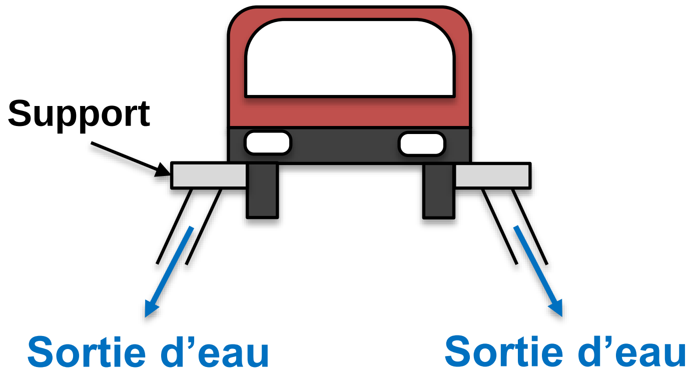
Question 1

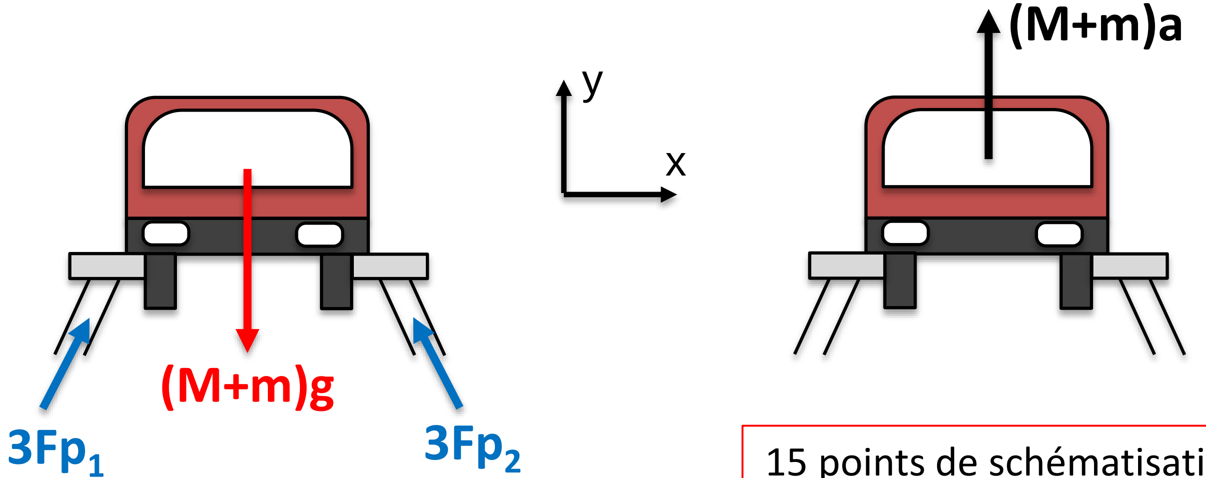
Une voiture, schématisée ci-dessous, est élevée dans les airs par six lances à incendie cylindriques. Ces dernières sont installées sur un support accroché à la voiture et leurs jets (trois à gauche et trois à droite) sont dirigés vers le bas et inclinés de 15° par rapport à la verticale. Utilisez les masses suivantes pour vos calculs : 80 kg pour le support et les lances et 700 kg pour la voiture. Le diamètre des lances est de 6.5 cm. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3.

A) Faire le DCL-DCE de la voiture (avec le support). (15 points)
B) Déterminer la vitesse minimale de sortie de l'eau pour que la voiture soit soulevée. (15 points)
C) Déterminer la vitesse de la voiture (vers le haut) quand l'eau sort de la lance à 15m/s. Considérez le cas où la voiture a une vitesse constante. (10 points)
D) Calculer la quantité d'eau requise (en kg) pour maintenir la voiture à une hauteur donnée pendant une minute. (10 points)



Question 1 – Solution

A) DCL-DCE de la voiture avec le support. (15 points)



15 points de schématisation/compréhension

B) Vitesse minimale de sortie de l'eau pour que la voiture soit soulevée. (15 points)

Lorsque la voiture est soulevée, l'équilibre statique vient juste d'être rompu :

$$3Fp_1 \cos\theta + 3Fp_2 \cos\theta = (M+m)g$$

$$3Fp_1 \sin\theta - 3Fp_2 \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow Fp_1 = Fp_2 = Fp$$

Calcul de la force de propulsion pour une lance :

$$Fp = \frac{dm}{dt}.(v_s - 0) = \rho v_s \pi D^2 . v_s = \rho \pi D^2 v_s^2$$

15 points de résolution de problème

$$\Rightarrow 6\rho\pi D^2 v_{s,\min}^2 \cos\theta = (M+m)g \Rightarrow v_{s.\min} = \sqrt{\frac{(M+m)g}{6\rho\pi D^2 \cos\theta}} \qquad \Rightarrow v_{s,\min} = 10\, m/s$$

Question 1 – Solution (suite)

C) Vitesse de la voiture si elle se déplace à vitesse constante. (10 points)

Vitesse constante → accélération nulle

$$Fp = \frac{dm}{dt}.(v_s - v_v) = \rho\pi D^2 (v_s - v_v)^2$$

$$\Rightarrow 6\rho\pi D^2 (v_s - v_v)^2 \cos\theta = (M+m)g \Rightarrow v_v = v_s - \sqrt{\frac{(M+m)g}{6\rho\pi D^2 \cos\theta}} = v_s - v_{s,\min} = 5m/s$$

$\boxed{\text{10 points de résolution de problème}}$

D) Quantité d'eau requise (en kg) pour maintenir la voiture à une hauteur donnée pendant une minute. (10 points)

À hauteur constante, a=v=0 et v_s=$v_{s,min}$

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{total} = 6\rho v_s \pi D^2 = 132.7 kg/s \qquad \Rightarrow m_{eau} = \frac{dm}{dt} t = 7962\, kg$$

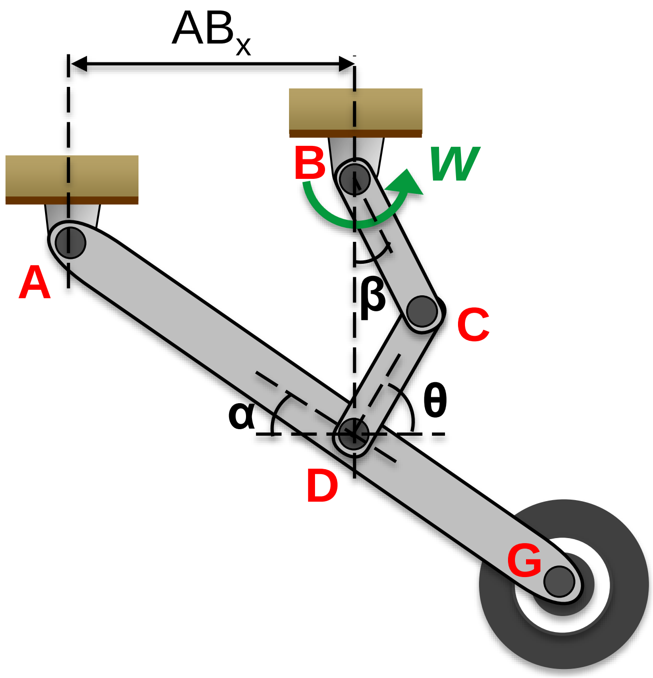
$\boxed{\text{10 points de calculs simples}}$

Question 2

Le train d'atterrissage, schématisé ci-dessous, est en phase de rentrée et permet à la roue de se loger dans l'avion afin de diminuer la résistance à l'air lors du vol. La vitesse de rotation au point B est de w=0.15rad/s.

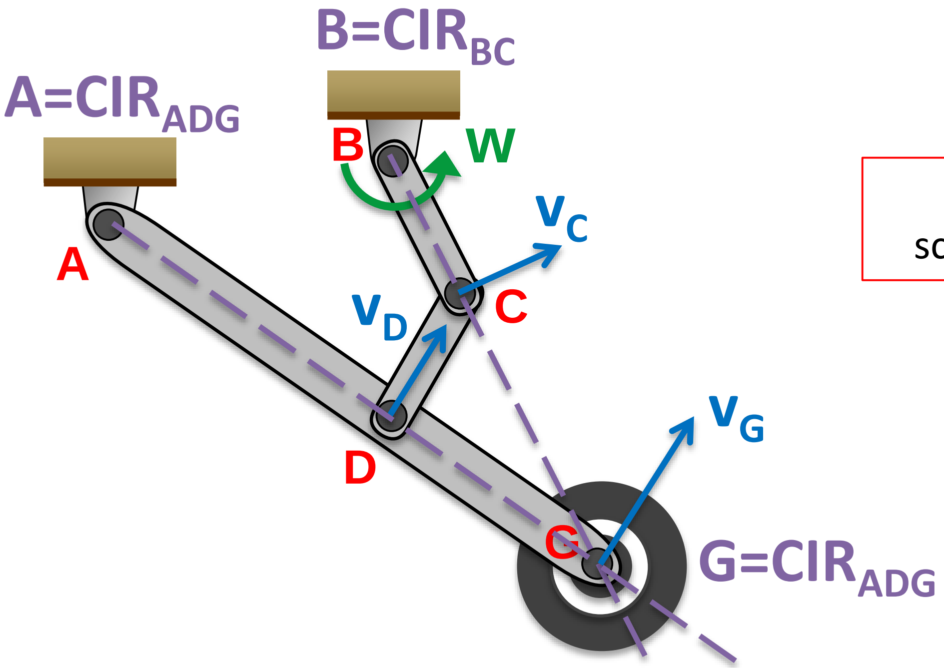
Dimensions : AB_x=700mm, α=35°, β=25°, θ=55°, BC=400mm, DG=650mm

A) Tracer les CIR des barres ADG, BC et CD. (20 points)
B) Calculer les distances entre C et le CIR de CD et entre D et le CIR de CD. (15 points)
C) Déterminer la vitesse de rentrée de la roue au point G. (15 points)



Question 2 – Solution

A) CIR des barres ADG, BC et CD. (20 points)



20 points de schématisation/compréhension

B) Distances entre C et le CIR de BD, entre D et le CIR de BD. (15 points)

$$d(D, CIR_{CD}) = DG = 650mm \qquad d(C, CIR_{CD}) = CG = 860mm$$

15 points de calculs simples

Triangle BCD

$$\frac{BC}{\sin(90-\theta)} = \frac{CD}{\sin(\beta)}$$

$$\Rightarrow CD = 295mm$$

Triangle BCGD

$$\frac{BC+CG}{\sin(90+\alpha)} = \frac{DG}{\sin(\beta)}$$

$$\Rightarrow CG = 860mm$$

Question 2 – Solution (suite)

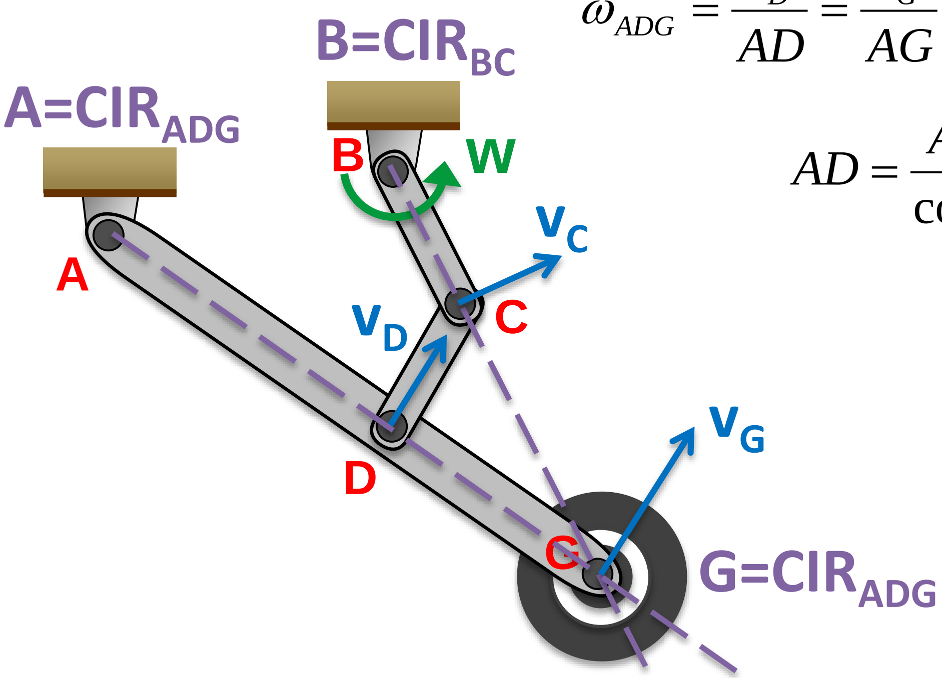
C) Vitesse de rentrée de la roue au point G. (15 points)

$$\omega_{BC} = \frac{v_C}{BC} \Rightarrow v_C = 0.06m/s$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{CG} = \frac{v_D}{DG} \Rightarrow v_D = \frac{DG}{CG} v_C = 0.756 v_C = 0.045m/s$$

$$\omega_{ADG} = \frac{v_D}{AD} = \frac{v_G}{AG} \Rightarrow v_G = \frac{AD+DG}{AD} v_D = 1.760 v_D = 0.079m/s$$

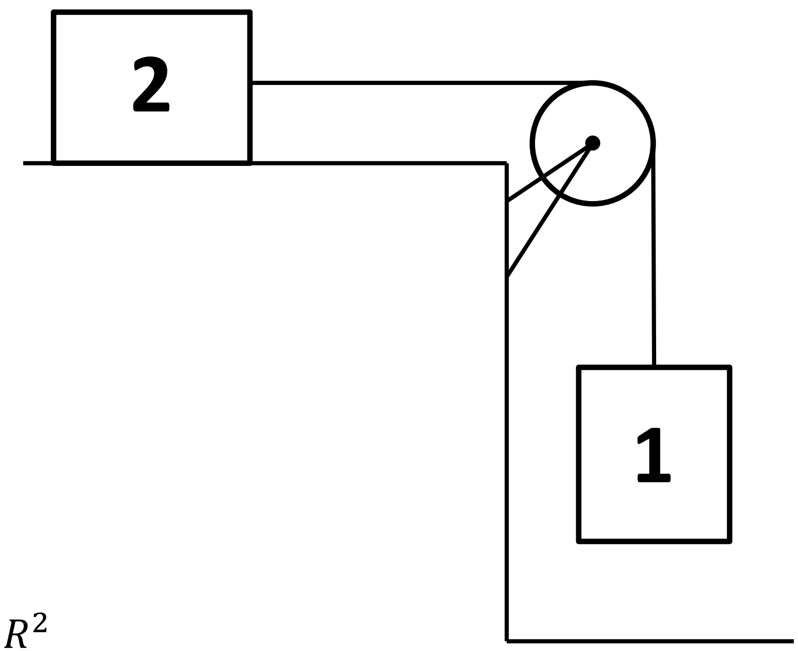
$$AD = \frac{AB_x}{\cos\alpha} = 855mm$$



15 points de résolution de problème

Exercice 3

Une poulie de masse m_p, de rayon R et de moment d'inertie I_c est attachée au bord d'une table.
Une corde inextensible dont le poids est négligeable relie le bloc 1 (de masse m_1) au bloc 2 (de masse m_2) à l'aide d'une poulie. Le coefficient de frottement dynamique entre le bloc 2 et la table est u_k. On sait que $m_1 > \mu_k m_2$.
Les blocs sont initialement au repos.
On donne : $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $\mu_k = 0.3$, $g = 9.81$ m/s², $t_1 = 1.5$ sec, $m_p = 1$ kg, $R = 30$ cm



Note : $I_c = \frac{1}{2} m_p R^2$

Exercice X

A) Faites les DCL/DCE de la poulie, du bloc 1 et du bloc 2 (10 points)

B) Les accélérations des deux blocs sont-elles égales ? Justifiez. Les tensions dans les cordes pour chacun des blocs sont-elles égales ? Justifiez. (5 points)

C) Exprimez, sans calculer numériquement, l'accélération *a* du bloc 1 en fonction de m_1, m_2, μ_k, g, I_c, et R. (15 points)

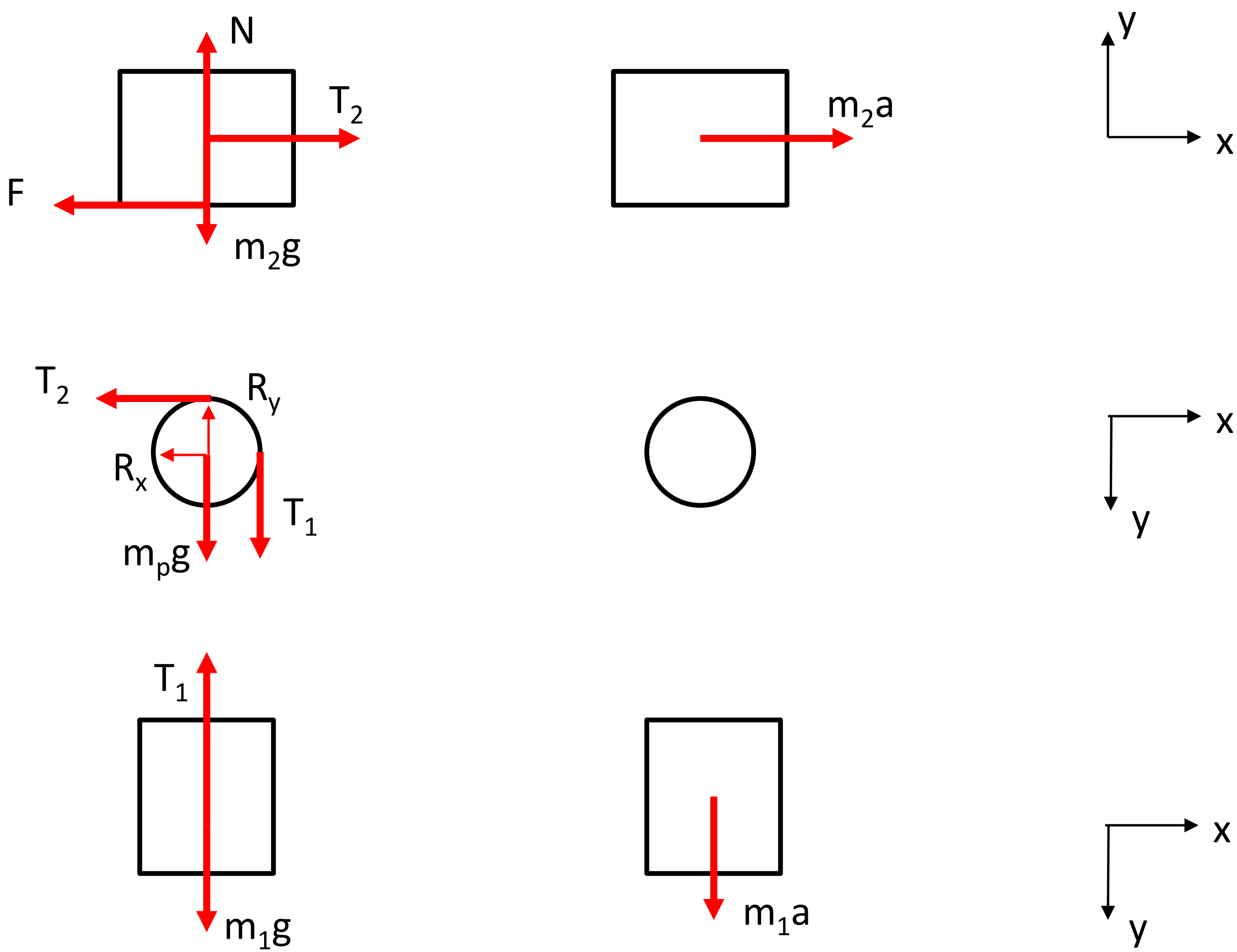
D) Le bloc 1 touche le sol au temps t_1. Exprimez PUIS calculez la distance parcourue par le bloc 1 une fois qu'il touche le sol. (10 points).

E) Calculez la vitesse de rotation de la poulie à l'instant où le bloc 1 touche le sol. (10 points)

Solution

A) DCL/DCE

Compréhension



Solution

B) Les accélérations des deux blocs sont-elles égales ? Justifiez. Les tensions dans les cordes pour chacun des blocs sont-elles égales ? Justifiez. (5 points)

La corde est inextensible, on peut utiliser l'équation des mouvements contraints. On a $a_1=a_2$

Les tensions dans les cordes ne sont pas égales car elles produisent chacun un moment sur la poulie. La poulie ayant un moment d'inertie, elle subit alors une accélération angulaire ce qui implique que la somme des moments est non nulle. Pour que cette somme soit non nulle, il est donc indispensable que les tensions soient différentes.

$$R(T_1 - T_2) \neq 0 = I_c \alpha$$

Compréhension

Solution

C) Exprimez l'accélération a en fonction de m_1, m_2, μ_k, g, I_c, et R. (20 points)

On fait la somme des forces sur les blocs et la somme des moments sur la poulie

Bloc 1 :

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

Bloc 2 :

$$T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a$$

Poulie :

$$R(T_1 - T_2) = I_c \alpha$$

On utilise la définition de T_1, T_2 dans l'équation de la somme des moments de la poulie. On utilise aussi la relation a=Rα

$$R((m_1 - \mu_k m_2)g - (m_1 + m_2)a) = I_c \frac{a}{R}$$

En faisant un petit massage à cette équation, on obtient :

Calcul simple

$$a = \frac{(m_1 - \mu_k m_2)g}{\frac{I_c}{R^2} + (m_1 + m_2)}$$

Solution

D) Quelle distance le bloc 1 a t-il parcouru une fois qu'il touche le sol ? (10 points)

Calcul simple

On utilise d=0.5*a*t^2

On sait que le bloc touche le sol au temps t_1. On connait *a* grâce à la question précédente. On remplace :

$$d = \frac{1}{2}\frac{(m_1 - \mu_k m_2)g}{\frac{I_c}{R^2} + (m_1 + m_2)}{t_1}^2$$

$$d = \frac{1}{2}\frac{(1 - 0.3 * 2)9.81}{\frac{0.5 * 1 * 0.3^2}{0.3^2} + (2 + 1)}1.5^2 = 1.26m$$

Solution

E) Quelle est la vitesse de rotation de la poulie à l'instant où le bloc 1 touche le sol ? (10 points)

On sait que les vitesses des deux blocs sont égales ainsi que les distances parcourues (mouvements contraints, d=l). On utilise la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - m_2gd = -\mu m_1gl$$

On trouve la vitesse de la même façon que dans la question précédente : v = at
À t = t_1, la vitesse est alors :

$$v(t_1) = \frac{(m_1 - \mu_k m_2)g}{\frac{I_c}{R^2} + (m_1 + m_2)} t_1 = 1.68m/s$$

Solution

On isole ω: $$\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2-m_2gd=-\mu m_1gl$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{m_pR^2}\left(-4\mu m_1gl+4m_2gd-2v^2(m_1+m_2)\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{1*0.3^2}\left(-4*0.3*1*9.81*1.26+4*2*9.81*1.26-2*1.68^2(1+2)\right)}$$
$$=27.3rad/s$$

(soit 4.35 rotations/sec)

Résolution de problèmes

Question 4:

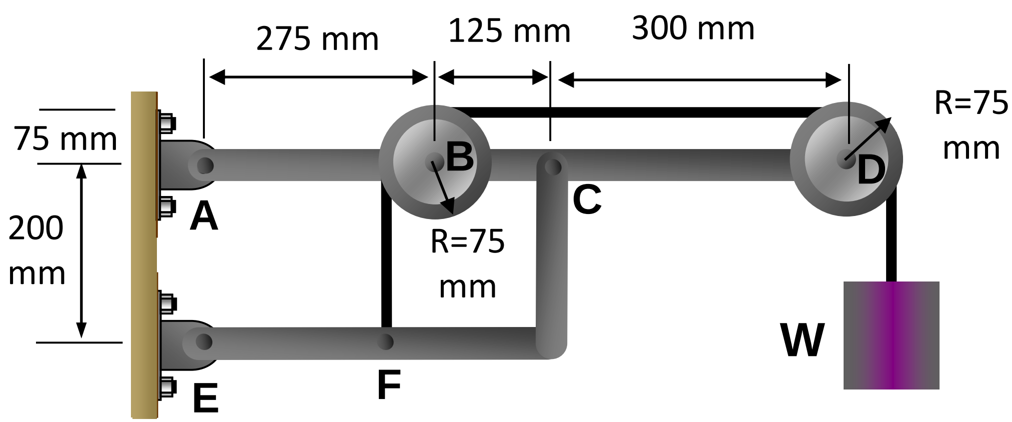
On considère le mécanisme illustré ci-dessous. La charge appliquée sur la poulie D est de 350N. Toutes les dimensions sont indiquées sur la figure. Les deux poulies possèdent un rayon de 75 mm. La corde reliant la masse W passe par les poulies D et B et est solidement fixée au point F. Les membrures, les poulies et la corde sont de masse négligeable.

A) Donner le DCL du système entier, (10 points)

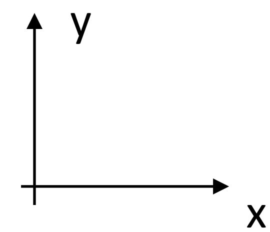
B) Donner le DCL des membrures ABCD et EFC prises individuellement (vous pouvez laisser les poulies en place si vous le jugez opportun) (10 points)

C) À l'aide de ces trois DCL et de tout autre DCL nécessaire, calculer toutes les composantes des forces qui s'exercent en A, B, C, D, E et F. (25 points)

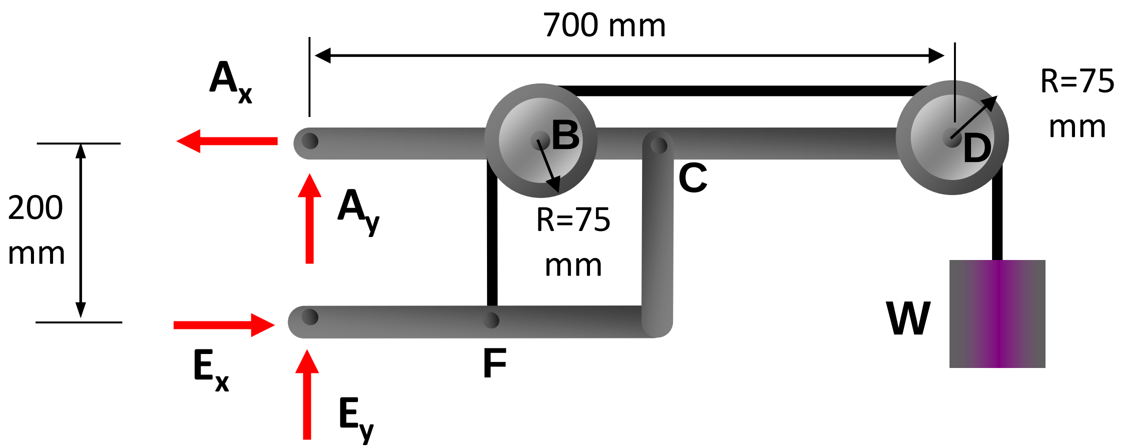
D) Exprimer toutes ces forces sous forme vectorielle selon le système d'axe choisi. (5 points)



Question 4 (solution)

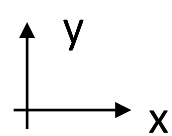


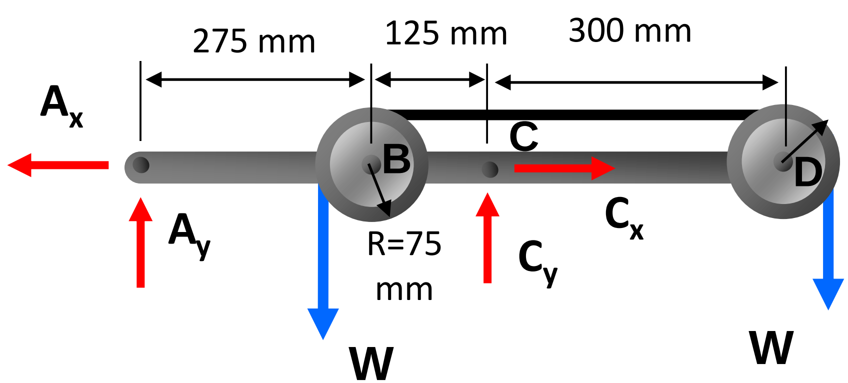
A) DCL entier:



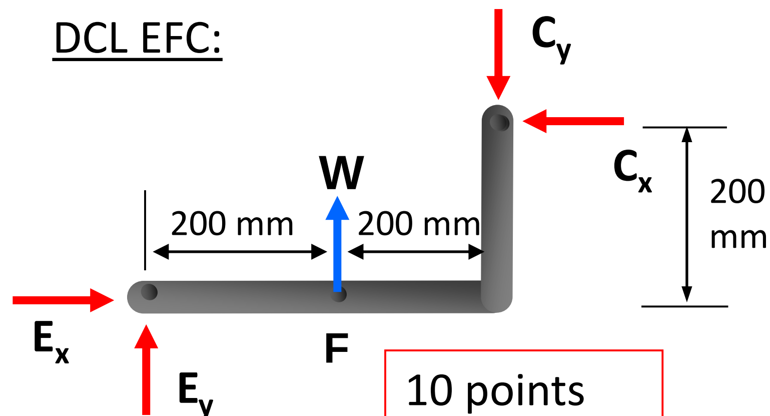
10 points

B) DCL ABCD:





DCL EFC:



10 points

Les réactions en C doivent être de sens opposé sur les membrures.
L'étudiant peut également faire le DCL sans les poulies (c'est même mieux).

Question 4 (suite)

C) <u>Du DCL général</u>:

Somme des forces en x: $\mathbf{A_x - E_x = 0}$

Somme des forces en y: $\boxed{\mathbf{A_y + E_y - W = 0}}$

Somme des moments au point A: $\mathbf{0{,}2 * E_x - 0{,}775 * W = 0}$

$\boxed{\mathbf{E_x = A_x = 7{,}75/2 * W = 1356.25\ N}}$

<u>Du DCL ABCD</u>: la tension dans la corde est tout simplement **W**.

Somme des moments au point C: $\mathbf{0{,}2 * W - 0{,}3 * W - 0{,}4 * A_y = 0}$

$\boxed{\mathbf{A_y = -0{,}175/0{,}4W = -153{,}125\ N}}$

Par conséquent: $\boxed{\mathbf{E_y = W - A_y = 350 - (-153{,}1) = 503{,}1N}}$

Question 4 (suite)

Du DCL ABCD (suite):

Somme des forces en x: $\mathbf{A_x - C_x = 0}$

$\mathbf{C_x = 503{,}1N}$

Somme des forces en y: $\mathbf{A_y + C_y - 2W = 0}$

$\mathbf{C_y = 2W - A_y = 853{,}1N}$

Du DCL EFC:

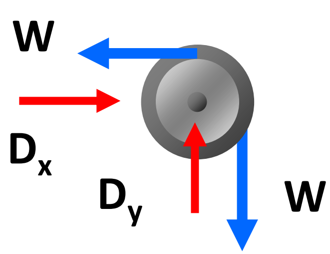
$\mathbf{E_y - C_y + W = 0}$

$\mathbf{E_y = C_y - W = 503{,}1N}$

$\mathbf{F_y = 350\ N}$

$\mathbf{F_x = 0\ N}$

Du DCL de la poulie D:

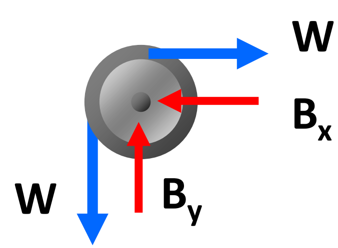


$\mathbf{D_y = 350N}$

$\mathbf{D_x = 350N}$

25 points

Du DCL de la poulie B:



$\mathbf{B_y = 350N}$

$\mathbf{B_x = 350N}$

Question 4 (suite)

<u>Résumé</u>: Nous avons donc:

$$\boxed{\vec{A} = -1356\vec{i} - 153\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\vec{B} = -350\vec{i} + 350\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\vec{C} = \pm\left(1356\vec{i} + 503\vec{j}\right) N}$$

$$\boxed{\vec{D} = 350\vec{i} + 350\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\vec{E} = 1356\vec{i} + 503\vec{j}\ N}$$

$$\boxed{\vec{F} = 350\vec{j}\ N}$$

5 points