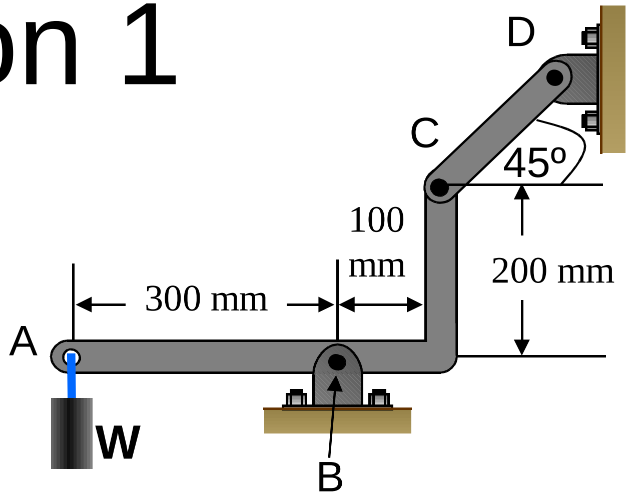
Examen Final A2008

Par

Thomas Gervais et

Pierre Baulaigue

Question 1

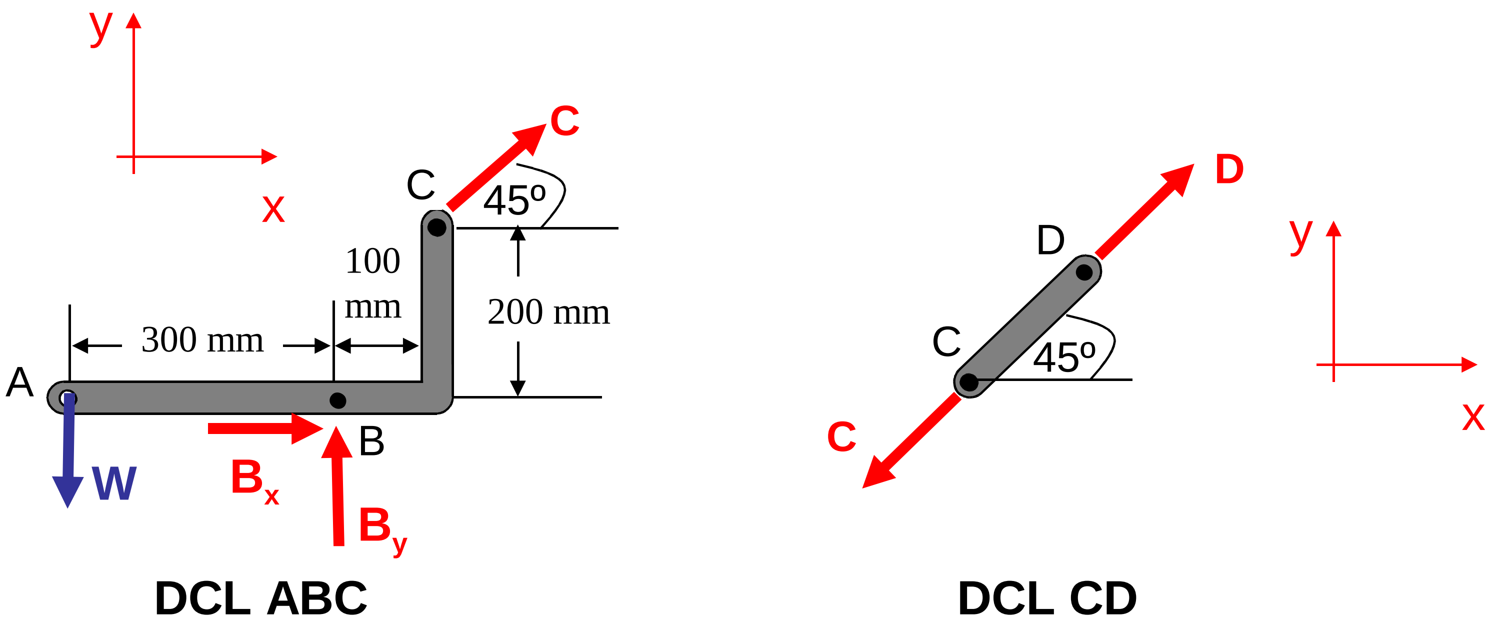


Dans la structure ci-contre, les chevilles aux points B, C et D, ne peuvent supporter une force supérieure à 1kN avant de se rompre. La masse des membrures est négligeable.

A) Faites le DCL des membrures ABC et CD (20 points)
B) Déterminez la grandeur des forces aux points B, C et D en fonction du poids W suspendu (20 points)
C) Quel est le poids maximal W que l'on peut appliquer à cette structure avant qu'une (ou plusieurs) des chevilles ne se rompe? (10 points)

Q1 - Solution

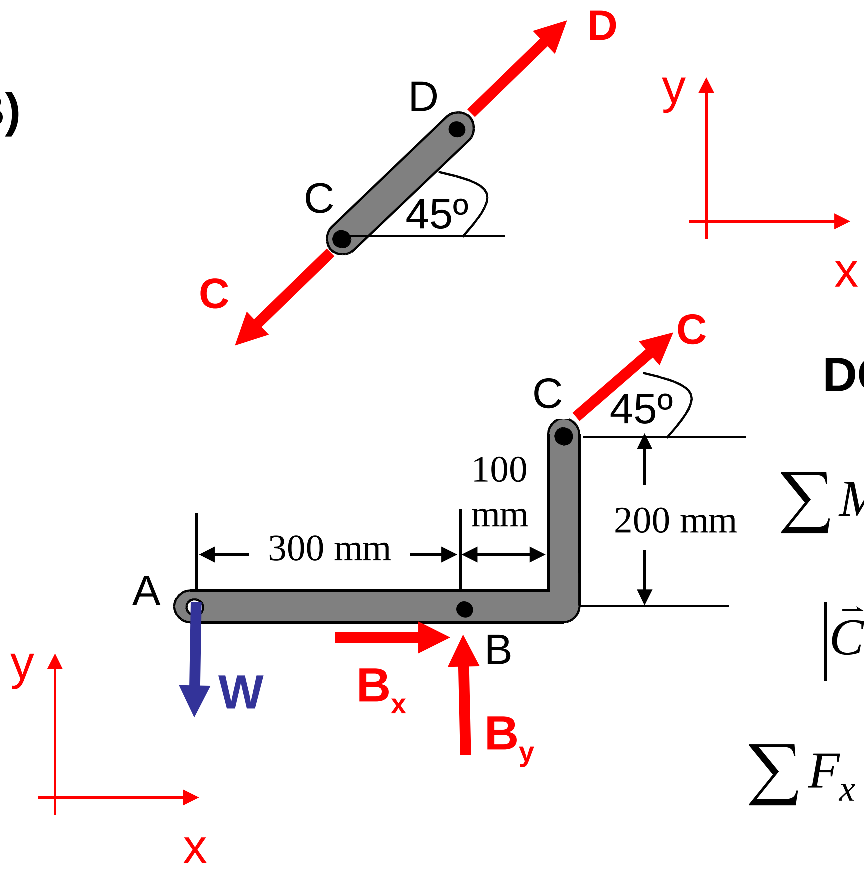
A)



20 points

Q1 – Solution (suite)

B)



DCL CD:

Membrure à deux forces

C = D

DCL ABC:

$$\sum M_B = 0{,}3W - 0{,}2C\cos 45^\circ + 0{,}1C\sin 45^\circ = 0$$

$$\left|\vec{C}\right| = 3\sqrt{2}\cdot W$$ en tension

$$\sum F_x = B_x + C\cos 45^\circ = 0 \qquad B_x = -C\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B_x = 3W$$

B_x

$$\sum F_y = B_y + C\sin 45^\circ - W = 0 \qquad B_y = -C\frac{\sqrt{2}}{2} + W = -2W \qquad B_y = 2W$$

B_y

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{13}\cdot W$$

20 points

Q1 – Solution (suite)

C) Nous avons donc:

$$\left|\vec{C}\right| = 3\sqrt{2}W \leq 1kN$$

$$\left|\vec{B}\right| = W\sqrt{13} \leq 1kN$$

D'après ces données, on trouve que

En C et D: $$W_C = W_D \leq \frac{\sqrt{2}}{6} = 0,236kN$$

En B: $$W_B \leq \frac{\sqrt{13}}{13} = 0,277kN$$

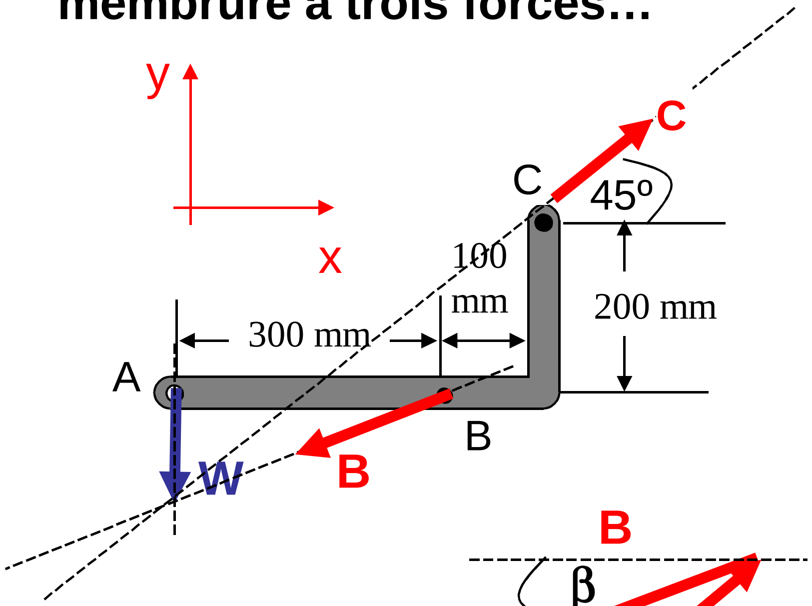
Donc les points qui limitent le poids maximal sont C et D, ce qui veut dire que

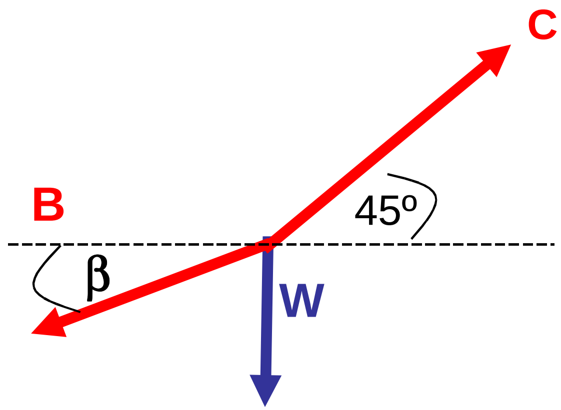
$$W_{\max} = 236N$$

10 points

Q1 - Solution alternative B)

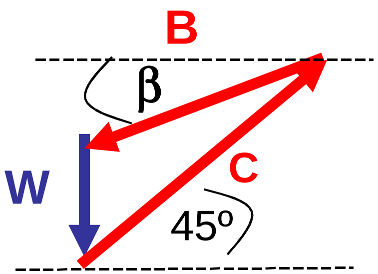
B) On peut également traiter ce problème en considérant BCA comme une membrure à trois forces…





$$\tan\beta = \frac{200}{300}$$

$$\beta = 33{,}69^\circ$$



$$\frac{\sin 45^\circ}{B} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{C} = \frac{\sin(45^\circ - \beta)}{W}$$

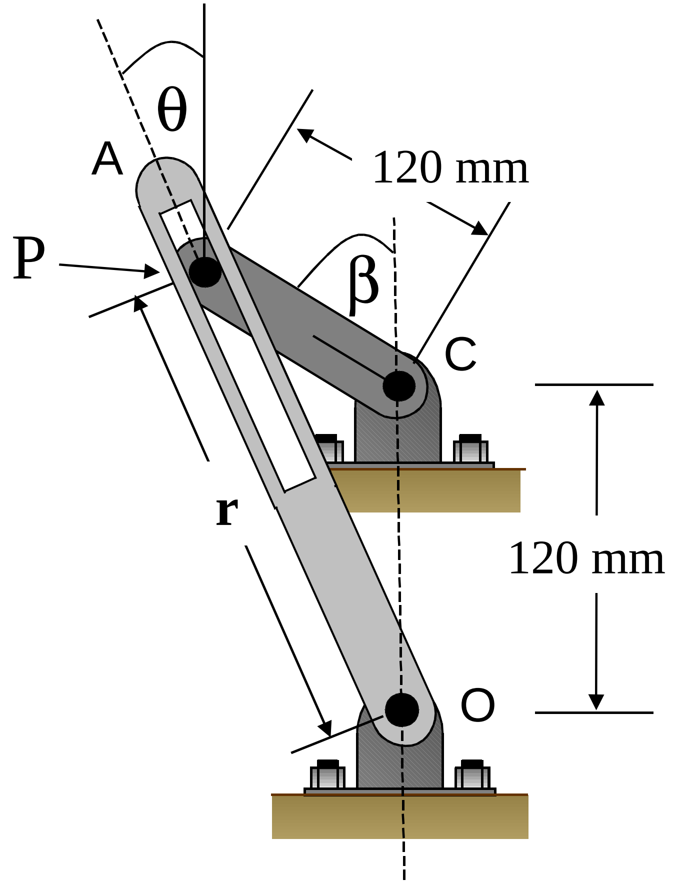
$$C = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\sin(45^\circ - \beta)} W = 3\sqrt{2} \cdot W$$

$$B = \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(45^\circ - \beta)} W = \sqrt{13} \cdot W$$

Question 2

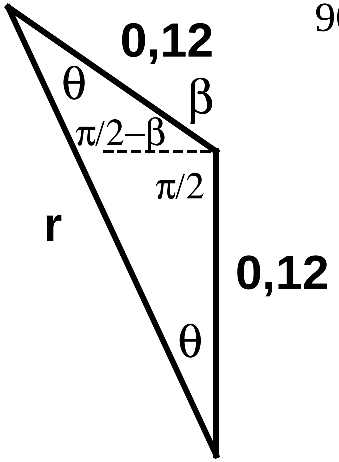
La manivelle CP tourne à une vitesse angulaire constante de 4 rad/s dans le sens anti-horaire. Les membrures sont de poids négligeable. Lorsque β=45º,

A) Déterminez la valeur de l'angle θ et la grandeur du rayon r (10 points)
B) Déterminez les composantes radiale et transversale de la vitesse du point P par rapport à l'origine O. Quelles sont les grandeurs $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$?(20 points)
C) Déterminez les composantes radiale et transversale de l'accélération du point P par rapport à l'origine O. (20 points)



Q2 - Solution

A)



$$90+(90-\beta)+2\theta=180$$

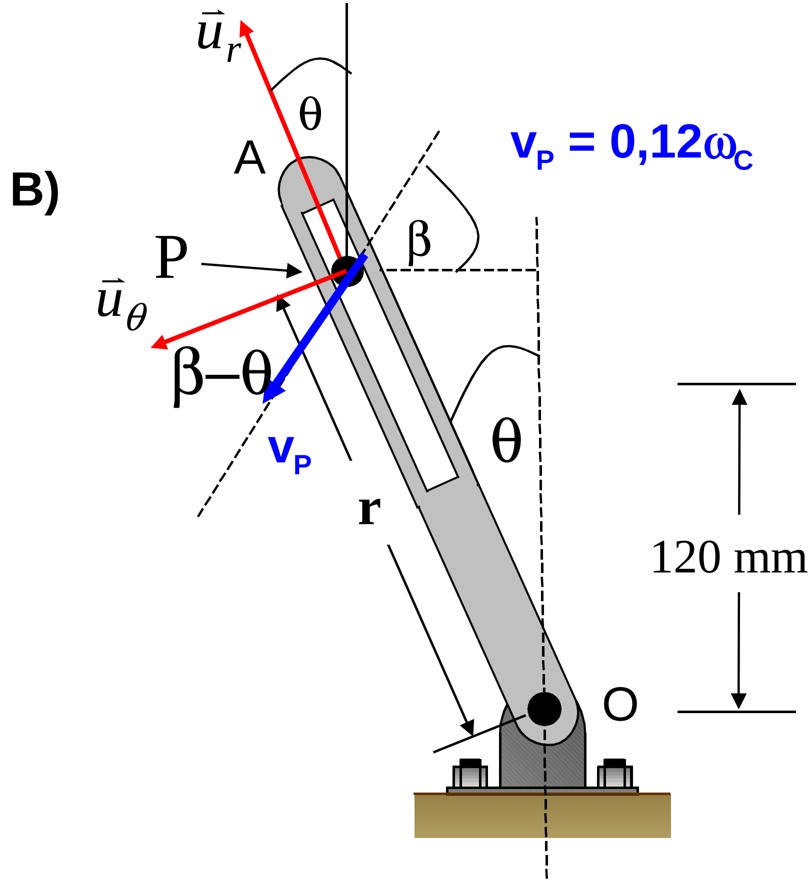
$$\theta=\frac{\beta}{2}=22{,}5^\circ$$

5 points

5 points

$$\frac{\sin(180-\beta)}{r}=\frac{\sin\theta}{0{,}12}\qquad r=\frac{0{,}12\sin\beta}{\sin\theta}=0{,}222m$$

B)



B) $v_P = 0{,}12\omega_C = 0{,}48 m/s$

$$\vec{v}_P=-v_P\sin(\beta-\theta)\vec{u}_r+v_P\cos(\beta-\theta)\vec{u}_\theta$$

$$v_{Pr}=-v_P\sin(\beta-\theta)=-0{,}184\,m/s$$

$$v_{P\theta}=v_P\cos(\beta-\theta)=0{,}443\,m/s$$

10 points

Les grandeurs $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ sont:

$$v_{Pr}=\dot{r}=-0{,}184\,m/s$$

$$v_{P\theta}=r\dot{\theta}=0{,}443\,m/s$$

$$\dot{\theta}=\frac{v_{P\theta}}{r}=\frac{1}{2}\dot{\beta}=2\,rad/s$$

10 points

Q2 – Solution (suite)

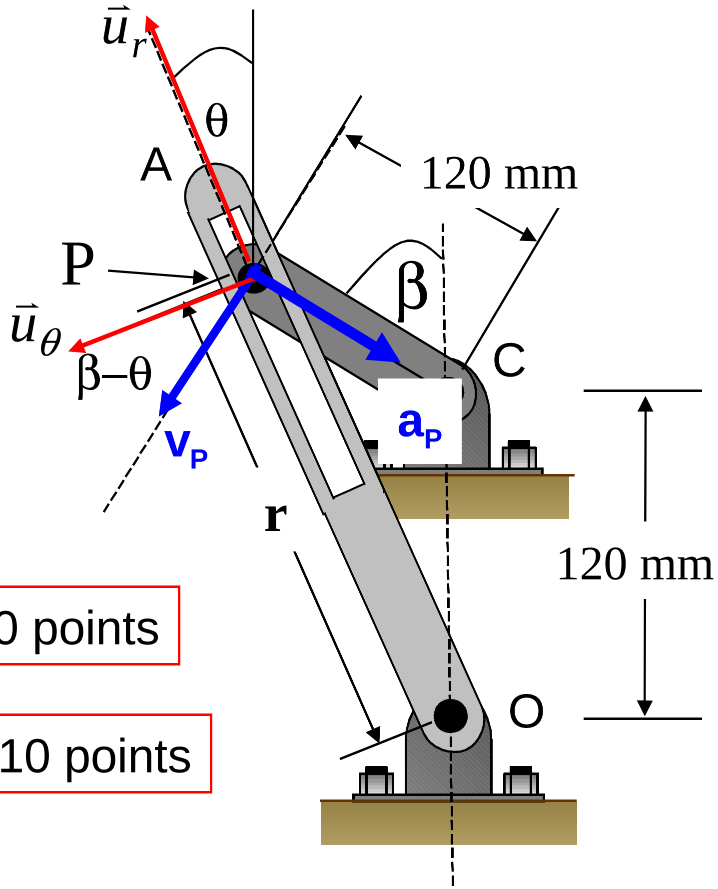
C) La seule composante de l'accélération est l'accélération normale induite par la rotation de P autour de C:

$$a_P = \frac{v_P^2}{0{,}12} = 0{,}12 \cdot 4^2 = 1{,}92\, m/s^2$$

$$\vec{a}_P = -a_P \cos(\beta - \theta)\vec{u}_r - a_P \sin(\beta - \theta)\vec{u}_\theta$$

$$a_{Pr} = -a_P \cos(\beta - \theta) = -1{,}77\, m/s^2$$ 10 points

$$a_{P\theta} = -a_P \sin(\beta - \theta) = -0{,}735\, m/s^2$$ 10 points



Q2- solution alternative pour C)

C) On doit trouver les composantes $\ddot{r}$ et $\ddot{\theta}$ et ensuite utiliser les relations:

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad a_\theta = \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

$$v_{\mathrm{Pr}} = \dot{r} = -v_P \sin(\beta - \theta) \qquad \ddot{r} = -v_P \cos(\beta - \theta)(\dot{\beta} - \dot{\theta}) = -r\dot{\theta}(\dot{\beta} - \dot{\theta})$$

$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -r\dot{\theta}\dot{\beta} = -\frac{r\dot{\beta}^2}{2}$$

10 points

$$a_r = -1{,}77\, m/s^2$$

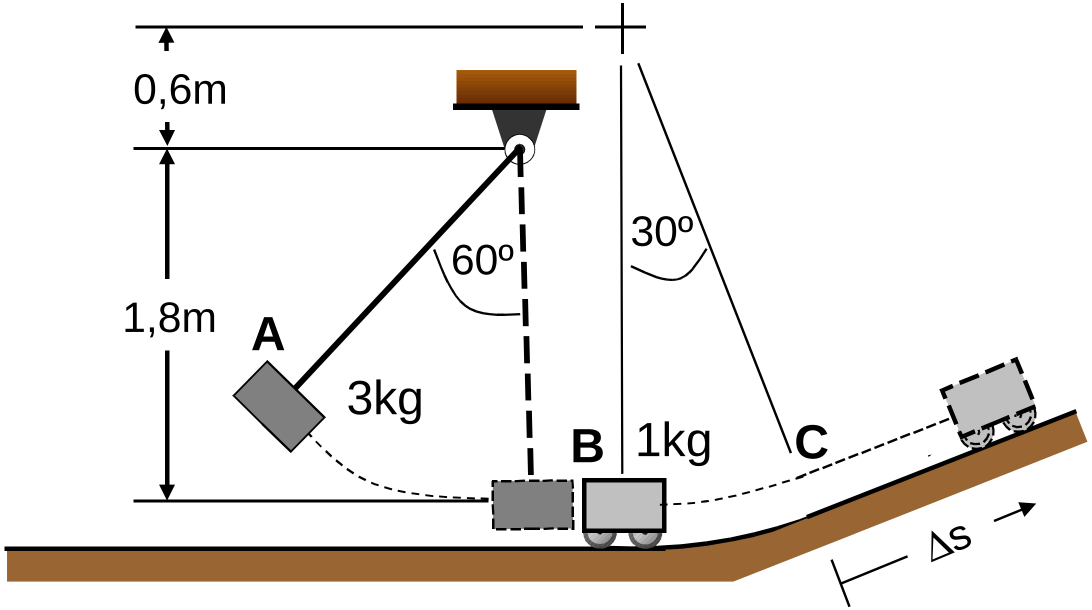
$$v_{P\theta} = r\dot{\theta} = v_P \cos(\beta - \theta) \qquad \frac{d\left(r\dot{\theta}\right)}{dt} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dot{r}\dot{\beta} \quad \text{car} \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\beta}}{dt} = 0$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \dot{r}(\dot{\beta} - \dot{\theta}) + \dot{r}\dot{\theta} = \dot{r}\dot{\beta}$$

10 points

$$a_\theta = -0{,}735 m/s^2$$

Question 3



Une masse A de 3kg est relâché du repos à un angle de 60º avec la verticale. Au point B, elle frappe le chariot de 1 kg. Le coefficient de restitution est de e=0,7 lors de la collision. Tout frottement peut être négligé.

A) Déterminez la vitesse du chariot B immédiatement après la collision (20 points)
B) Déterminez la distance Δs que le chariot parcourra au-delà du point C avant de s'arrêter (25 points)
C) L'énergie totale du système est-elle conservée? (5 points)

Question 3 - Solution

A) $v_{Ai} = \sqrt{2g \cdot 1{,}8(1-\cos 60^\circ)} = 4{,}202 m/s$ $\quad m_A v_{Ai} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai}} = 0{,}7 \qquad v_{Bf} = \frac{m_A v_{Ai}(1+e)}{m_A + m_B} = 5{,}358 m/s$$

$\boxed{\textbf{20 points}}$

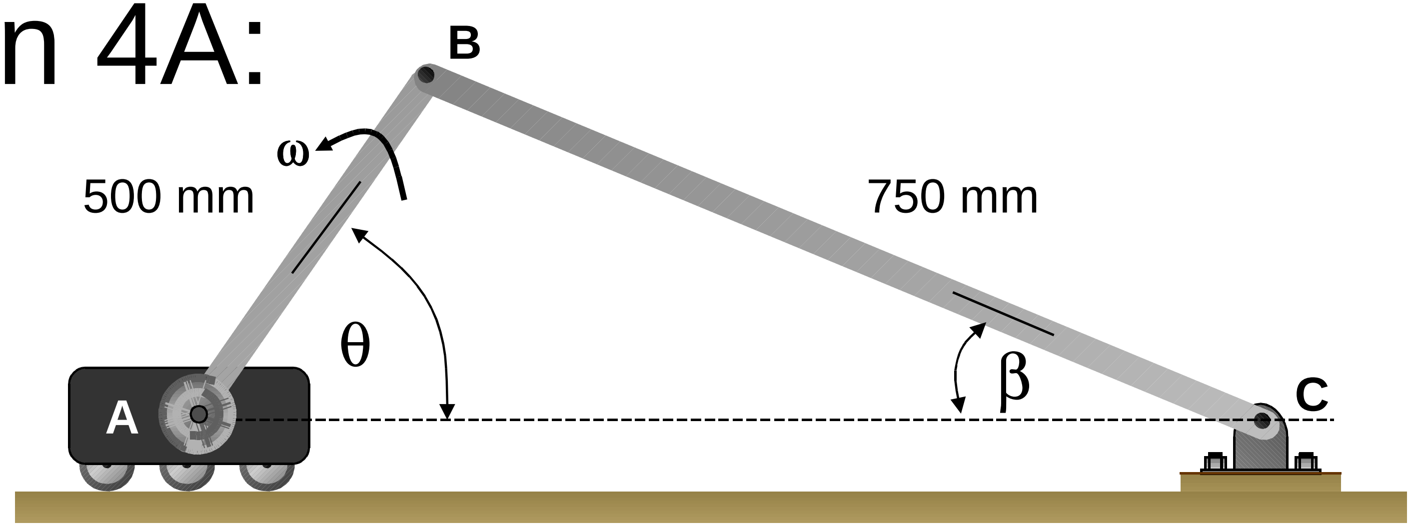
B) $$\frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 = m_B g\left(2.4(1-\cos 30^\circ) + \Delta s \sin 30^\circ\right)$$

$$\Delta s = \frac{v_{Bf}^2}{g} - 2 \cdot 2{,}4(1-\cos 30^\circ) = 2{,}28 m$$

$\boxed{\textbf{25 points}}$

C) Non (e<1) $\boxed{\textbf{5 points}}$

Question 4A:



Le véhicule A possède un moteur rotatif qui génère un moment de force au point A. En conséquence, le bras AB se met à tourner à une fréquence angulaire ω=0,5 rad/s dans le sens anti-horaire, ce qui rapproche le véhicule du point C.

En supposant qu'il n'y a aucun frottement sur la surface horizontale, ni dans les chevilles des membrures,

A) Déterminez la relation entre les angles θ et β et les constantes du système (5 points)

B) Déterminez les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R) de la barre AB par rapport au point A. Déterminez les coordonnées du C.I.R de la barre BC par rapport au point C. (15 points)

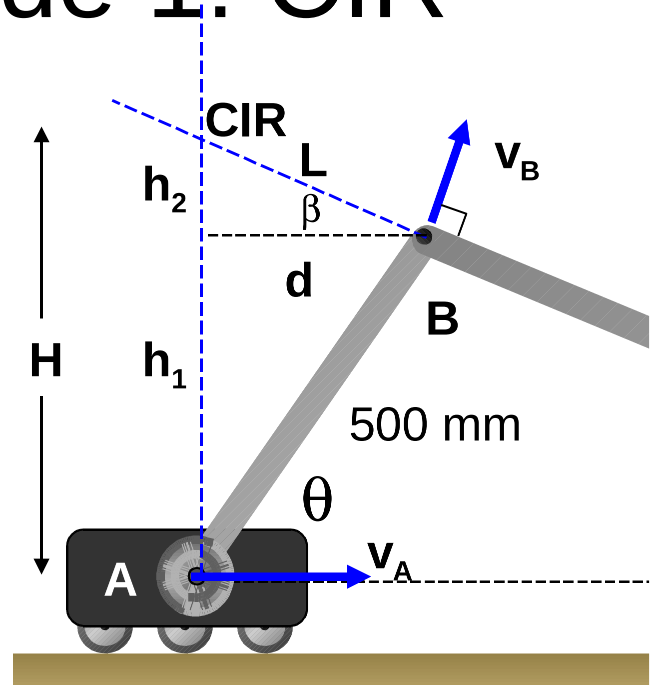
C) Déterminez la vitesse horizontale du véhicule au point où θ=60º. Note: Vous pouvez utiliser la méthode des C.I.R, du mouvement plan général ou toute autre méthode de votre choix. (20 points)

D) Déterminez la vitesse angulaire de la barre BC (10 points)

Q4A – Solution – Méthode 1: CIR

A) $0{,}5\sin\theta = h = 0{,}75\sin\beta$ $\quad \sin\beta = \dfrac{0{,}5\sin\theta}{0{,}75}$

5 points



B) Voir figure. Le CIR est directement au dessus de A, à une hauteur H = h_1+h_2 = 500sinθ + d*tanβ. $\quad d = 500\cos\theta$

On trouve donc:

$$H = 500\sin\theta + 500\cos\theta\tan\beta$$

$$H = 500\cos\theta(\tan\theta + \tan\beta)$$

Pour le C.I.R de BC, il est nécessairement au point C puisque C est immobile. Donc ses coordonnées par rapport à C sont (0,H).

15 points

C) $v_A = \omega_{AB} H = 0{,}5 \cdot 610 = 305 mm/s$

$\theta = 60^\circ \qquad \beta = 35{,}26^\circ$

20 points

D) $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{H} = \dfrac{v_B}{L} = \dfrac{v_B\cos\beta}{d}$

$$\omega_{BC} = -\frac{v_B}{750} = -\frac{\omega_{AB} d}{750\cos\beta}$$

$$\omega_{BC} = -\frac{0{,}5 \cdot 250}{750\cos 35{,}26^\circ} = -0{,}204 rad/s$$

10 points

Q4A – Solution – Méthode 2: Mouvement plan général

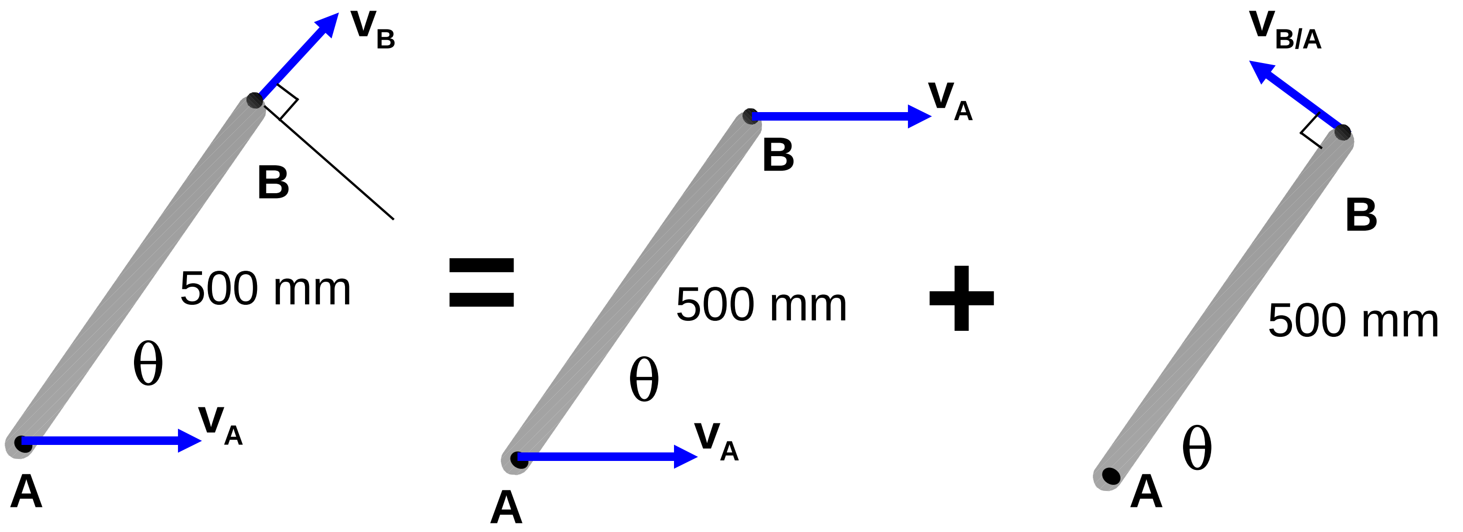
A) idem $\boxed{\text{5 points}}$

B) idem $\boxed{\text{15 points}}$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{B/C}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

C et D)



Mouvement plan général **translation** **rotation**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A \qquad \vec{v}_A = v_A \vec{i} \qquad \vec{\omega}_{AB} = 0{,}5\vec{k}$$

$$\vec{r}_{B/A} = 0{,}5\cos\theta\vec{i} + 0{,}5\sin\theta\vec{j} \qquad \vec{r}_{B/C} = -0{,}75\cos\beta\vec{i} + 0{,}75\sin\beta\vec{j}$$

Q4A – Solution - Méthode 2 (suite)

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{B/C} = \left(-0{,}75\sin\beta\vec{i} - 0{,}75\cos\beta\vec{j}\right)\omega_{BC}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = 0{,}5\left(-0{,}5\sin\theta\vec{i} + 0{,}5\cos\theta\vec{j}\right)$$

Maintenant: $\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A$

$$-0{,}75\left(\sin\beta\vec{i} + \cos\beta\vec{j}\right)\omega_{BC} = 0{,}25\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) + v_A\vec{i}$$

Nous avons deux équations (en x et y) et deux inconnues (v_A et ω_{BC})

En y: $-0{,}75\cos\beta\omega_{BC} = 0{,}25\cos\theta$

$$\omega_{BC} = -\frac{\cos\theta}{3\cos\beta} = -2{,}04 rad/s$$

Réponse de D) $\boxed{\text{10 points}}$

En x: $-0{,}75\sin\beta\omega_{BC} = -0{,}25\sin\theta + v_A$

$$v_A = 0{,}25\cos\theta\left(\tan\beta + \tan\theta\right) = 0{,}305\ m/s$$

$\boxed{\text{20 points}}$

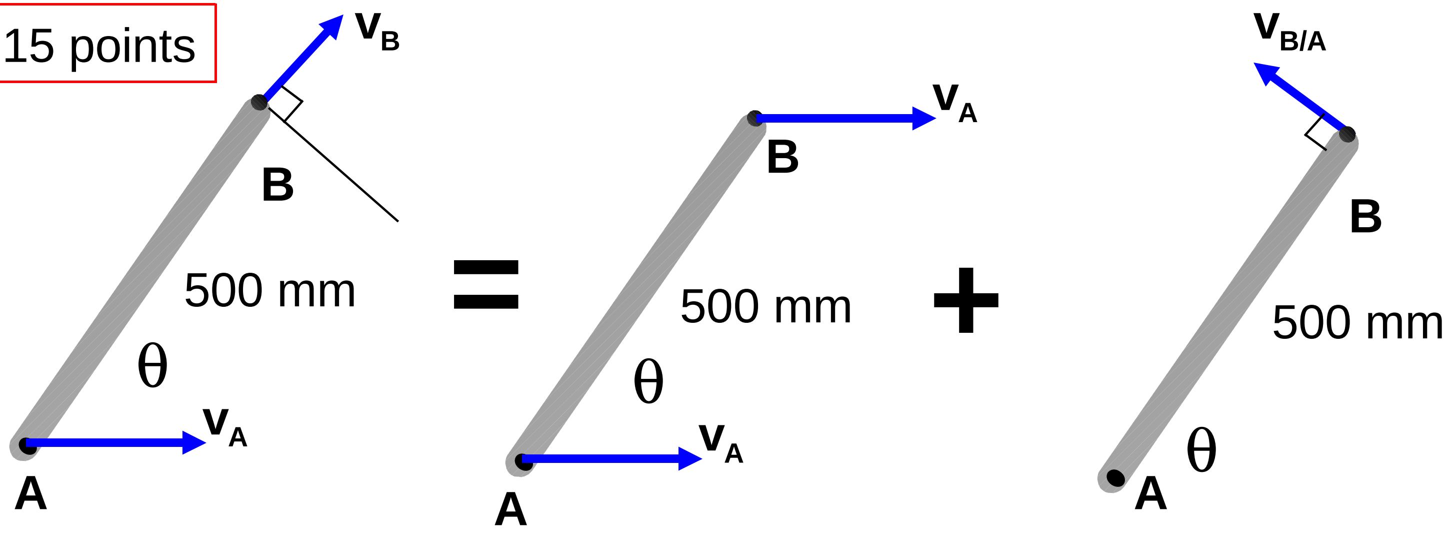
Réponse de C)

Q4A- Solution - Méthode 3 – Triangle des vitesses

A) idem 5 points

B) idem 15 points

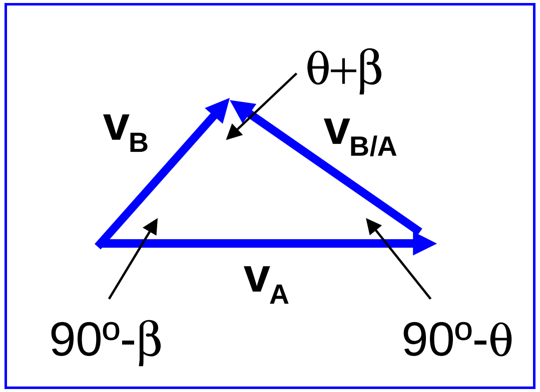
C)



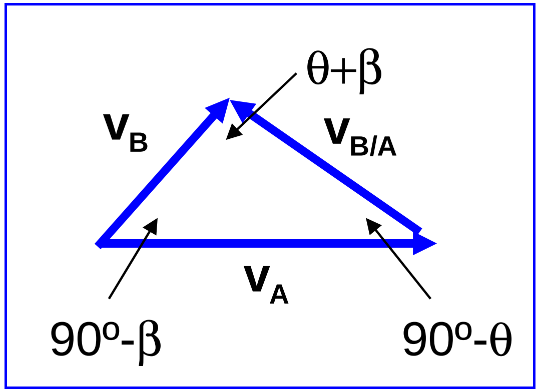
Mouvement plan général   **translation**   **rotation**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$



Q4A- Solution - Méthode 3 (suite)



Loi des sinus:

$$\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{|\vec{v}_B|}=\frac{\sin(90^\circ-\beta)}{|\vec{v}_{B/A}|}=\frac{\sin(\theta+\beta)}{|\vec{v}_A|}$$

$$|\vec{v}_{B/A}|=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25m/s$$

Finalement: $$|\vec{v}_A|=\frac{\sin(\theta+\beta)}{\cos\beta}|\vec{v}_{B/A}| \qquad |\vec{v}_A|=\frac{\sin(60^\circ+35{,}26^\circ)}{\cos 35{,}26^\circ}0{,}25=0{,}305m/s$$

20 points

D) $$|\vec{v}_B|=|\vec{\omega}_{BC}\times\vec{r}_{B/C}|=\omega_{BC}\cdot 0{,}75$$

$$|\vec{v}_B|=\frac{\cos\theta}{\cos\beta}|\vec{v}_{B/A}|$$

En comparant ces deux équations, on obtient:

$$\omega_{BC}=\frac{\cos\theta}{3\cos\beta}=0{,}204rad/s$$ (sens horaire)

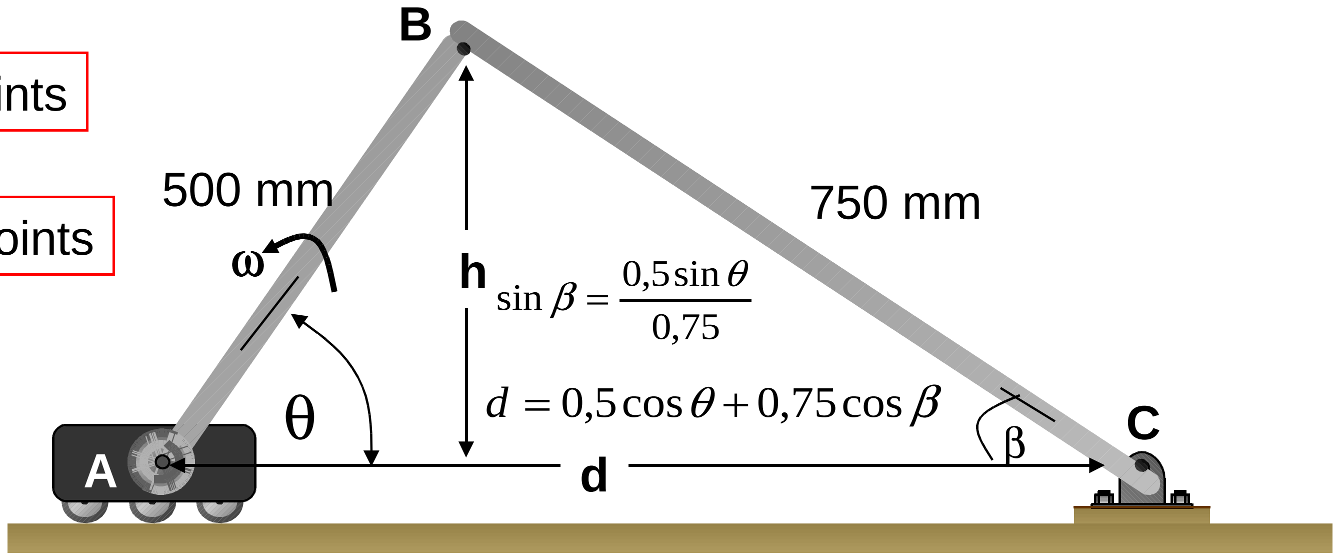
10 points

$$\vec{\omega}_{BC}=-0{,}204\vec{k}\ rad/s$$

Q4A – Solution - Méthode 4, v = dx/dt

A) idem $\boxed{\text{5 points}}$

B) idem $\boxed{\text{15 points}}$



C) En dérivant:

$$0{,}5\cos\theta\cdot\dot{\theta} = \dot{h} = 0{,}75\cos\beta\cdot\dot{\beta} \qquad \dot{\beta} = \frac{0{,}5\cos\theta}{0{,}75\cos\beta}\cdot\dot{\theta}$$

$$v_x = -\dot{d} = +0{,}5\sin\theta\cdot\dot{\theta} + 0{,}75\sin\beta\cdot\dot{\beta}$$

$$v_x = 0{,}5\sin\theta\cdot\dot{\theta} + 0{,}75\frac{0{,}5\sin\theta}{0{,}75}\cdot\frac{0{,}5\cos\theta}{0{,}75\sqrt{1-\left(\dfrac{0{,}5\sin\theta}{0{,}75}\right)^2}}\cdot\dot{\theta}$$

$$v_x = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}\right)\cdot\dot{\theta} = 0{,}305 m/s$$

$\boxed{\text{20 points}}$

de A vers C

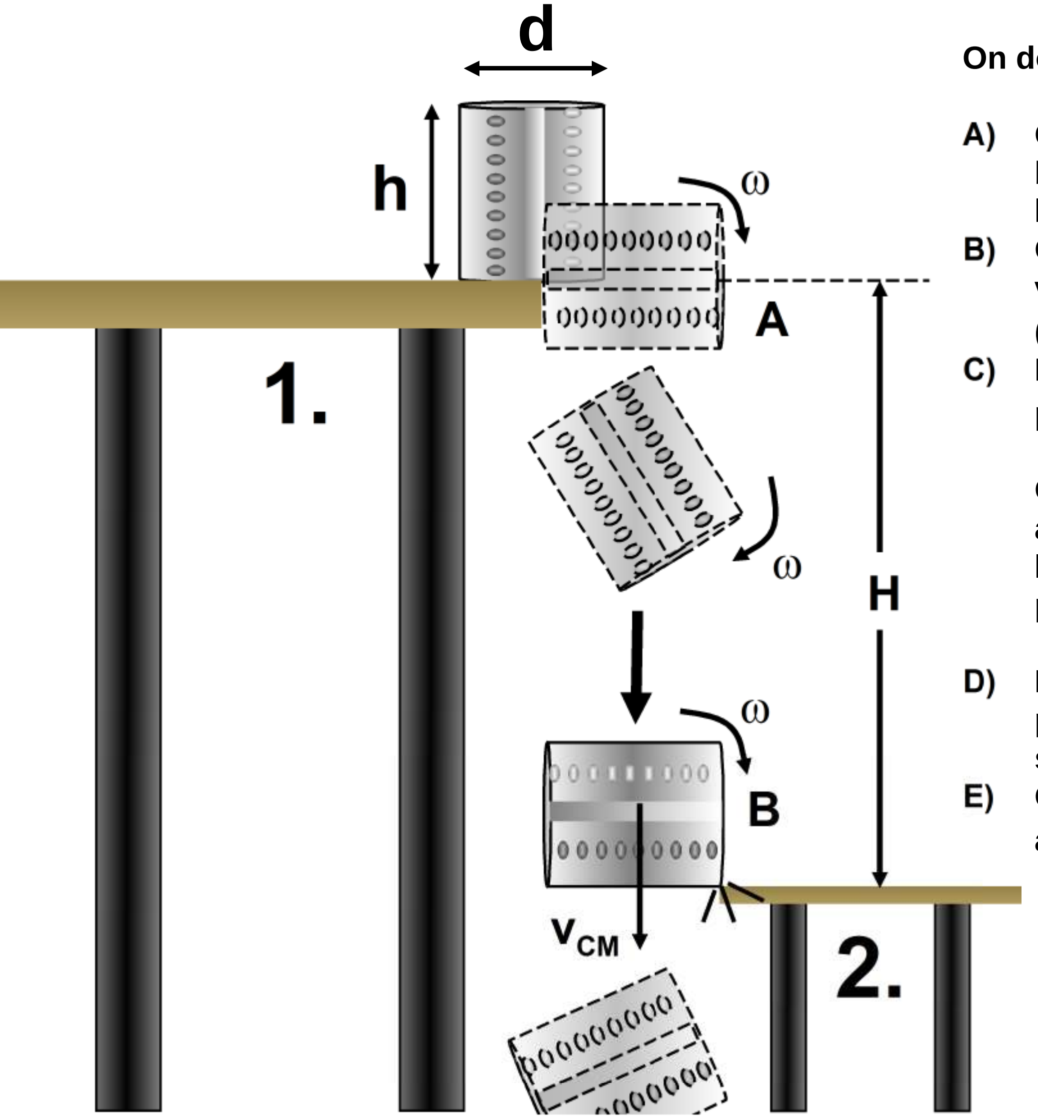
D)

$$\dot{\beta} = \frac{0{,}5\cos 60^\circ}{0{,}75\cos 35{,}26^\circ}\cdot 0{,}5 = 0{,}204 rad/s$$

Un $\dot{\beta} > 0$ signifie une augmentation de l'angle, donc **sens horaire**

$\boxed{\text{10 points}}$

Q4B - énoncé



Pour faire un jeu vidéo, on vous demande de simuler de façon réaliste la chute d'un baril jusqu'à une petite plateforme située en contrebas. La moitié du baril repose sur la plateforme 1. Au temps t = 0, on lui donne une très légère poussée à partir du repos et le baril bascule dans le vide. Il n'y a aucun glissement entre le baril et la plateforme.

On donne h= 2 unités, d = 1 unité, g = 10 unités/s^2.

A) **Quelle est l'expression de l'énergie cinétique totale du baril au moment où il est pour la première fois à l'horizontale (position A)? (5 points)**

B) **Quelle est l'expression de la vitesse du centre de masse v_{CM} en fonction de la vitesse angulaire ω du baril (position A) (10 points)**

C) **Déterminez la valeur de v_{CM} et de ω au point A. (20 points)**

On vous donne comme consigne que le baril doit accomplir une rotation complète (2 π) entre le point A et le moment où il touche la plateforme 2. Il arrive donc parfaitement à l'horizontal.

D) **Déterminez la différence de hauteur H entre les plateformes nécessaire pour que la rotation spécifiée s'accomplisse. (10 points)**

E) **Quelle sera la vitesse du centre de masse v_{CMB} juste avant la collision? (5 points)**

Q4B - Solution

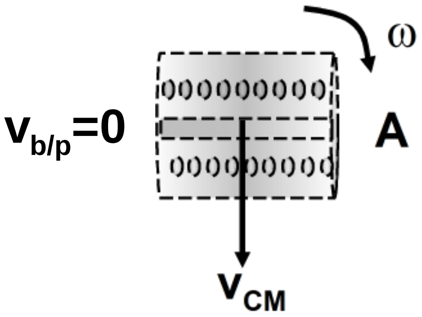
A) L'expression de l'énergie cinétique totale d'un objet en rotation est:

$$T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

5 points

B) L'expression de la vitesse angulaire:

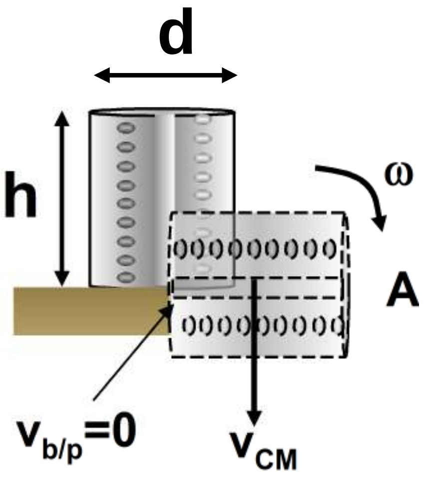
Comme il n'y a aucun glissement la vitesse du baril par rapport à la plateforme est nulle au point de contact.



$$v_{CM} = \omega \frac{h}{2}$$

10 points

C) L'énergie potentielle gravitationnelle initiale est conservée durant la chute:



$$mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

avec

$$\omega = \frac{2 v_{CM}}{h}$$

Q4B – Solution (suite)

Pour déterminer ω, on utilise la méthode de l'énergie:

$$gh = v_{CM}^2 + \frac{I_{CM}}{m}\omega^2 \qquad gh = \frac{\omega^2 h^2}{4} + \frac{I_{CM}}{m}\omega^2 \qquad I_{CM} = m\left(\frac{1}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}h^2\right) = \frac{19}{48}m$$

$$2g = \omega^2 + \frac{19}{48}\omega^2 = \frac{67}{48}\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{96g}{67}} = 3{,}785 rad/s$$

+ ω

20 points

$$v_{CM} = \omega\frac{h}{2} = 3{,}785 \, unités/s$$

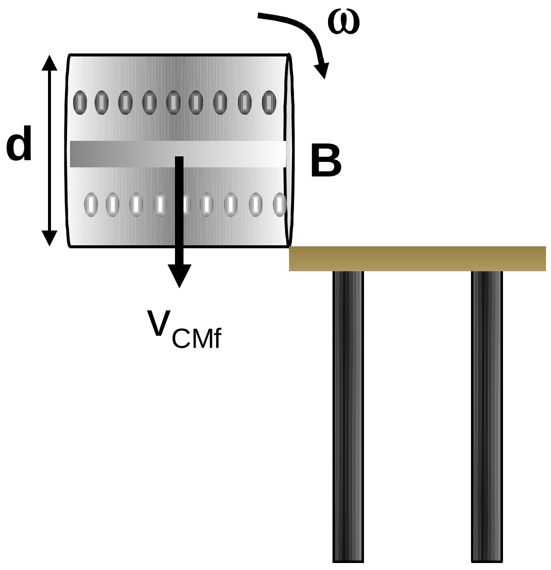
Q4B – Solution (suite)

D) Une fois que le baril a quitté la plateforme sa vitesse angulaire est constante. Seul le centre de masse accélère.

Le baril effectue un tour complet en Δt secondes. $\omega\Delta t = 2\pi$ $\quad \Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Pendant ce temps, le baril franchit une distance verticale de **<u>H-d/2</u>**:

$$H - d/2 = v_{CMA}\Delta t + g\frac{\Delta t^2}{2} \Rightarrow H - d/2 = \frac{\omega h}{2}\frac{2\pi}{\omega} + g\frac{(2\pi)^2}{2\omega^2}$$



$$\Rightarrow H = 20{,}56\ unités$$

10 points

E) La vitesse du centre de masse juste avant la collision est donnée par:

$$v_{CMB} = v_{CMA} + g\Delta t$$

5 points

$$v_{CMB} = \frac{\omega h}{2} + \frac{2\pi g}{\omega} = 20{,}38\,unités/s$$

Question 4C

Un bloc de masse M remonte un plan incliné à 30º tiré par une force F. Il est retenu par une chaîne de densité linéique ρ. On néglige le frottement entre le bloc, la chaîne et le plan.

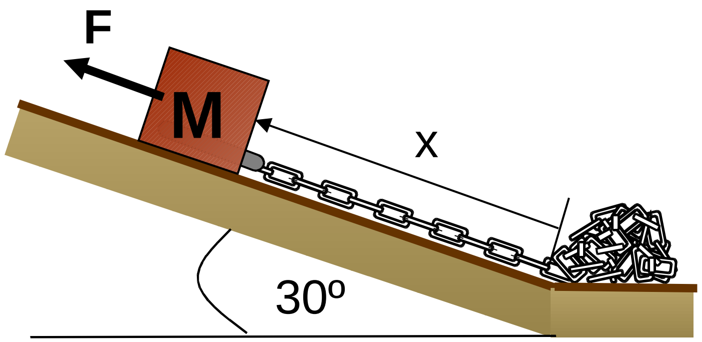
A) Déterminez la force F(x,v) nécessaire pour que le bloc remonte le plan à vitesse constante v. (30 points)

B) La force F dépendra-t-elle de x? (5 points)

On donne M = 30 kg, ρ = 5 kg/m, v = 1m/s

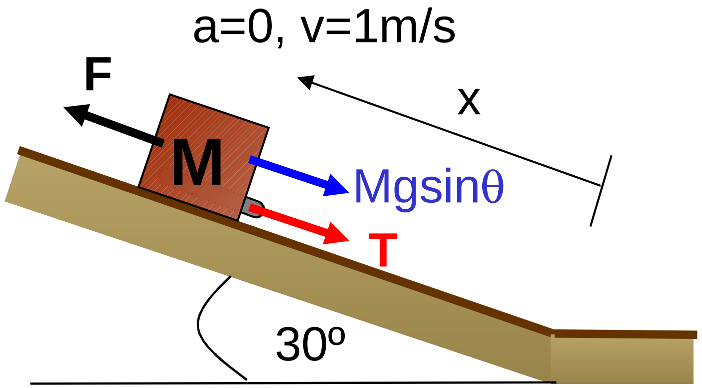
C) Quelle est la grandeur de F au point x = 4m pour les valeurs numériques ci-dessus? (5 points)

D) Déterminez la puissance moyenne développée par la force F pour monter ainsi le bloc de x=0 jusqu'à x = 4m. (10 points)



Q4C - Solution

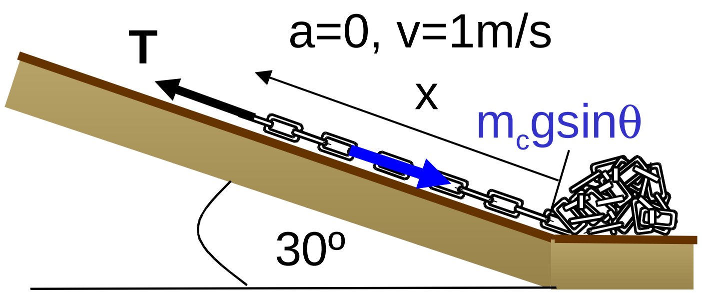
A)



DCE du bloc

$$\sum F_x = Ma_x = 0$$

$$F - Mg\sin\theta - T = 0$$



DCE de la chaîne

$$u_x = v_{ci} - v_{cf} = 0 - v = -v$$

$$\sum F_x + \frac{dm_c}{dt} u_x = m_c a_x = 0$$

$$T - m_c g\sin\theta + \frac{dm_c}{dt} u_x = 0$$

$$m_c = \rho x \qquad \frac{dm_c}{dt} = \rho\dot{x} = \rho v$$

Q4 - Solution (suite)

$$T - \rho x g \sin\theta - \rho v^2 = 0$$

$$F - Mg\sin\theta - T = 0$$

$$F = Mg\sin\theta + \rho x g \sin\theta + \rho v^2$$

$$F = \frac{(M + \rho x)}{2} g + \rho v^2$$

30 points

B) Oui la force dépend de x. (on peut le voir intuitivement puisque la masse du système augmente à mesure que la longueur de la chaîne augmente).

5 points

C) La grandeur de la force à x = 4m et v = 1m/s sera donc:

$$F = \frac{(30 + 20)}{2} 9.81 + 5 \cdot 1^2 = 250N$$

5 points

Q4 – Solution (suite)

D) La puissance moyenne peut être déterminée de la façon suivante:

$$P_{moy} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad \Delta E = E_f - E_i = T_f + V_f - 0 \quad (E_i = 0)$$

$$\Delta E = E_f = \frac{1}{2}(M + \rho x)v^2 + \frac{Mgx}{2} + \frac{\rho g x^2}{4}$$

(on calcule l'énergie potentielle de la chaîne à son centre de masse)

ou $\int dmgx \sin\theta = \int_0^x \rho g x' \sin\theta dx' = \frac{\rho g x^2}{4}$

Pour Δt, le bloc monte de 4m à 1m/s, donc **$\Delta t = 4s$.**

$$P_{moy} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}(M + \rho x)v^2 + \frac{Mgx}{2} + \frac{\rho g x^2}{4}}{\Delta t}$$

$$P_{moy} = \frac{50}{8} + \frac{120}{8}g + \frac{80}{16}g = 20g + 6{,}25 = 200W$$

10 points

On peut également procéder par:

$$P_{moy} = \frac{\int_0^x F(x')dx'}{\Delta t} = 20g + \rho \approx 200W$$

La réponse sera légèrement différente car il faudrait tenir compte de la force impulsive qui fait passer v de 0 à 1 m/s en x=0 au départ.