PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 2
Été 2019

Djamel Seddaoui

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la résultante des forces externe qui est nulle dans le cas d'un système isolé. La variation de l'énergie mécanique, quant à elle, est égale au travail des forces non-conservatives qu'elles soient internes ou externes. Donc, pour un système isolé, même si le travail des forces externes est nul, celui des forces internes peut être non nul.

B. Vrai. Pour garder le contrôle de sa trajectoire, un véhicule utilise les frottements statiques qui s'appliquent entre ses pneus et la chaussée. Dans un virage, ces frottements sont orientés dans la direction normale à la trajectoire. Le véhicule dispose alors d'un frottement maximal de $\mu_s N$ pour générer une accélération normale qui lui permet de suivre la courbure du virage. Lorsque le conducteur freine, une composante tangentielle du frottement apparait. Ceci réduit la composante normale des frottements disponible pour suivre convenablement le virage puisque c'est le module de la force de frottement qui est limité à $\mu_s N$.

C. Faux. Une force impulsive est une force très intense capable de varier significativement la quantité de mouvement d'un objet en un temps très court. Exemple: même si le poids fait varier le quantité de mouvement de l'objet sur une longue durée, ce n'est pas une force impulsive car son effet est négligeable sur une très courte durée.

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

D. Les masses du parallélépipède et du demi-disque sont respectivement:

$m_p = 1{,}3(10 \times 60 \times 60)$ =46,8 kg et $m_D = 0{,}9\left(\frac{1}{2}\pi 30^2 \times 10\right) = 12{,}72$ kg

Les positions des centres de masse des deux parties sont:

$$G_p(30, 30, -5)$$

$$G_D\left(30, 55, \frac{4 \times 30}{3\pi}\right)$$

Les coordonnées du centre de masse de tout le solide est:

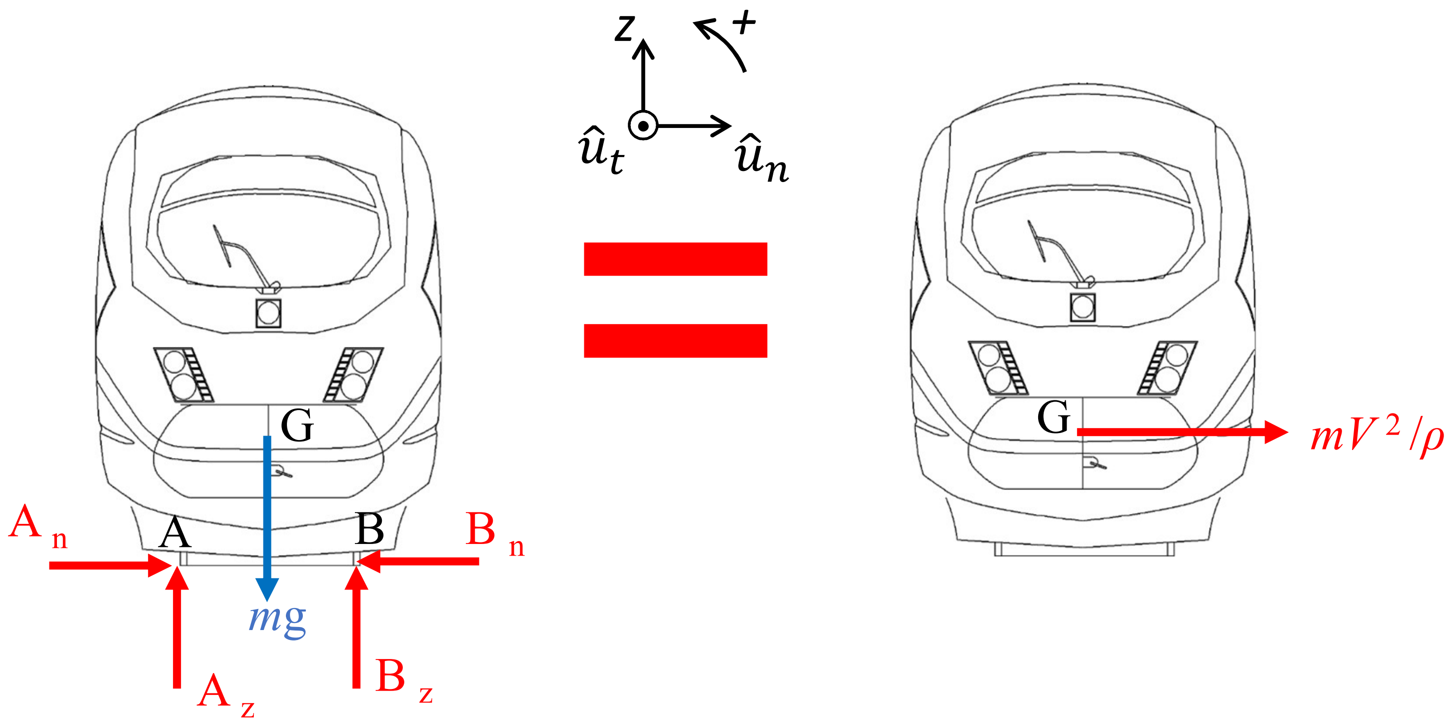
$$\bar{x} = 30\ cm$$

$$\bar{y} = \frac{46{,}8 \times 30 + 12{,}72 \times 55}{46{,}8 + 12{,}72} = 35{,}3\ cm$$

$$\bar{z} = \frac{46{,}8 \times (-5) + 12{,}72 \times 12{,}7}{46{,}8 + 12{,}72} = -1{,}22\ cm$$

Q2 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE de la locomotive



Éléments importants

- Le réaction A_z et B_z doivent s'orienter vers le haut
- Dans le DCE la flèche mV^2/ρ doit être orientée vers la droite
- Le vecteur unitaire $\hat{u}_t$doit être sortant de la page et $\hat{u}_n$ vers la droite.

Q2 – Solution (2/2)

B. Le déraillement de la locomotive se fait en pivotant autour du point A. La vitesse maximale de la locomotive correspond au cas où celle-ci est sur le point de pivoter autour du point A. Dans ce cas, les réaction en B deviennent nulles. Le bilan des moment par rapport à A donne:

$$\sum M_A = -mg\frac{\overline{AB}}{2} = -m\frac{V^2}{\rho}\sqrt{\overline{AG}^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}} \quad \text{d'où:} \quad \boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{\rho g \overline{AB}}{\sqrt{4\overline{AG}^2 - \overline{AB}^2}}} = 36{,}6\, m/s}$$

Calcule de la force F exercée par la locomotive sur le rail A:

$$\sum F_n = A_n = -m\frac{V_{max}^2}{\rho} = 643\ kN$$

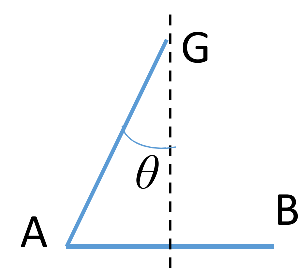
$$\sum F_z = A_z - mg = 0 \ \Rightarrow A_z = 1177\ kN$$

F est alors donné par (principe action-réaction):

$$\boxed{F = \sqrt{643^2 + 1177^2} = 1341\ kN}$$

B. Lorsque α est nul, l'angle d'inclinaison θ de AG par rapport à la verticale est:

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{\overline{AB}}{2\overline{AG}}\right) = 28{,}69°$$



Si $\alpha \neq 0$, θ devient $(\theta_0 + \alpha)$:

$$\sum M_A = -mg\overline{AG}\sin(\theta_0 + \alpha) = -m\frac{V^2}{\rho}\overline{AG}\sin(\theta_0 + \alpha + 90°)$$

$$\boxed{\alpha = arctan\frac{V^2}{\rho g} - \theta_0 = 22{,}8°}$$

Q3 – Solution (1/2)

A. Le mouvement du projectile est un mouvement uniforme sur l'axe x et uniformément accéléré sur l'axe y. La composante sur l'axe x de $\vec{V}_0$ est donc : $V_{0x} = V_1 \sin\alpha = 3{,}0\, m/s$

et sa composante sur l'axe y est donnée par : $V_{0y}^2 = (V_1 \cos\alpha)^2 + 2gy_1 \quad \Rightarrow V_{0y} = 5{,}0 m/s$

$$\boxed{\vec{V}_{0y} = (3\vec{i} + 5\vec{j})\, m/s}$$

B. La composante sur l'axe x de la quantité de mouvement du système composé de la boule et du meuble est conservée.

$$m_b V_1 \sin\alpha = m_b V_2 \sin\beta + m_m V_m \;\Rightarrow V_m = \frac{m_b}{m_m}\left(V_1 \sin\alpha - V_2 \sin\beta\right) \Rightarrow \boxed{V_m = 0{,}2\, m/s}$$

C. La force moyenne qu'exerce le meuble sur la boule s'obtient en divisant l'impulsion transférée du meuble vers la boule sur la durée du choc:

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\mathrm{Imp}}{\Delta t} = \frac{m_b}{\Delta t}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \frac{m_b}{\Delta t}\left(V_2(\sin\beta\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}) - V_1(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{moy} = (-10\,\vec{i} + 21{,}9\,\vec{j})\, kN}$$

Q3 – Solution (2/2)

D. Le coefficient de frottement cinétique est le rapport de la composante tangentielle sur la composante normale de la force de contact entre deux surfaces qui glissent l'une sur l'autre durant le choc. Même si cette force n'est pas constante sur toute la durée du choc, le rapport des composantes reste le même. En supposant que la surface du meuble reste plane durant le choc, les directions normale et tangentielle à la surface restent les mêmes. La force de contact peut être remplacée par la force moyenne calculée en C.

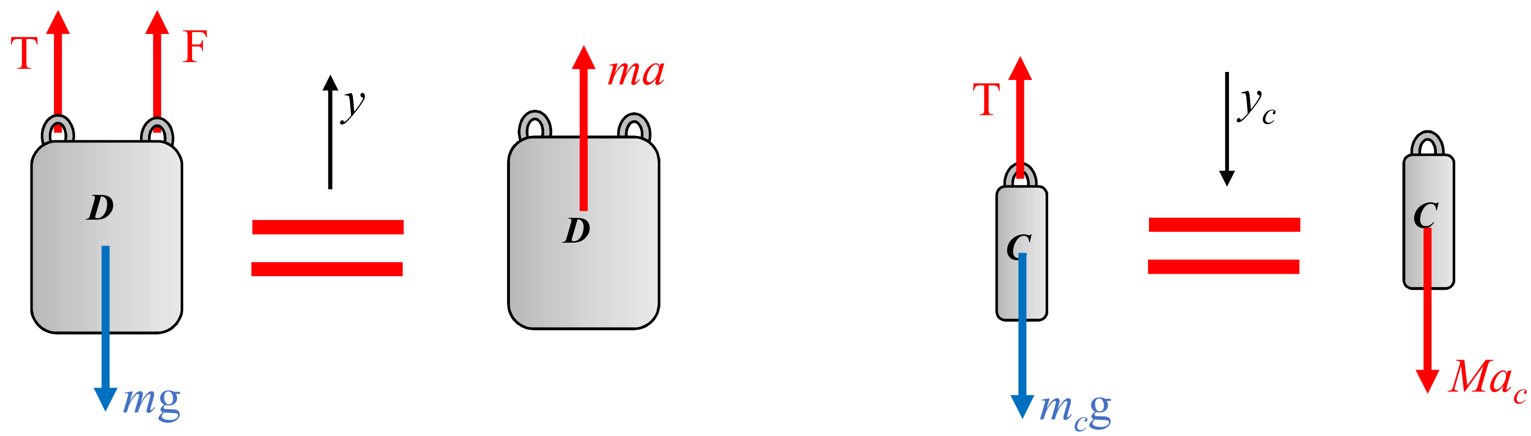
L'angle d'orientation de $\vec{F}_{moy}$(par rapport à l'axe x) est: $\theta = \arctan\left(\frac{21{,}9}{-10}\right) = -65.4 + 180 = 114.6°$

Cette force est donc orientée d'un angle de $114{,}6 - 45 = 69{,}6°$ par rapport à la surface du meuble. Donc:

$$\boxed{\mu_k = \cot 69{,}6 = 0{,}37}$$

Q4 – Solution (1/3)

A. DCL-DCE du monte-charge ***D*** et du contrepoids ***C***.



Éléments importants

- La tension T doit être la même dans les deux DCE.
- Les accélérations doivent être orientées tels que montrées ici.
- T et F doivent s'orienter vers le haut.

B. Selon la relation du mouvement contrains on trouve: $\Delta y_c = \Delta y/2$, $v_c = v/2$ et $a_c = a/2$,

Méthode 1:

La puissance du moteur est : $P = Fv$ où v est la vitesse de la corde tirée par le moteur et c'est aussi la vitesse de ***D***. d'où: $F = P/v$

Q3 – Solution (2/3)

Le DCL-DCE de ***C*** donne: $2T - m_C g = m_C a/2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m_C \left(g - \frac{a}{2}\right)$

Le DCL-DCE de ***D*** donne: $F + T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{v} + \frac{1}{2} m_C \left(g - \frac{a}{2}\right) - mg = ma$

$$\boxed{a_D = \frac{1}{\frac{m_C}{4} + m}\left(\frac{P}{v} - \left(m - \frac{m_C}{2}\right) g\right)}$$

ou

$$\boxed{a = \frac{2}{m_C + 4m}\left((m_C - 2m)g + \frac{2P}{v}\right)}$$

Plus facile à intégrer

Méthode 2:

$$E = \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} m v^2 - m_C g y_C + m g y \quad \Rightarrow \frac{dE}{dt} = P = m_C v_C a_C + m v a - m_C g v_C + m g v$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{m_C v a}{4} + m v a - \frac{m_C g v}{2} + m g v \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{2}{m_C + 4m}\left((m_C - 2m)g + \frac{2P}{v}\right)}$$

C. Comme l'accélération dépend de la vitesse alors: $a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)}$

En remplaçant les variables par leurs valeurs, l'expression de l'accélération devient: $a(v) = 2{,}4525 \frac{2 - v}{v}$

$$\Delta t = \int_0^V \frac{dv}{a(v)} = 0{,}4077 \int_0^1 \frac{v dv}{2 - v} = 0{,}4077[-v - 2\ln(2 - v)]_0^1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 158\text{ms}}$$

Q3 – Solution (3/3)

D. Le principe travail-énergie donne:

$$U_{\text{moteur}} = \Delta E = \frac{1}{2}m_C v_C^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m_C g\Delta y_C + mg\Delta y$$

avec: $\Delta y = 2\Delta y_C = h$ où h est la hauteur recherchée et $U_{\text{moteur}} = P\Delta t$ le travail fait par le moteur

$$P\Delta t = \frac{1}{2}m_C\left(\frac{V}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mV^2 - m_C g\frac{h}{2} + mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{2P\Delta t - \left(m + \frac{m_c}{4}\right)V^2}{(2m - m_c)g}$$

$$\boxed{h = 11{,}2\ \text{cm}}$$