

PHS 1101
Mécanique pour ingénieurs

Cours 12

Énergie cinétique d'un corps rigide

Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

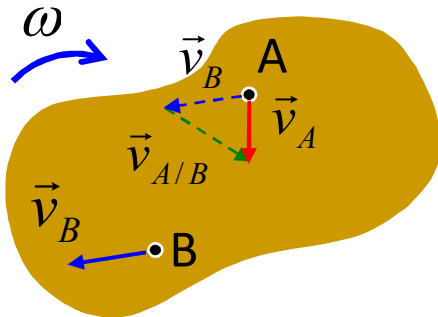
Mouvement plan d'un corps rigide

Décomposition translation + rotation

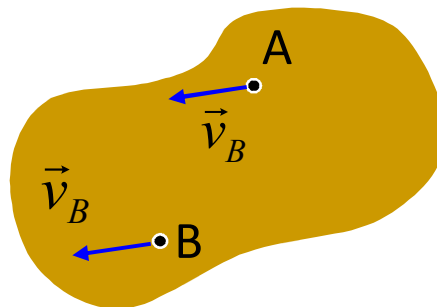
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Un corps rigide possède une seule
vitesse angulaire.

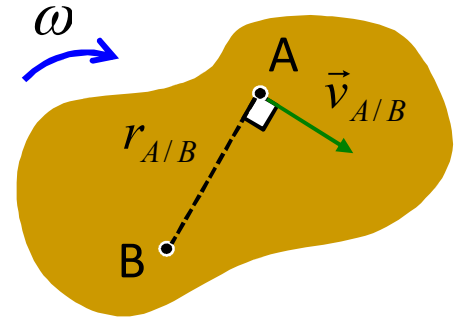
Mouvement plan



Translation avec B



Rotation par rapport à B



$$v_{A/B} = \omega r_{A/B}$$

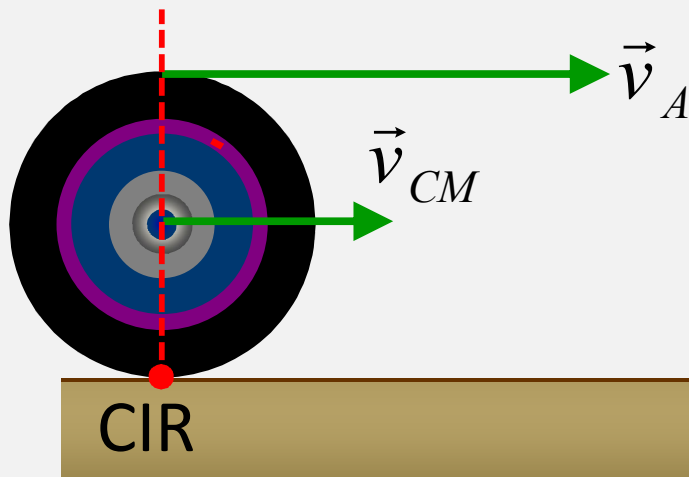
On peut décomposer le mouvement d'un corps rigide en une translation suivie
d'une rotation autour de n'importe quel point situé sur le corps.

Mouvement plan d'un corps rigide

Centre instantané de rotation (CIR)

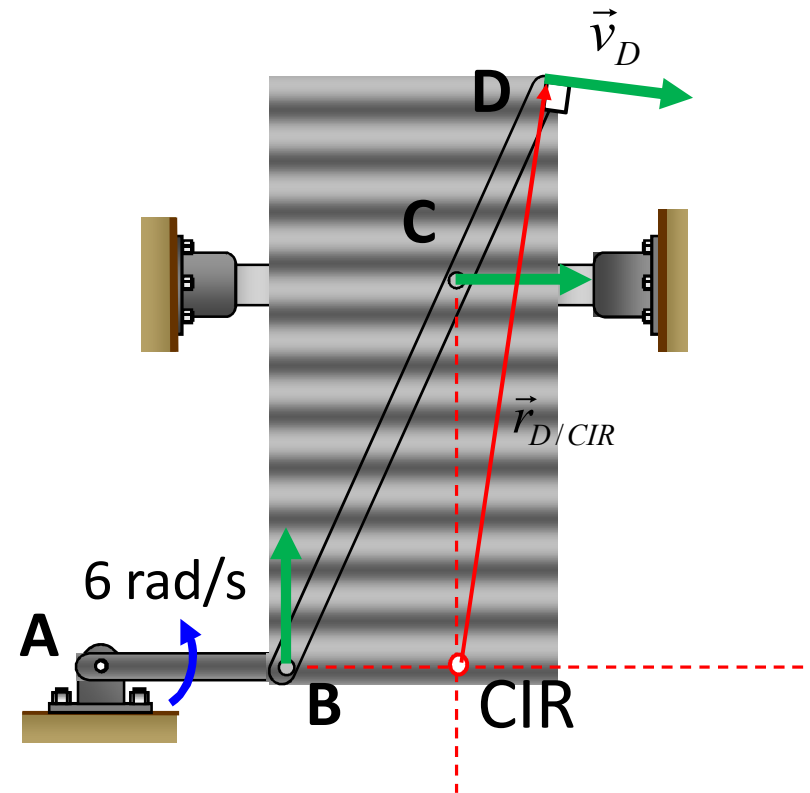
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

À chaque instant, le corps est en rotation pure autour du CIR



Le CIR se trouve au point de contact avec le sol seulement **si la roue roule sans glisser**

Le CIR est situé au croisement des droites perpendiculaires aux vitesses des points situés sur le corps rigide.



Roulement et glissement

Glissement sans roulement

Il n'y a **pas de rotation** de la roue.

$$\Delta\theta = \omega = \alpha = 0$$

Frottement **cinétique** entre la roue et le sol

Roulement sans glissement

$$\Delta x_{CM} = R\Delta\theta$$

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

Frottement **statique** entre la roue et le sol

Roulement avec glissement

Translation et rotation indépendantes

$$\Delta x_{CM}$$

$$v_{CM}$$

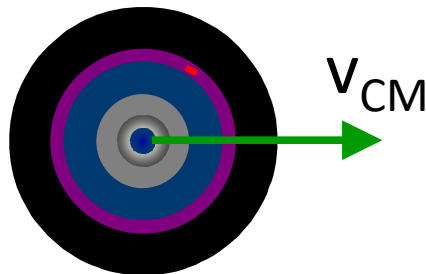
$$a_{CM}$$

$$\Delta\theta$$

$$\omega$$

$$\alpha$$

Frottement **cinétique** entre la roue et le sol



Dynamique de rotation

Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM} \alpha$$

OU

Par rapport au CIR

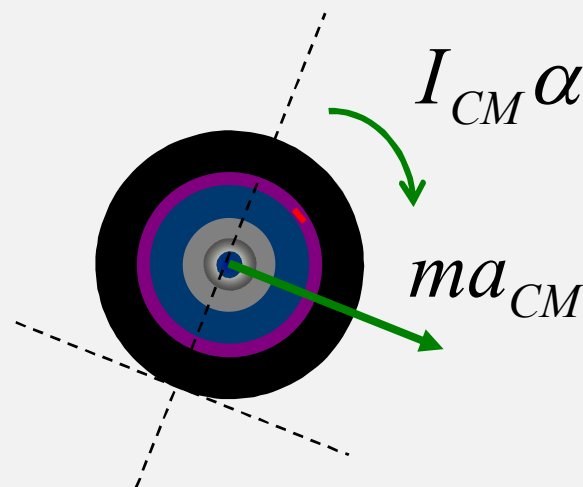
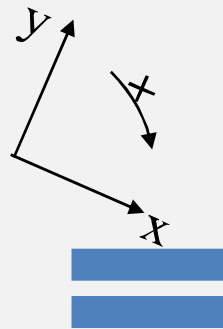
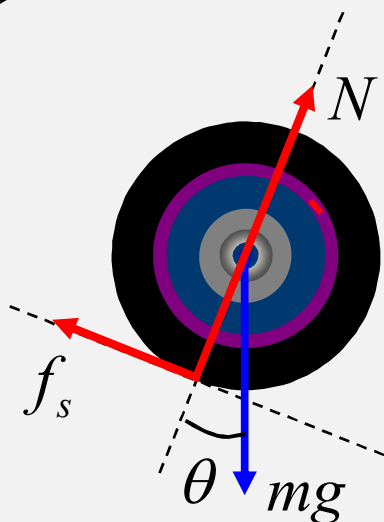
$$\sum M_{CIR} = I_{CIR} \alpha$$

Appliqué à la roue ci-dessous
(roulement sans glissement)

$$\sum M_{CM} = R f_s = I_{CM} \alpha$$

OU

$$\sum M_{CIR} = R m g \sin \theta = (I_{CM} + m R^2) \alpha$$

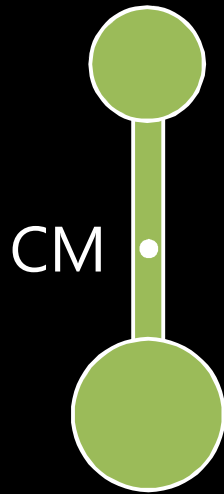


On **choisit** le sens positif des axes et des moments pour avoir $a_{CM} = \alpha R$ sans ajouter de signe négatif.

Plan de la semaine

- **Énergie cinétique d'un corps rigide**
- Principe travail-énergie en rotation
 - Travail effectué par un couple
 - Énergie potentielle d'un ressort de torsion
 - Puissance générée par un couple

Dans un monde éloigné de tout, un haltère parfaitement rigide formé de deux masses reliées par une tige sans masse est en mouvement...



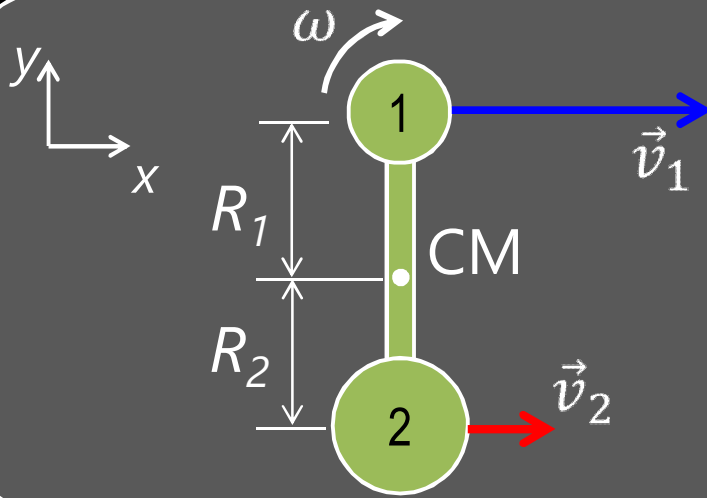
Le centre de masse est immobile et les masses tournent autour.

Rotation autour du CM

On donne une petite poussée vers la droite au centre de masse...

Translation du CM + Rotation autour du CM

Quelle est l'énergie cinétique de l'haltère ?



L'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique des deux masses.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Décomposons les vitesses des masses en translation-rotation...

$$T = \frac{1}{2} m_1 (v_{CM} + \omega R_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{CM} - \omega R_2)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\text{Masse totale}} v_{CM}^2 + \underbrace{\omega v_{CM} (m_1 R_1 - m_2 R_2)}_{\text{Position du CM dans le référentiel du CM... 0!}} + \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)}_{\text{Moment d'inertie } I_{CM} \text{ de l'haltère par rapport à son CM}} \omega^2$$

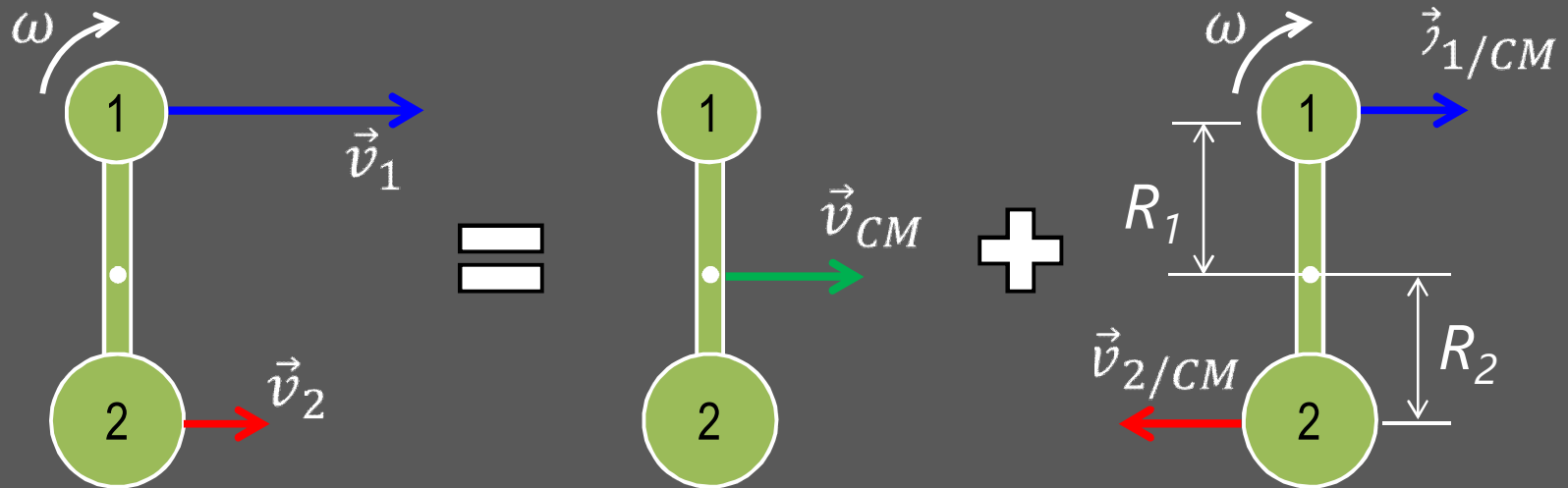
Masse totale
 $M = m_1 + m_2$

Position du CM dans le
référentiel du CM... 0!

Moment d'inertie I_{CM}
de l'haltère par rapport
à son CM

Quelle est l'énergie cinétique de l'haltère ?

L'énergie cinétique peut être décomposée en translation-rotation.



$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Translation Rotation



On ne peut pas utiliser cette égalité en remplaçant le CM par un autre point quelconque.



Énergie cinétique

Système de particules et corps rigide

L'énergie cinétique totale d'un système de particules est la **somme des énergies cinétiques de translation de chaque particule** du système.

Énergie cinétique d'un système de particules

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Pour le cas particulier d'un **corps rigide**, l'énergie cinétique totale peut s'écrire comme une somme de deux termes :

- Énergie cinétique de **translation du CM** ;
- Énergie cinétique de **rotation autour du CM**.

Énergie cinétique d'un corps rigide

$$M = \sum m_i$$

Masse totale du
corps rigide

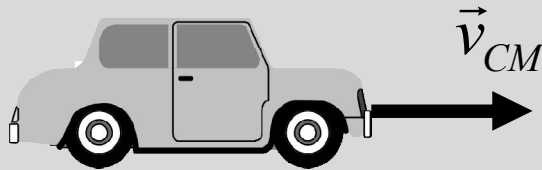
$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Attention à prendre le
moment d'inertie par
rapport au CM !

Quelques cas particuliers

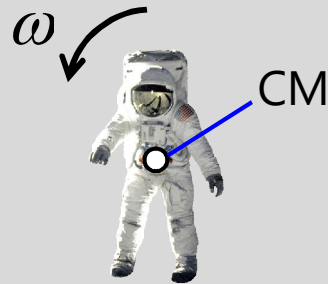
$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Translation pure ($\omega = 0$)



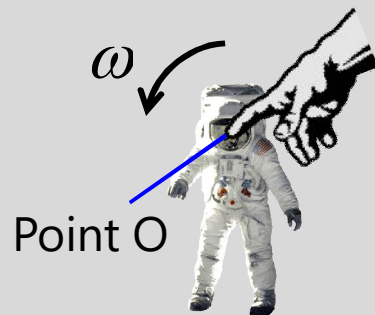
$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Rotation pure autour du CM ($v_{CM} = 0$)



$$T = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Rotation imposée autour d'un point O
autre que le CM ($v_{CM} \neq 0$)



Que vaut l'énergie cinétique ?

$$T = ?$$

Rotation non centrale

Le corps rigide est contraint de tourner autour d'un point O (pivot) qui n'est pas son CM. Dans ce cas, le CM suit un mouvement circulaire autour du pivot.

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$v_{CM} = \omega r_{O-CM}$$

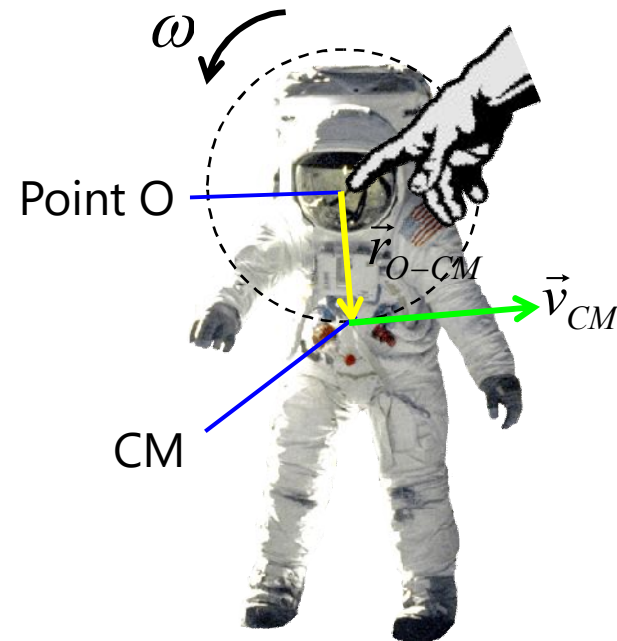
Mouvement circulaire du CM
autour du point O

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{(M r_{O-CM}^2 + I_{CM})}_{\text{Théorème des axes parallèles}} \omega^2$$

Théorème des axes parallèles

Énergie cinétique d'un corps rigide en rotation non centrale

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$



Énergie cinétique et CIR

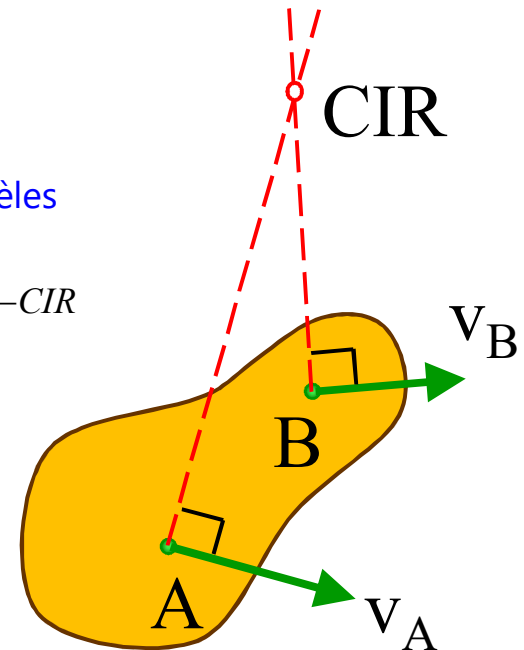
À chaque instant, un corps rigide qui suit un mouvement plan quelconque est en **rotation non centrale autour de son centre instantané de rotation (CIR)**. On peut donc appliquer l'expression vue à la page précédente.

**Énergie cinétique
d'un corps rigide**

$$T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2$$

Théorème des axes parallèles

$$I_{CIR} = I_{CM} + Mr_{CM-CIR}^2$$



Il peut s'avérer intéressant d'utiliser le CIR pour calculer l'énergie cinétique de certains corps rigides...

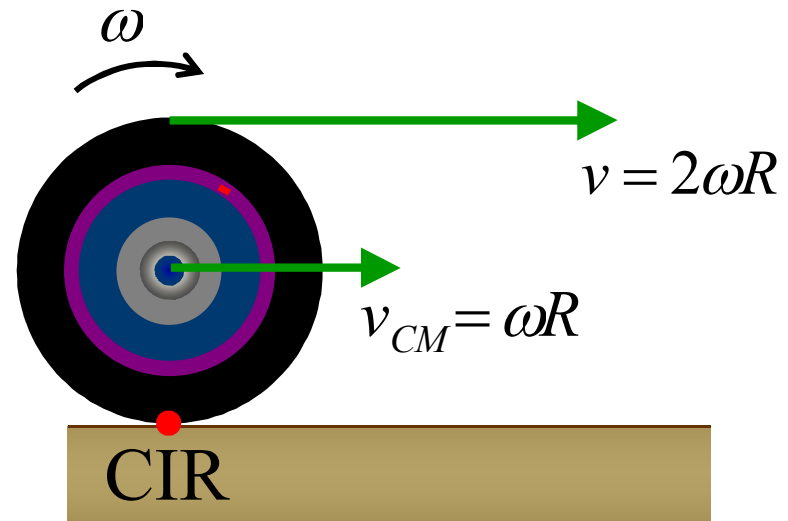
Roue qui roule sans glisser

Le CIR d'une roue qui roule sans glisser est le **point de contact entre la roue et le sol**. Ce point possède une vitesse nulle.

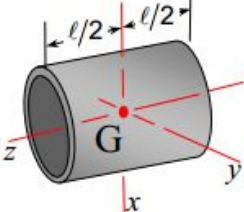
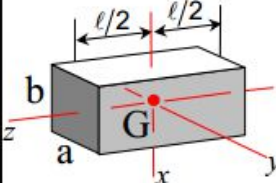
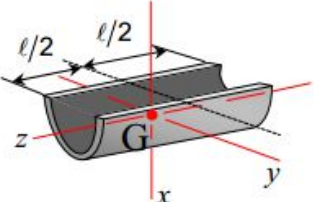
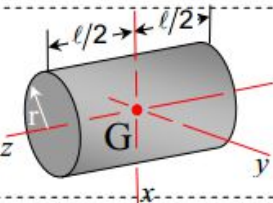
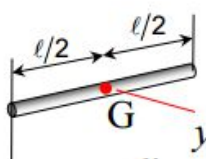
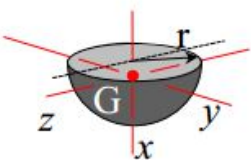
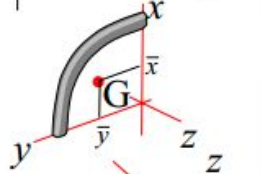
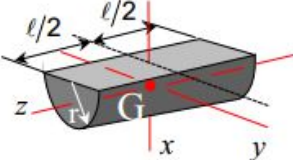
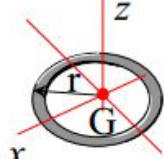
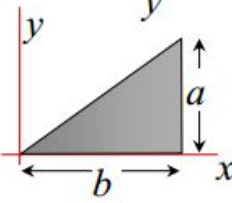
Énergie cinétique (roulement sans glissement)

$$T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2 \quad I_{CIR} = I_{CM} + mR^2$$

Supposons que la roue soit un disque homogène...



Le formulaire, encore et toujours !

CORPS	Centre Masse	MOMENTS D'INERTIE	CORPS	Centre Masse	MOMENTS D'INERTIE
		$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = mr^2$			$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + \ell^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + \ell^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{yy} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$	CORPS MINCES		
		$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$			$I_{yy} = \frac{1}{12}m\ell^2$
	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = \frac{2}{5}mr^2$ $I_{yy} = I_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$		$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{yy} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$		$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
					<p>Triangle mince</p> $I_{xx} = \frac{1}{6}ma^2$ $I_{yy} = \frac{1}{2}mb^2$

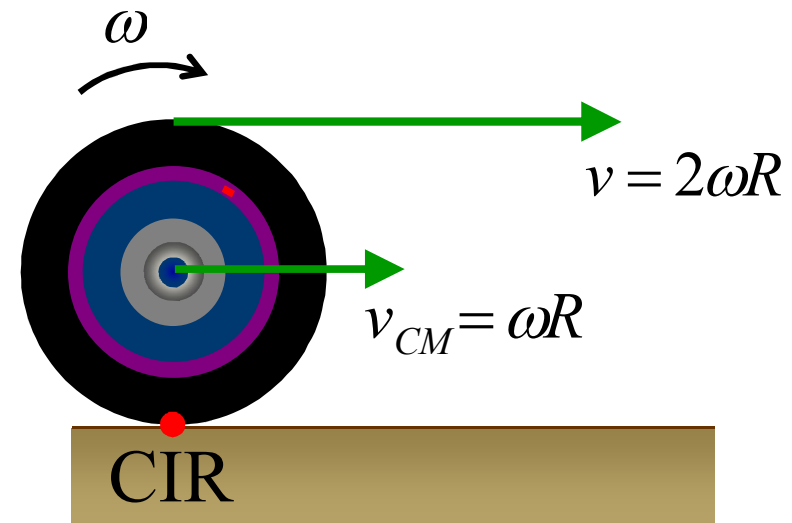
Énergie cinétique d'une roue

Le CIR d'une roue qui roule sans glisser est le **point de contact entre la roue et le sol**. Ce point possède une vitesse nulle.

Énergie cinétique (roulement sans glissement)

$$T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2 \quad I_{CIR} = I_{CM} + mR^2$$

Supposons que la roue soit un disque homogène... $I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$



$$T = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v_{CM}^2$$

L'énergie cinétique de la roue qui roule sans glisser est plus élevée que l'énergie cinétique de translation de son CM.

Énergie cinétique d'une roue

Roulement sans glissement

Quelle valeur peut prendre le moment d'inertie d'une roue ?

Cas limite #1 – Le cylindre creux

Toute la masse est située sur la circonférence de la roue à une distance R du CM. Le moment d'inertie est **maximal**.

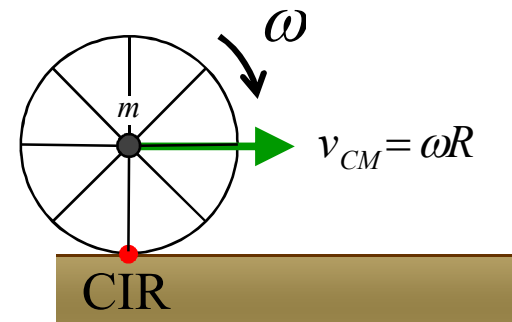
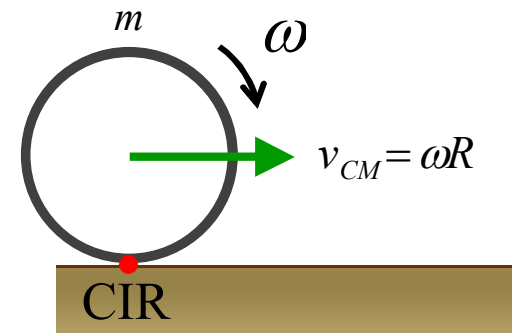
$$I_{CM} = mR^2 \quad \Rightarrow \quad T_{\max} = mv_{CM}^2$$

Cas limite #2 – La tige mince

Toute la masse est située sur l'axe de rotation de la roue qui passe par le CM. Le moment d'inertie est **minimal**.

$$I_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{\min} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

$$T = \frac{1}{2}(I_{CM} + mR^2)\omega^2$$



Le moment d'inertie de la roue influence la quantité d'énergie requise pour la mettre en mouvement.

Plan de la semaine

- Énergie cinétique d'un corps rigide
- **Principe travail-énergie en rotation**
 - **Travail effectué par un couple**
 - **Énergie potentielle d'un ressort de torsion**
 - **Puissance générée par un couple**

Principe travail-énergie en rotation

Le principe travail-énergie vu à la semaine 8 est encore valide, sauf qu'il faut **tenir compte de la rotation en calculant l'énergie cinétique**.

$$\boxed{\sum U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

Si les **forces et les couples non conservatifs** ne font pas de travail entre deux configurations du système, alors l'énergie mécanique est conservée.

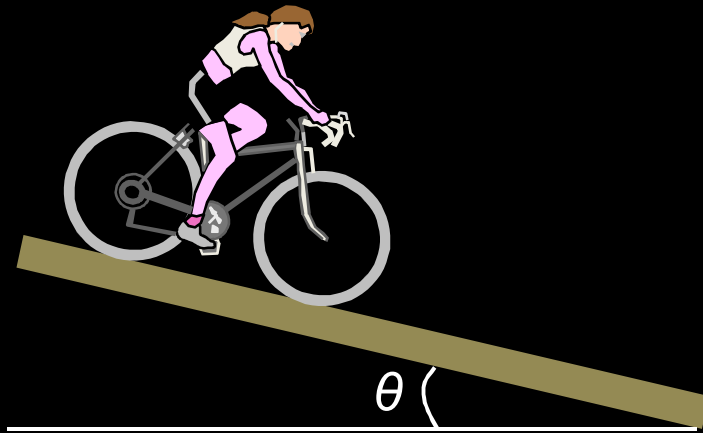
$$\boxed{\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2}$$

Sauriez-vous dire qui arrivera en bas de la pente avec la plus grande vitesse ?

On néglige toute perte d'énergie mécanique.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$



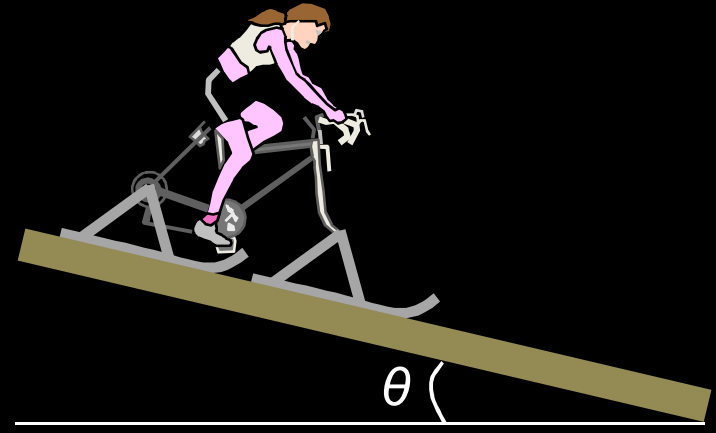
L'énergie potentielle gravitationnelle perdue se transforme en énergie cinétique de translation et de rotation.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2}(M + 2m)v_{CM}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = (M + 2m)gh$$

Vélo-ski

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux skis = $2m$



L'énergie potentielle gravitationnelle perdue se transforme en énergie cinétique de translation seulement.

$$\frac{1}{2}(M + 2m)v_{CM}^2 = (M + 2m)gh$$

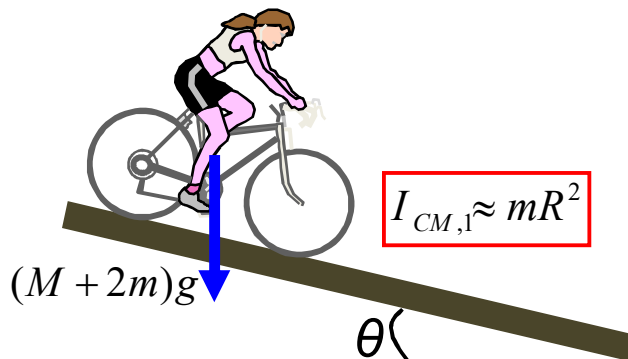
Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?

Situation 1

On néglige toute perte d'énergie mécanique.

Vélo à roues creuses

Masse totale cycliste + vélo = M
 Masse totale des deux roues = $2m$
 Rayon des roues = R



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$v_{CM} = \omega R$$

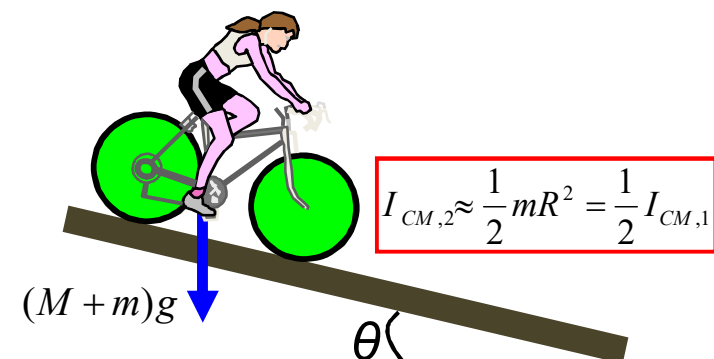
$$\frac{1}{2}(M + 2m)v_{CM}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(mR^2)\omega^2 = (M + 2m)gh$$

$$v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2m}{M+2m}}}$$

Roues pleines permettent d'aller plus vite !

Vélo à roues pleines

Masse totale cycliste + vélo = M
 Masse totale des deux roues = $2m$
 Rayon des roues = R



$$\frac{1}{2}(M + 2m)v_{CM}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = (M + 2m)gh$$

$$v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{m}{M+2m}}}$$

Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?

Situation 2

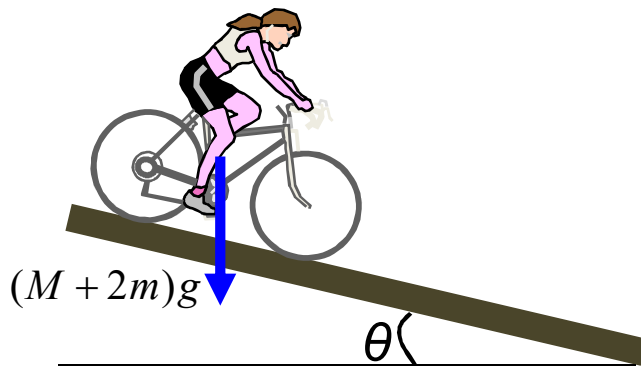
On néglige toute perte d'énergie mécanique.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $2m$

Rayon des roues = R



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$v_{CM} = \omega R$$

$$I_{CM} \propto mR^2$$

$$\frac{1}{2}(M + 2m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = (M + 2m)gh$$

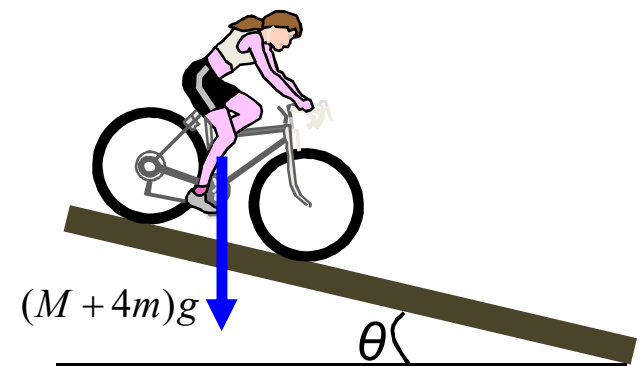
$$v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{(M + 2m)R^2}}}$$

Vélo aux roues 2 fois plus massives (même distribution de masse)

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $4m$

Rayon des roues = R



Moment d'inertie proportionnel à la masse

$$\frac{1}{2}(M + 4m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}(2I_{CM})\omega^2 = (M + 4m)gh$$

$$v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2I_{CM}}{(M + 4m)R^2}}}$$

Quelle vitesse est la plus élevée ?

Quelle vitesse est la plus élevée ?



$$v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2}}}$$

OU

$$v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2}}}$$



La vitesse la plus grande est celle dont le dénominateur de la fraction dans la racine carrée est le plus petit.

Lequel des termes suivants est le plus petit ?

$$\frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2} \quad \text{OU} \quad \frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2}$$

On peut calculer leur différence :

$$\frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2} - \frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2} = \frac{I_{CM}}{R^2} \frac{M}{(M+2m)(M+4m)} > 0 \quad \Rightarrow \quad v_{CM,1} > v_{CM,2}$$

Conclusion

Plus les roues sont massives, moins le vélo va vite !

Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?

Situation 3

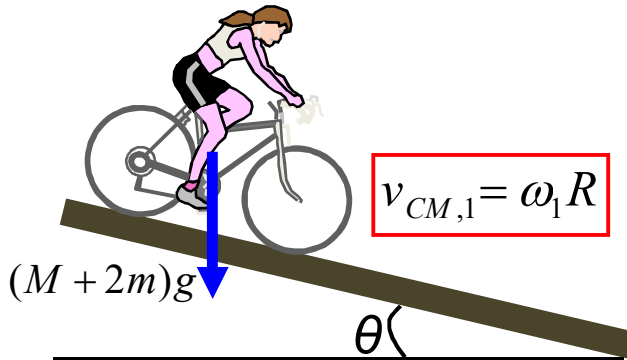
On néglige toute perte d'énergie mécanique.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $2m$

Rayon des roues = R



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$I_{CM} \propto mR^2$$

$$I_{CM,2} = \frac{1}{4} I_{CM,1}$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,1}^2 + \frac{1}{2}I_{CM,1}\omega_1^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,1}^2 + \frac{1}{2}I_{CM,1} \frac{v_{CM,1}^2}{R^2} = (M+2m)gh$$



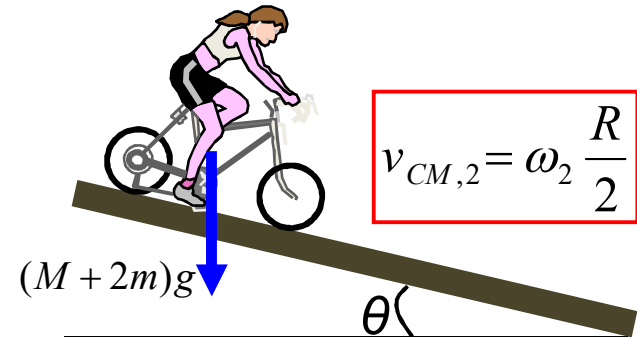
Les vitesses $v_{CM,1}$ et $v_{CM,2}$ respectent la même équation : **elles sont donc égales !**

Vélo aux roues 2 fois plus petites (même masse)

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $2m$

Rayon des roues = $R/2$



$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2}I_{CM,2}\omega_2^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}I_{CM,1}\right)\left(\frac{2v_{CM,2}}{R}\right)^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2}I_{CM,1} \frac{v_{CM,2}^2}{R^2} = (M+2m)gh$$



Récapitulatif

Nous avons démontré que :

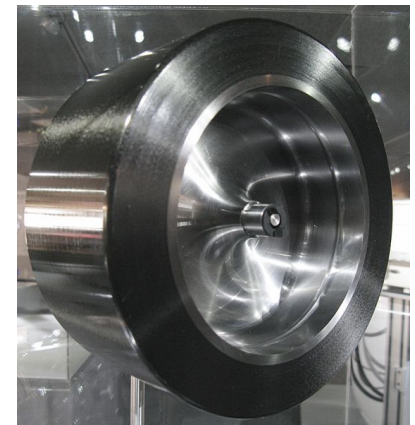
- Masses et rayons identiques, roulement vs glissement
→ L'énergie de rotation est de l'énergie perdue en translation !
- Masses et rayons identiques, roue creuse vs roue pleine
→ Les roues creuses ralentissent !
- Rayons identiques et masses différentes
→ Les roues plus massives ralentissent !
- Masses identiques et rayons différents
→ Aucune différence !

Comment en tirer profit ?

- Roues pleines et légères pour aller plus vite !

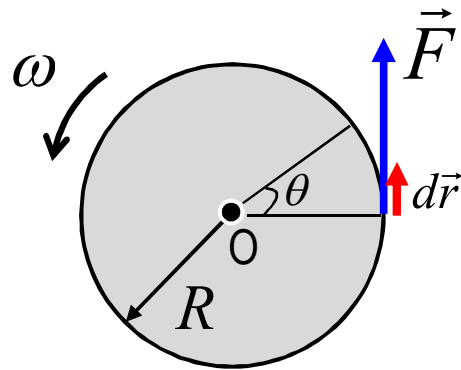
En pratique :

- Le profil aérodynamique (traînée et vent de travers) de la roue joue beaucoup ;
- Grand moment d'inertie → permet de conserver l'énergie cinétique une fois accumulée (volant d'inertie).

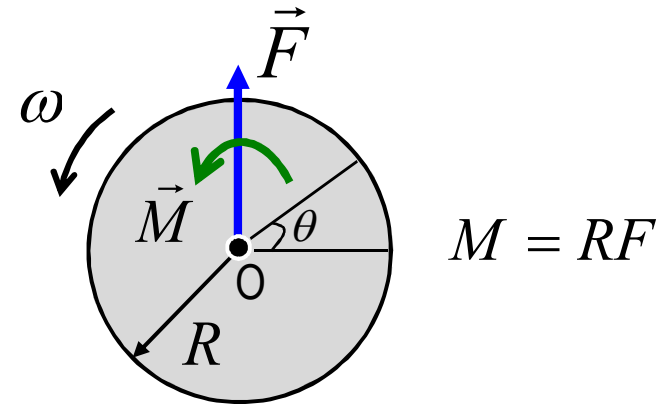


Travail effectué par un couple

On applique une force tangentielle sur une disque libre de tourner autour du pivot O situé en son centre. Calculer le travail fait sur le disque après qu'il a tourné d'un angle θ .



Système force-couple
équivalent



$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\theta FR d\theta = FR\theta$$

Force et déplacement parallèles.
Mouvement circulaire : $dr = R d\theta$

$$U_{1 \rightarrow 2} = FR\theta = M\theta$$

C'est la même situation physique et donc le travail effectué reste le même.
Le point pivot ne se déplace pas : la force ne fait donc pas de travail !

Travail effectué par un couple

Un couple qui s'applique sur un corps rigide en rotation (dont la vitesse angulaire n'est pas nulle) effectue un travail.

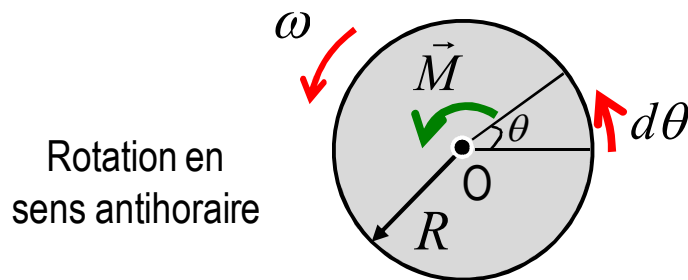
Travail effectué par un couple

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Il faut ajuster le signe du moment et des angles en fonction du sens de rotation.

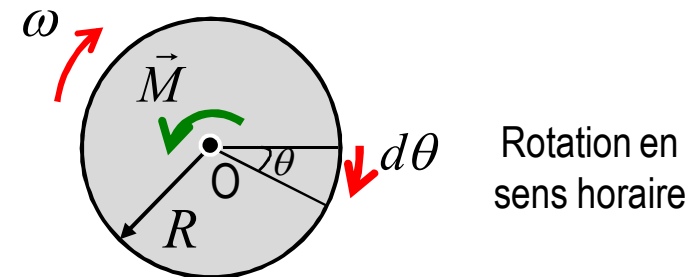
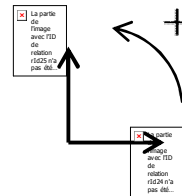
Avec les axes ci-dessous, déplacement angulaire en sens antihoraire est positif et un déplacement angulaire en sens horaire est négatif.

Exemple – Couple \vec{M} constant appliqué sur un disque.



$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) = M\theta$$

Couple dans le même sens que la rotation du disque : travail positif



$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) = -M\theta$$

Couple en sens opposé à la rotation du disque : travail négatif



<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c6/Victor-Mousetrap.jpg>

Ressort de torsion idéal

Un ressort de torsion est un ressort hélicoïdal qui s'oppose à des variations de position angulaire.

Paramètres d'un ressort de torsion

Constante du ressort :	κ	[N·m/rad]
Position angulaire naturelle :	θ_0	[rad]
Déplacement angulaire :	$\Delta\theta = \theta - \theta_0$	[rad]



C'est l'équivalent en rotation du ressort traditionnel.

Couple exercé par un ressort de torsion

$$\vec{M}_{res} = -\kappa \Delta \vec{\theta}$$

Signe négatif : le moment s'oppose au déplacement angulaire.

Énergie potentielle élastique d'un ressort de torsion

$$V_{res} = \frac{1}{2} \kappa (\Delta\theta)^2$$

Il faut tenir compte de ce couple et de cette énergie potentielle dans l'application du principe travail-énergie.

Énergie mécanique

Avec l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle élastique d'un ressort de torsion, l'énergie mécanique d'un corps rigide s'écrit comme suit.

Énergie mécanique d'un corps rigide

$$E = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 + \frac{1}{2}\kappa(\Delta\theta)^2$$

Cinétique
(translation)

Cinétique
(rotation)

Potentielle
(gravité)

Potentielle
(ressort linéaire)

Potentielle
(ressort torsion)

Le seul **couple conservatif** dans ce cours est le couple exercé par un ressort de torsion (il a une énergie potentielle associée).

Les autres couples (couple de frottement ou couple externe) sont des **couples non conservatifs** qui, s'ils font un travail, modifient l'énergie mécanique d'un corps rigide.

Puissance effectuée par un couple

La définition de la puissance moyenne ne change pas.

$$\overline{P} = \frac{U_{1 \rightarrow 2}}{\Delta t} = \frac{U_{1 \rightarrow 2}}{t_2 - t_1}$$

Le travail inclut maintenant le travail fait par les forces et les couples.

La puissance instantanée générée par un couple s'exprime de façon analogue à la puissance produite par une force.

**Puissance instantanée
(force)**

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Puissance instantanée
(couple)**

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Exemple 1 – Disque et ressort

Un disque homogène de 10 kg et de 50 cm de rayon pivote autour de son centre. Le pivot est légèrement rouillé : il génère un couple de frottement cinétique constant égal à 5 N·m. Un ressort de torsion est fixé au disque et l'empêche de tourner librement. La constante du ressort vaut 20 N·m/rad et sa position au repos est $\theta_0 = 0^\circ$ mesuré par rapport à l'axe y positif. Le disque est tourné d'un angle de 150° en sens horaire et maintenu immobile avant d'être relâché.

Quelle est la puissance instantanée dissipée par le frottement du pivot lorsque le disque a parcouru une distance angulaire de 90° ?

Information connue

Disque $m = 10 \text{ kg}$ $R = 0,50 \text{ m}$

Ressort $\theta_0 = 0$ $\kappa = 20 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$

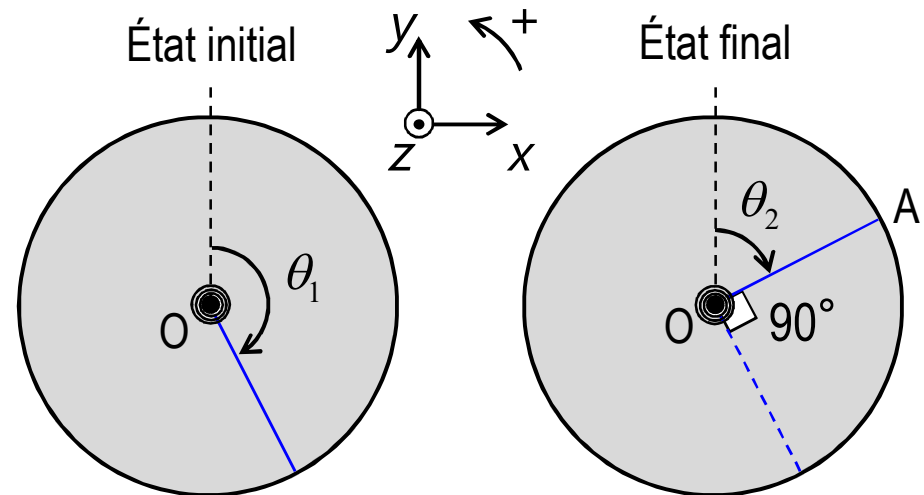
Frottement $M_f = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$

État initial $\theta_1 = -150^\circ = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ $\omega_1 = 0$

État final $\theta_2 = -60^\circ = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ $\omega_2 = ?$

Que cherche-t-on ?

Puissance dissipée par frottement à l'état final



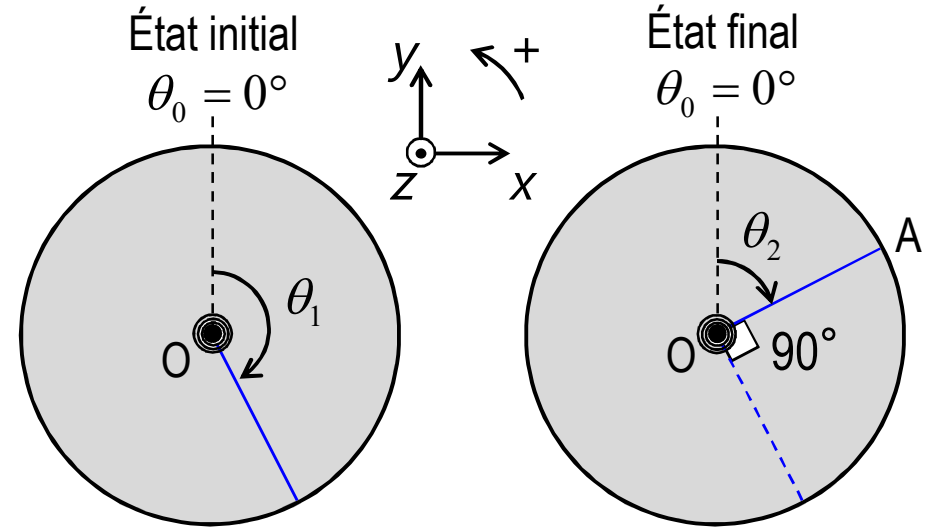
$$P_f = \vec{M}_f \cdot \vec{\omega}_2 = -M_f \omega_2$$

Exemple 1 – Disque et ressort

Stratégie de résolution

Un couple non conservatif (frottement) s'exerce sur le disque : l'énergie mécanique du disque n'est pas conservée.

1. Principe travail-énergie sur le disque pour trouver ω_2 ;
2. Calcul de la puissance instantanée dissipée par frottement.



	État initial	État final
Énergie cinétique (T)	0	$\frac{1}{2} I_{CM} \omega_2^2$
Énergie potentielle (V)	$\frac{1}{2} \kappa (\theta_1 - \theta_0)^2$	$\frac{1}{2} \kappa (\theta_2 - \theta_0)^2$
Travail des forces/couples non conservatifs (U_{nc})	$\int_{\theta_1}^{\theta_2} -M_f d\theta = -M_f (\theta_2 - \theta_1)$	

Exemple 1 – Disque et ressort

$$m = 10 \text{ kg} \quad R = 0,50 \text{ m} \quad \theta_0 = 0 \quad \kappa = 20 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \quad M_f = 5 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \theta_1 = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Principe travail-énergie

$$\sum_{\text{non conservati ves}} U_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 \quad \Rightarrow \quad -M_f(\theta_2 - \theta_1) = \left[\frac{1}{2} I_{CM} \omega_2^2 + \frac{1}{2} \kappa (\theta_2 - \theta_0)^2 \right] - \left[0 + \frac{1}{2} \kappa (\theta_1 - \theta_0)^2 \right]$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2 \quad \Rightarrow \quad -5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,50^2 \right) \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 \left(-\frac{\pi}{3} - 0 \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 \left(-\frac{5\pi}{6} - 0 \right)^2$$

Formulaire

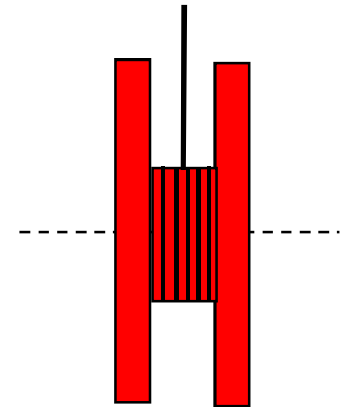
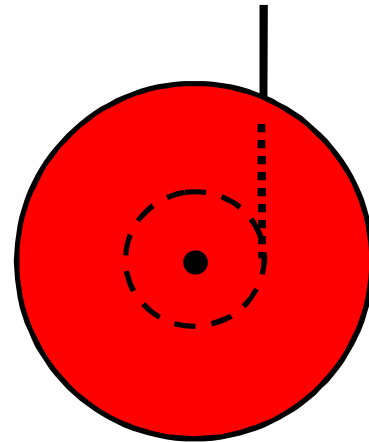
$$\Rightarrow \quad \omega_2 = 8,919 \text{ rad/s}$$

Puissance instantanée dissipée par frottement

$$P_f = \vec{M}_f \cdot \vec{\omega}_2 = -M_f \omega_2 = -5 \cdot 8,919 = -44,6 \text{ W}$$

La puissance est négative parce que le frottement retire de l'énergie au disque.

Exemple 2 – Modélisation d'un yoyo



- Quelle est la vitesse du centre de masse du yoyo une fois qu'il atteint le bout de sa corde ?
- Quel est le temps nécessaire pour que le yoyo se rende au bas de sa corde ?

Exemple 2 – Modélisation d'un yoyo

Quelles propriétés du yoyo doit-on connaître pour résoudre ?

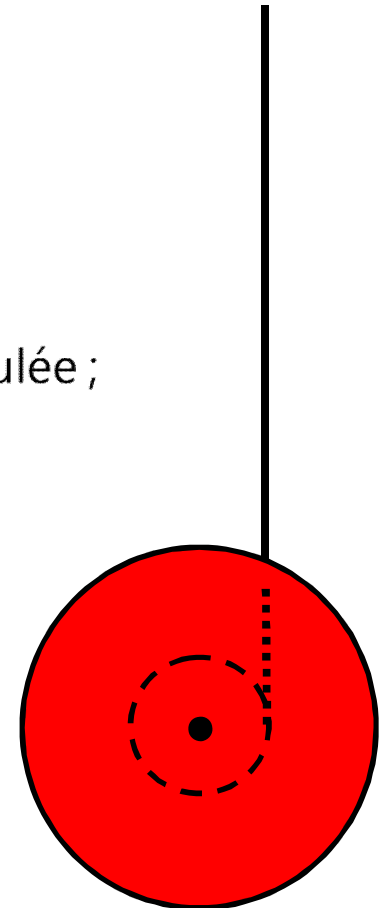
1. Masse m et moment d'inertie I_{CM} du yoyo ;
2. Rayons interne r et externe R du yoyo ;
3. Longueur L de la corde.

Que cherche-t-on ?

1. La vitesse v du yoyo une fois la corde complètement déroulée ;
2. Le temps t pour que la corde se déroule entièrement.

Quelles hypothèses peut-on poser ?

1. Le yoyo part immobile ;
2. Le yoyo est circulaire et symétrique (CM au centre) ;
3. La corde est inextensible et de masse négligeable ;
4. La corde ne glisse pas sur le yoyo lorsqu'elle se déroule ;
5. Toute forme de frottement est négligeable.



Exemple 2

1. Approche dynamique par rapport au CM

Condition de roulement
sans glissement

$$a_{CM} = \alpha r$$

La corde est enroulée autour
du rayon interne du yoyo.

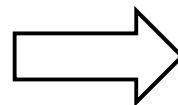
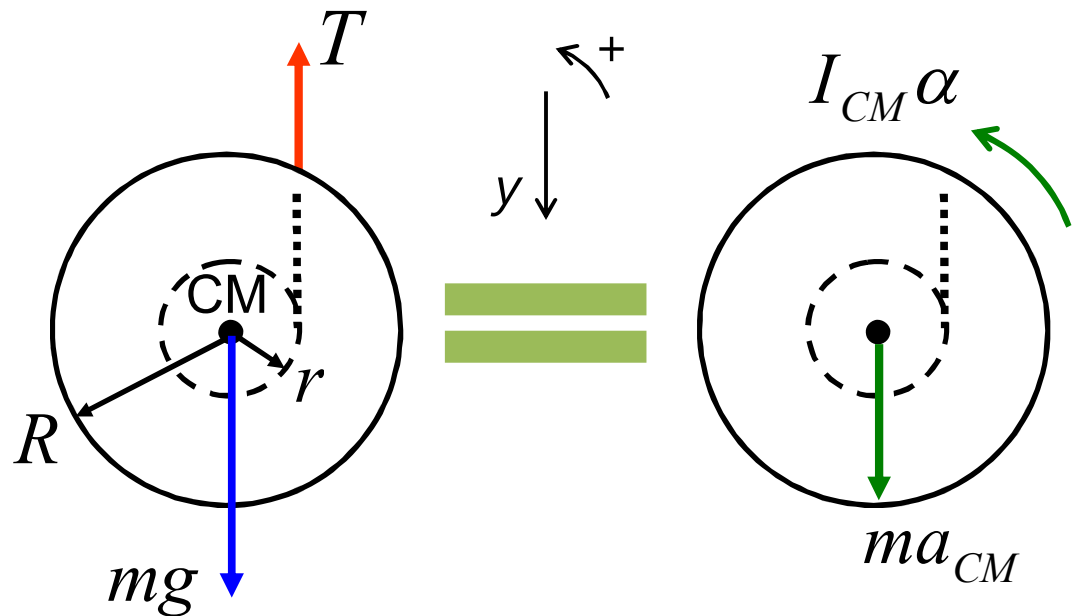
Somme des forces

$$\sum F_y = mg - T = ma_{CM}$$

Somme des moments
par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = rT = I_{CM}\alpha$$

DCL-DCE du yoyo



$$a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}$$

Exemple 2

1. Approche dynamique par rapport au CM

L'accélération du CM est constante : on utilise les équations du MUA pour déterminer la vitesse et le temps après avoir parcouru une distance L .

Module de la vitesse Le yoyo est initialement immobile.

$$v_{CM}^2 = v_{CM,0}^2 + 2a_{CM}(y_{CM} - y_{CM,0}) \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \sqrt{2a_{CM}L}$$

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}} \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}}$$

Temps de chute

$$v_{CM} = v_{CM,0} + a_{CM}(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{CM}}{a_{CM}} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{g} \left(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2} \right)}$$

Exemple 2

2. Approche dynamique par rapport au CIR

Le CIR du yoyo est le point de contact avec la corde.

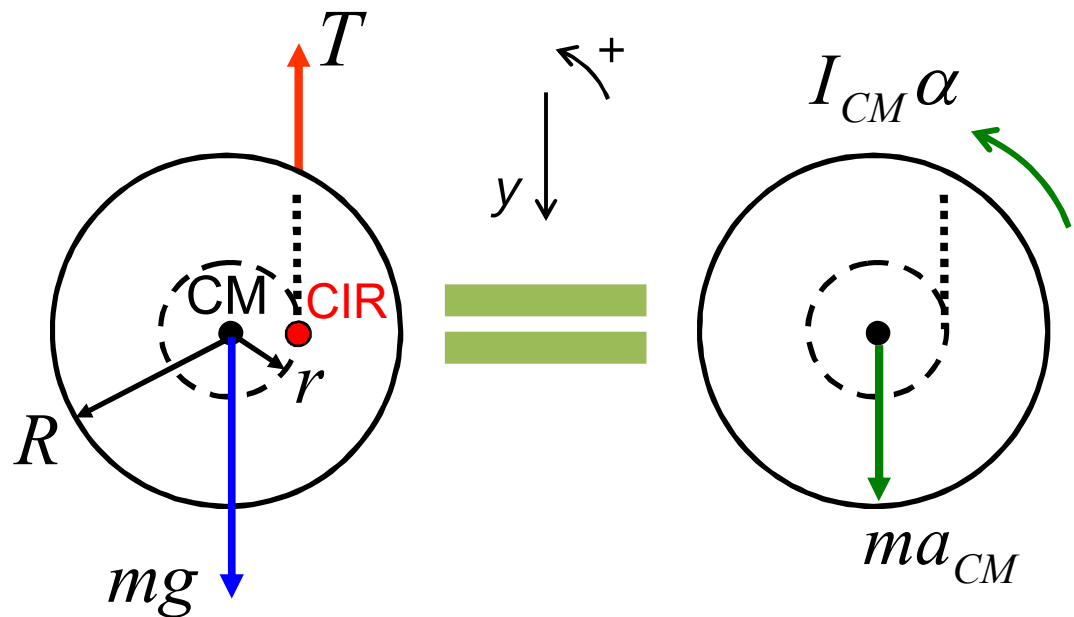
DCL-DCE du yoyo

Condition de roulement sans glissement

$$a_{CM} = \alpha r$$

Somme des moments par rapport au CIR

$$\sum M_{CIR} = mgr = \underbrace{(I_{CM} + mr^2)}_{I_{CIR}} \alpha$$



On trouve la même accélération !

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}$$

Exemple 2

3. Approche par la méthode de l'énergie

Forces et couples sur le yoyo

Poids : force conservative

Tension : force non conservative

Travail non conservatif

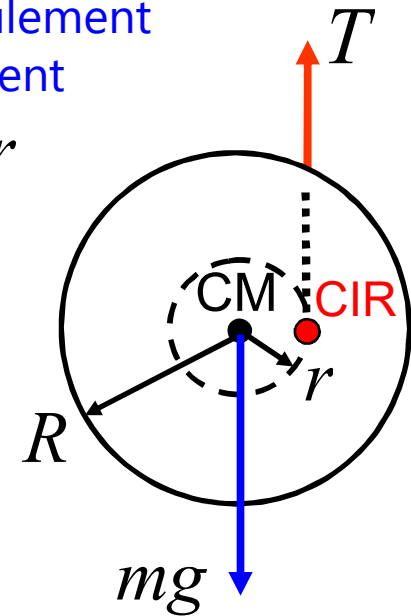
Le point auquel la tension s'applique ne se déplace pas (CIR du yoyo : point immobile).

Sans déplacement, il n'y a pas de travail.

$$\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2$$

Condition de roulement sans glissement

$$v_{CM} = \omega r$$



Conservation de l'énergie V_g : On pose $y = 0$ quand le yoyo est au plus bas.

$$E_1 = mgL$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_{CM}}{r^2} \right) v_{CM}^2 \quad \Rightarrow$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}}$$

Même résultat qu'avec la dynamique !

Exemple 2 – Application numérique

Valeurs numériques

$$r \approx 1 \text{ cm} \quad R \approx 3 \text{ cm}$$

$$L \approx 110 \text{ cm} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g} \left(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2} \right)}$$



Le yoyo contient 4 billes de métal situées à $r_B = 1,2 \text{ cm}$ centre, toutes enchâssées dans du plastique. Il contient également un essieu en métal. Le métal est beaucoup plus dense que le plastique rouge autour (environ 10 pour 1) ...

Moment d'inertie

Hypothèse : la masse du plastique est négligeable devant celle des billes et de l'essieu en métal.

$$I_{CM} \approx mr_B^2 = 1,2^2 m = 1,44m$$

Module de la vitesse

$$v_{CM} \approx 2,97 \text{ m/s}$$

Temps de chute

$$t \approx 0,740 \text{ s}$$

Valeurs en chute libre ($I_{CM} = 0$)

$$v_{CM} = 4,65 \text{ m/s}$$

$$t = 0,474 \text{ m/s}$$

Synthèse du cours

Énergie cinétique de rotation

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Il faut décomposer en translation du CM et en rotation par rapport au CM.

$$T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2$$

On peut aussi travailler avec le CIR directement (rotation pure).

Ressort de torsion

Couple exercé

$$\vec{M}_{res} = -\kappa \Delta \vec{\theta}$$

Énergie potentielle

$$V_{res} = \frac{1}{2} \kappa (\Delta \theta)^2$$

Principe travail-énergie

Travail fait par un couple

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Puissance instantanée produite par un couple

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Votre boîte à outils pour l'examen final

	Lois générales	Loi de conservation
Translation (vectorielle)	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$
Rotation (vectorielle)	$\sum \vec{M}_o = \mathbf{I}_o \vec{\alpha}$ $\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_o}{dt}$	$\sum \vec{M}_o = \vec{0}$ $\vec{H}_{o1} = \vec{H}_{o2}$
Translation + rotation (scalaire)	$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$ $E = T + V$ $T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$	$\sum U_{nc} = 0$ $E_1 = E_2$