vec{\jmath} - 16{,}0\vec{k}\right)\mathrm{N}}$$

Couple équivalent au point A :

$$\vec{M}_A^R = \vec{M} + \vec{r}_{AB} \times \vec{B} + \vec{r}_{AC} \times \vec{C}$$

$$\vec{M} = M\vec{\imath} = 1{,}2\vec{\imath}\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}070 & 0 & 0{,}075 \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0{,}075B\vec{\jmath})\mathrm{N \cdot m}$$

$$\vec{r}_{AC} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0{,}070 & 0 & 0{,}035 \\ C_x & -C_y & -C_z \end{vmatrix} = \left(0{,}035C_y\vec{\imath} + [0{,}035C_x + 0{,}070C_z]\vec{\jmath} - 0{,}070C_y\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{M}_A^R &= \left([M + 0{,}035C_y]\vec{\imath} + [0{,}075B + 0{,}035C_x + 0{,}070C_z]\vec{\jmath} - 0{,}070C_y\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m} \\ &= \left(1{,}62\vec{\imath} + 3{,}35\vec{\jmath} - 0{,}840\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m} \end{aligned}}$$

30 points de calculs

Q2 – Solution (2/2)

5 points de compréhension

B. Puisque la **composante en *y* du couple équivalent est positive**, alors le taille-crayon a tendance à tourner en **sens antihoraire** autour de cet axe.

C. Il faut projeter le couple équivalent sur l'axe AC à l'aide du vecteur unitaire.

$$\vec{M}_{AC}^{R} = \left(\vec{M}_{A}^{R} \cdot \hat{u}_{AC}\right)\hat{u}_{AC} \qquad \vec{M}_{A}^{R} = \left(1{,}62\vec{\imath} + 3{,}35\vec{\jmath} - 0{,}840\vec{k}\right)\,\mathrm{N \cdot m}$$

Vecteur unitaire de A à C :

$$\hat{u}_{AC} = \frac{0{,}070\vec{\imath} + 0{,}035\vec{k}}{\sqrt{0{,}070^2 + 0{,}035^2}} = 0{,}8944\vec{\imath} + 0{,}4472\vec{k}$$

Projection :

$$\vec{M}_{A}^{R} \cdot \hat{u}_{AC} = 0{,}8944 \cdot 1{,}62 - 0{,}4472 \cdot 0{,}840 = 1{,}073\ \mathrm{N \cdot m}$$

Vecteur moment du couple par rapport à l'axe AC :

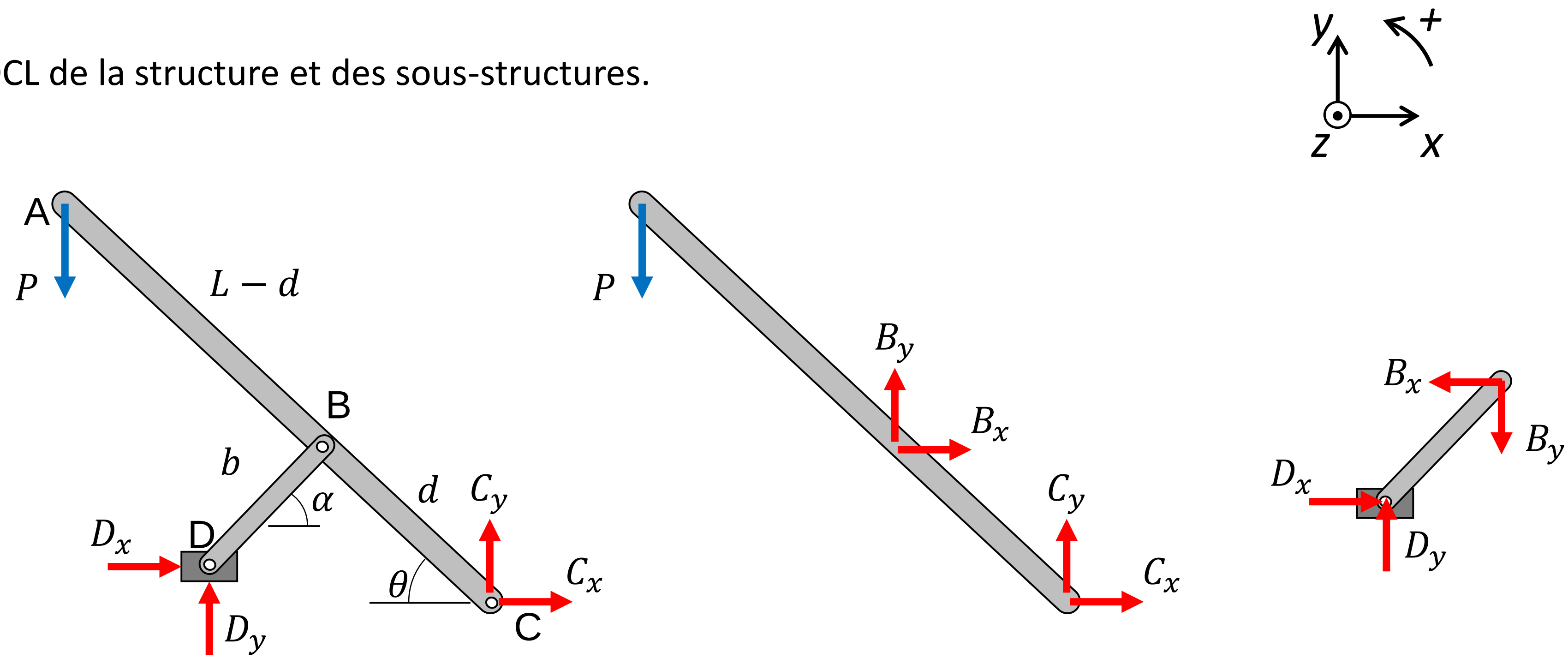
$$\vec{M}_{AC}^{R} = \left(\vec{M}_{A}^{R} \cdot \hat{u}_{AC}\right)\hat{u}_{AC} = 1{,}073\left(0{,}8944\vec{\imath} + 0{,}4472\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{M}_{AC}^{R} = \left(0{,}960\vec{\imath} + 0{,}480\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m}}$$

15 points de calculs

Q3 – Solution (1/3)

A. DCL de la structure et des sous-structures.



Éléments importants

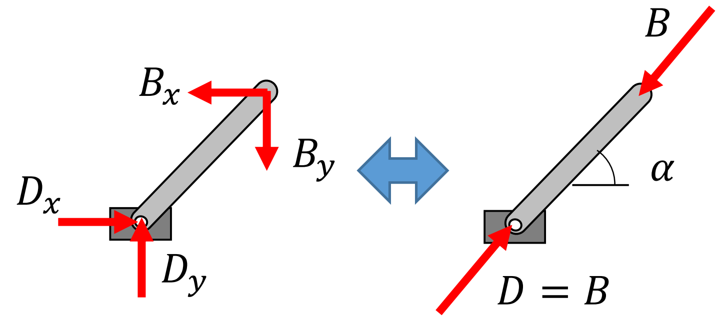
- Point C : un pivot donc deux forces perpendiculaires.
- Point B : un pivot donc deux forces perpendiculaires. Le sens des réactions Bx et By est arbitraire, tant que le principe action-réaction est respecté entre les membrures ABC et BD.
- Point D : Dx est la normale due aux parois du guide. Dy est la normale que le corps E fait sur le bloc D.

15 points de compréhension

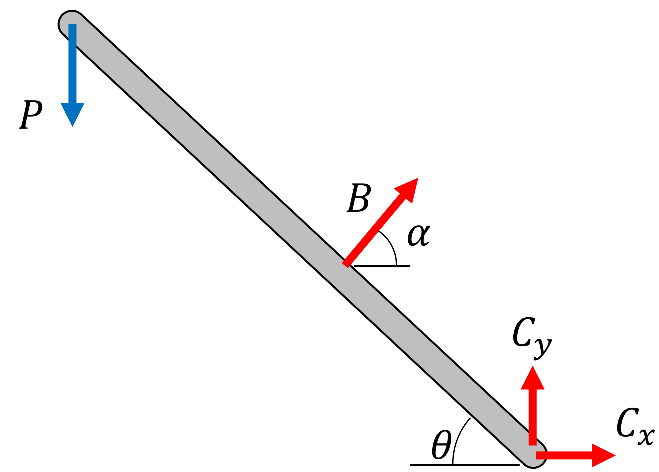
Q3 – Solution (2/3)

B. Puisque la structure est immobile, la structure et toutes ses sous-structures sont à l'équilibre statique.

Membrure BD : c'est une membrure à deux forces (toutes les forces s'appliquent en deux point, B et D). On en déduit donc que les forces en B et en D sont de même module, de sens opposé, sont dirigées selon l'axe BD.



DCL de ABC :



$$\sum M_C = PL\cos\theta - Bd\sin(\alpha+\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{PL\cos\theta}{d\sin(\alpha+\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{PL\cos\theta}{d\sin(\alpha+\theta)}\left[\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}\right]}$$

$$\sum F_x = B\cos\alpha + C_x = 0$$
$$\sum F_y = B\sin\alpha + C_y - P = 0$$

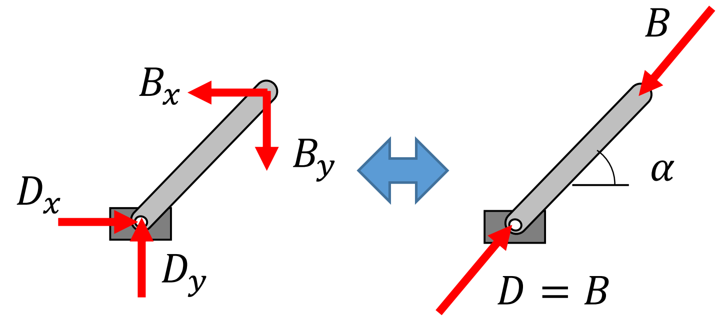
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{C} = P\left[-\frac{L\cos\theta\cos\alpha}{d\sin(\alpha+\theta)}\vec{i} + \left(1 - \frac{L\cos\theta\sin\alpha}{d\sin(\alpha+\theta)}\right)\vec{j}\right]}$$

20 points de résolution de problème

Q3 – Solution (3/3)

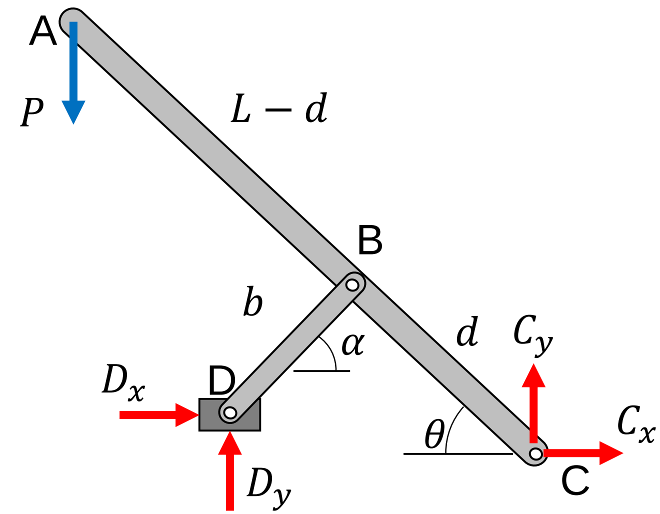
C. La force F_E ressentie par le corps E est la composante verticale de la force D (à un signe près). On a donc :

$$F_E = |D_y| = |-B\sin\alpha| = \frac{PL\cos\theta\sin\alpha}{d\sin(\alpha+\theta)}$$



Ratio entre F_E et P

$$\boxed{\frac{F_E}{P} = \frac{L}{d}\,\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)} \propto \frac{L}{d}}$$



Pour maximiser ce ratio, il faut avoir :

- ***L* le plus grand possible ;**
- ***d* le plus petit possible.**

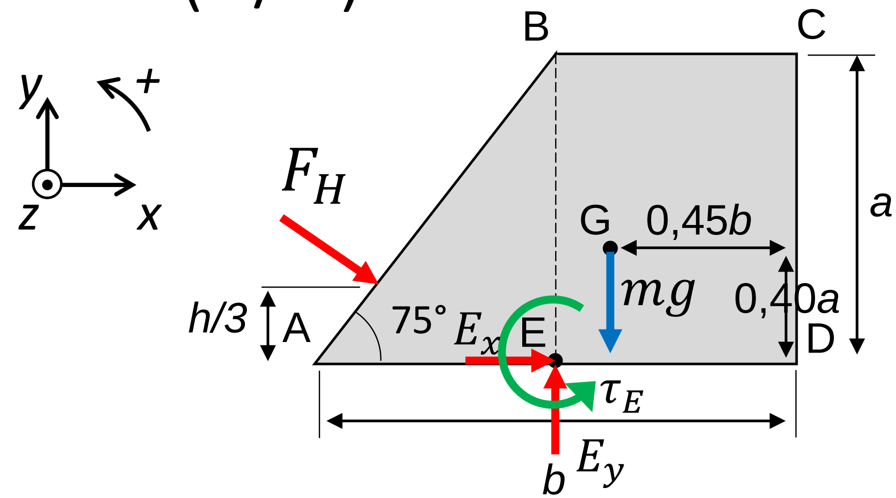
La longueur *b* de la membrure BD n'a pas d'effet sur le ratio.

10 points de calculs et de compréhension

Q4 – Solution (1/2)

a) DCL du barrage

- Poids au CM G ;
- Force hydrostatique perpendiculaire à AB et au tiers de la hauteur ;
- Encastrement : deux forces et un couple.



10 points de compréhension

b) Réactions dues à l'encastrement

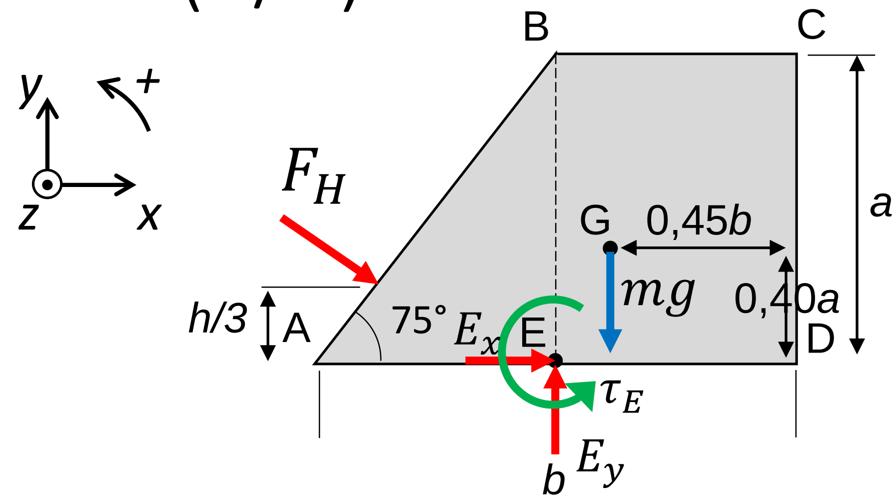
Masse du barrage :
$$m = \rho_b V = \rho_b \frac{\left(b + b - a/\tan 75°\right)}{2} ac = 146{,}58 \times 10^6 \text{ kg}$$

Force hydrostatique :

$$F_H = \rho_e g \frac{h}{2} A = \rho_e g \frac{h}{2} \frac{hc}{\sin 75°} = 164{,}53\,\text{MN}$$

Q4 – Solution (2/2)

b) Équilibre statique



$$\sum F_x = E_x + F_H \sin\theta = 0$$

$$\boxed{E_x = -F_H \sin\theta = -159\,\text{MN}}$$

$$\sum F_y = E_y - F_H \cos\theta - mg = 0$$

$$\boxed{E_y = F_H \cos\theta + mg = 1481\,\text{MN}}$$

$$\sum M_E = \tau_E + F_H \tfrac{a-h/3}{\tan 75°}\cos 75° - F_H \tfrac{h}{3}\sin 75° - mg\left(b - \tfrac{a}{\tan 75°} - 0{,}45b\right) = 0$$

$$\boxed{\tau_E = 14{,}8\,\text{GN}\cdot\text{m} = 1{,}48\times 10^{10}\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

30 points de résolution de problème

c) Poussée d'Archimède due à l'air sur le barrage

$$\boxed{P_A = \rho_a g V = \rho_a g \frac{\left(b + b - a/\tan 75°\right)}{2} ac = 784\,\text{kN}}$$

10 points de calculs et de compréhension

Cette force est tout à fait négligeable par rapport aux réactions calculées en B (kN vs MN). Il était donc raisonnable de ne pas l'inclure dans le DCL du barrage.