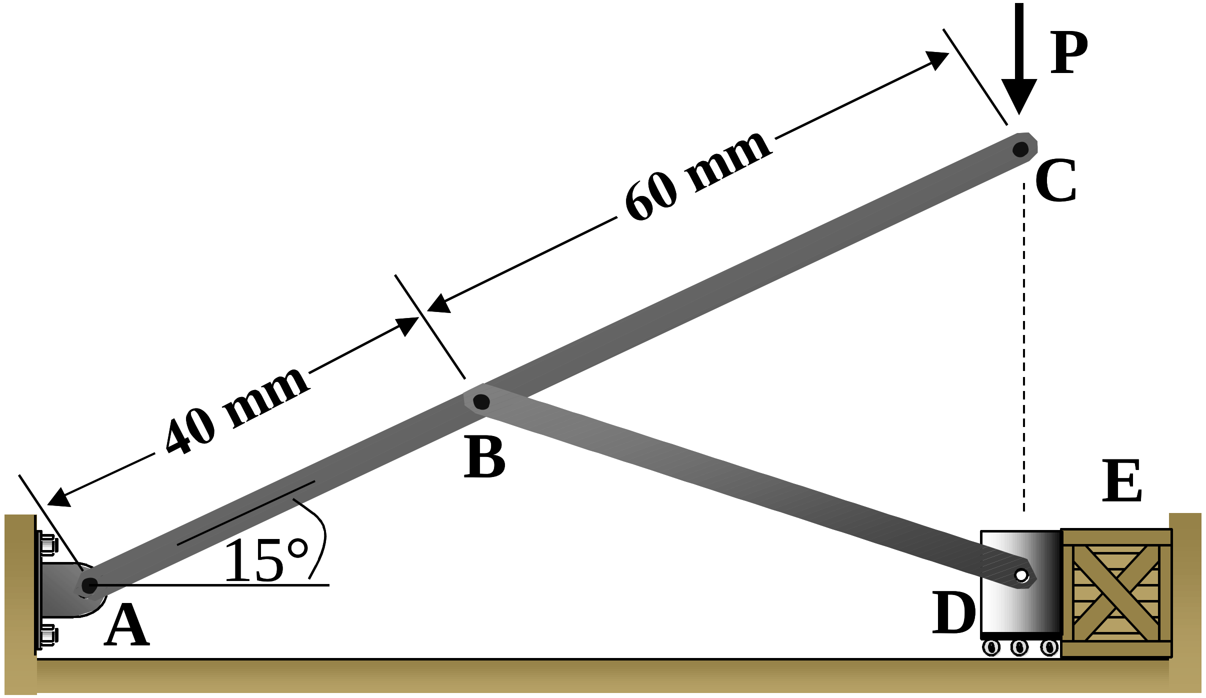
Examen Final

27 Avril 2008

Question 1 (50 points)



Une force P=100N est appliquée verticalement en C d'un levier à pression suivant la figure ci-dessous. En vous référant aux données ci-dessous et en examinant bien les appuis correspondants:

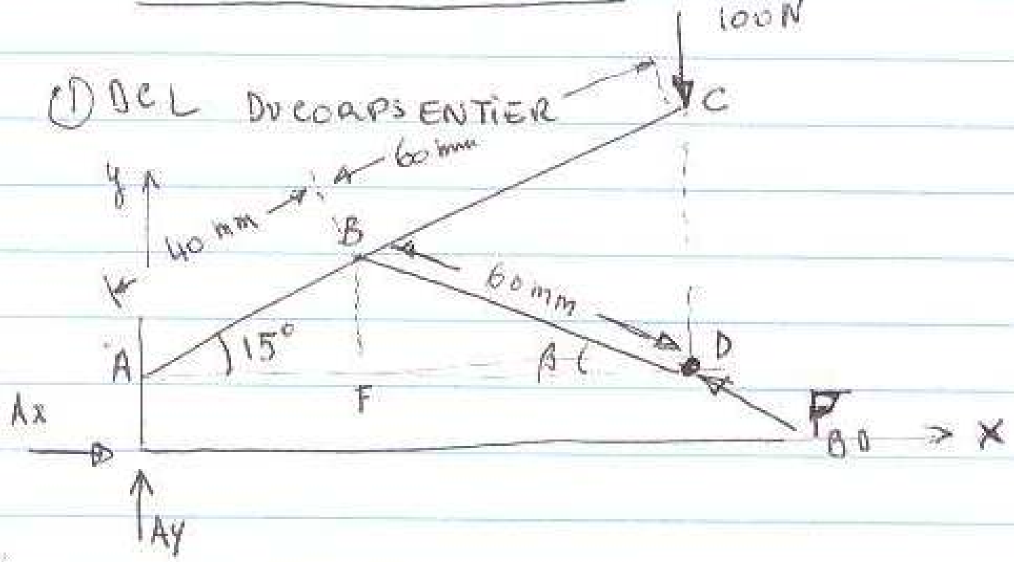
A) Dessiner le DCL de la structure entière (30 points)
B) Trouver la force F_{DB} qui s'exerce en B (10 points)
C) Déduire la force horizontale qui est appliquée sur le bloc E (10 points)

Solutionnaire statique

- DCL 30
- Trouver F_{BD} 10 pts
- Trouver F_{BDx} 10 pts

(30 pts)

(1) DCL DU CORPS ENTIER



Note: si vous faites le calcul, le bras BD mesure en fait 58,9mm. (L'erreur induite en écrivant 60mm est de l'ordre de 1%)

(2) $\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad -100\left(\overline{AC}\cos 15°\right) + F_{BD}\sin\beta\,\overline{AD}$ (10 pts)

$\sin\beta = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BD}}$ avec $\overline{BF} = 40\sin 15° = 10.35\,mm$

$\sin\beta = \dfrac{10.35}{60} = 0.173$ et $AD = AF + FD = 40\cos 15 + BD\cos\beta$

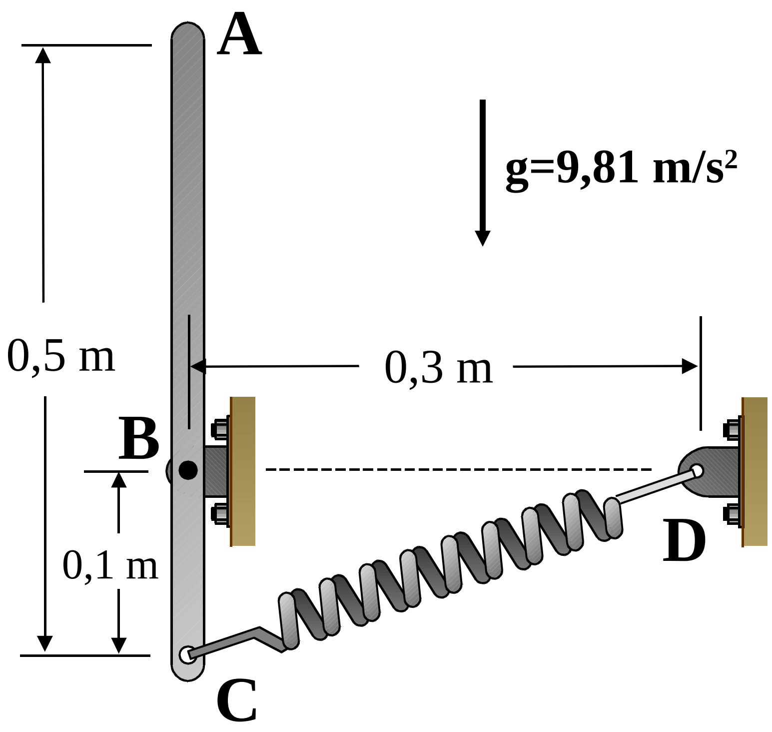
$AD = 97.74\,mm$

$F_{BD} = \dfrac{100 \times 100\cos 15}{0.173 \times 97.74} = 571.25\,N$

(3) Composante suivant X

$(F_{BD})_x = (F_{BD})\cos\beta = \underline{562.63\,N}$ 10 pts

Question 2 (50 points):



Une tige mince de 4 Kg est libre de tourner par rapport à un pivot situé en B. On fixe à la tige, tel qu'indiqué sur la figure, un ressort dont la longueur au repos est de 0.1m et la constante de rappel k= 400N/m. Si la tige est au repos dans la position indiquée:

A) Représenter schématiquement deux états de la tige: 1-au repos et verticale, 2- en mouvement et horizontale. Inclure toutes les variables qui vous permettront de déterminer l'énergie mécanique du système à ces deux positions. (10 points)

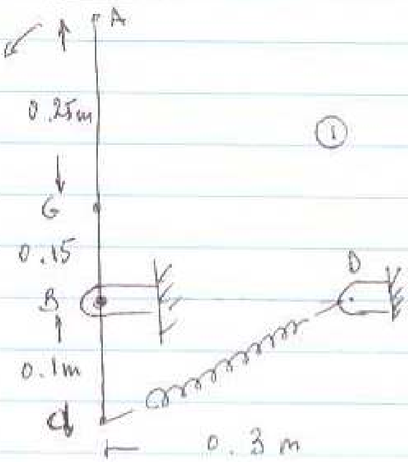
B) Évaluer l'énergie potentielle du ressort, l'énergie potentielle de la tige et l'énergie cinétique totale. Calculer numériquement ces valeurs. (15 points)

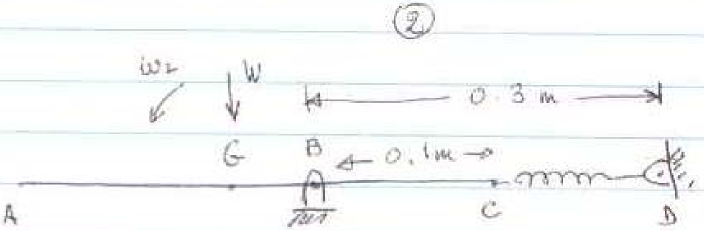
C) Évaluer les mêmes valeurs qu'en B) , mais pour la position 2. (15 points)

D) En déduire la vitesse angulaire de la tige lorsqu'elle atteint la position horizontale. (10 points)

On donne AC = 0.5m, BC = 0.1m et BD = 0.3m

RESSORT





Position ①

(5 pts) $x_1 = (CD - 0.1) = 0.316 - 0.1 = 0.216\,m$

Ressort

$V_{R1} = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} 400 \times 0.216^2 = 9.33\,J$ (5 pts)

GRAVITE

$V_{g1} = mgh = 4 \times 9.81 \times 0.15 = 5.89\,J$ (5 pts)

$T_1 + V_1 = 0 + (5.89 + 9.33) = 15.22\,J$ (5 pts)

Position ②

$x_2 = 0.1\,m$ (5 pts)

Ressort $V_{R2} = \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} 400 (0.1)^2 = 2\,J$ (5 pts)

Gravite $V_{g2} = 0$

(15 pts) $T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12} m L^2\right]\omega_2^2 = \frac{1}{2} 4 \left[0.15^2 \times \omega_2^2\right] + \frac{1}{24} 4 (0.5)^2 \omega_2^2$

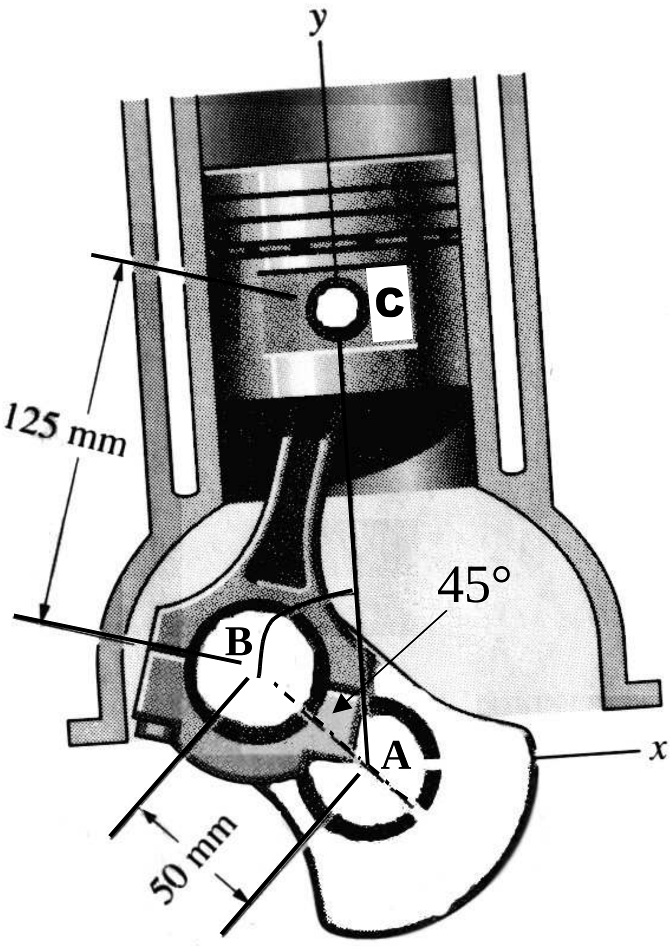
$T_2 = 0.87\,\omega_2^2\,J$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ $\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{15.22 - 2}{0.087}} = 12{,}33\,rd/s.$ (5 pts)

Question 3 (50 points):

La manivelle AB d'un piston tourne dans le sens anti-horaire à 2000 tours / minute. Elle entraîne une bielle AC qui entraîne ainsi le déplacement du piston dans le cylindre. Avec les données indiquées sur la figure (angle ABC = 45°, AC=125mm et AB=50mm) :

A) Exprimer la vitesse $\mathbf{v}_B$ en fonction de $\mathbf{v}_A$ et également en fonction de $\mathbf{v}_C$. (10 points)
B) Calculer les grandeurs vectorielles $\mathbf{r}_{B/A}$ et $\mathbf{r}_{B/C}$. (15 points)
C) En déduire la vitesse angulaire de la bielle et la vitesse de déplacement du piston (25 points)



Piston

vitesse angulaire

$$\omega = 2\pi\left(\frac{2000}{60}\right) = 209.44 \, rd/s.$$

① $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$ $(\vec{V}_A = 0)$ | 10 pts

$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{B/C}$

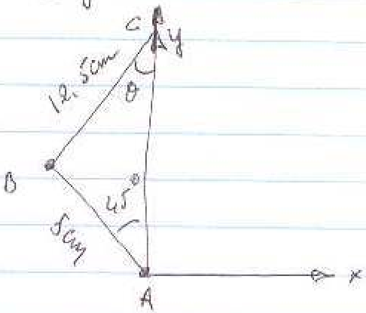
5 pts $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B = 5\left(-\sin 45\,\vec{i} + \cos 45\,\vec{j}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left[-\vec{i} + \vec{j}\right]$ cm.

5 pts $\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\omega \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -740{,}5(\vec{i}+\vec{j})$ cm/s.

$\vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{B/C} \times \vec{r}_{B/C}$

$\vec{V}_C = V_C\,\vec{j}$

$\vec{r}_{B/C} = \vec{r}_B - \vec{r}_C$



10 pts

Calcul de θ $\frac{5}{\sin\theta} = \frac{12.5}{\sin 45}$ $\theta = 16°43$

$\vec{r}_C = \left[5\sin 45 + 12.5\cos\theta\right]\vec{j} = 15.53\,\vec{j}$ cm

$\vec{r}_{B/C} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2} + 15.53\right]\vec{j}$

$= -3.54\,\vec{i} - 12\,\vec{j}$

$\vec{V}_B = V_C\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ -3.54 & -12 & 0 \end{vmatrix} = V_C\vec{j} + 12\omega_{BC}\,\vec{i} - 3.54\,\omega_{BC}\,\vec{j}$ 15 pts

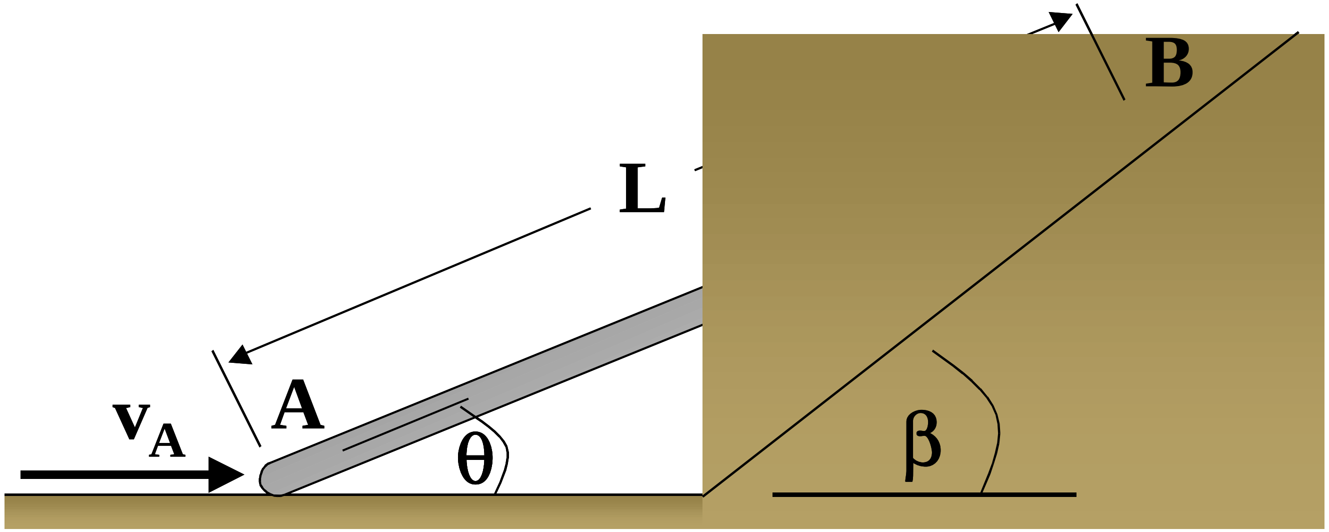
D'où $-740.5 = V_C - 3.54\,\omega_{BC}$ $(\vec{j})$

$-740.5 = 12\,\omega_{BC}$ $(\vec{i})$

$\vec{\omega}_{BC} = -61.71$ rd/s ↻

$\vec{V}_C = -959\,\vec{j}$ (cm/s)) 5 pts

Question 4- Section A (50 points)



Une tige AB peut glisser librement sur un plancher et un plan incliné.

A) Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) des vitesses v_A et v_B (20 points)

B) Déterminer la vitesse angulaire de la tige (20 points)

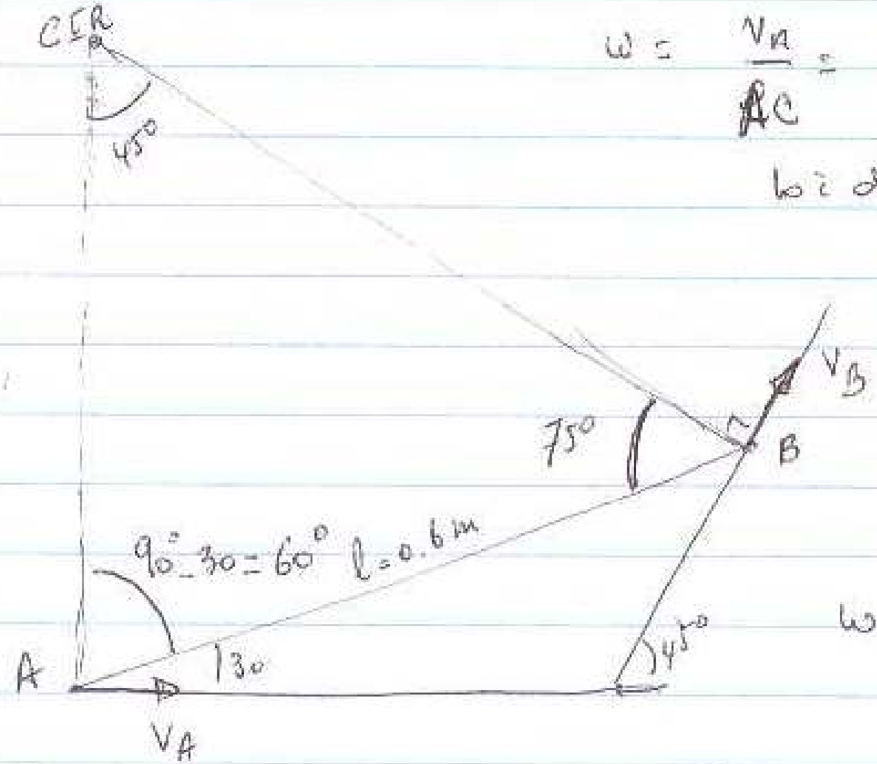
C) Calculer la vitesse de l'extrémité de la tige (10 points)

On donne $\theta = 30^0$ et $\beta = 45^0$ et $L = 0{,}6$m

C I R

① localisation du C.I.R (20 pts)

② vitesse angulaire ω



$$\omega = \frac{V_A}{AC} =$$

loi des sinus $\frac{\sin 75}{AC} = \frac{\sin 45}{AB} = \frac{\sin 60}{CB}$

$$\overline{AC} = \frac{\sin 75}{\sin 45} AB = 0.82 m$$

$$\overline{BC} = \frac{\sin 60}{\sin 45} \cdot AB = 0,735 m.$$

$$\omega = \frac{5}{0.82} = 6.098 \text{ rd/s}$$

③ vitesse de l'extrémité de B

$$V_B = 0.735 \times 6.097 = 4.48 m/s.$$

Question 4 – section B

Un projectile de masse 0,01kg tiré à une vitesse de 300 m/s frappe perpendiculairement une planche de bois de masse 30 kg et s'y enfonce sans en ressortir.

Cas #1: Le projectile frappe la planche en plein milieu

A) Calculer la vitesse du centre de masse de la planche après l'impact. (5 points)

B) Déterminer l'énergie cinétique de la planche après la collision? Est-elle conservée par rapport à celle du projectile? Quel est le coefficient de restitution e? (15 points)

Cas #2: Le projectile frappe la planche en plein centre mais juste en bas de la planche.

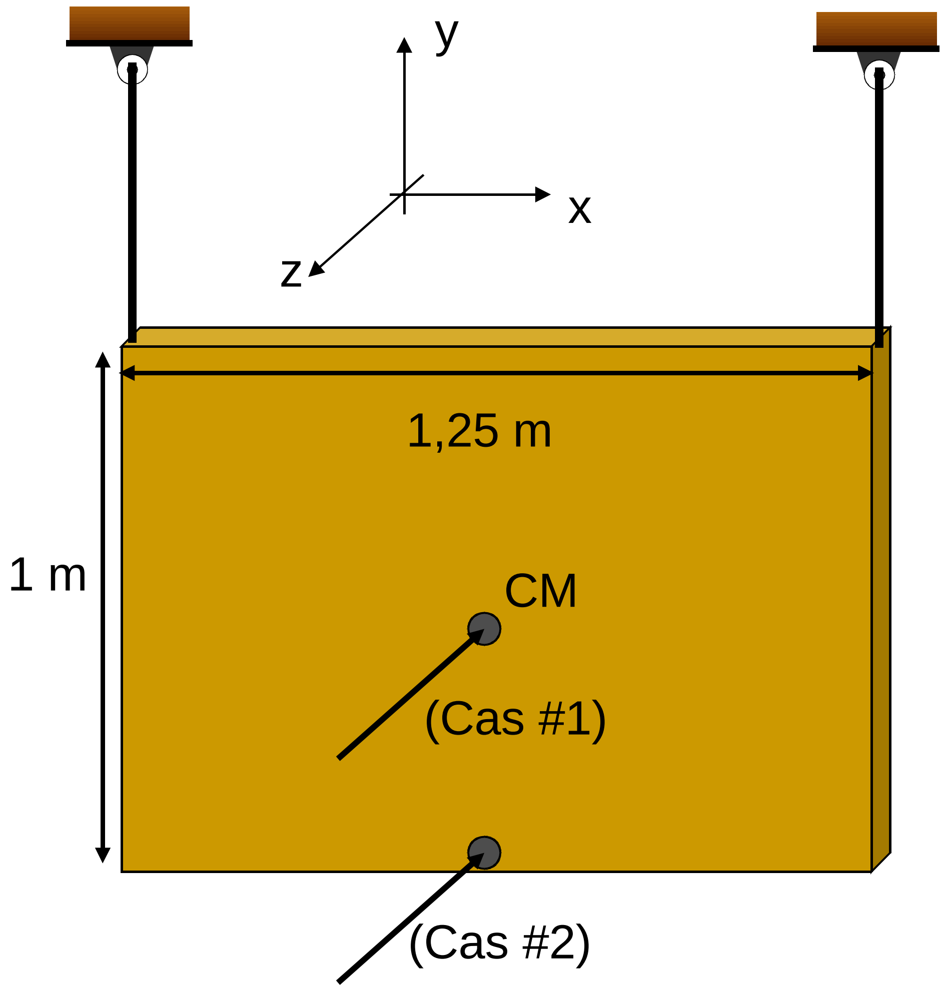
C) Calculer la vitesse du centre de masse de la planche après l'impact. A-t-elle changé? (5 points)

D) Calculer la vitesse angulaire de la plaque par rapport au centre de masse? (15 points)

(indice: utilisez la conservation du moment cinétique avant et après la collision.)

E) Déterminer l'énergie cinétique de la planche après la collision? A-t-elle changé par rapport à B)? (10 points)

Note: Le moment d'inertie de la plaque selon un axe horizontal passant par son centre de masse est donné par



Q4B-Solution:

A) Le système est pseudo isolé. Il y a conservation du moment cinétique et de la quantité de mouvement

$$m_p v_p = (m_p + M) v_{cm} \approx M v_{cm} \qquad v_{cm} = \frac{m_p v_p}{M} = \frac{0{,}01 \cdot 300}{30} = 0{,}1 m/s$$

B) $T = M v_{CM}^2/2 = 0{,}15$ J. L'énergie n'est pas conservée. Comme vp-f=0, e=0.

C) La vitesse n'a pas changé v= 0,1 m/s

D) Le moment cinétique est conservé:

Au départ: $H_{CM} = m_p r v_p = 0{,}01 \cdot 0{,}5 \cdot 300 = 1{,}5$ $\qquad I = \frac{1}{12} M R^2 = \frac{30 \cdot 1^2}{12} = 2{,}5 kgm^2$

Après l'impact: $H_{CM} = 1{,}5 = I\omega$ $\qquad \omega = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6 rad/s$

E) L'énergie totale est maintenant: $T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

$$T = 0{,}15 + \frac{1}{2} 2{,}5 (0{,}6)^2 = 0{,}6 J$$

L'énergie est supérieure à celle obtenue en B)

Autrement dit, l'énergie transmise à un objet est minimale quand celui-ci est frappé au centre de masse

Question 4 – Section C (50 points)

Le 25 mai 2008 en après-midi, la sonde Phoenix se posera sur le sol de la planète mars. Son atterrissage a été programmé à la seconde près par les ingénieurs de la NASA.

- À 16h00m00s, la sonde entrera dans l'atmosphère de la planète à une vitesse de 20000 km/h. Elle sera alors à 125 km au-dessus de la surface de la planète. Pour se ralentir elle utilise d'abord la friction de l'atmosphère et un parachute supersonique.
- À 16h06m00s, la sonde se trouvera à 0,88km d'altitude et sa vitesse sera de 55 m/s.

A) Calculez la puissance moyenne dissipée par le frottement de l'air sur la sonde durant cette phase de l'atterrissage. (10 points)

Note: Considérez la force gravitationnelle sur Mars indépendante de l'altitude et de valeur g_M=3,4 m/s^2. La masse de la sonde est de 600 kg.

Une illustration de l'atterrissage de Phoenix sur Mars, le 25 mai 2008. *Ce problème utilise les véritables données de la phase d'atterrissage de la mission Phoenix, généreusement fournies par le Jet Propulsion Laboratory de la NASA (Pasadena, CA).*

Q4 suite:

- À 16h06m00s, la sonde largue son bouclier thermique et son parachute d'un poids total de 100 kg. Elle allume ensuite ses propulseurs à l'hydrazine (un explosif puissant à base d'azote). Ceux-ci, pointés vers la surface de la planète, auront pour effet de décélérer la sonde jusqu'à sa vitesse d'atterrissage, soit 2m/s. La vitesse des gaz éjectés, relative à la fusée, est de 2km/s.

B)En supposant une décélération constante, calculez la grandeur de la décélération nécessaire pour parvenir à cet atterrissage (négligez le frottement de l'atmosphère).(10 points)

C)Quelle force les propulseurs doivent-ils fournir pour produire cette décélération? (10 points)

D)Quel est le débit de masse nécessaire pour obtenir cette force? (10 points)

E)A quelle heure précise (à la seconde près) la sonde touchera-t-elle le sol? (5 points)

F)Quelle quantité d'hydrazine doit être prévue pour réaliser cet exploit? (5 points)

Note: En tout temps, vous pouvez supposer que la variation de masse provoquée par la perte d'hydrazine est négligeable par rapport au poids de la sonde.

Solution:

A) $\frac{1}{2}mv_f^2 = mg_M h + \frac{1}{2}mv_i^2$ $\quad \Delta E = mg_M h + \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2$

$$\Delta E = 600*(3.4\cdot(125\times10^3 - 0{,}88\times10^3) + \frac{1}{2}(20000/3{,}6)^2 - \frac{1}{2}55^2) = 9{,}5GJ$$

$$P_{moy} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{9{,}5GJ}{360s} = 26MW$$

B) Le vaisseau doit passer de 55m/s à 2m/s sur une distance de 0,88km:

La décélération constante nécessaire est donc: $a = \frac{55^2 - 2^2}{2\cdot 880} = 1{,}72m/s^2$

C) $-mg + F_p = ma$ $\quad F_p = m(a + g_M) = 500\cdot(1{,}72 + 3{,}4) = 2{,}56kN$

Solution:

D) $\dfrac{dm}{dt} = 2{,}56kN / 2km / s = 1{,}28kg / s$

E) La sonde amorce sa décélération à 16h06m00s. $v_f = v_0 - a\Delta t$

$$\Delta t = \frac{55-2}{1{,}72} = 30{,}9s$$

La sonde touche donc le sol à **16h06m31s**

F) La quantité d'hydrazine nécessaire est donc

$$M = \frac{dm}{dt}\Delta t = 1{,}28\frac{kg}{s}\cdot 30{,}9s = 40kg$$