– PHS1101 –
Mécanique pour ingénieurs

Cours 9

Jérémie Villeneuve
Département de génie physique

Muay Thai (Boxe thaïlandaise)

Comment mesurer la force du coup de pied ?

Chaîne Scilabus : https://www.youtube.com/watch?v=u0VQ8K3UnIk

Poids léger

Poids moyen

Poids lourd

- 3 boxeurs
- 1 sac
- 1 coup de pied

Comment mesurer la force du coup ?
Méthode #1 – Lois de Newton

Étapes

1. La force exercée par le boxeur est égale au produit de la masse du sac et de son accélération;
2. On peut mesurer l'accélération du sac (accéléromètre ou capture d'images);
3. En déduire la force appliquée.

$$\boxed{F = ma}$$

Problèmes

Il est très difficile de mesurer l'accélération, car le sac et le pied ne sont pas des corps rigides : ils se déforment!

On suppose que l'accélération du sac est due uniquement au coup de pied.

Comment mesurer la force du coup ?
Méthode #2 – Travail-énergie

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

$$\left(0 + m_{sac} g h_{\max}\right) - \left(0+0\right) = F_{pied} \Delta r$$

Sac immobile à la hauteur max

Sac immobile avant le coup

Étapes

1. Mesurer la hauteur maximale atteinte par le sac;
2. Mesurer le court déplacement Δr sur lequel la force s'exerce;
3. En déduire la force appliquée.

Problèmes

On néglige les pertes dues aux déformations et aux frottements.

Le début et la fin du déplacement peuvent être difficiles à mesurer.

Comment mesurer la force du coup ?

Méthode #3 – Impulsion-QM

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \vec{F} dt$$

$$m_{sac} v_{sac} - 0 = F_{pied} \Delta t$$

Étapes

1. Mesurer la vitesse du sac juste après l'impact (accéléromètre ou analyse d'images);
2. Mesurer la courte durée Δt pendant laquelle la force s'exerce;
3. En déduire la force appliquée.

Problèmes

Le fait que le sac se déforme rend difficile le calcul de sa vitesse.

On suppose que la seule force qui fait une impulsion est le coup de pied.

Boîte à outils

Vous connaissez maintenant 2 lois de conservations.
Nous en voyons une 3e pour traiter les problèmes de rotation.

	Condition	Application	Attention !
Énergie mécanique	$\sum U_{nc} = 0$	$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$	Forces non conservatives
Quantité de mouvement (QM)	$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$	Forces externes
Moment cinétique (MC)			

Dans tous les cas, il faut TOUJOURS bien définir le système étudié.

Plan de la semaine

- **Moment d'inertie**
  - Moment d'inertie d'une particule et d'un corps rigide
  - Théorème des axes parallèles
  - Calcul du moment d'inertie d'un corps composé
- Moment cinétique (MC)
  - MC d'une particule et d'un corps rigide
  - Somme des moments et MC
  - Conservation du MC

Moment d'inertie et dynamique de rotation

Statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

ET

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

Pour tout point O de l'espace.

Force
Modifie l'état de translation.

Moment de force
Modifie l'état de rotation.

Dynamique

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ET

$$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \vec{\alpha}$$

Moment d'inertie
(kg·m²)

Accélération angulaire
(rad/s²)

Masse
Résistance d'un corps à modifier son état de translation (inertie).

Moment d'inertie
Résistance d'un objet à modifier son état de rotation.

Définition du moment d'inertie d'une particule

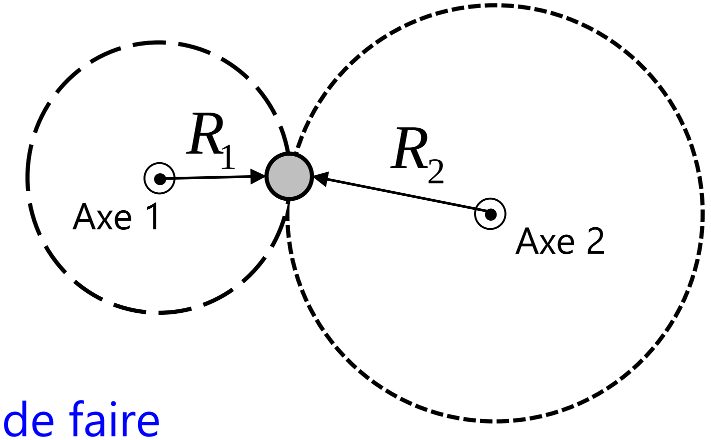
Moment d'inertie d'une particule

$$I = mR^2 \quad \text{en kg·m}^2$$

m : masse de la particule (kg)
R : distance la plus courte entre la particule et l'axe de rotation (m)

Le moment d'inertie est d'autant plus élevé que :

- La masse est élevée.
- La masse est distribuée loin de l'axe considéré.

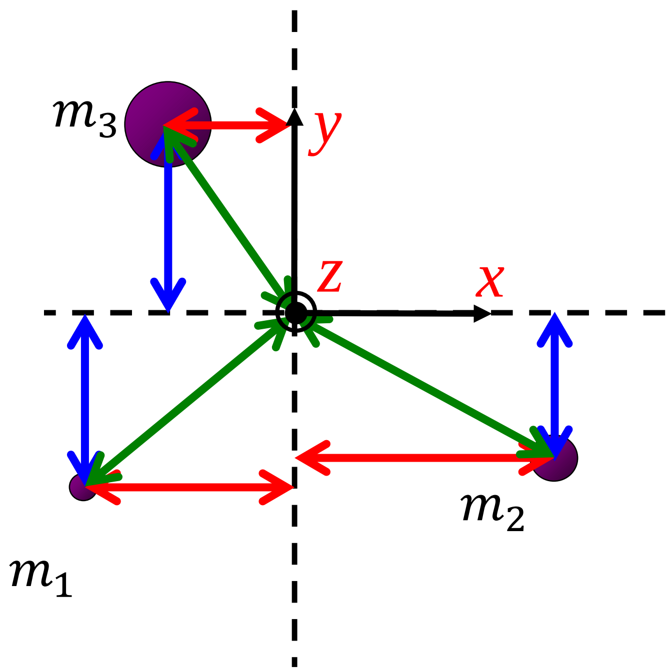


Selon quel axe (1 ou 2) est-il plus difficile de faire tourner la particule initialement immobile ?

Moment d'inertie d'un système

Le moment d'inertie d'un système est la somme des moments d'inertie individuels de chaque élément du système.

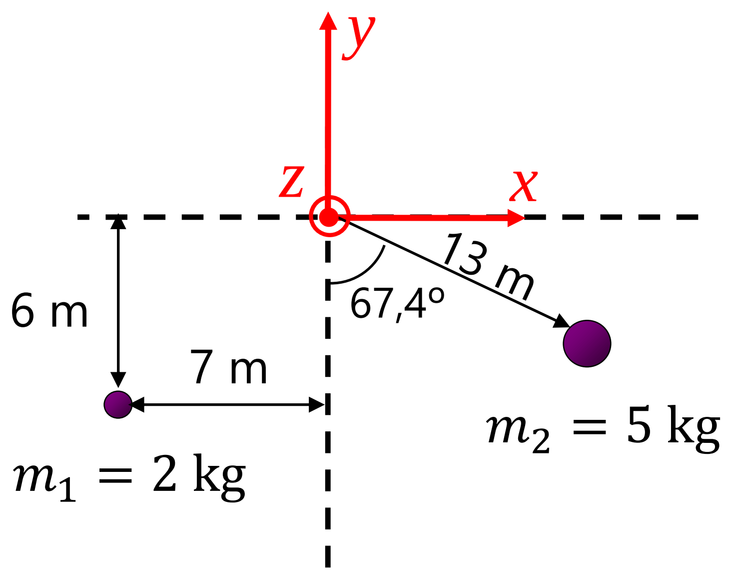
La distance R entre une particule et un axe est la plus courte distance (celle qui est perpendiculaire à l'axe).



- $I_x = \sum m_i R_{ix}^2$
- $I_y = \sum m_i R_{iy}^2$
- $I_z = \sum m_i R_{iz}^2$

Exemple – Moment d’inertie d’un système

Calculez le moment d’inertie total des deux particules par rapport à : **a)** l’axe y; **b)** l’axe z.



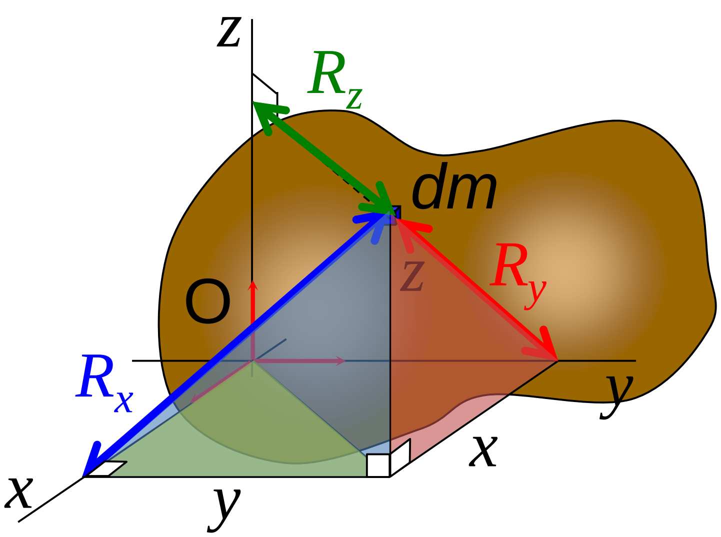
Les distances R doivent être mesurées par rapport à l’axe considéré.

a)
$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = m_1 R_{1y}^2 + m_2 R_{2y}^2 = 2 \cdot 7^2 + 5(13 \sin 67{,}4°)^2$$
$$\boxed{I_y = 819 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

b)
$$I_z = I_{z1} + I_{z2} = m_1 R_{1z}^2 + m_2 R_{2z}^2 = 2 \cdot (6^2 + 7^2) + 5 \cdot 13^2$$
$$\boxed{I_z = 1015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Moment d'inertie d'un corps rigide

En divisant le corps en une infinité de particules de masse infinitésimale dm, les moments d'inertie sont définis par des intégrales triples (sur le volume du corps).



$$I_x = \int \big(\overbrace{y^2 + z^2}^{R_x^2}\big)\,dm$$

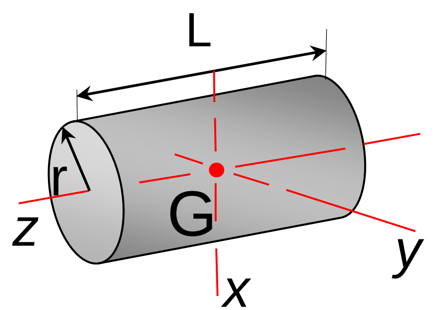
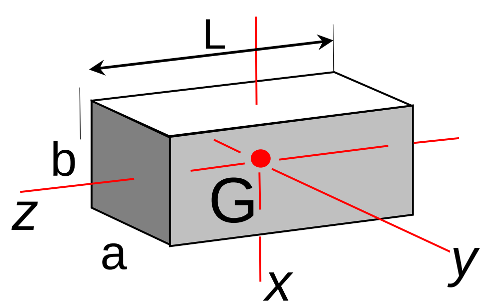
$$I_y = \int \big(\overbrace{x^2 + z^2}^{R_y^2}\big)\,dm$$

$$I_z = \int \big(\overbrace{x^2 + y^2}^{R_z^2}\big)\,dm$$

Le calcul d'un moment d'inertie selon un axe utilise seulement les composantes **perpendiculaires** à cet axe.

Vous n'aurez pas à intégrer pour calculer des moments d'inertie dans ce cours. Les moments d'inertie de formes simples vous sont fournis dans un formulaire disponible sur Moodle et fourni avec les examens.

Exemples tirés du formulaire de moments

Solide	Géométrie	Moments d'inertie
Cylindre **G : centre de masse**		$I_x = I_y = \frac{1}{12} m\left(3r^2 + L^2\right)$ $I_z = \frac{1}{2} mr^2$
Parallélépipède **G : centre de masse**		$I_x = \frac{1}{12} m\left(a^2 + L^2\right)$ $I_y = \frac{1}{12} m\left(b^2 + L^2\right)$ $I_z = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$

Les moments sont donnés pour les axes *x*, *y* et *z* passant par le centre de masse (G) des corps.

Utilisation du formulaire

Formules d'intégration

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{où } n \neq -1$
2. $\int \dfrac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + C$
3. $\int e^u\,du = e^u + C$
4. $\int b^u\,du = \dfrac{1}{\ln(b)} b^u + C \quad \text{où } b > 0 \text{ et } b \neq 1$
5. $\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C$
6. $\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C$
7. $\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C$
8. $\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + C$
9. $\int \sec(u)\tan(u)\,du = \sec(u) + C$
10. $\int \csc(u)\cot(u)\,du = -\csc(u) + C$
11. $\int \tan(u)\,du = -\ln(|\cos(u)|) + C$
12. $\int \cot(u)\,du = \ln(|\sin(u)|) + C$
13. $\int \sec(u)\,du = \ln(|\sec(u) + \tan(u)|) + C$
14. $\int \csc(u)\,du = \ln(|\csc(u) - \cot(u)|) + C$
15. $\int \dfrac{1}{u^2 + a^2}\,du = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
16. $\int \dfrac{1}{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right|\right) + C$
17. $\int \dfrac{1}{u^2 - a^2}\,du = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|\right) + C$
18. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \ln\left(\sqrt{u^2 + a^2} + u\right) + C$
19. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$
20. $\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \ln\left(\left|\sqrt{u^2 - a^2} + u\right|\right) + C$

Comment calculer cette intégrale ?

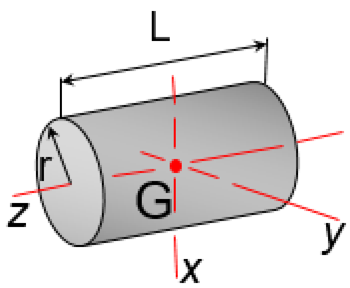
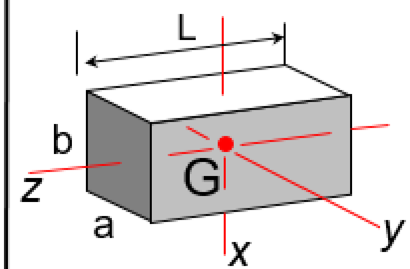
$$\int \frac{1}{x^2 - 8^2}dx$$

C'est le cas 17 avec :

$$u = x$$

$$a = 8$$

Utilisation du formulaire

Solide	Géométrie	Moments d'inertie
Cylindre		$I_x = I_y = \frac{1}{12} m\left(3r^2 + L^2\right)$ $I_z = \frac{1}{2} mr^2$
Parallélépipède		$I_x = \frac{1}{12} m\left(a^2 + L^2\right)$ $I_y = \frac{1}{12} m\left(b^2 + L^2\right)$ $I_z = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$

Vous devez faire correspondre les axes de votre problème aux axes du formulaire : l'axe *x* du formulaire sera rarement l'axe *x* de votre problème!

Rayon de giration (κ)

Définition

Distance perpendiculaire à un axe à laquelle il faudrait concentrer toute la masse du solide pour qu'il ait le même moment d'inertie par rapport à cet axe.

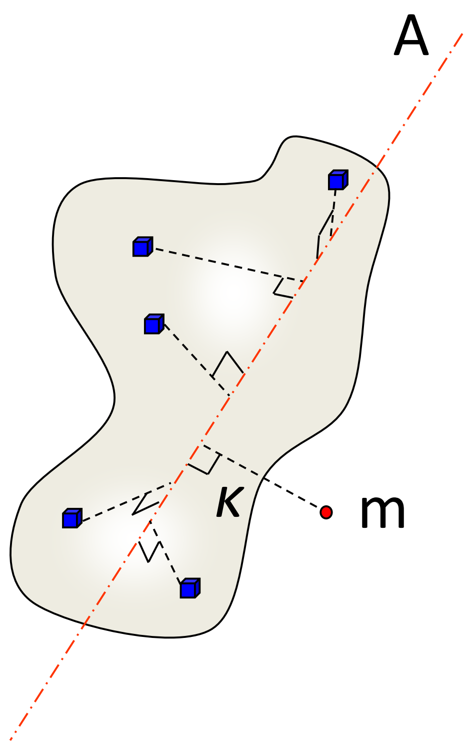
Le solide ci-contre possède une masse m et un moment d'inertie I_A par rapport à l'axe A.
Quel est son rayon de giration κ_A par rapport à cet axe ?

On veut résoudre :

Solide $$I_A = m\kappa_A^2$$

Formule pour une particule de même masse m située à une distance κ_A de l'axe A

Unité : m $$\boxed{\kappa_A = \sqrt{\frac{I_A}{m}}}$$



Théorème des axes parallèles

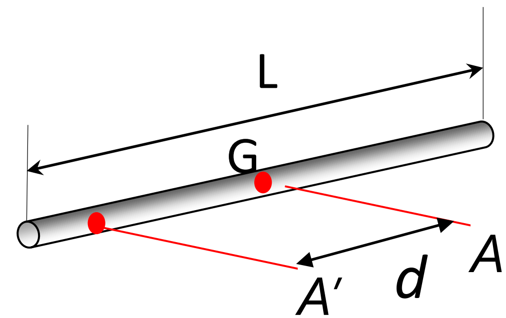
Que faire si on a besoin du moment d'inertie d'un corps par rapport à <u>un axe qui ne passe pas par son CM</u> ?

Moment d'inertie par rapport à un axe *A* passant par le centre de masse

d : distance (la plus courte) entre les axes *A* et *A′*

Moment d'inertie par rapport à un axe *A′* parallèle à *A*.

$$\boxed{I_{A'} = I_{A,CM} + md^2}$$



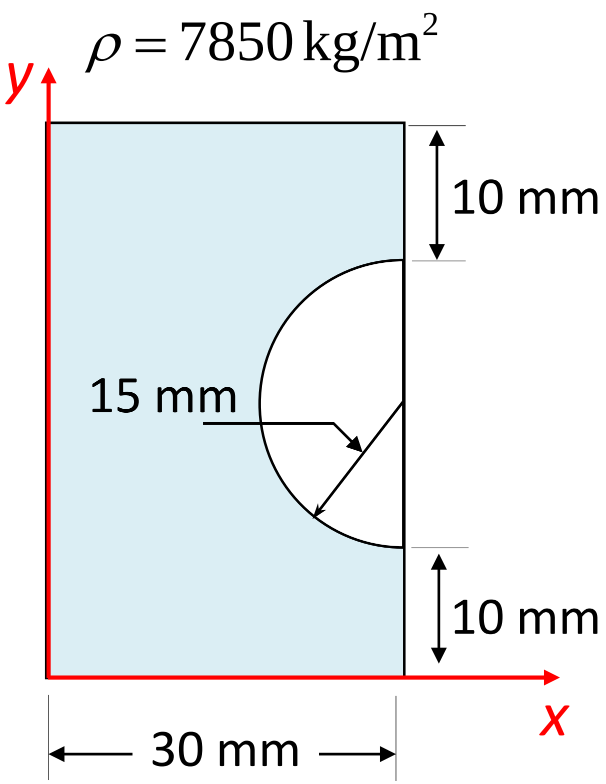
Remarques

- Le moment d'inertie est minimum pour un axe de rotation passant par le CM.
- Les axes doivent *A* et *A′* doivent absolument être parallèles !

Le théorème des axes parallèles doit toujours être appliqué par rapport à un axe qui passe par le centre de masse du corps !

Comment calculer le moment d'inertie de la pièce suivante par rapport à l'axe y du schéma ?

Le formulaire ne donne les moments d'inertie que pour des formes simples et pour des axes qui passent leur CM…

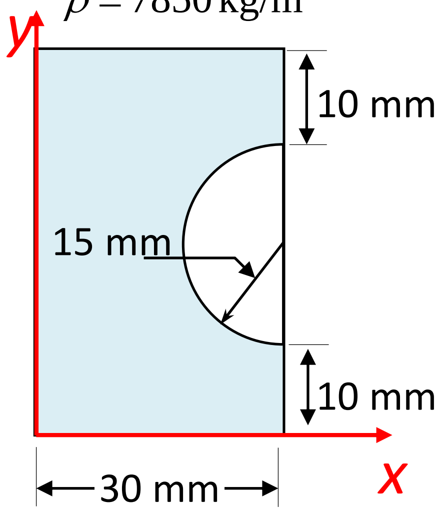


1. Décomposer le corps en corps simples ;
2. Calculer la position du CM de chaque corps simple ;
3. Calculer le moment d'inertie de chaque corps simple par rapport à l'axe qui passe par son CM grâce au formulaire ;
4. Appliquer le théorème des axes parallèles à chaque corps simple pour obtenir son moment d'inertie par rapport à l'axe demandé. Il faut pour cela calculer la distance entre l'axe demandé et l'axe parallèle passant par le CM de chaque corps simple ;
5. Additionner les moments d'inertie de tous les corps simples pour obtenir le moment d'inertie total.

Exemple – Moment d'inertie d'une pièce

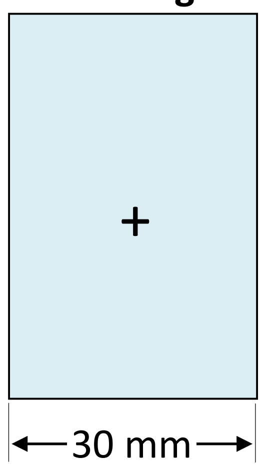
1. Décomposer le corps en corps simples ;
2. Calculer la position du CM de chaque corps simple ;

$\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^2}$



=

Rectangle



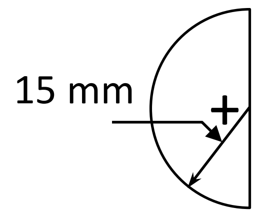
$\bar{x}_1 = 15\,\mathrm{mm}$

$\bar{y}_1 = 25\,\mathrm{mm}$

−

Demi-disque

(masse négative)



Formulaire

$\bar{x}_2 = 30 - \dfrac{4 \cdot 15}{3\pi} = 23{,}63\,\mathrm{mm}$

$\bar{y}_2 = 25\,\mathrm{mm}$

3. Calculer le moment d'inertie de chaque corps simple par rapport à l'axe qui passe par son CM grâce au formulaire ;

Rectangle

$$m_1 = \rho \cdot 0{,}030 \cdot 0{,}050 = 11{,}775\,\mathrm{kg}$$

$$I_{y,CM1} = \frac{1}{12} m_1 0{,}030^2 = 8{,}831 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Formulaire

Demi-disque

$$m_2 = -\rho\left(\frac{1}{2}\pi \cdot 0{,}015^2\right) = -2{,}774\,\mathrm{kg}$$

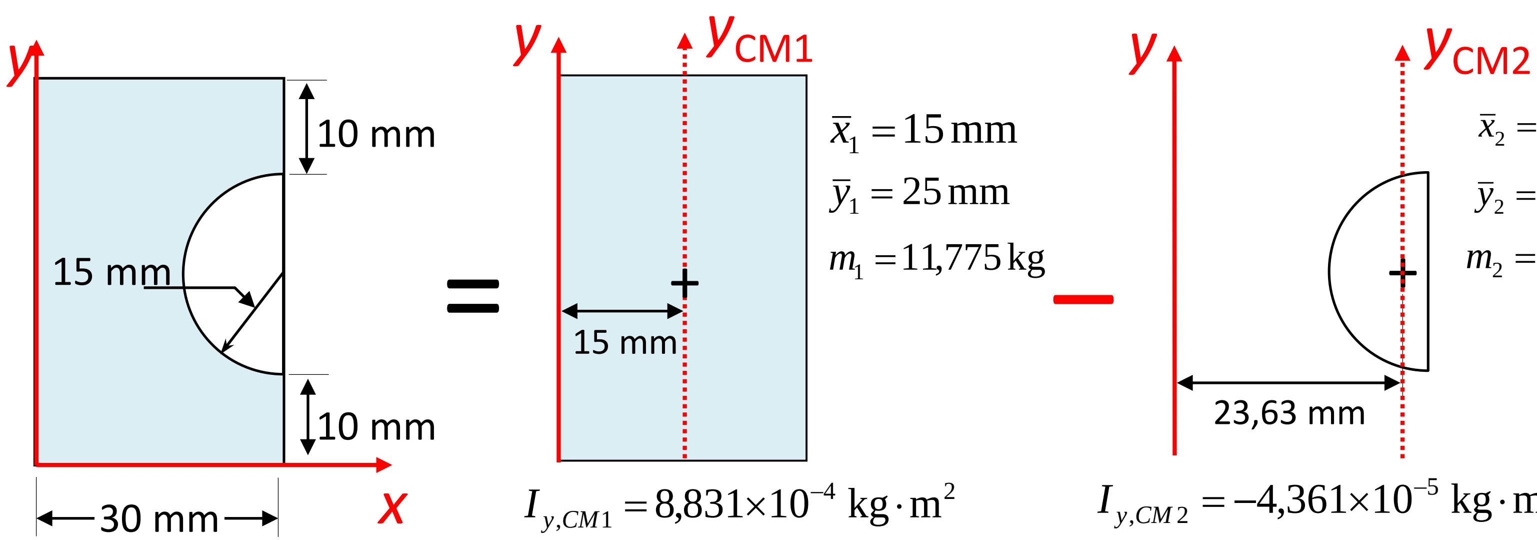
$$I_{y,CM2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) m_2 0{,}015^2 = -4{,}361 \times 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Formulaire

Exemple – Moment d'inertie d'une pièce

4. Appliquer le **théorème des axes parallèles** à chaque corps simple pour obtenir son moment d'inertie par rapport à l'axe demandé ;

$$I_{A'} = I_{A,CM} + md^2$$



$\bar{x}_1 = 15\,\text{mm}$

$\bar{y}_1 = 25\,\text{mm}$

$m_1 = 11{,}775\,\text{kg}$

$\bar{x}_2 = 23{,}63\,\text{mm}$

$\bar{y}_2 = 25\,\text{mm}$

$m_2 = -2{,}774\,\text{kg}$

$I_{y,CM1} = 8{,}831\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

$I_{y,CM2} = -4{,}361\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

Rectangle $I_{y1} = I_{y,CM1} + m_1 0{,}015^2 = 3{,}533\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

Demi-disque $I_{y2} = I_{y,CM2} + m_2 0{,}02363^2 = -1{,}593\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

5. Additionner les moments d'inertie de tous les corps simples pour obtenir le moment d'inertie total. (moments négatifs pour pièces retirées)

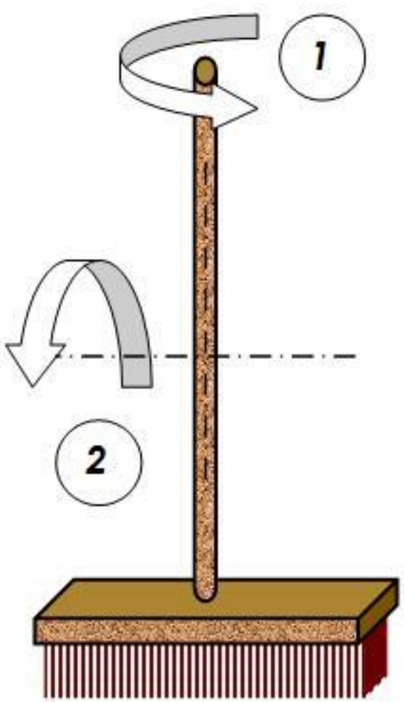
$$\boxed{I_y = I_{y1} + I_{y2} = 1{,}94\times10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Conclusion

Rappel

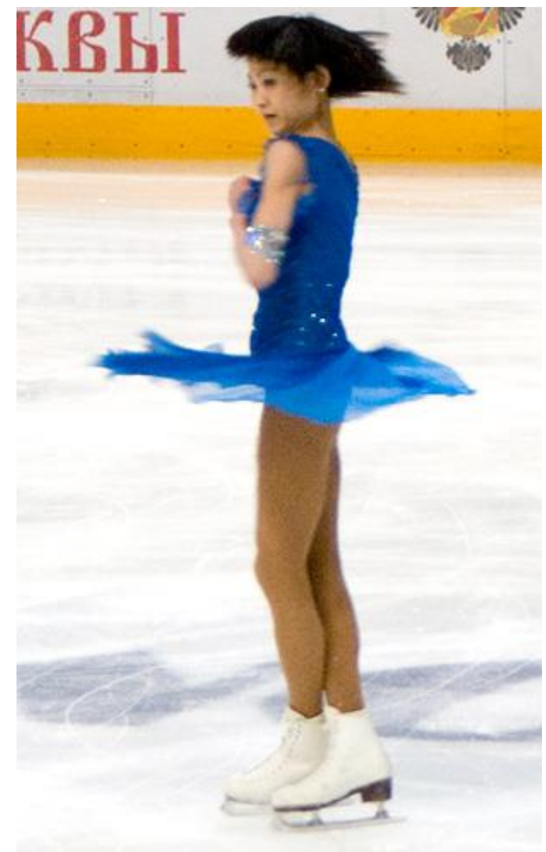
Le moment d'inertie est d'autant plus grand que :

- La masse est élevée ;
- La masse est distribuée **loin** de l'axe considéré.



Le moment d'inertie du balai est-il plus selon par rapport à l'axe 1 ou à l'axe 2 ?

Supposez que la tête du balai est plus lourde que le manche.



https://www.youtube.com/watch?v=AQLtcEAG9v0

Plan de la semaine

- Moment d'inertie
  - Moment d'inertie d'une particule et d'un corps rigide
  - Théorème des axes parallèles
  - Calcul du moment d'inertie d'un corps composé
- **Moment cinétique (MC)**
  - MC d'une particule et d'un corps rigide
  - Somme des moments et MC
  - Conservation du MC

Moment cinétique (MC)

Nom anglais : *angular momentum*

Symbole : $\vec{H}$ (souvent $\vec{L}$ en anglais)

https://youtu.be/7HtxWFdvybs?t=21m15s

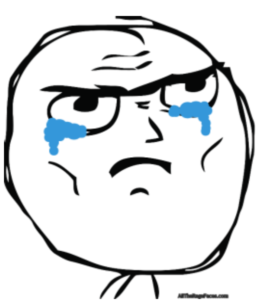
Comment est-ce que ça tourne ?

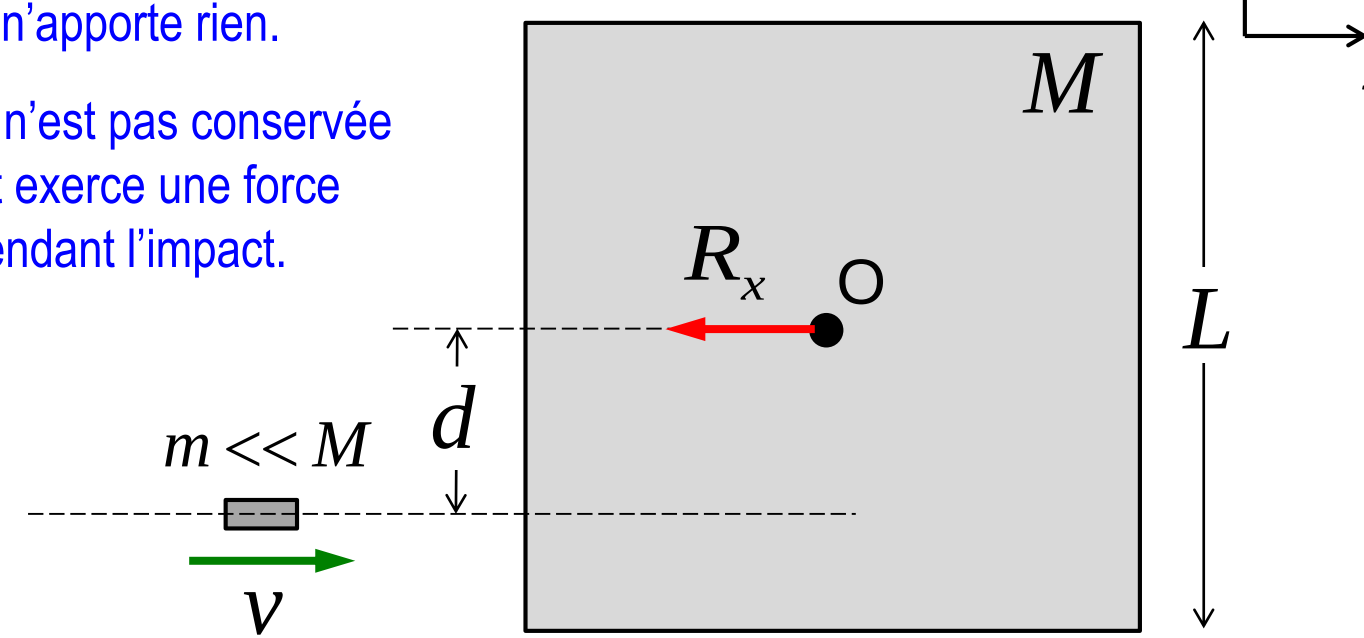
Un projectile heurte une plaque carrée homogène horizontale qui est initialement immobile. La plaque est libre de tourner autour de son centre (pivot). Le projectile demeure incrusté dans la plaque. Quelle est la vitesse angulaire de la plaque juste après l'impact ?

La QM du système est conservée en y, mais cela n'apporte rien.

La QM du système n'est pas conservée en x, car le pivot exerce une force horizontale pendant l'impact.

Que fait-on ?





Lois de conservation vectorielles

	Loi de la dynamique — Masse constante	**Loi de la dynamique** — Loi générale	**Loi de conservation**
Translation	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ Quantité de mouvement
Rotation	$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \vec{\alpha}$	$\sum \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{H}_O}{dt}$	$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$ Moment cinétique

Ces deux nouvelles lois de conservation <u>s'ajoutent</u> à la conservation de l'énergie.

Vous devrez choisir la meilleure méthode pour aborder un problème donné.

Une curieuse quantité apparaît…

Partons de la somme des moments par rapport à un point O qui est fixe.

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i$$

Définition du moment d'une force

$$= \sum \vec{r}_{Oi} \times \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$$

La force est le taux de variation de la quantité de mouvement.

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum \vec{r}_{Oi} \times m_i \vec{v}_i \right)}_{\vec{H}_O}$$

$$= \frac{d\vec{H}_O}{dt}$$

On vient de faire apparaître le moment cinétique !

Information complémentaire

La règle de dérivation d'un produit s'applique au produit vectoriel.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \vec{r}_{Oi} \times m_i \vec{v}_i \right) = \cancel{\sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i} + \sum \vec{r}_{Oi} \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

La dérivée de $\vec{r}_{Oi}$ est la vitesse $\vec{v}_i$ puisque O est un point fixe.
La 1re somme est nulle, car le produit de deux vecteurs parallèles est nul.

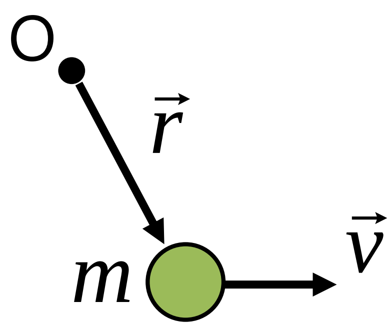
Moment cinétique – Définition

Le MC d'une particule est le moment de sa QM par rapport à un point de référence O.

Quantité vectorielle

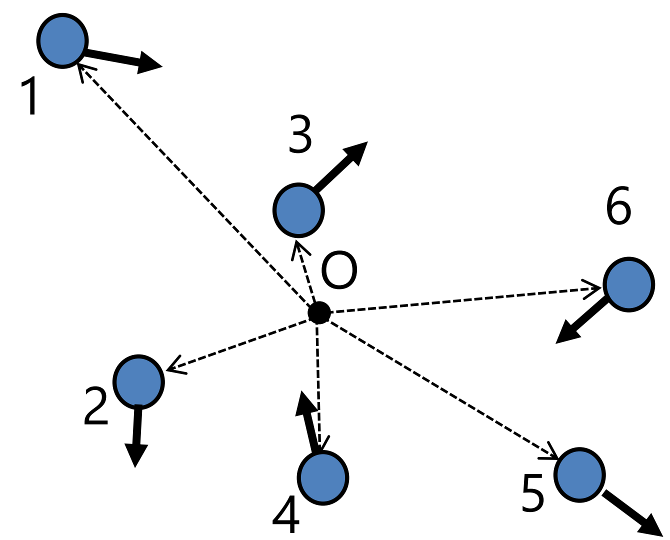
$$\boxed{\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

Unité : kg·m²/s



Le MC d'un système de particules est la somme des MC individuels.

$$\vec{H}_{O,tot} = \sum \vec{r}_{Oi} \times m_i \vec{v}_i$$

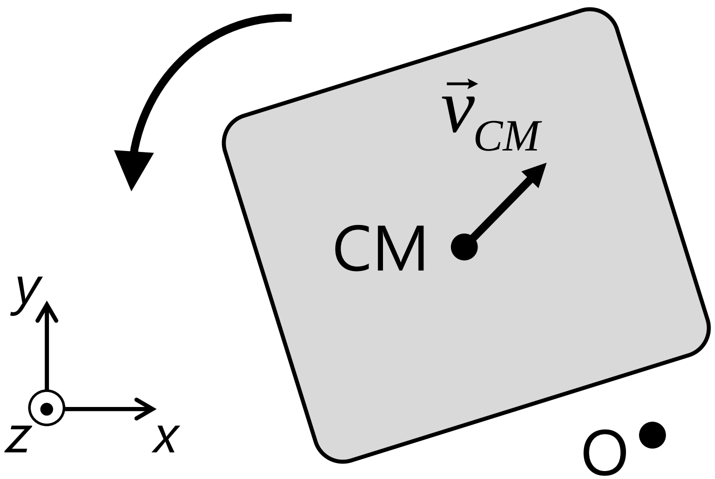


Moment cinétique d'un corps rigide

Le moment cinétique d'un corps rigide qui suit un mouvement quelconque a deux contributions :

- Le moment cinétique associé au mouvement de son CM ;
- Le moment cinétique associé à la rotation sur lui-même (autour de son CM).

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$$



Moment cinétique d'un corps rigide

$$\boxed{\vec{H}_O = \vec{r}_{CM/O} \times m\vec{v}_{CM} + \mathbf{I}_{CM}\vec{\omega}}$$

Unité : kg·m²/s

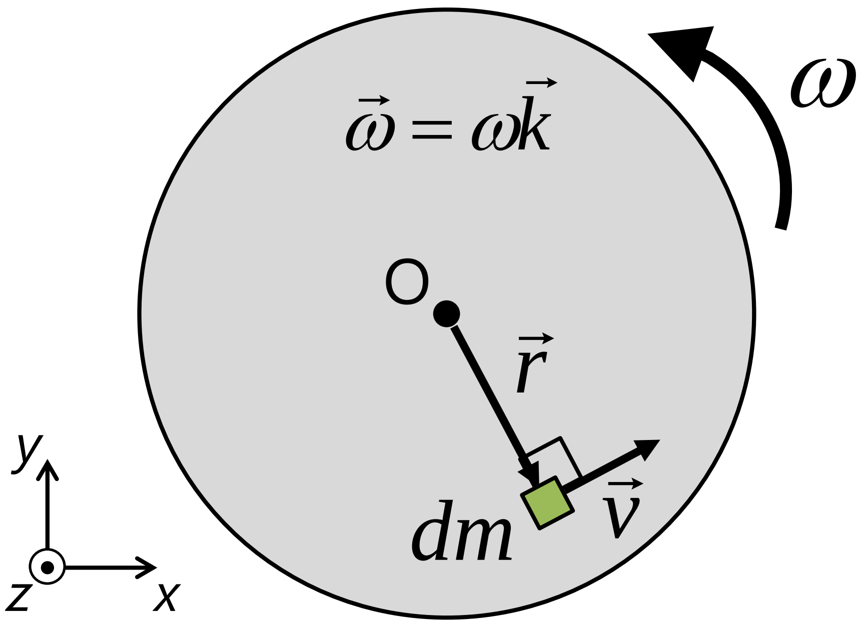
Le vecteur vitesse angulaire est parallèle à l'axe de rotation. Son sens est donné par la règle de la main droite. (Ici, il sort de la page.)

Moment cinétique d'un corps rigide

Si le corps rigide est contraint de tourner autour d'un point O, alors le moment cinétique se réduit à une forme plus simple.

$$\vec{H}_O = \vec{r}_{CM/O} \times m\vec{v}_{CM} + \mathbf{I}_{CM}\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{H}_O = \mathbf{I}_O\vec{\omega}}$$

Unité : kg·m²/s



Si O n'est pas le CM du corps, alors il faut utiliser le théorème des axes parallèles pour calculer le moment d'inertie du corps par rapport à O.

Analogie entre QM et MC

Quantité de mouvement (translation)

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}dt$$

Conservation de la QM

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Moment cinétique (rotation)

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta\vec{H}_O = \vec{H}_{O2} - \vec{H}_{O1} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O dt}$$

Conservation du MC

$$\boxed{\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}}$$

Conservation du MC

$$\boxed{\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}}$$

Quelques précisions

- Même si le système est soumis à des forces externes, il se peut que ces forces ne créent aucun moment par rapport au point O : ce genre de situation s'applique parfaitement à la conservation du MC;
- Il faut choisir le point O pour essayer d'annuler le moment des forces externes qui s'exercent sur le système.

La plupart du temps, on choisit comme point de référence le centre de masse du système ou encore un point autour duquel le système est contraint de tourner.

Et si le MC n'est pas conservé ?

$$\boxed{\sum \vec{M}_O \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_{O2} = \vec{H}_{O1} + \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O dt}$$

Il faut calculer l'équivalent de l'impulsion en rotation

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O dt$$

puis l'ajouter au MC initial pour obtenir le MC final.

Comme pour la force moyenne, on peut calculer le moment moyen à l'aide de la relation suivante.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \vec{M}_{O,moy} \Delta t \qquad \text{où } \Delta t = t_2 - t_1$$

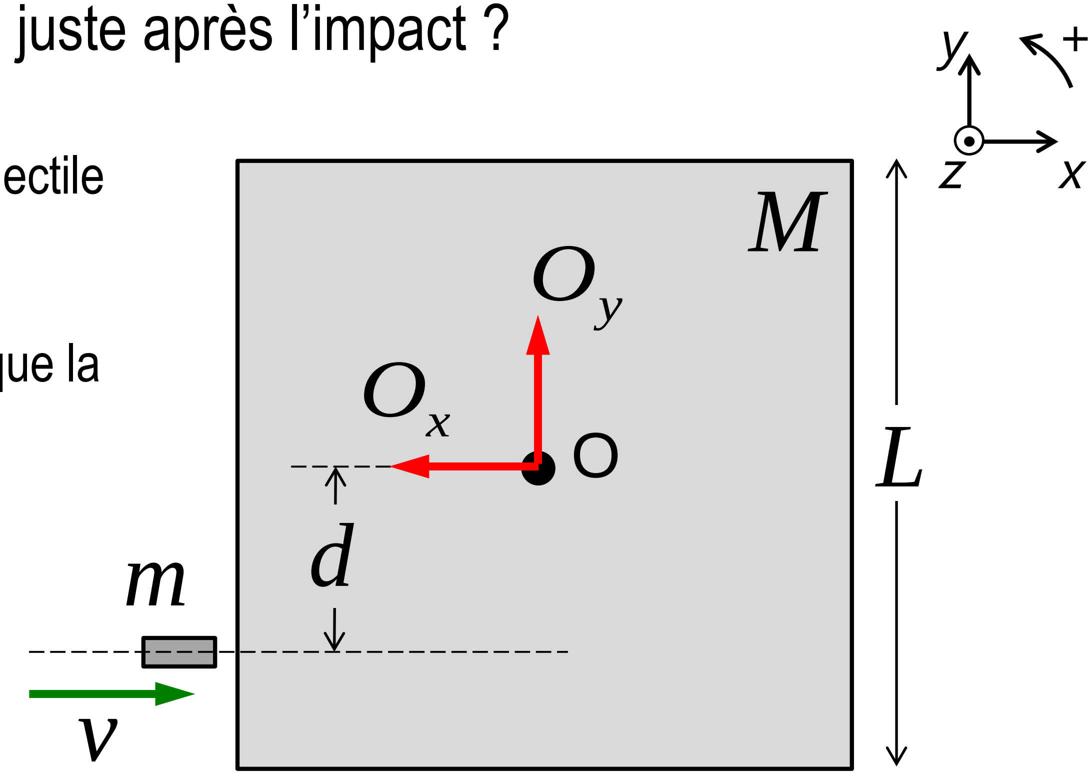
MC – Exemple 1

Un projectile heurte une plaque carrée homogène horizontale qui est initialement immobile. La plaque est libre de tourner autour de son centre (pivot). Le projectile demeure incrusté dans la plaque. Quelle est la vitesse angulaire de la plaque juste après l'impact ?

Système Plaque + Projectile

Point de référence
Le point O est intéressant parce que la réaction au pivot ne crée pas de moment par rapport à O.

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$



MC – Exemple 1

Conservation du moment cinétique $\sum \vec{M}_O = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$

Juste avant l'impact

$$\vec{H}_{O1} = \vec{r}_{Om} \times m\vec{v} = dmv\vec{k}$$

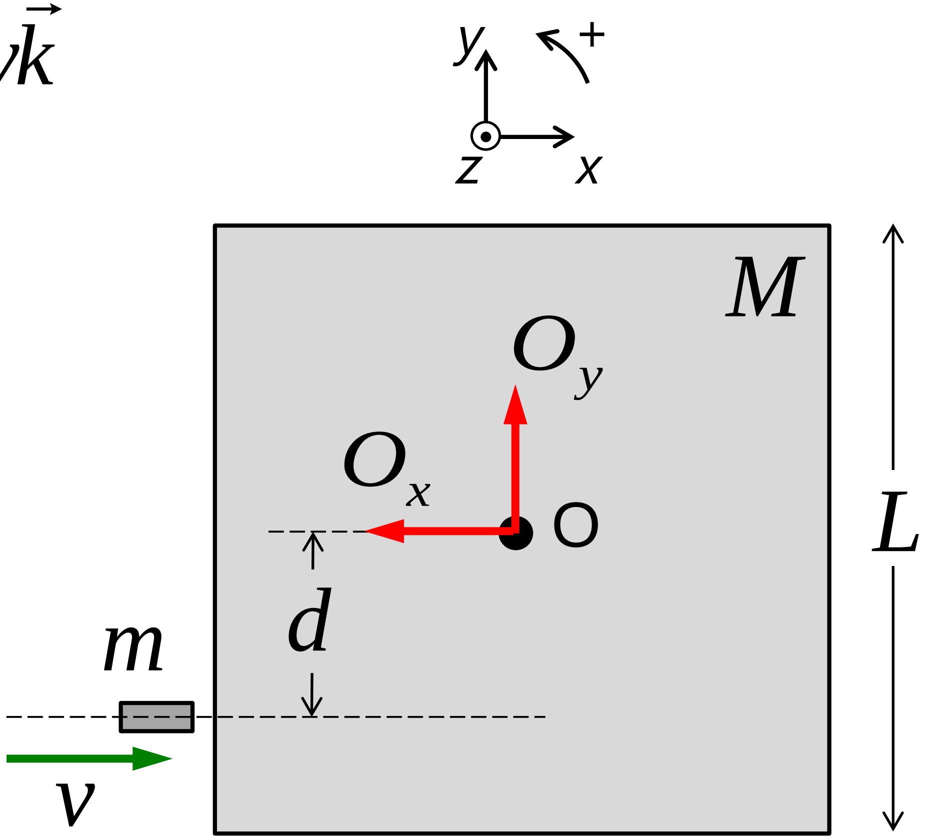
Juste après l'impact

$$\vec{H}_{O2} = I_O \omega \vec{k}$$

On trouve donc :

$$dmv = I_O \omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{dmv}{I_O}}$$



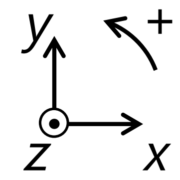
MC – Exemple 1

Application numérique

Plaque mince homogène (formulaire)

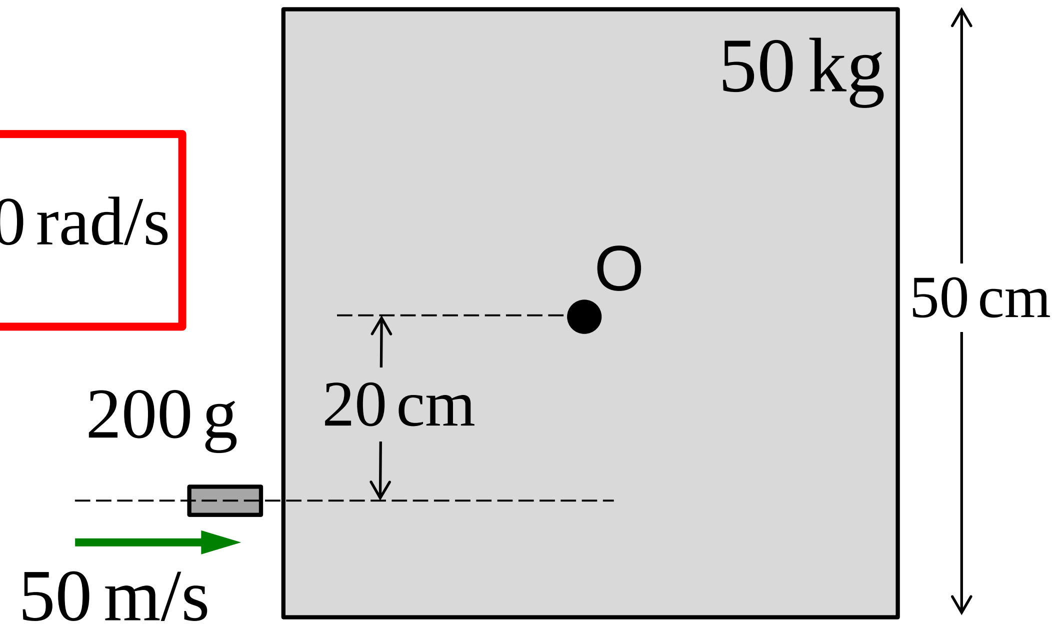
$$I_O = \frac{1}{12} M\left(L^2 + L^2\right) = \frac{ML^2}{6} = 2{,}083\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\boxed{\omega = \frac{dmv}{I_O}}$$



Vitesse angulaire après l'impact

$$\boxed{\omega = \frac{0{,}20\cdot 0{,}200\cdot 50}{2{,}083} = 0{,}960\,\text{rad/s}}$$



Est-ce que cette vitesse angulaire est constante après l'impact ?

Est-ce que la solution changerait si on enlevait le pivot ?

La chaise et la roue de vélo

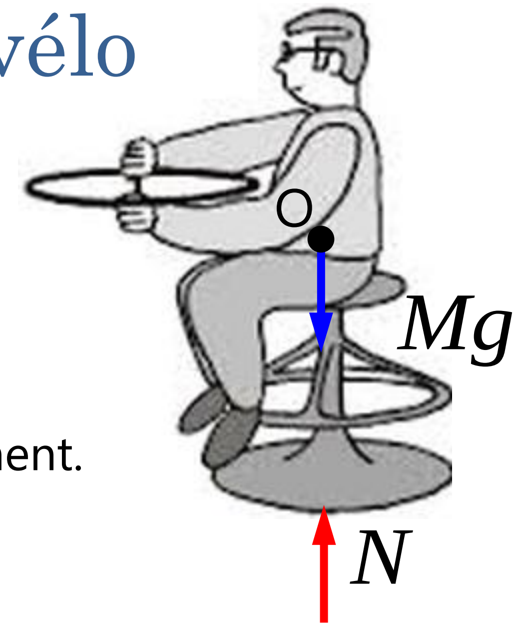
Une personne est assise immobile sur un tabouret libre de tourner sans frottements. On lui donne une roue de vélo en rotation autour d'un axe vertical.

Il change l'orientation de l'axe avec un angle de 180°.

Que se passe t-il ?

A. Rien, il reste immobile sur le plateau.
B. Il se met à tourner dans le sens opposé à la rotation initiale de la roue.
C. Il se met à tourner dans le même sens que la rotation initiale de la roue.

La chaise et la roue de vélo



Système ? Roue + Personne

Le moment résultant des forces externes est-il nul ? OUI

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

Le système est à l'équilibre statique.
Les deux forces (poids et normale) se compensent exactement.

Le MC est-il conservé ? OUI

$$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$$

Avant d'avoir renversé la roue				
↑	+		=	↑
H_{Roue}		$H_{Personne}$		H_{Total}

Après avoir renversé la roue				
↓	+	↑ **Réponse C**	=	↑
H_{Roue}		$H_{Personne}$		H_{Total}

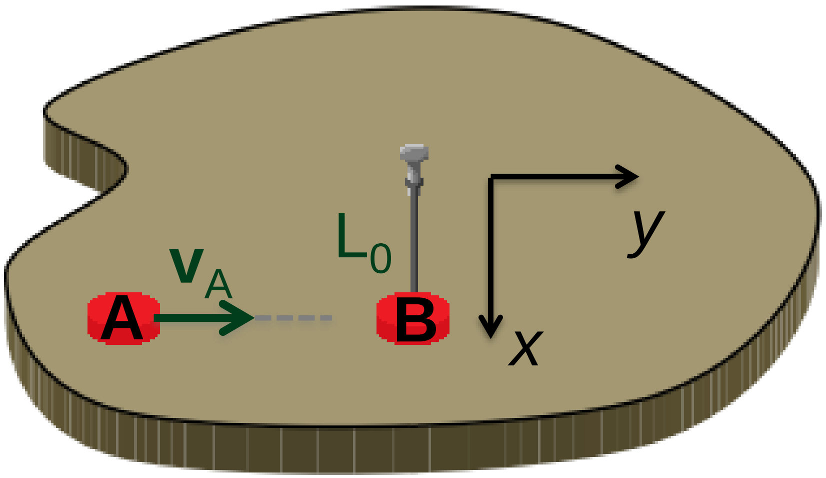
Pourquoi la personne tourne-t-elle moins vite que la roue ?
Moment d'inertie !

Le moment cinétique est partout…

https://www.youtube.com/watch?v=6DiY5J2-RKg

MC – Exemple 2 – Ancien examen

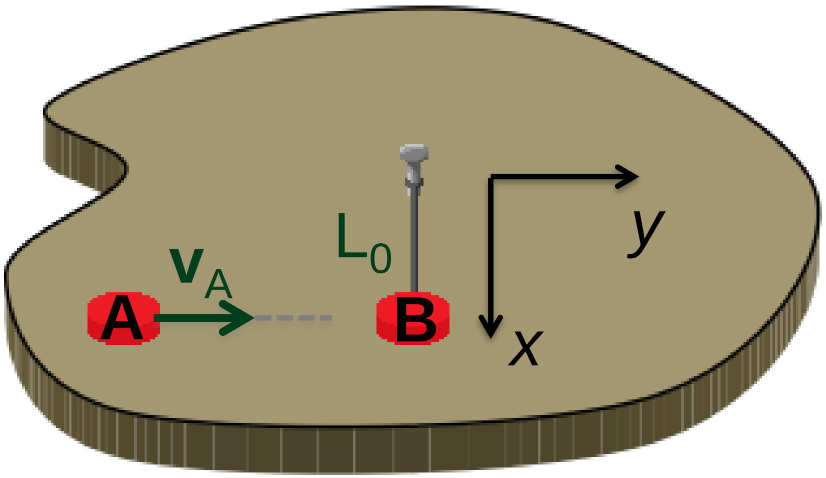
Sur un plan horizontal sans frottement, la rondelle A entre en collision avec la rondelle B qui est reliée à un clou fixe par une corde élastique. Initialement, la corde élastique n'est pas étirée. Les deux rondelles restent collées l'une à l'autre après la collision.



M_A = 150 g M_B = 250 g $\mathbf{v}_A$= 3$\mathbf{j}$ m/s L_0 = 20 cm

A. Après la collision, est-ce que la quantité de mouvement est conservée? Justifier. (5 pts)
B. Est-ce que le moment cinétique est conservé? Justifier. (5 pts)
C. Trouver la vitesse des deux rondelles immédiatement après la collision. (10 pts)
D. L'énergie mécanique est-elle conservée lors de la collision? Justifier. (10 pts)
E. L'énergie mécanique est-elle conservée après la collision? Justifier. (5 pts)
F. La longueur maximale atteinte par la corde après la collision est de 40 cm. Quelle est sa constante d'élasticité (constante de ressort)? (15 pts)

MC – Exemple 2 – Ancien examen



A. Après la collision, est-ce que la quantité de mouvement est conservée ? Justifier. (5 pts)

Système : les deux rondelles collées

La résultante sur le système n'est pas nulle, car la tension dans la corde s'exerce dans le plan de la table et change la QM du système.

Non, La QM n'est pas conservée.

B. Est-ce que le moment cinétique est conservé? Justifier. (5 pts)

Système : les deux rondelles collées

La ligne d'action de la tension dans la corde passe toujours par le clou. Par rapport au clou, le moment résultant sur le système est donc nul.

OUI, Le MC par rapport au clou est conservé à tout instant.

MC – Exemple 2 – Ancien examen

C. Trouver la vitesse des deux rondelles immédiatement après la collision. (10 pts)

MC – Avant la collision

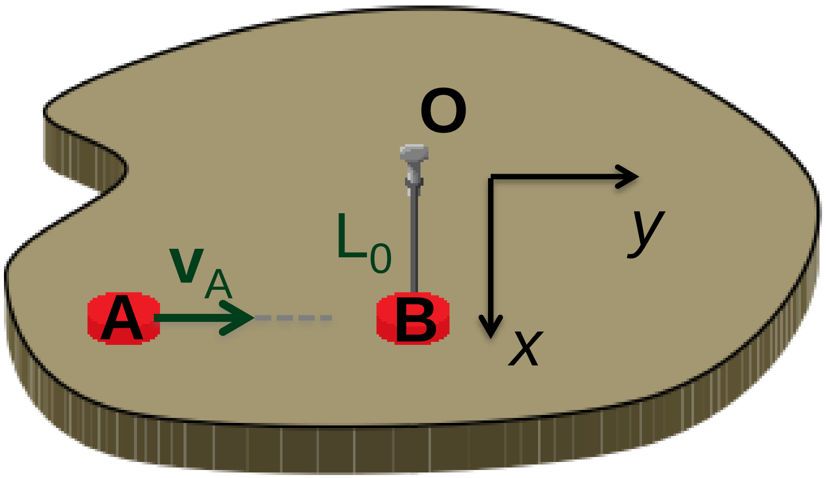
$$\vec{H}_{O1} = \vec{r}_{OA} \times m_A \vec{v}_A = L_0 m_A v_A \vec{k}$$

MC – Après la collision

$$\vec{H}_{O2} = \vec{r}_{OB} \times (m_A + m_B)\vec{v}$$

$$= L_0 (m_A + m_B) v \vec{k}$$

Ce résultat aurait-il pu être trouvé autrement ?



M_A = 150 g M_B = 250 g $\mathbf{v}_A$= 3**j** m/s L_0 = 20 cm

Conservation du MC

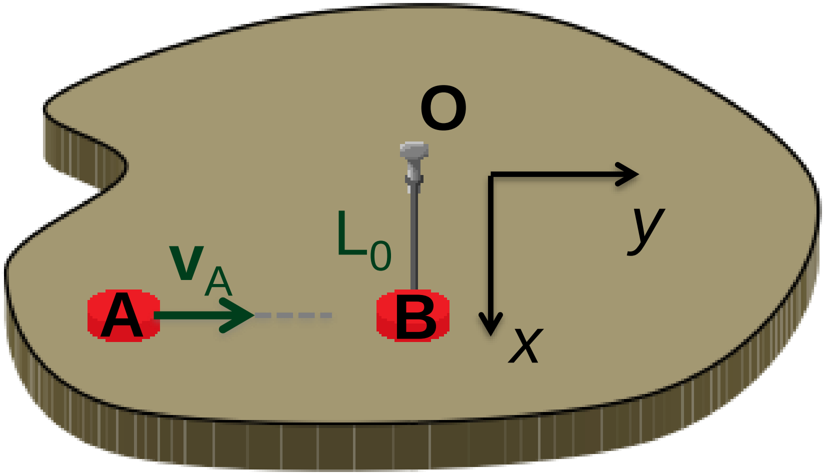
$$L_0 m_A v_A = L_0 (m_A + m_B) v$$

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A = \frac{150}{150 + 250} \cdot 3$$

$$\boxed{\vec{v} = 1{,}125 \vec{j} \text{ m/s}}$$

MC – Exemple 2 – Ancien examen

M_A = 150 g M_B = 250 g $\mathbf{v}_1$= 1,125**j** m/s
L_0 = 20 cm   L = 40 cm



F. La longueur maximale atteinte par la corde après la collision est de 40 cm. Quelle est sa constante d'élasticité (constante de ressort)? (15 pts)

1. Conservation de l'énergie mécanique

$$T_1 = T_2 + V_{2,res}$$

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_1^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\boxed{v_2^2} + \frac{1}{2}\boxed{k}(L - L_0)^2$$

2. Pour trouver la vitesse lorsque *L* = 40 cm, on utilise la conservation du MC

$$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$$

$$L_0(m_A + m_B)v_1\vec{k} = L(m_A + m_B)\boxed{v_2}\vec{k}$$

3. Il ne reste qu'à introduire v_2 dans l'équation de la conservation de l'énergie mécanique, puis à isoler k.

Les chats VS La physique

Comment un chat lâché dos vers le sol réussit-il
à se retourner pour tomber sur ses pattes ?

Smarter every day : https://youtu.be/RtWbpyjJqrU?t=2m8s

À l'état initial, le chat est immobile et $\vec{H}_1 = \vec{0}$.
Pendant sa chute, le chat tourne sur lui-même et a donc, *a priori*, $\vec{H}_2 \neq \vec{0}$!
Pourtant, il n'y a aucun moment extérieur pour changer le MC du chat…

Tableau récapitulatif

	Translation	Rotation
Mesure de l'inertie	$m\,[\mathrm{kg}]$	$I\,[\mathrm{kg\cdot m^2}]$
Variables du mouvement	$r\,[\mathrm{m}]$ $\quad v\,[\mathrm{m/s}]$ $\quad a\,[\mathrm{m/s^2}]$	$\theta\,[\mathrm{rad}]$ $\quad \omega\,[\mathrm{rad/s}]$ $\quad \alpha\,[\mathrm{rad/s^2}]$
Loi générale du mouvement	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ **Quantité de mouvement [kg·m/s]** $\quad \vec{L} = m\vec{v}$	$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$ **Moment cinétique [kg·m²/s]** $\quad \vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\quad \vec{H}_O = I_O\vec{\omega}$
Loi de conservation	$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}dt$ $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$	$\Delta\vec{H}_O = \vec{H}_{O1} - \vec{H}_{O2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O dt$ $\sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$

Boîte à outils

Pour résoudre un problème, il faut souvent utiliser plusieurs lois de conservation simultanément…

	Condition	Application	Attention !
Énergie mécanique	$U_{1\rightarrow 2,nc}=0$	$T_1+V_1=T_2+V_2$	Définir le système. Forces non conservatives (internes et externes).
Quantité de mouvement	$\sum \vec{F}=\vec{0}$	$\vec{L}_1=\vec{L}_2$	Définir le système. Forces externes.
Moment cinétique	$\sum \vec{M}_O=\vec{0}$	$\vec{H}_{O1}=\vec{H}_{O2}$	Définir le système. Moments externes. Choisir le bon point.

Agrandir le système permet de transformer une force externe en force interne.