PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 1
Été 2019

Retour en classe

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Une force peut remplacer un ensemble de forces à condition que celle-ci soit la résultante de toutes les forces qu'elle remplace et qu'elle s'applique sur une ligne d'action telle que le moment de cette résultante par rapport à n'importe que point de l'espace soit égal à la somme vectorielle des moments de toutes les forces remplacées.

B. Faux. Le satellite n'est pas en équilibre statique car il tourne autour de la Terre, son vecteur vitesse n'est donc pas constant, la résultante des forces que le satellite subi n'est pas nulle puisque la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui n'est pas compensée. Le fait que le satellite soit immobile par rapport à un observateur terrestre signifie que le référentiel de celui-ci n'est pas tout à fait galiléen.

C. Selon le principe de Pascal, sous l'effet de la gravité, la variation de la pression d'un fluide est proportionnelle à la variation de la profondeur. Le coefficient de proportionnalité est ρg (où ρ est la densité du fluide). Dans l'eau (ρ=1000 kg/m^3), ce coefficient est important car la densité de l'eau est grande alors que dans l'air la densité (ρ=1.2 kg/m^3) est trois ordre de grandeur plus faible ce qui nous permet de négliger la variation de la pression de l'air pour des variations de hauteur usuelles.

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

D. La force $\boldsymbol{F}_{\parallel}$ est donnée par : $\vec{F}_{\parallel} = (\hat{u}_{AB}.\vec{F})\hat{u}_{AB}$ où $\hat{u}_{AB}$ est le vecteur unitaire du segment de droite AB.

$$\hat{u}_{AB} = \frac{(200-0)\vec{\imath} + (0-100)\vec{\jmath} + (300-0)\vec{k}}{\sqrt{(200-0)^2+(0-100)^2+(300-0)^2}} = \frac{1}{3{,}74}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k})$$

et

$$\left(\hat{u}_{AB}.\vec{F}\right) = \frac{374}{3{,}74}(2-1+0) = 100\ N$$

d'où:

$$\boxed{\vec{F}_{\parallel} = \frac{100}{3{,}74}\left(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) N}$$

Q2 – Solution (1/2)

A. Soit $\boldsymbol{P}$ le poids: $\boxed{\vec{P} = -mg\vec{j} = -4{,}9\vec{j}\ \mathrm{N}}$

$$\boxed{\vec{F} = F\left(\sin 30^{\mathrm{o}}\ \vec{j} + \cos 30^{\mathrm{o}}\ \vec{k}\right) = (7{,}50\ \vec{j} + 13{,}0\ \vec{k})\ N}$$

$$\boxed{\vec{M}_1 = 7\vec{k}\ \mathrm{N.cm}}$$

$\vec{M}_2 = -M_2 \hat{u}_{BC}$ avec: $\hat{u}_{BC} = \left(\cos 25^{\mathrm{o}}\ \vec{\imath} + \sin 10^{\mathrm{o}}\ \vec{j} + \sqrt{1 - \cos^2 25^{\mathrm{o}} - \sin^2 10^{\mathrm{o}}}\ \vec{k}\right)$

$$\boxed{\vec{M}_2 = \left(-5{,}438\vec{\imath} - 1{,}042\vec{j} - 2{,}311\vec{k}\right)\mathrm{N.\,cm}}$$

B. La main ressent une force et un couple égal au système force-couple équivalent au point O :

La force équivalente $\boxed{\vec{F}_O = \vec{P} + \vec{F} = \left(2{,}60\ \vec{j} + 13{,}0\ \vec{k}\right)\ \mathrm{N}}$

et le couple équivalent: $\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{r}_{D/O} \times \vec{P} + \vec{r}_{A/O} \times \vec{F}$

avec: $\vec{r}_{D/O} = \left(6\ \vec{k}\right)\ \mathrm{cm}$ $\quad\vec{r}_{A/O} = \left(14\ \vec{k}\right)\ \mathrm{cm}$

$\vec{r}_{D/O} \times \vec{P} = (29{,}4\ \vec{\imath})\ \mathrm{N} \cdot cm$ $\quad\vec{r}_{A/O} \times \vec{F} = (-105\ \vec{\imath})\ \mathrm{N} \cdot cm$

Ce qui donne: $\boxed{\vec{M}_O = \left(-81{,}0\vec{\imath} - 1{,}04\vec{j} + 4{,}69\vec{k}\right)\ \mathrm{N \cdot cm}}$

Q2 – Solution (2/2)

C. Pour que la main ne ressente aucune force, il faut appliquer une force et un couple en B dont le système force-couple équivalent en O est l'opposé du système $\boldsymbol{F_O}$ - $\boldsymbol{M_O}$. Donc :

$$\boxed{\vec{F}_B = -\vec{F}_O = -\left(2{,}60\,\vec{j} + 13{,}0\,\vec{k}\right)\,\mathrm{N}}$$

$$\vec{M}_B + \vec{r}_{B/O} \times \vec{F}_B = -\vec{M}_O$$

avec:

$$\vec{r}_{B/O} = \left(-3\vec{\imath} + 10\vec{k}\right)\,\mathrm{cm}$$

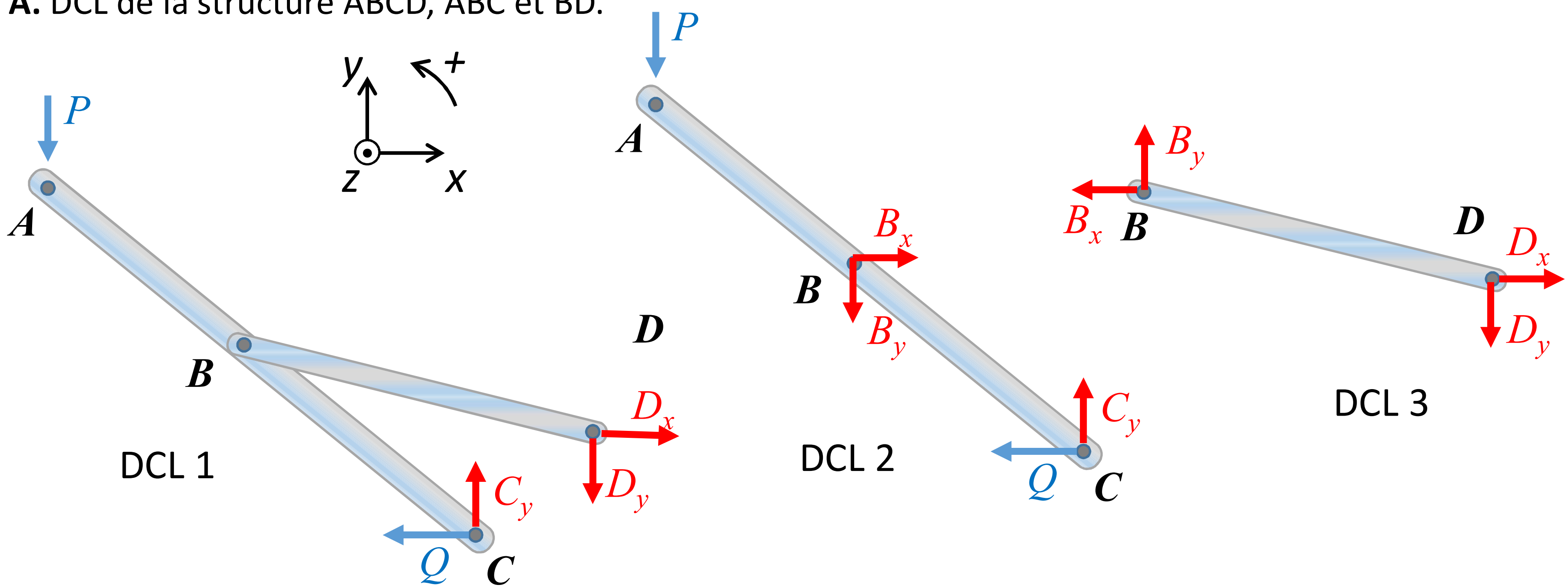
$$\vec{r}_{B/O} \times \vec{F}_B = \left(26{,}0\vec{\imath} - 39\vec{j} + 7{,}8\vec{k}\right) N.cm$$

$$\boxed{\vec{M}_B = \left(55{,}0\vec{\imath} + 40{,}0\,\vec{j} - 12{,}49\,\vec{k}\right)\,\mathrm{N.cm}}$$

Remarque: $\boldsymbol{F_B}$ et $\boldsymbol{M_B}$ peuvent aussi être calculés comme étant la réaction au système force-couple équivalent au point B des forces $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{P}$ et des moments $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$. Cependant, l'énoncé de la question exige l'utilisation du résultat de la sous-question **B**.

Q3 – Solution (1/2)

A. DCL de la structure ABCD, ABC et BD.



Éléments importants

- La réaction C_x doit être remplacée par Q sinon, Il faut écrire quelque part que C_x=Q
- Les réactions en B dans le DCL2 et le DCL3 doivent être inversées
- Les réactions en C et en D ne doivent pas changer d'un DCL à l'autre.

Q3 – Solution (2/2)

B. La membrure BD est une membrure à deux forces inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale, ce qui nous permet d'écrire que:

$$D_y = B_y = D_x \tan\alpha = B_x \tan\alpha$$

et α est donné par: $\sin\alpha = (\overline{BC}\sin\beta - 35)/\overline{BD} = (200\sin 25° - 35)/250 = 0.1981$

$$\alpha = 11{,}43° \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}202$$

DCL2: $\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = Q$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow P.\overline{AC}.\cos\beta + (B_x\tan\alpha).\overline{BC}.\cos\beta - B_x.\overline{BC}.\sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\overline{AC}.\cos\beta}{\overline{BC}(\sin\beta - \tan\alpha\cos\beta)}P = \frac{350.\cos 25°}{200(\sin 25° - \tan 11{,}43°\cos 25°)}100N$$

$$\boxed{Q = B_x = 662.6N}$$

C. La réaction qu'exerce le boitier sur le mécanisme est $\vec{F}_{b/m} = D_x\vec{\imath} - D_y\vec{\jmath} + C_y\vec{\jmath}$ et selon le DCL1:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = Q = 662.6N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - D_y = P = 100N$$

Donc l'action qu'exerce le mécanisme sur le boitier est: $\vec{F}_{m/b} = -\vec{F}_{b/m} = -Q\vec{i} - P\vec{j}$

$$\boxed{\vec{F}_{m/b} = (-662.6\vec{i} - 100\vec{j})N}$$

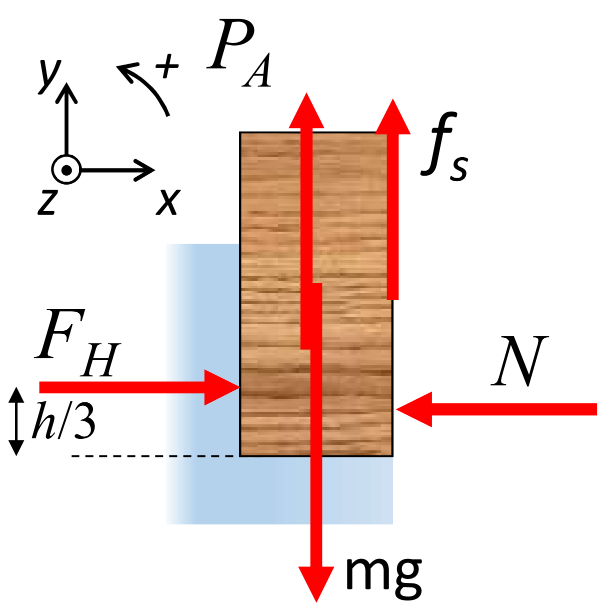
Q4 – Solution (1/2)

A. Sans frottement, le bloc demeure en équilibre statique lorsque le poids et la poussée d'Archimède se compensent c'est-à-dire:

$$\rho_b g(a \times b \times c) = \rho_e g(h \times b \times c)$$

$$\boxed{\Rightarrow h = \frac{\rho_b}{\rho_e} a = \frac{800}{1000} 25 = 20\ cm}$$

B. Le DCL du bloc avec frottement :



Éléments importants

- La force de frottement statique doit être dirigée vers le haut.
- La poussée d'Archimède doit s'appliquer au centre de la partie immergée du bloc.
- Le centre de poussée de F_H doit être bien indiqué en fonction de h.
- Le point d'application de la normal N n'est pas demandé ici.

Q4 – Solution (2/2)

C. Selon le DCL du bloc en équilibre statique:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = F_H$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + f_s - mg = 0$$

avec:

$$F_H = \rho_e g \frac{h_{\min}}{2}(h \times c) = \frac{1}{2} g h_{\min}^2 c \qquad mg = \rho_b g(a \times b \times c)$$

$$f_s = \mu_s N = \mu_s F_H = \frac{\mu_s}{2} g h_{\min}^2 c \qquad P_A = \rho_e g(h_{\min} \times b \times c)$$

En remplaçant dans l’équation d’équilibre selon y, on obtient donc:

$$\frac{1}{2}\mu_s \rho_e h_{\min}^2 + \rho_e b h_{\min} - \rho_b a b = 0 \qquad \Rightarrow 120\, h_{\min}^2 + 100\, h_{\min} - 20 = 0$$

C’est une équation du second degré dont le discriminant est: $\Delta = 140^2$

Ce qui donne : $\boxed{h_{\min} = \frac{1}{6} m}$

La deuxième racine de l’équation est négative, elle est donc rejetée.