– PHS1101 –
Mécanique pour ingénieurs

Cours 4

Jérémie Villeneuve
Département de génie physique

Équilibre statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

pour tout point O de l'espace

3 équations scalaires

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}}$$

En 2D

$$\sum F_z = 0$$

3 équations scalaires

$$\sum M_{Ox} = 0$$

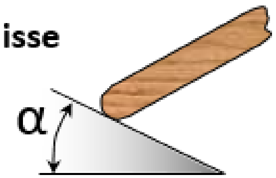
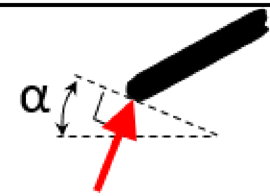
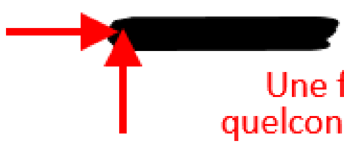
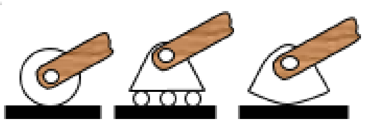
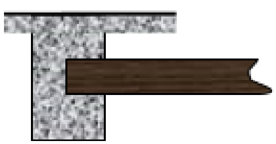
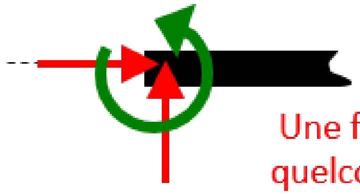
$$\sum M_{Oy} = 0$$

En 2D

$$\boxed{\sum M_{Oz} = 0}$$

Réactions aux appuis sans frottement

Exemples d'appuis sans frottement vus au dernier cours

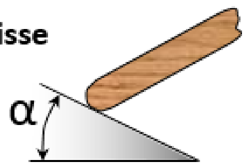
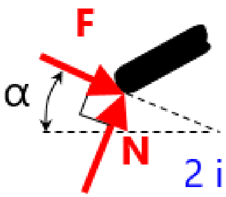
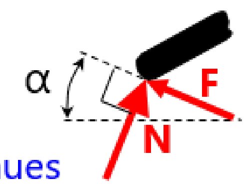
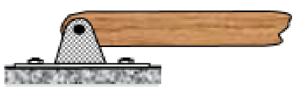
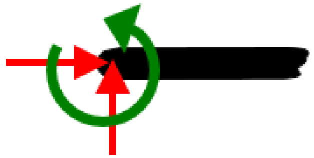
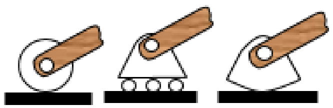
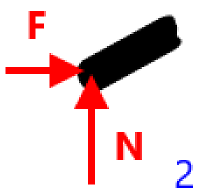
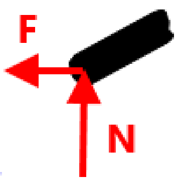
Appuis		Réactions	
Appui sur une surface lisse (contact ponctuel)			1 inconnue Une force normale (⊥)
Liaison pivot			2 inconnues Une force d'orientation quelconque (2 composantes)
Rouleaux et billes (pivot glissant)			1 inconnue Une force normale (⊥)
Encastrement			3 inconnues Une force d'orientation quelconque + Un couple

Vous devez être capables de reconnaître les appuis et d'indiquer les forces et couples de réaction appropriés.

Réactions aux appuis avec frottement

Exemples d'appuis avec frottement vus au dernier cours

Si le sens du frottement ne peut pas être déduit du contexte, alors posez-le dans un sens arbitraire et interprétez le signe de votre réponse.

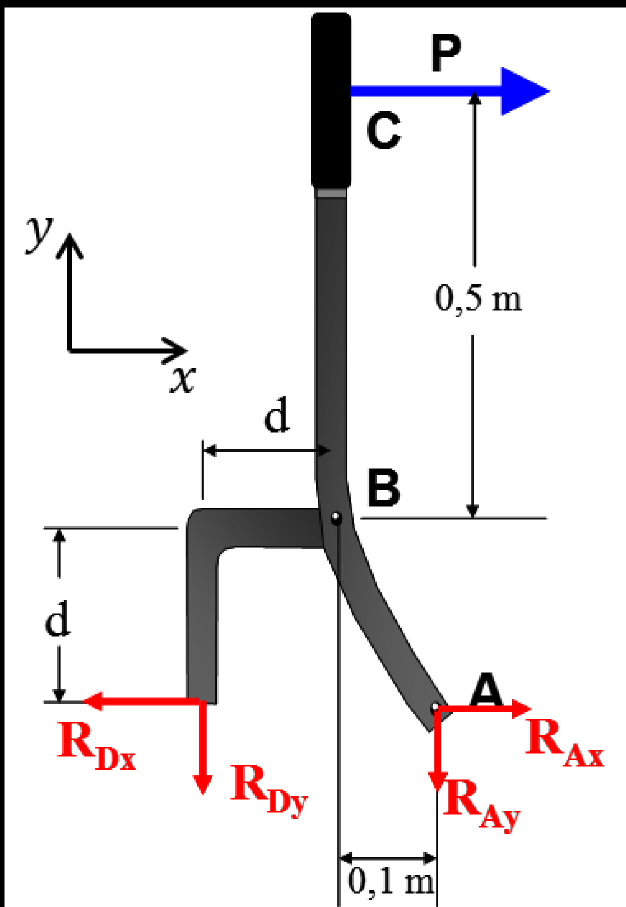
Appuis	Réactions
Appui sur une surface lisse (contact ponctuel) 	 OU  2 inconnues
Pivot avec frottement (ex : pivot rouillé) 	 3 inconnues (2 forces + 1 couple)
Rouleaux et billes (pivot glissant) 	 OU  2 inconnues

Vous devez être capables de reconnaître les appuis et d'indiquer les forces et couples de réaction appropriés.

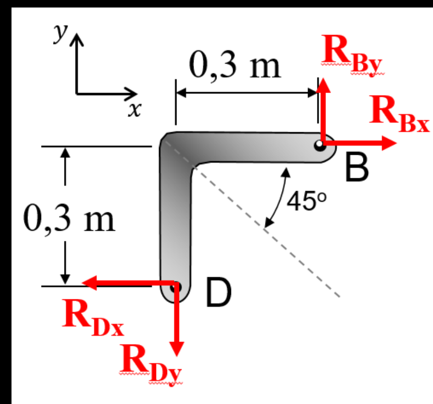
Structures de membrures

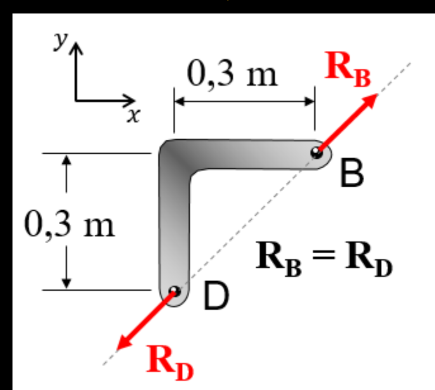
Il est souvent utile de faire des DCL d'un ou plusieurs sous-structures.

DCL 1

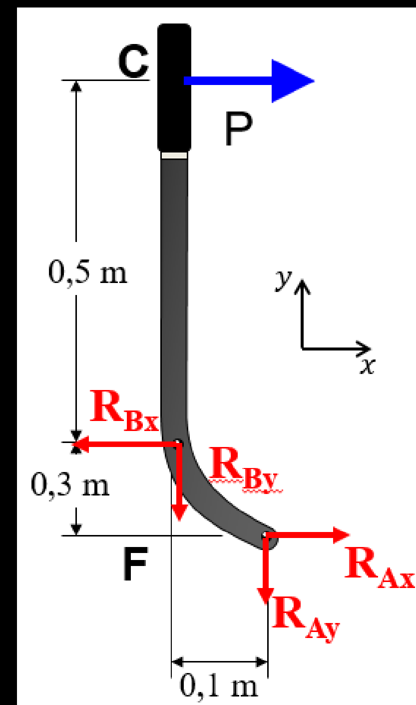


DCL 2





DCL 3



N'oubliez pas le cas particulier des membrures à deux forces…

Plan de la semaine

- **Statique des fluides**
  - Pression d'un fluide
  - Principe de Pascal
  - Poussée d'Archimède
  - Centre de pression d'un fluide sur une paroi

Comment est-ce possible ?

Définition de la pression

Il y a plus que la force…

Affirmer qu'une force de contact entre deux objets s'exerce en un seul point précis est une idéalisation qui facilite les calculs.

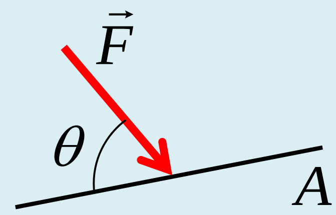
En réalité, toute force de contact s'exerce sur une certaine surface.

Pression exercée par une force

$$p = \frac{F_n}{A} \quad \text{en Pa } (= \text{N/m}^2)$$

F_n : composante de la force normale à la surface (N)
A : surface sur laquelle la force s'exerce (m²)

La pression ne dépend que de la force normale à la surface.



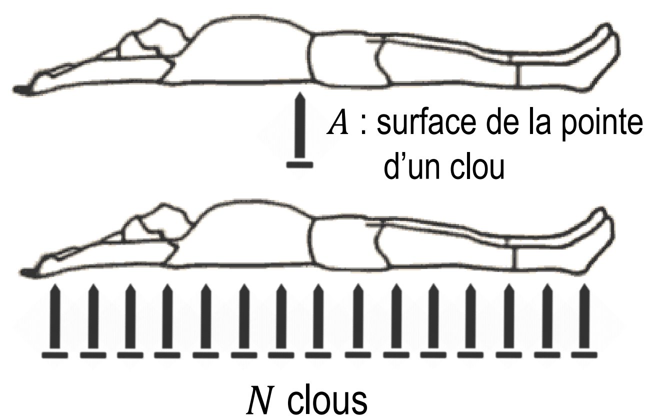
$$p = \frac{F \sin\theta}{A}$$

Exemple du lit de clous

Le poids mg de la personne couchée se répartit sur la surface totale des extrémités des N clous, ce qui réduit la pression et permet à la personne de ne pas être blessée.

$$p_1 = \frac{mg}{A}$$

$$p_2 = \frac{mg}{NA} = \frac{p_1}{N}$$



Pression dans un fluide

Définition d'un fluide

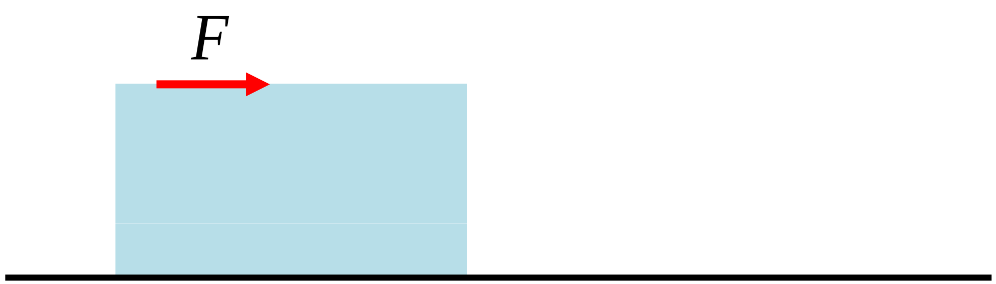
Un fluide est une substance qui ne supporte pas les forces de cisaillement. Une force de cisaillement est une force appliquée parallèlement à la surface sur laquelle elle s'exerce.

Les liquides et les gaz sont des fluides.

Solide
(corps rigide)

Tous les points du solide acquièrent la même vitesse.

Fluide



Différents points du fluide n'ont pas la même vitesse.

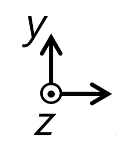
Pression dans un fluide

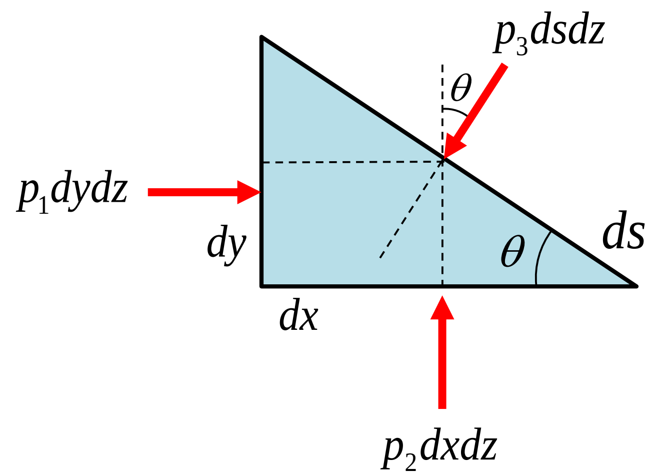
La pression dans un fluide est isotrope.
(Elle est la même dans toutes les directions.)

On démontre ce résultat en étudiant l'équilibre statique d'un volume infinitésimal de fluide en l'absence de gravité.

$$dx = ds\cos\theta$$

$$dy = ds\sin\theta$$





$$\sum F_x = p_1 dydz - p_3 dsdz\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1 dy = p_3 ds\sin\theta = p_3 dy$$

$$\boxed{p_1 = p_3}$$

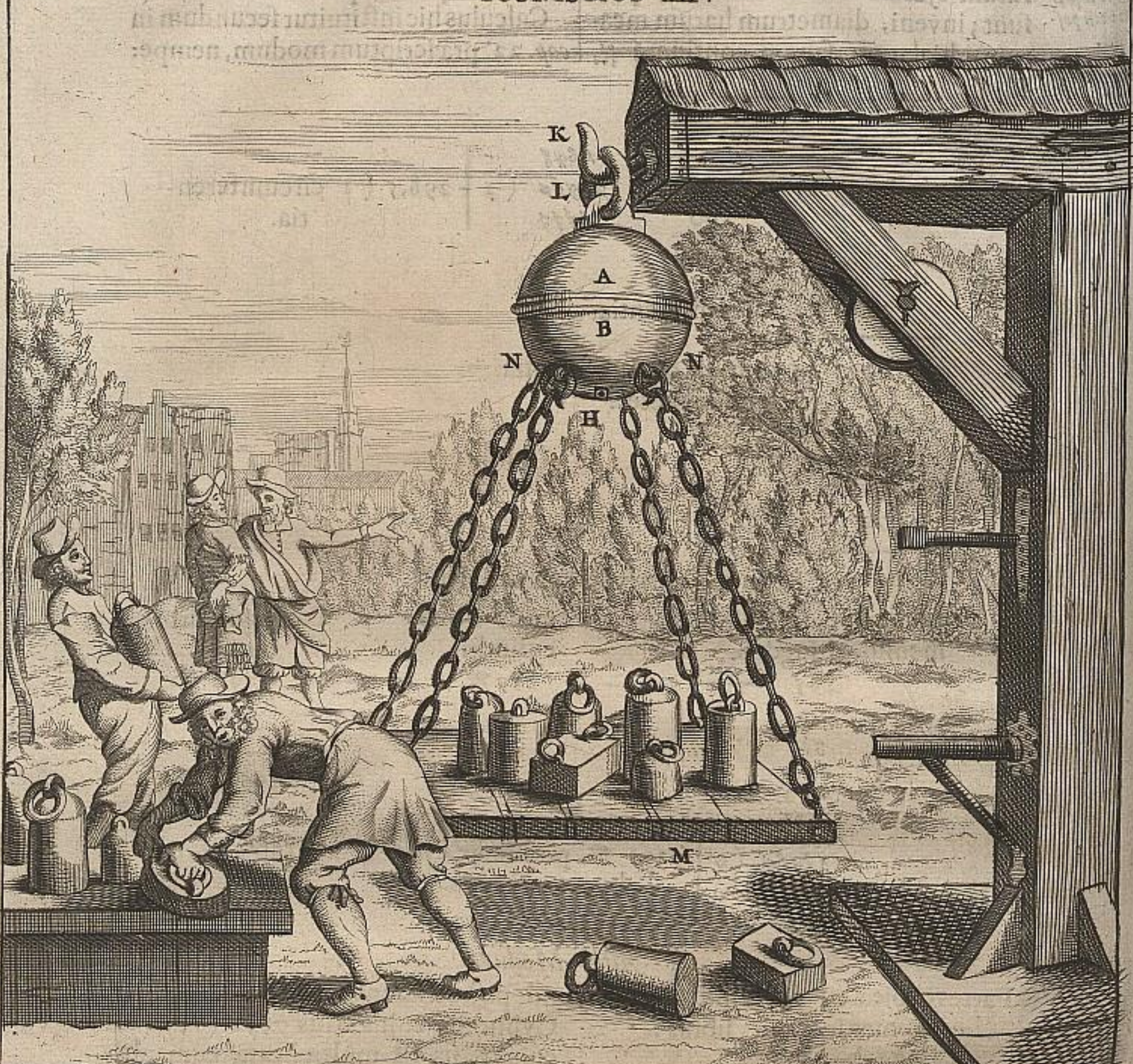
$$\sum F_y = p_2 dxdz - p_3 dsdz\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_2 = p_3}$$

$$\boxed{p_1 = p_2 = p_3}$$

Puisque l'angle θ arbitraire, alors la pression est la même dans toutes les directions!

ICONISMUS XII.



Hémisphères de Magdebourg (années 1650)

Expérience des hémisphères de Magdebourg. — Ce petit appareil classique[2] consiste en deux hémisphères creux, de laiton, ayant de 10 à 12 centimètres de diamètre (fig. 146, I). Leurs bords sont garnis d'une rondelle annulaire de cuir, enduite de suif, qui rend la fermeture hermétique lorsque ces bords sont en contact. L'un des hémisphères porte un robinet qui se visse sur la machine pneumatique, et l'autre un anneau qui sert de poignée pour le saisir et le tirer. Tant que les hémisphères contiennent de l'air, on les sépare sans difficulté, car il y a équilibre entre la force élastique de l'air intérieur et la pression de l'atmosphère ; mais, une fois que le vide est fait, on ne peut plus les séparer sans un puissant effort, dans quelque position qu'on les tienne (fig. 146, II). Cela prouve, en outre, que la pression atmosphérique s'exerce en tous sens.

2. Il est dû à Otto de Guericke, bourgmestre de Magdebourg.

(I) (II)

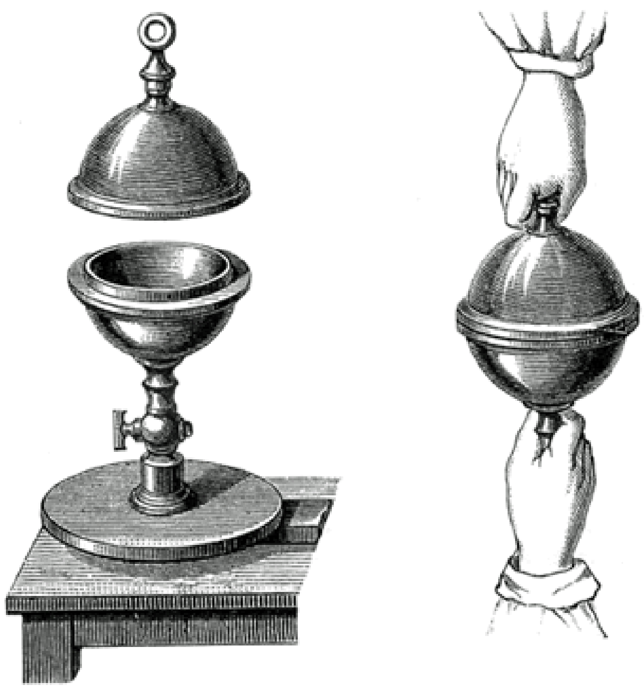
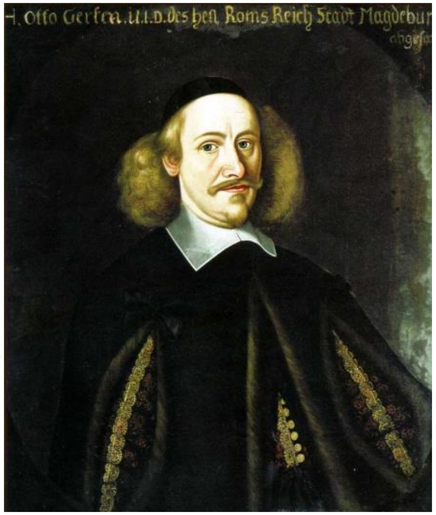


Fig. 146.



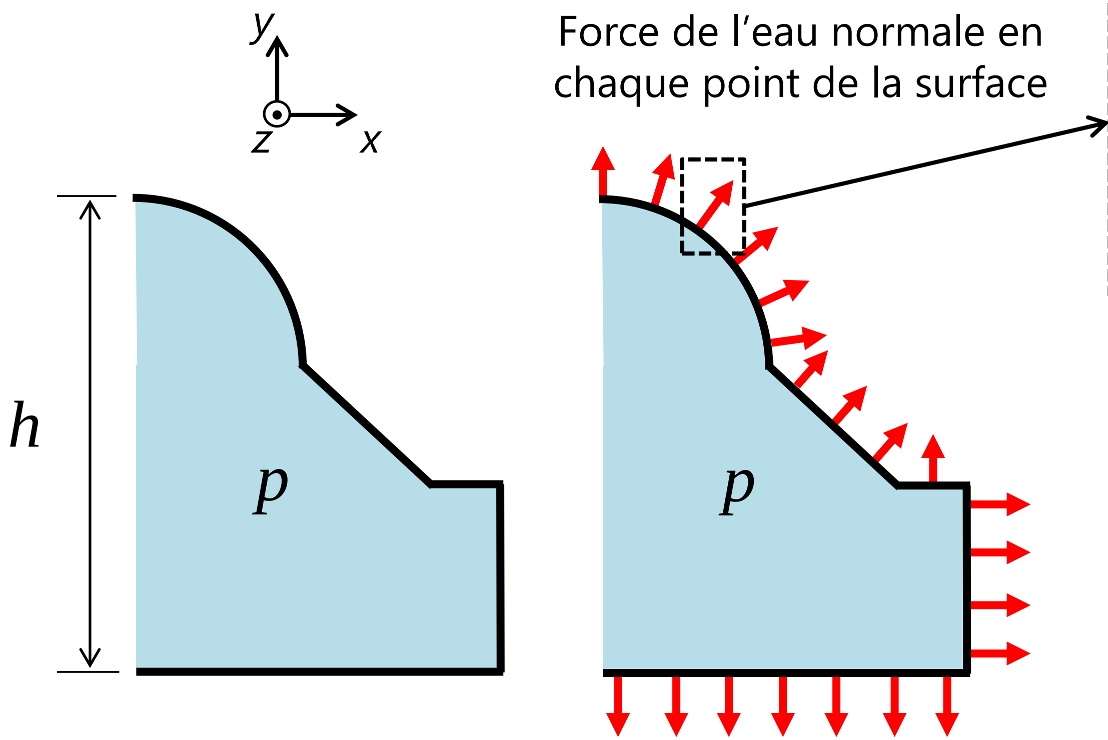
Otto von Guericke

Construit la première pompe à vide (1654).

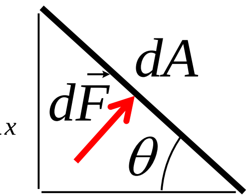
Quelle force doit-on exercer sur les hémisphères (diamètre d) pour les séparer si on suppose un vide parfait à l'intérieur?

Force exercée par un fluide de pression uniforme

La surface en noir a profondeur L constante selon z. Elle subit l'action d'un volume d'eau qui est à **pression p uniforme** dans tout le volume. Quelle force horizontale l'eau exerce-t-elle sur la surface ?



$$dA\sin\theta = dA_{\perp x}$$



$$dF_x = dF\sin\theta = pdA\sin\theta = pdA_{\perp x}$$

La composante en x de la force ne dépend que de l'aire perpendiculaire à l'axe x de la surface en contact avec l'eau.

Si p est constante, on peut intégrer tous les dF_x facilement :

$$F_x = \int dF_x = p\int dA_{\perp x} = pA_{\perp x}$$

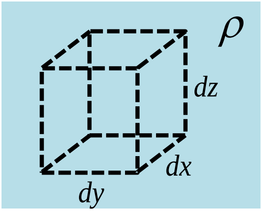
$$\boxed{F_x = pA_{\perp x} = phL}$$

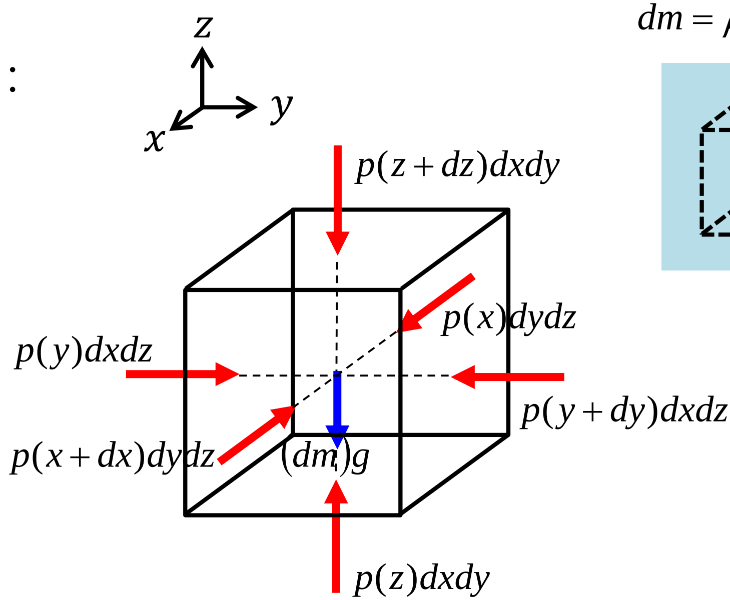
Principe de Pascal

Comment se comporte la pression dans un fluide soumis à la gravité ?

Stratégie : étudier l'équilibre statique d'un élément de fluide infinitésimal en tenant compte de son poids.

$$dm = \rho dV = \rho dxdydz$$





1. Selon x et y, la pression ne varie pas :

$$\sum F_x = p(x)dydz - p(x+dx)dydz = 0 \Rightarrow \boxed{p(x) = p(x+dx)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{p(y) = p(y+dy)}$$

2. Selon z, toutefois…

$$\sum F_z = p(z)dxdy - p(z+dz)dxdy - \rho g dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = -\rho g \xrightarrow{dz \to 0} \frac{dp}{dz} = -\rho g \xrightarrow{\text{Intégration}} \boxed{p(z) = -\rho g z + cste}$$

La pression augmente linéairement avec la profondeur dans le fluide!

Principe de Pascal

Dans un fluide soumis à un champ gravitationnel uniforme :

- La pression est la même partout à une profondeur donnée ;
- La pression augmente linéairement avec la profondeur.

Principe de Pascal

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

p_1, p_2 : pressions en deux points dans le fluide (Pa)
ρ : masse volumique du fluide (kg/m^3)
g : accélération gravitationnelle (m/s^2)
h : différence de profondeur entre les deux points (m)

La différence de profondeur h est mesurée **positivement dans le même sens que la gravité**.

Exemple

En supposant que la masse volumique de l'air ($\rho \approx$ 1,2 kg/m³) et que g sont constantes avec l'altitude, estimez l'épaisseur de l'atmosphère terrestre. La pression au niveau de la mer est de 101,3 kPa.

Point 1 : niveau de la mer ($p_1 =$ 101,3 kPa)
Point 2 : limite de l'atmosphère ($p_2 =$ 0 kPa)

$$p_2 = p_1 + \rho g h$$

$$0 = 101{,}3 \times 10^3 + 1{,}2 \cdot 9{,}81(-h)$$

$$\boxed{h \approx 8{,}6 \text{ km}}$$

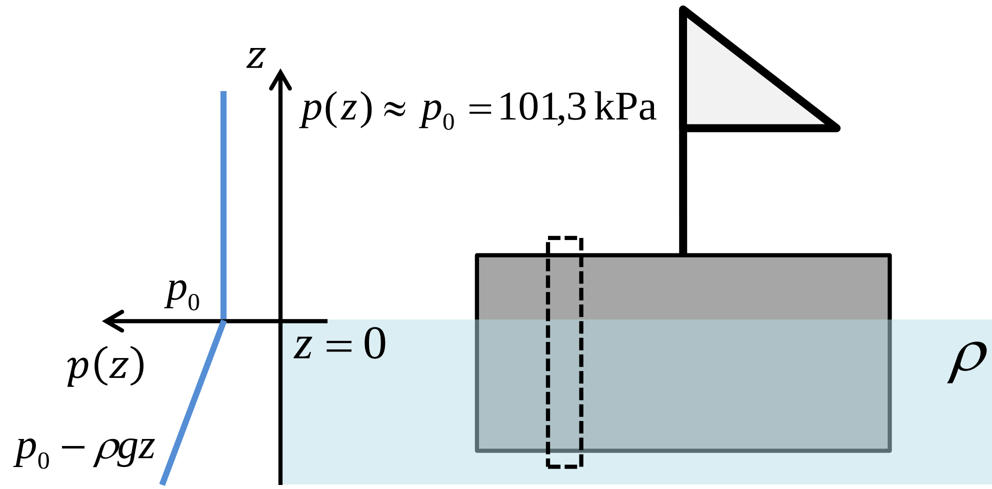
Comment se fait-il que ce bateau flotte ?

Poussée d'Archimède

Une conséquence naturelle du principe de Pascal

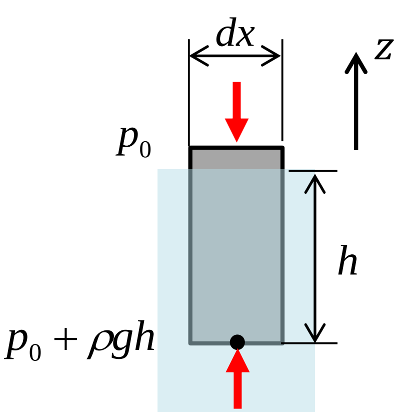
Ce bateau flotte sur l'eau, immobile. Sa largeur L dans la page est constante.
Quelle est la force verticale que l'air et l'eau exercent sur le bateau ?

Stratégie
Étudier les forces exercées par l'air et par l'eau sur une tranche verticale infinitésimale d'épaisseur dx, puis intégrer sur tout le bateau.



Selon le principe de Pascal, la pression à la profondeur h est :

$$p = p_0 + \rho g h$$



On a donc :

$$\begin{aligned} dF_z &= dF_{z,haut} + dF_{z,bas} \\ &= -p_0 L dx + (p_0 + \rho g h) L dx \\ &= \rho g \underbrace{h L dx} \end{aligned}$$

$$\boxed{dF_z = \rho g dV_{\text{eau déplacée}}}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer pour faire disparaître les différentielles.

Poussée d'Archimède

Un corps immergé dans un fluide subit une force verticale (opposée à la gravité) qui correspond au poids du fluide déplacé.

Poussée d'Archimède

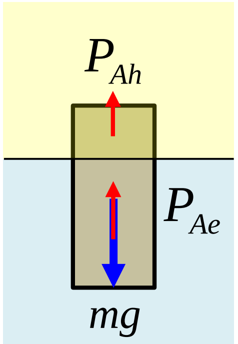
$$P_A = \rho g V$$

P_A : poussée d'Archimède, opposée à la gravité (N)
ρ : masse volumique du fluide déplacé (kg/m^3)
g : accélération gravitationnelle (m/s^2)
V : volume de fluide déplacé (m^3)

La poussée d'Archimède s'applique au **centre de gravité du volume de fluide déplacé**.

Exemple

Un bouchon de liège de volume V est immobile, immergé entre une couche d'huile ($\rho_h = 0{,}92$ kg/m³) et une couche d'eau ($\rho_e = 1{,}00$ kg/m³) de telle sorte que 75 % de son volume est dans l'eau. Quelle est la masse volumique ρ du liège ?



$$mg = \rho g V$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_{Ah} + P_{Ae} - mg = \rho_h g(0{,}25V) + \rho_e g(0{,}75V) - \rho g V = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 0{,}25\rho_h + 0{,}75\rho_e = 0{,}980 \text{ kg/m}^3}$$

Quels facteurs influencent la force exercée par l’eau sur la paroi du barrage hydroélectrique ?

Force hydrostatique sur une paroi

Pour déterminer la **force hydrostatique** qu'un fluide exerce sur une paroi d'aire A, on additionne toutes les forces exercées en chaque point immergé de la paroi.

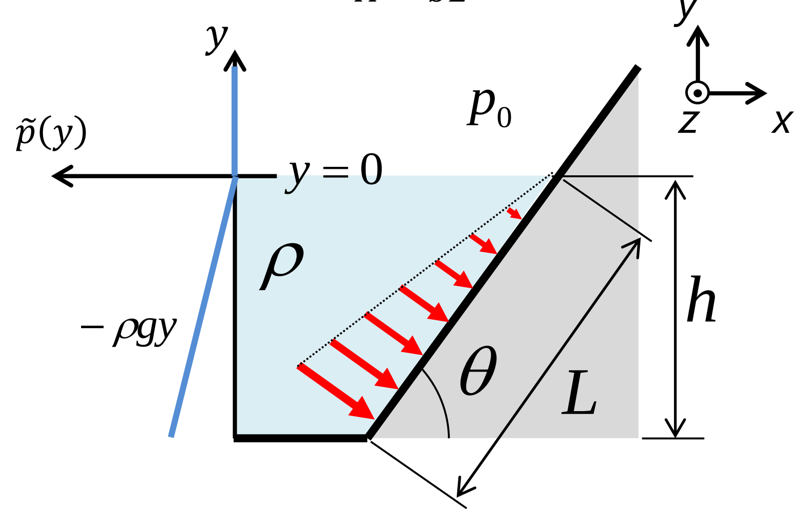
La pression atmosphérique p_0 s'applique sur tous les côtés d'un objet et la force résultante associée est toujours nulle. (La pression p_0 seule ne peut pas faire accélérer un objet.)

C'est pourquoi le calcul de la force qu'exerce un fluide sur une paroi fait intervenir la **pression manométrique** :

$\tilde{p} = p - p_0 = \rho g h.$

b : largeur de la paroi selon z

$A = bL$



Module de la force infinitésimale exercée par l'eau sur la paroi à une hauteur y :

$$dF = \tilde{p}(y)dA = (-\rho g y)(b dL) = -\frac{\rho g b}{\sin\theta} y dy$$

Résultante de toutes les forces infinitésimales :

$$F = \int_{-h}^{0} -\frac{\rho g b}{\sin\theta} y dy = \frac{\rho g b}{\sin\theta}\frac{h^2}{2} = \rho g \frac{h}{2} bL$$

Force hydrostatique sur une paroi

$$y = 0$$

h : hauteur du fluide (m)

A : aire de la paroi <u>en contact avec le fluide</u> (m^2)

Centre de poussée d'un fluide sur une paroi

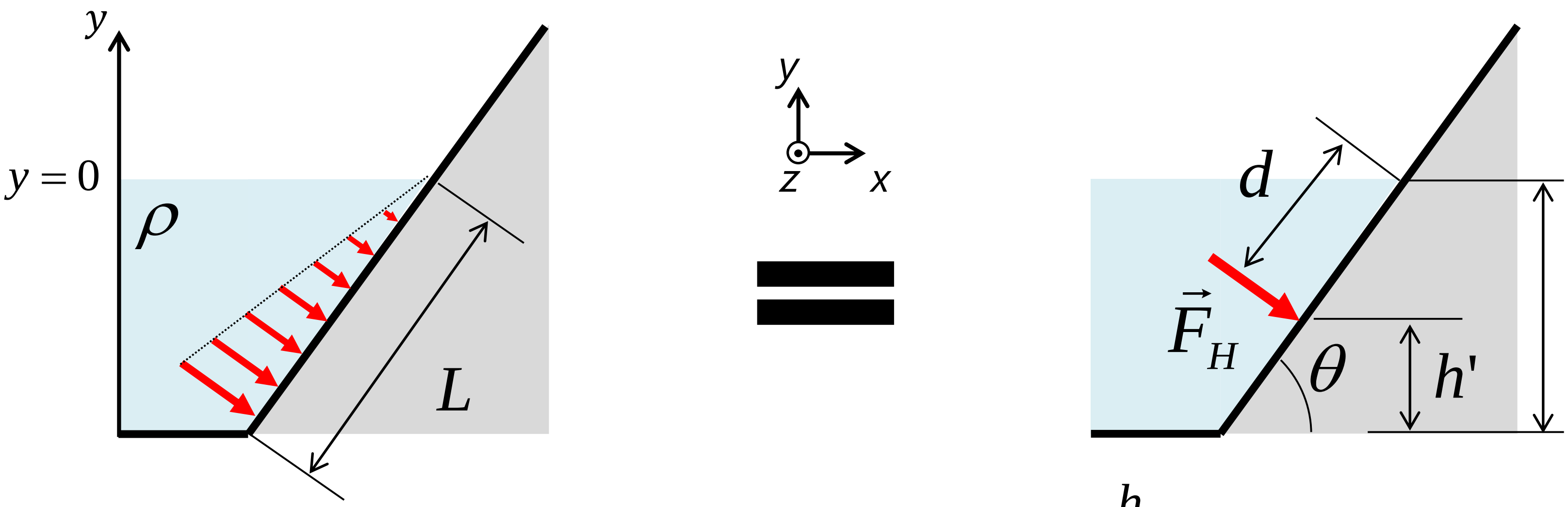
On cherche à remplacer l'ensemble des forces réparties du schéma de gauche par un système force-couple équivalent composé d'une seule force (la force hydrostatique) et d'un couple nul.

Le point d'application de cette force équivalente est appelé **centre de poussée**.

h : hauteur du fluide en contact avec la paroi

d : distance entre le centre de poussée et la surface du fluide

h' : hauteur du centre de poussée à partir du bas de la paroi

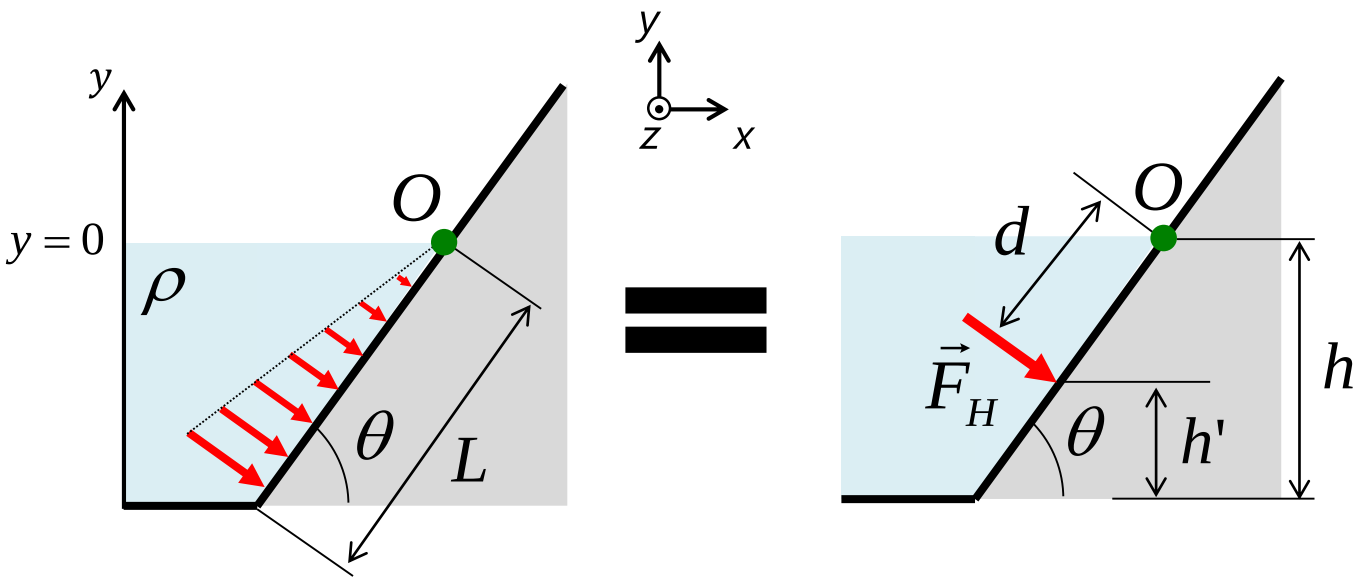


On a déjà calculé la norme de la force équivalente : $F_H = \rho g \dfrac{h}{2} A$

Cependant, on ne sait pas encore où cette force s'applique sur la paroi.

En quel point de la paroi s'applique la force de poussée du fluide ?

Centre de poussée d'un fluide sur une paroi



Rappels

$$dF = -\frac{\rho g b}{\sin\theta} y dy$$

$$F = \rho g \frac{h}{2} A$$

On choisit le point O à la surface du fluide comme point de référence pour le calcul des moments.

Moment créé par une force infinitésimale dF :

$$dM_O = -\frac{y}{\sin\theta} dF = \frac{\rho g b}{\sin^2\theta} y^2 dy$$

Moment total :

$$M_O = \int_{-h}^{0} \frac{\rho g b}{\sin^2\theta} y^2 dy = \frac{\rho g b}{\sin^2\theta}\frac{h^3}{3} = \rho g L \frac{h}{3} A$$

Moment créé par la force équivalente F :

$$M_O = F_H d = \rho g d \frac{h}{2} A$$

Les deux moments doivent être égaux !

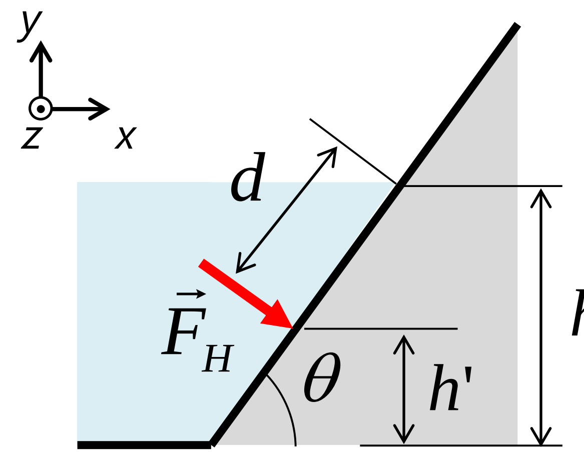
Centre de poussée d'un fluide sur une paroi

En quel point de la paroi s'applique la force de poussée du fluide ?

Équivalence des moments :

$$M_O = \rho g L \frac{h}{3} A = \rho g d \frac{h}{2} A$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{2}{3} L \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = \frac{h}{3}}$$



La force hydrostatique s'applique au tiers de la hauteur de la paroi en contact avec le fluide.

Force hydrostatique et centre de poussée

$$F_H = \rho g \frac{h}{2} A \qquad h' = \frac{h}{3}$$

F_H : Force hydrostatique perpendiculaire à la paroi (N)

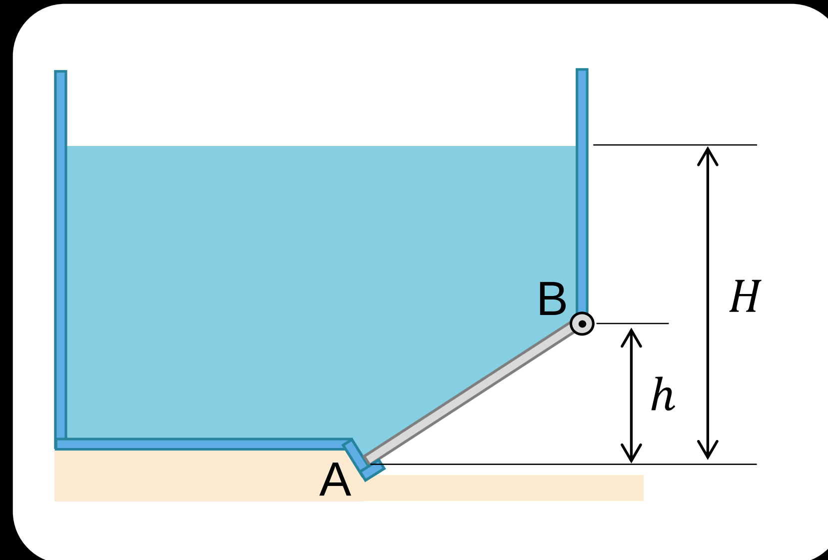
h : hauteur du fluide <u>en contact avec la paroi</u> (m)

A : aire de la paroi <u>en contact avec le fluide</u> (m²)

Ces résultats ne tiennent compte que des effets du fluide vis-à-vis la paroi. S'il y a du fluide au-dessus de la paroi, il faut en tenir compte séparément.

Quiz

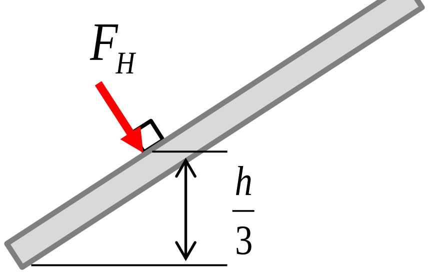
Un réservoir d'eau possède une vanne AB de surface A qui peut être ouverte pour le vider.



Lequel des schémas représente correctement la force de l'eau sur la vanne ?

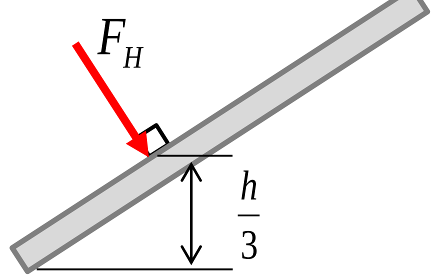
A : L'eau au-dessus n'affecte pas la paroi.

$$F_H = \rho g \frac{h}{2} A$$



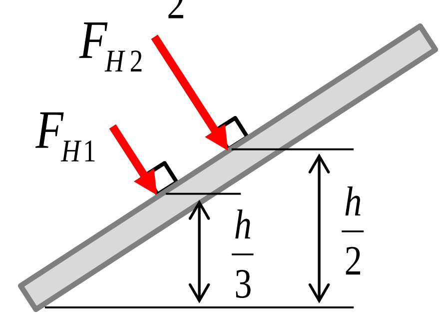
B : La force est plus grande, car la hauteur de fluide est plus élevée.

$$F_H = \rho g \frac{H}{2} A$$

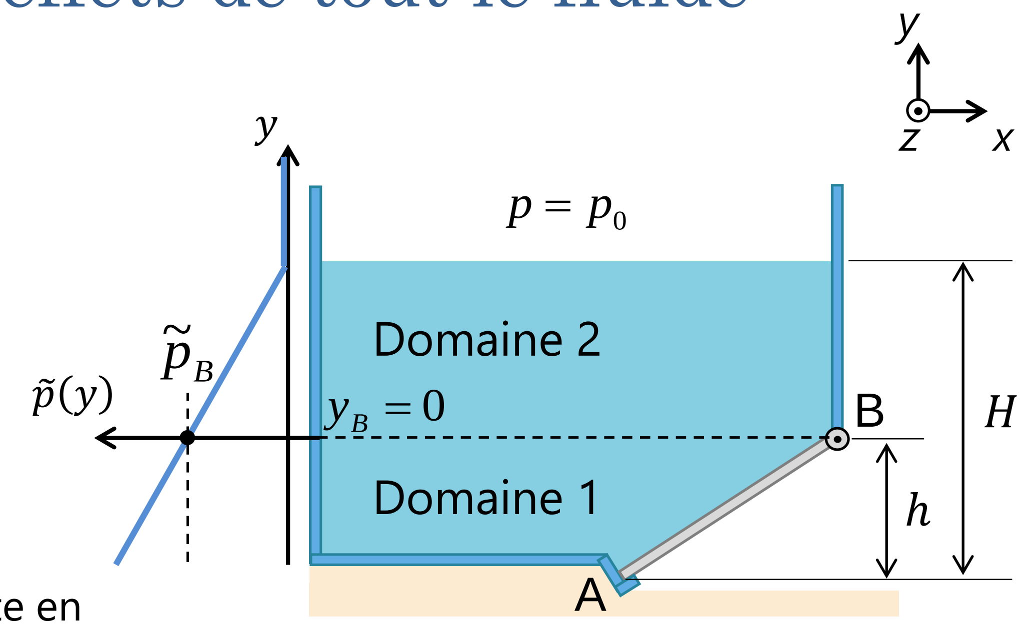


C : Il y a deux forces, une pour l'eau au-dessus et une pour l'eau vis-à-vis.

$$F_{H1} = \rho g \frac{h}{2} A \qquad F_{H2} = \ldots$$



Considérer les effets de tout le fluide



Principe de Pascal

La pression manométrique dans le domaine 1 (fluide vis-à-vis la paroi) est :

$$\tilde{p}(y) = \tilde{p}_B - \rho g y$$

Par rapport au cas considéré précédemment, la pression uniforme

$$\tilde{p}_B = \rho g (H - h)$$

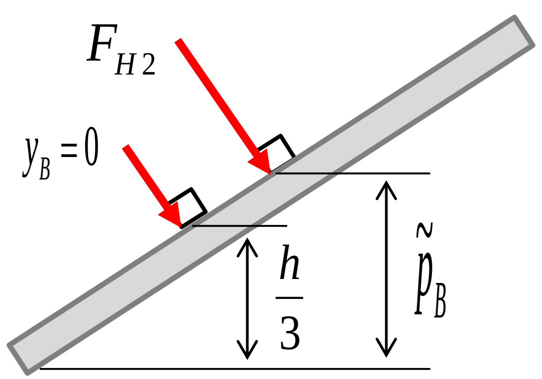
s'ajoute à la pression $-\rho g y$ qui augmente en descendant de B vers A dans le domaine 1.

Deux forces hydrostatiques

On ajoute une 2ᵉ force associée à la pression supplémentaire uniforme $\tilde{p}_B$ qui s'exerce sur la paroi, dû au poids du fluide du domaine 2.

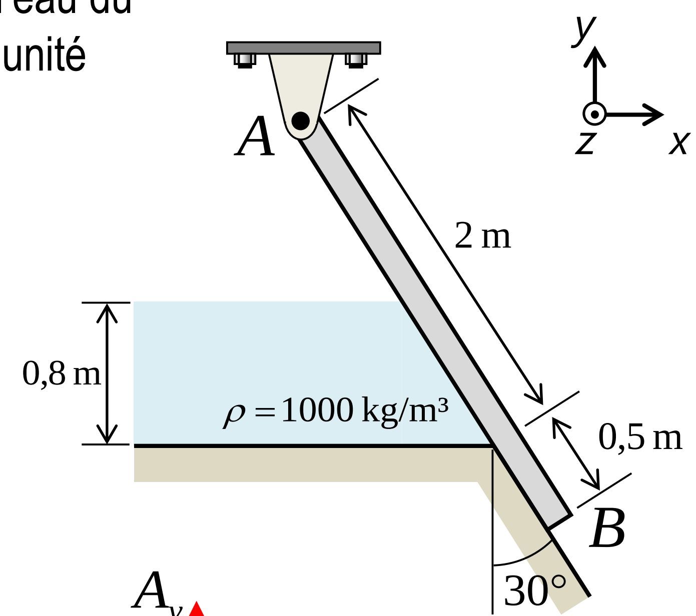
$$F_{H1} = \rho g \frac{h}{2} A$$ Fluide du domaine 1

$$F_{H2} = \tilde{p}_B A = \rho g (H - h) A$$ Fluide du domaine 2



Exemple 3 – Vanne d'un barrage

La vanne AB d'un réservoir est conçue pour s'ouvrir dès que l'eau du réservoir atteint une hauteur de 0,8 m. Quel est la masse par unité de longueur horizontale (selon *z*) de la vanne ?

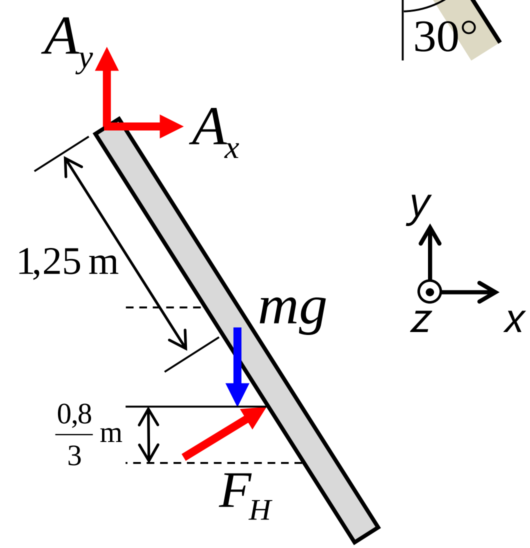


Stratégie

1. La force de l'eau est tout juste suffisante pour ouvrir la vanne : l'équilibre statique s'applique. On fait le DCL de la vanne ;
2. Déterminer le module et le point d'application de la force que l'eau exerce sur la paroi de longueur horizontale L arbitraire ;
3. Résoudre les équations de l'équilibre statique pour trouver la masse par unité de longueur (m/L) de la vanne.

DCL de la vanne

- Le poids de la vanne s'applique à son centre géométrique (hypothèse : corps homogène) ;
- A est un pivot : il y a des forces selon x et y ;
- La force de l'eau s'applique au tiers de la hauteur d'eau et est perpendiculaire à la vanne (pression) ;
- Il n'y a pas de force normale du sol sur la vanne, car elle ne s'appuie plus au sol lorsqu'elle est sur le point de s'ouvrir.

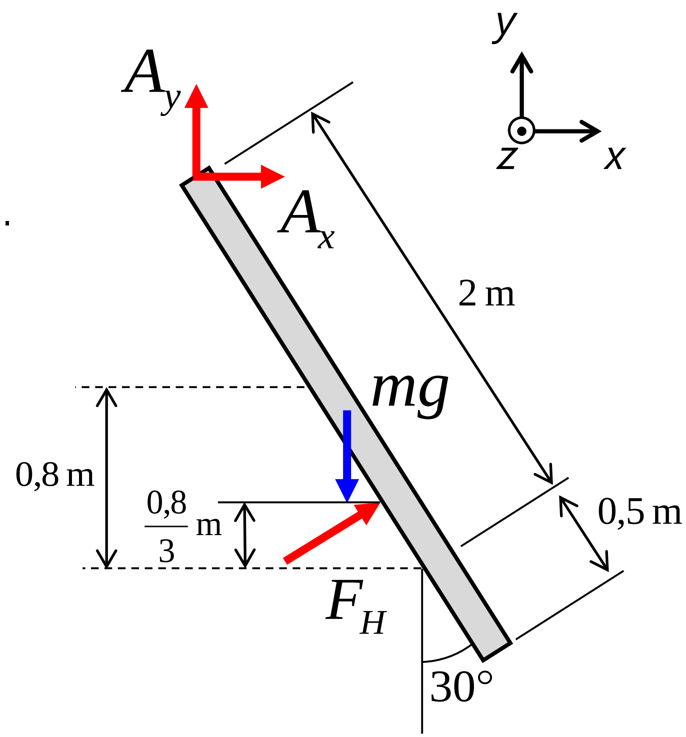


Exemple 3 – Vanne d'un barrage

Force de l'eau sur la vanne

$$F_H = \rho g \frac{h}{2} A$$

où $A = \dfrac{0{,}8}{\cos 30°} L$ est l'aire de la vanne en contact avec l'eau.



Équilibre statique

On ne s'intéresse pas aux réactions en A : on fait donc une somme des moments par rapport au point A.

$$\sum M_A = -1{,}25 mg \sin 30° + \left(2 - \frac{0{,}8/3}{\cos 30°}\right) F_H = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}25 mg \sin 30° = 1{,}692 \rho g \frac{h}{2}\left(\frac{0{,}8}{\cos 30°} L\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{L} = \frac{1{,}692 \rho \frac{h}{2} \frac{0{,}8}{\cos 30°}}{1{,}25 \sin 30°} = \frac{1{,}692 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}8}{2} \cdot \frac{0{,}8}{\cos 30°}}{1{,}25 \sin 30°} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{m}{L} = 1000 \text{ kg/m}}$$

Synthèse du cours

Pression exercée par une force $p = \dfrac{F_n}{A}$

La pression dans un fluide est isotrope (la même dans toutes les directions).

Pression manométrique $\tilde{p} = p - p_0$

Différence entre la pression absolue et la pression atmosphérique p_0.

Principe de Pascal $p_2 = p_1 + \rho g h$

La pression augmente linéairement avec la profondeur.

Poussée d'Archimède $P_A = \rho g V$

Un corps submergé subit une force opposée à la gravité et proportionnelle au volume de fluide déplacé.

Force hydrostatique sur une paroi

$$F_H = \rho g \frac{h}{2} A$$

h : hauteur du fluide

A : aire de la paroi en contact avec le fluide

F_H s'applique au **centre de poussée** situé **au tiers de la hauteur de fluide**.