– PHS1101 –
Mécanique pour ingénieurs

Cours 3

Jérémie Villeneuve
Département de génie physique

Force, couple et moment

- Une force $\vec{F}$ tend à induire une translation selon sa ligne d'action.
- Une force peut induire une rotation autour d'un point O si elle génère un moment de force $\vec{M}_O$.

$$\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

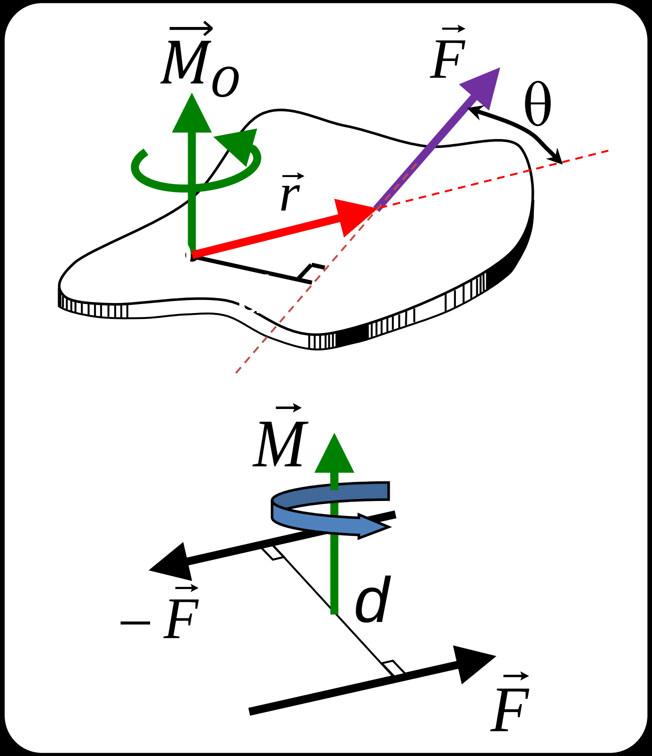
Le moment d'une force est un vecteur lié.

- On appelle couple deux forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ de même norme, de même direction et de sens opposé.

Le moment d'un couple est un vecteur libre perpendiculaire au plan des deux forces.

$$M = Fd$$

Un couple tend à induire une rotation sans translation.



Système force-couple équivalent

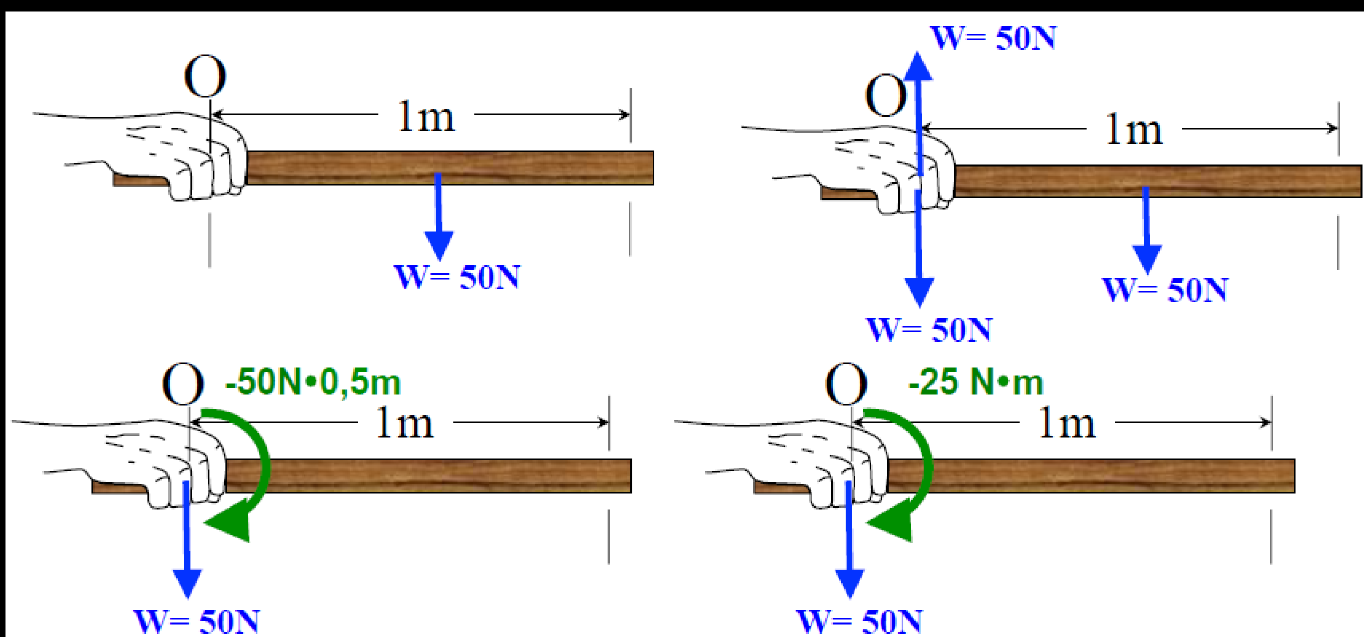
Remplacer un ensemble de forces et de couples par une seule force $\vec{R}$ et un seul couple $\vec{M}_O^R$ équivalents.

Force équivalente

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

Couple équivalent

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i$$



En déplaçant la force W hors de sa ligne d'action vers le point O, il faut ajouter un couple (égal au moment de la force W par rapport à O).

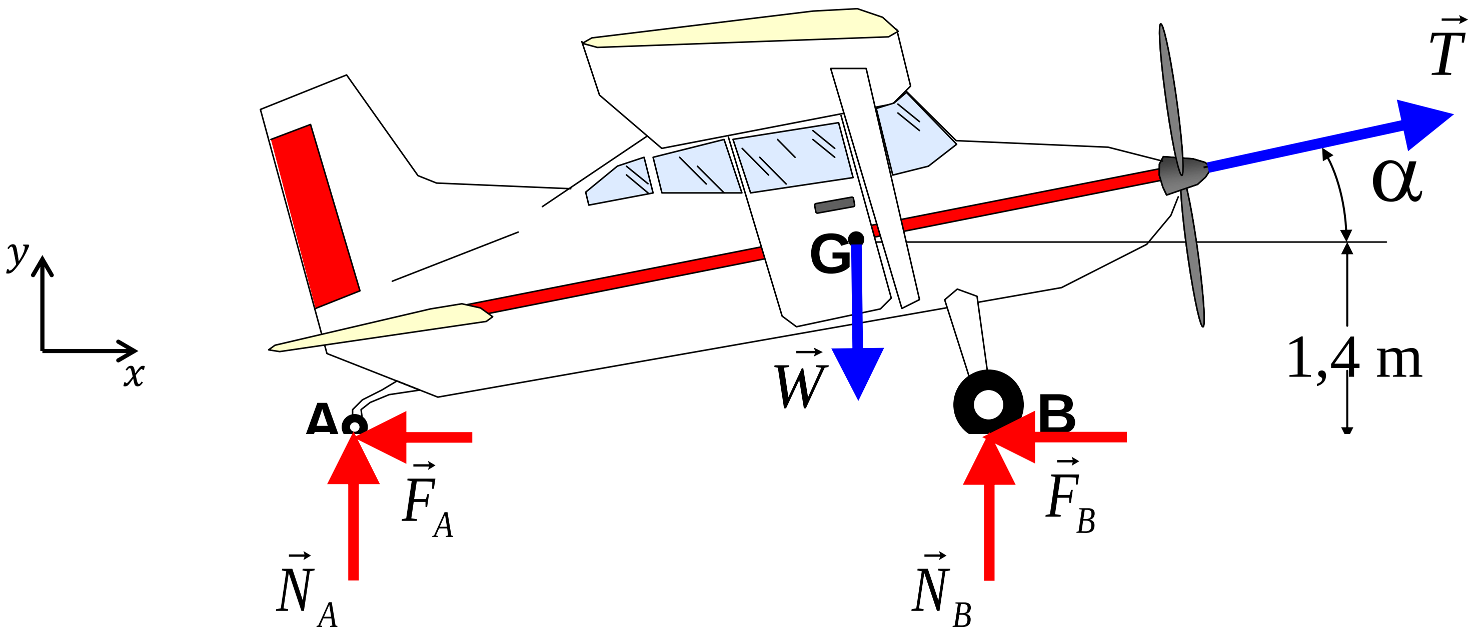
Plan de la semaine

- **Diagramme du corps libre (DCL) et équilibre statique**
- Réactions aux appuis
- Applications aux structures
  - Systèmes de membrures
  - Membrure à deux forces

Diagramme du corps libre (DCL)

Diagramme illustrant toutes les forces auquel un corps est soumis.

DCL de l'avion immobile avec l'hélice en marche
(On considère que le sol génère du frottement.)



Forces de réaction (en rouge)

Forces qui apparaissent aux appuis ou à la jonction entre deux structures.
Ici : appuis en A et en B.

Comment construire un DCL ?

1 – Identifier le système à étudier et l'isoler ;
- Éliminer tout élément ne faisant pas partie du système ;

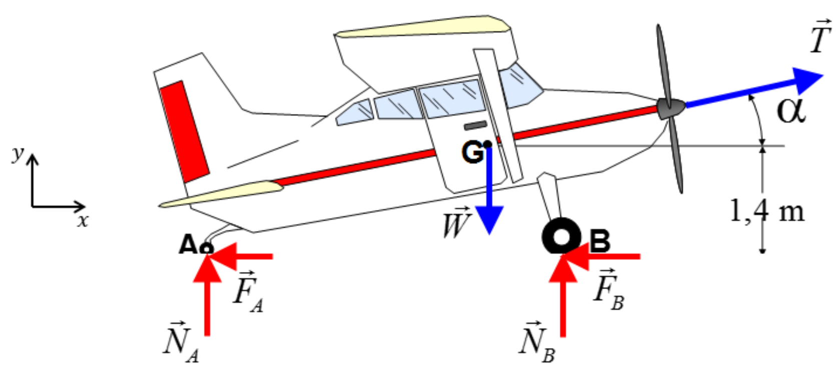
2 – Indiquer les forces actives dues à des éléments externes au système :
- Force gravitationnelle (poids) ;
- Forces externes (ex : personne ou moteur qui tire/pousse).

3 – Dessiner toutes les forces et/ou couples de réaction qui agissent sur le système, dus à des éléments externes au système :
- Remplacer les cordes tendues et les ressorts par les forces appropriées ;
- Remplacer chaque appui/liaison par les forces (ex : normale, frottement entre deux surfaces) et les couples de réaction adéquats.

4 – Identifier clairement chaque force et chaque couple par un nom distinct ;

5 – Choisir un système d'axes approprié et l'indiquer <u>clairement</u>.

Facultatif, mais utile :
- Indiquer les distances et les angles ;
- Nommer les points importants du schéma ;
- Indiquer la vitesse de certains éléments ;
- Indiquer les grandeurs des forces/moments si elles sont connues.



Équilibre statique

(1re loi de Newton)

Conditions pour qu'un solide soit à l'équilibre statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$ pour tout point O de l'espace

Pour un corps à l'équilibre statique :

- L'accélération de son centre de masse (CM) est nulle (translation).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

- Son accélération angulaire est nulle (rotation).
  (**I** est le moment d'inertie : l'équivalent de la masse en rotation)

$$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$$

Nature vectorielle des conditions d'équilibre statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

pour tout point O de l'espace

Somme des forces est nulle.

Somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle.

3 équations scalaires

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}}$$

$$\sum F_z = 0$$

3 équations scalaires

$$\sum M_{Ox} = 0$$

$$\sum M_{Oy} = 0$$

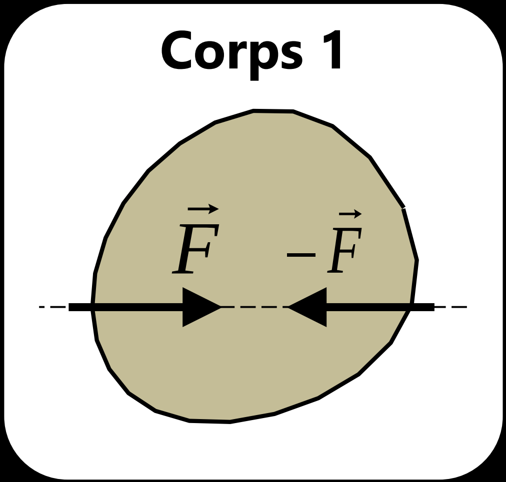
$$\boxed{\sum M_{Oz} = 0}$$

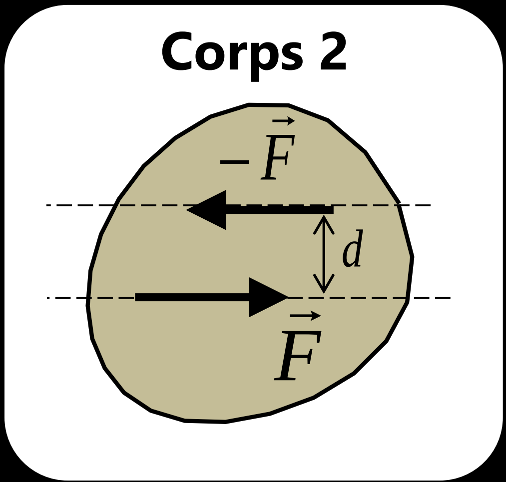
En 2D : 3 équations à résoudre

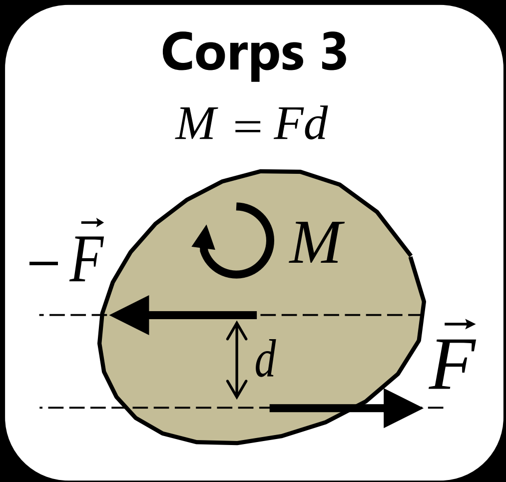
En 3D : 6 équations à résoudre

Quiz #1

Considérez les corps rigides suivants soumis à différents ensembles de forces et de couples.







Quels corps sont à l'équilibre statique ?

A : Corps 1

B : Corps 1 et 3

C : Corps 2 et 3

D : Corps 1, 2 et 3

Une résultante nulle ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) n'est pas une condition suffisante pour être à l'équilibre statique.

Équilibre statique
ne veut pas toujours dire immobile

La très grande majorité du temps, on utilise l'équilibre statique pour décrire des structures immobiles.

Par contre, les corps suivants sont aussi à l'équilibre statique :

- Un corps qui se déplace à vitesse constante sans changer de direction.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \text{constant}$$

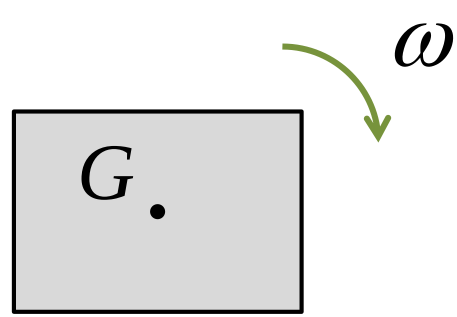
Vecteur vitesse du centre de masse

- Un corps qui tourne à vitesse angulaire constante autour de son CM.

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\omega} = \text{constant}$$

pour tout point O de l'espace

Vecteur vitesse angulaire



Felix et l'équilibre statique

Saut en chute libre de Felix Baumgartner.

14 octobre 2012
Nouveau-Mexique
États-Unis

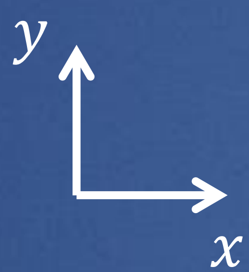
Altitude : 39 km

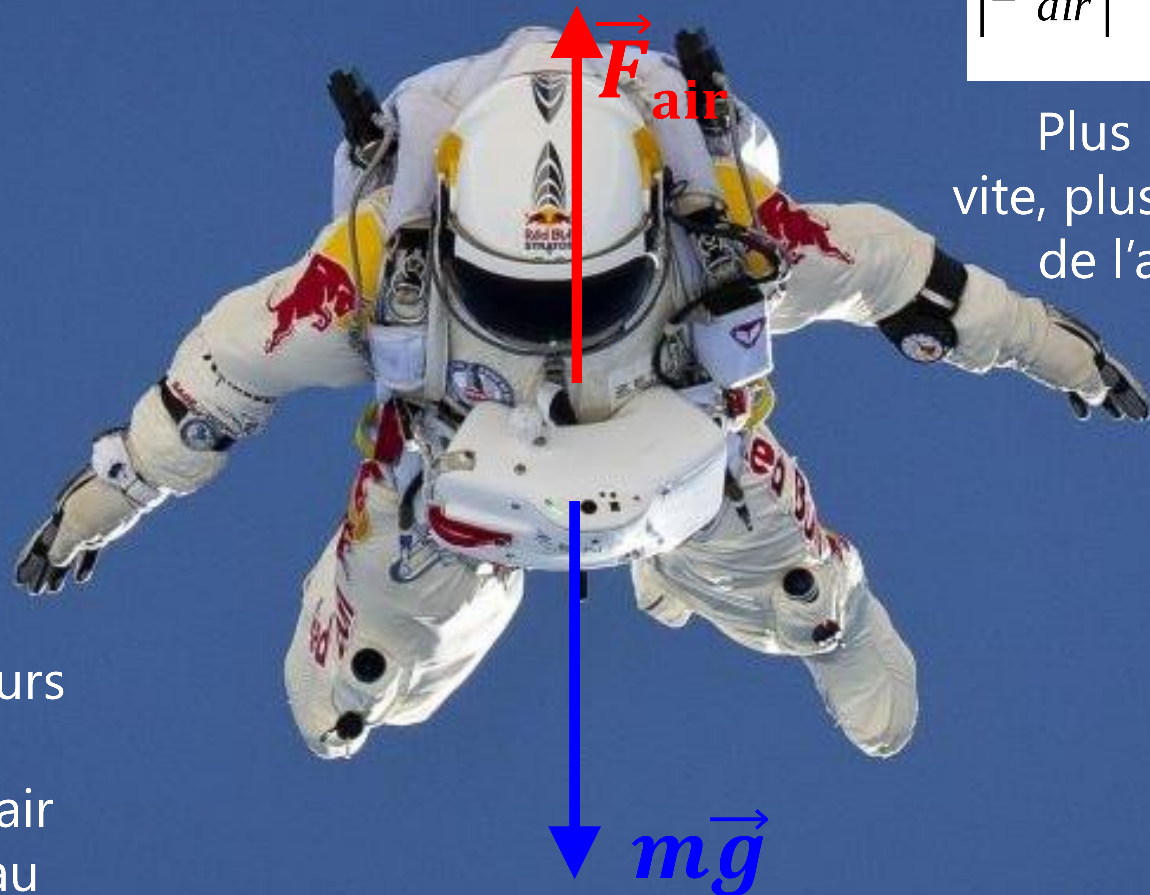
Vitesse maximale : 1342 km/h !

DCL de Felix

$$\left|\vec{F}_{air}\right| = \frac{C_x \rho S v^2}{2}$$

Plus Felix descend vite, plus la résistance de l'air augmente!





À un certain moment au cours de la chute, la résistance de l'air devient égale au poids de Félix.

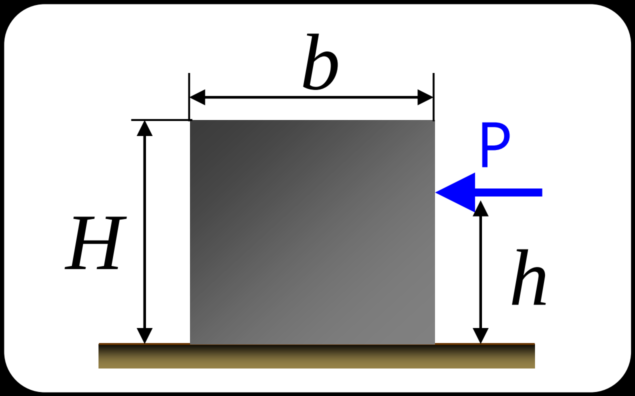
$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

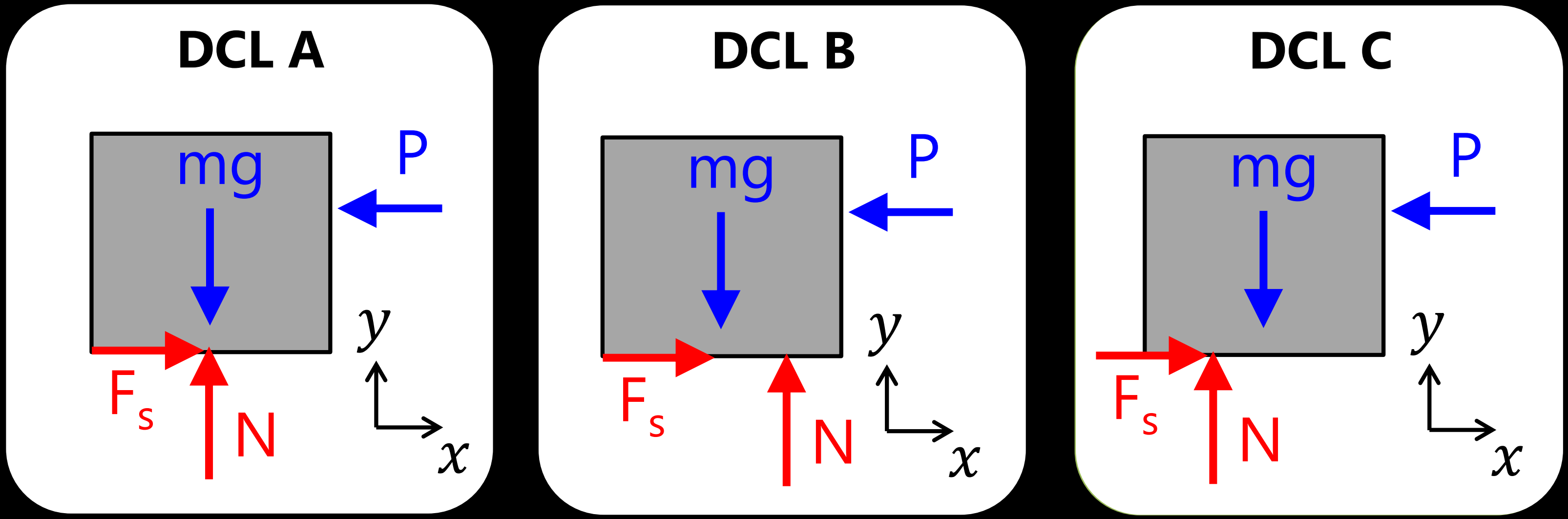
Sa vitesse devient constante (1re loi de Newton).
Il atteint sa vitesse maximale !

3m45s : https://www.youtube.com/watch?v=vvbN-cWe0A0

Quiz #2

On pousse horizontalement sur une armoire qui repose sur un sol rugueux (imaginez du tapis…). À cause du frottement, l'armoire demeure immobile.



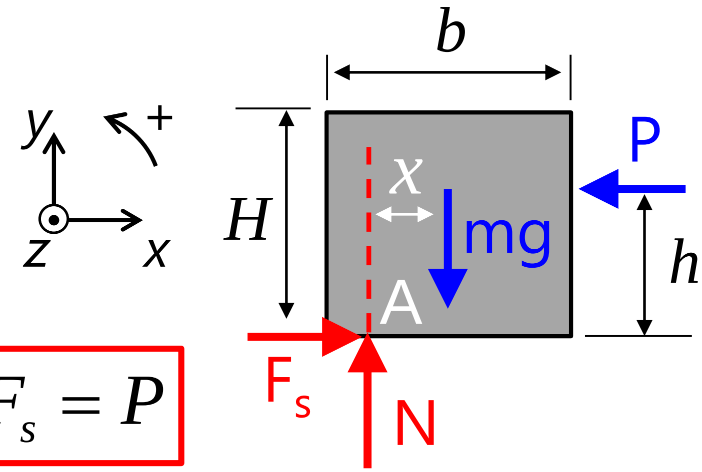


Lequel des DCL ci-dessus est correct ?

La normale ne s'applique pas toujours directement sous le poids (centre de masse) d'un objet.

Exemple 1 – Armoire au repos

Afin de maintenir l'armoire immobile lorsqu'on la pousse avec la force P, la normale N se déplace horizontalement et s'applique au point A pour générer un moment.



Équilibre en translation

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = F_s - P = 0 \Rightarrow \boxed{F_s = P} \\ \sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg} \end{cases}$$

Équilibre en rotation (2 choix possibles de point de référence, les deux équations sont équivalentes)

Choix 1 (CM) : $\sum M_{CM,z} = P(h - \frac{H}{2}) + F_s \frac{H}{2} - Nx = 0 \Rightarrow$

ou

Choix 2 (A) : $\sum M_{A,z} = Ph - mgx = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{P}{mg}h}$$

On remarque que le choix 2 rend la résolution plus facile, car les moments de N et F_s sont nuls par rapport à A.

Si on pousse trop fort ou trop haut sur l'armoire, alors le point A n'est plus sous la boîte ($x > b/2$) et elle bascule !

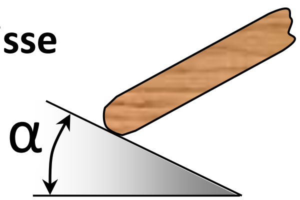
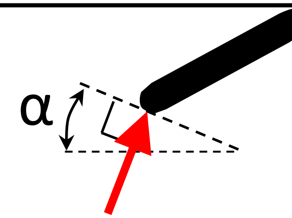
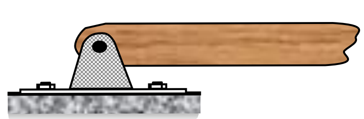
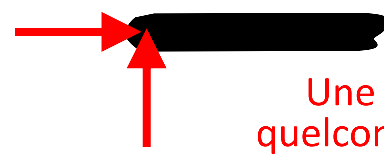
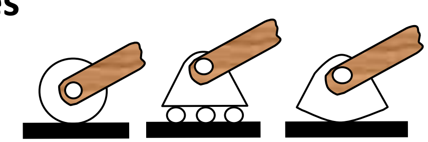
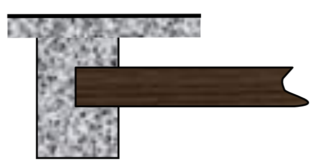
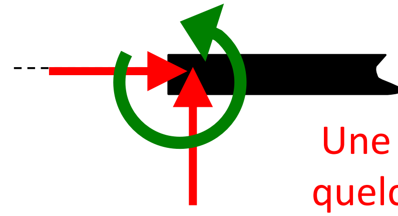
Plan de la semaine

- Révision
  - Diagramme du corps libre (DCL)
  - Équilibre statique (1re loi de Newton)
- **Réactions aux appuis**
- Applications aux structures
  - Systèmes de membrures
  - Membrure à deux forces

Réactions aux appuis (sans frottement)

Principe : pour chaque mouvement empêché, il y a une réaction.

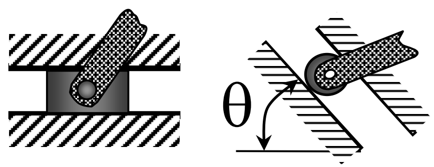
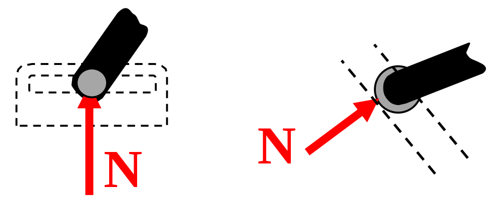
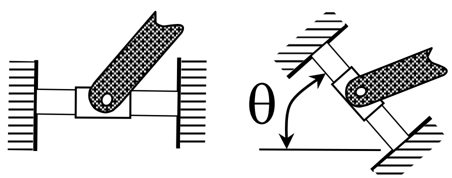
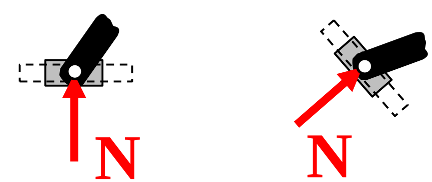
(Translation → force, Rotation → couple)

Appuis		Réactions	
Appui sur une surface lisse (contact ponctuel)			1 inconnue Une force normale (⊥)
Liaison pivot			2 inconnues Une force d'orientation quelconque (2 composantes)
Rouleaux et billes (pivot glissant)			1 inconnue Une force normale (⊥)
Encastrement			3 inconnues Une force d'orientation quelconque **+** Un couple

Réactions aux appuis (sans frottement)

Principe : pour chaque mouvement empêché, il y a une réaction.

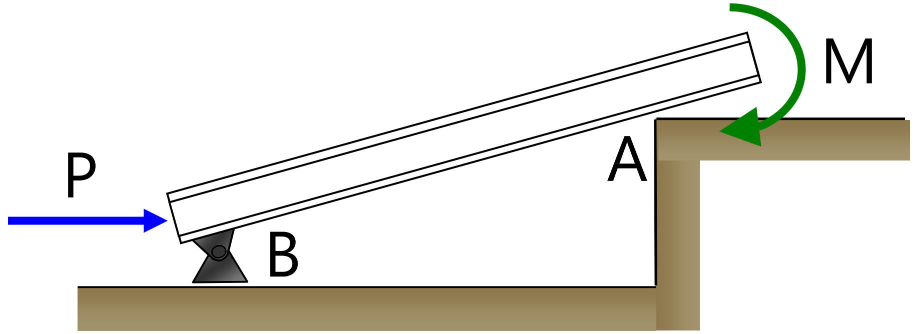
(Translation → force, Rotation → couple)

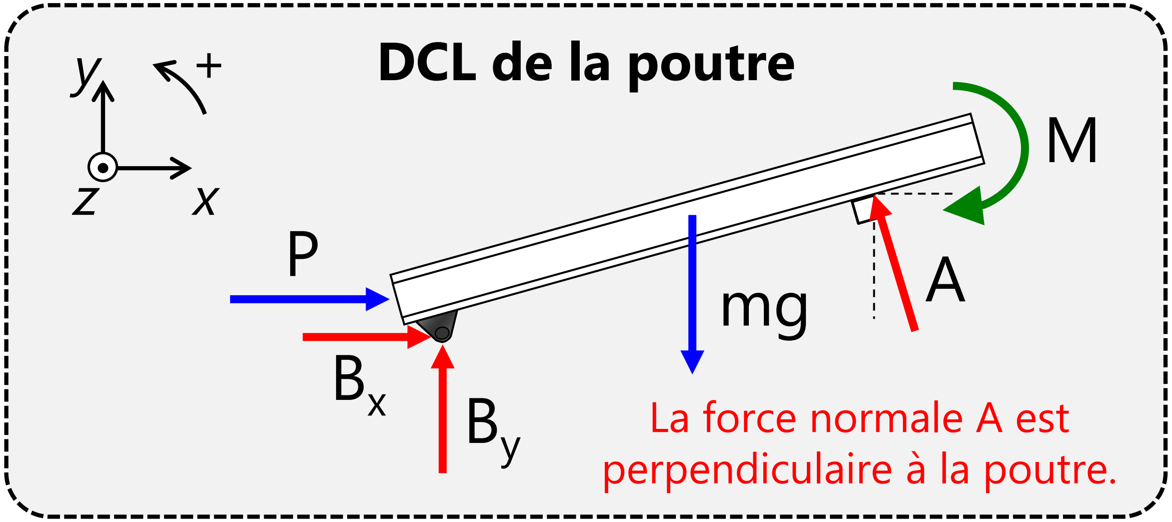
Appuis	Réactions
Guide coulissant Une des parois du guide exerce une normale. 	 1 inconnue
Manchon La surface de la tige qui guide le manchon exerce une normale sur le manchon. 	

Pour ces appuis, le sens de la normale dépend de la paroi sur laquelle s'appui l'objet guidé. Si le contexte ne permet de savoir le sens de la normale, posez-la dans un sens arbitraire. Le signe de la réponse vous dira si ce sens était correct.

DCL avec appuis/liaisons – Exemple 1

La poutre a une masse m et est homogène (masse répartie uniformément).
La poutre est soumise à une force P et un couple M externes.





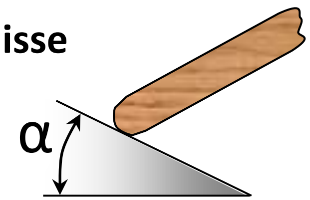
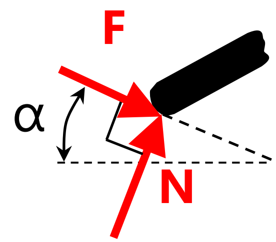
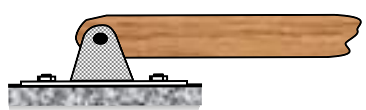
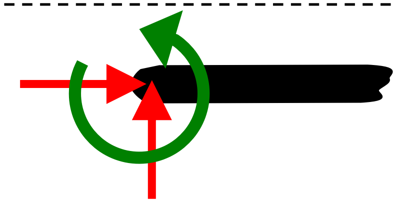
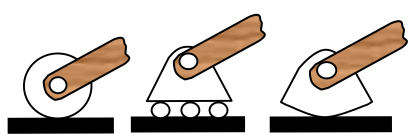
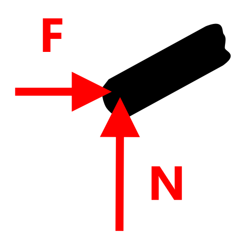
Vous devez reconnaître les représentations schématiques de chaque type d'appui/liaison.

Si vous oubliez quelles réactions ajouter, demandez-vous quels sont les mouvements que l'appui/liaison contraint, indépendamment des autres appuis.

Réactions aux appuis (avec frottement)

Le **frottement** est toujours :

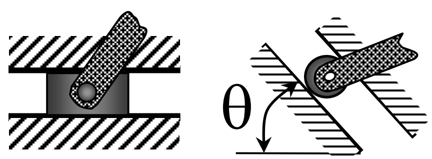
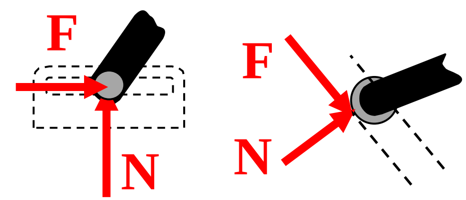
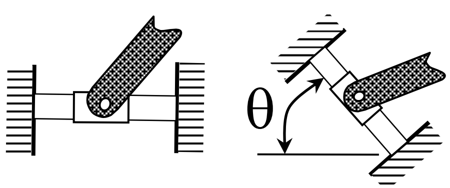
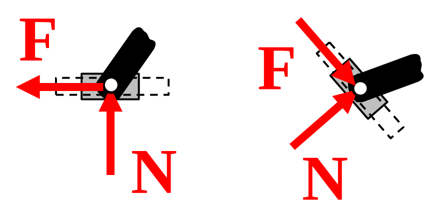
- **Parallèle aux surfaces en contact** ;
- **Opposé au mouvement imminent**. Si le sens du mouvement imminent ne peut pas être déduit de l'énoncé, posez le frottement dans un sens arbitraire et le signe de votre réponse vous dira si le sens choisi était le bon.

Appuis	Réactions
Appui sur une surface lisse (contact ponctuel) 	 2 inconnues
Pivot avec frottement (ex : pivot rouillé) 	 3 inconnues (2 forces + 1 couple)
Rouleaux et billes (pivot glissant) 	 2 inconnues

Réactions aux appuis (avec frottement)

Le **frottement** est toujours :

- **Parallèle aux surfaces en contact** ;
- **Opposé au mouvement imminent**. Si le sens du mouvement imminent ne peut pas être déduit de l'énoncé, posez le frottement dans un sens arbitraire et le signe de votre réponse vous dira si le sens choisi était le bon.

Appuis	Réactions
Guide coulissant Une des parois du guide exerce une normale. 	 2 inconnues Le sens de la normale dépend de la paroi sur laquelle s'appui l'objet guidé. Si le contexte ne permet de savoir le sens de la normale, posez-la dans un sens arbitraire.
Manchon La surface de la tige qui guide le manchon exerce une normale sur le manchon. 	

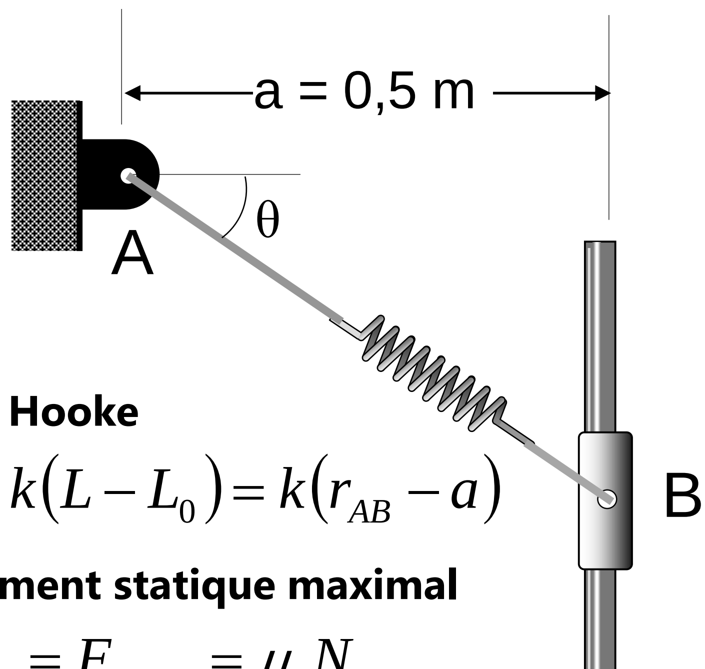
DCL avec appuis/liaisons – Exemple 2

Le manchon B de masse m est immobile, mais sur le point de monter.

La longueur naturelle du ressort est a.

Information à déduire

- Le ressort est étiré et il tire sur le manchon en direction de A ;
- Le manchon est sur le point de bouger vers le haut : la force de frottement statique est maximale et dirigée vers le bas.

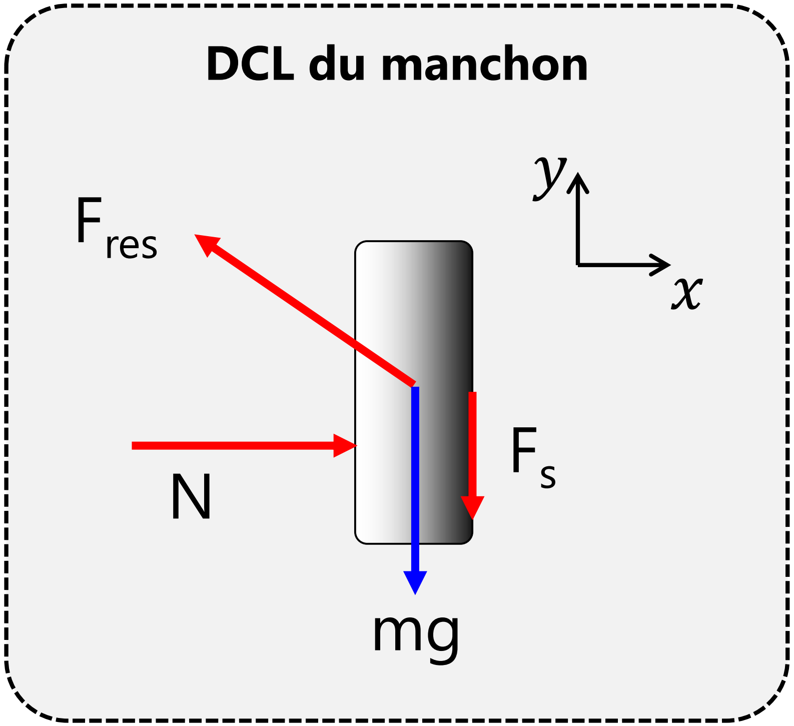


Loi de Hooke

$$F_{res} = k\left(L - L_0\right) = k\left(r_{AB} - a\right)$$

Frottement statique maximal

$$F_s = F_{s,\max} = \mu_s N$$

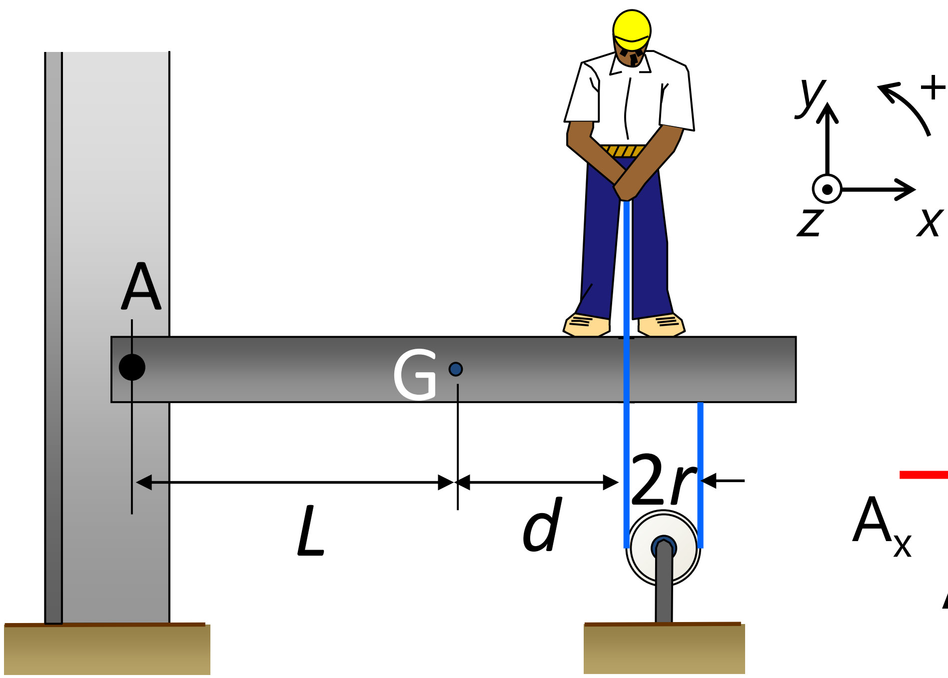


DCL avec appuis/liaisons – Exemple 3

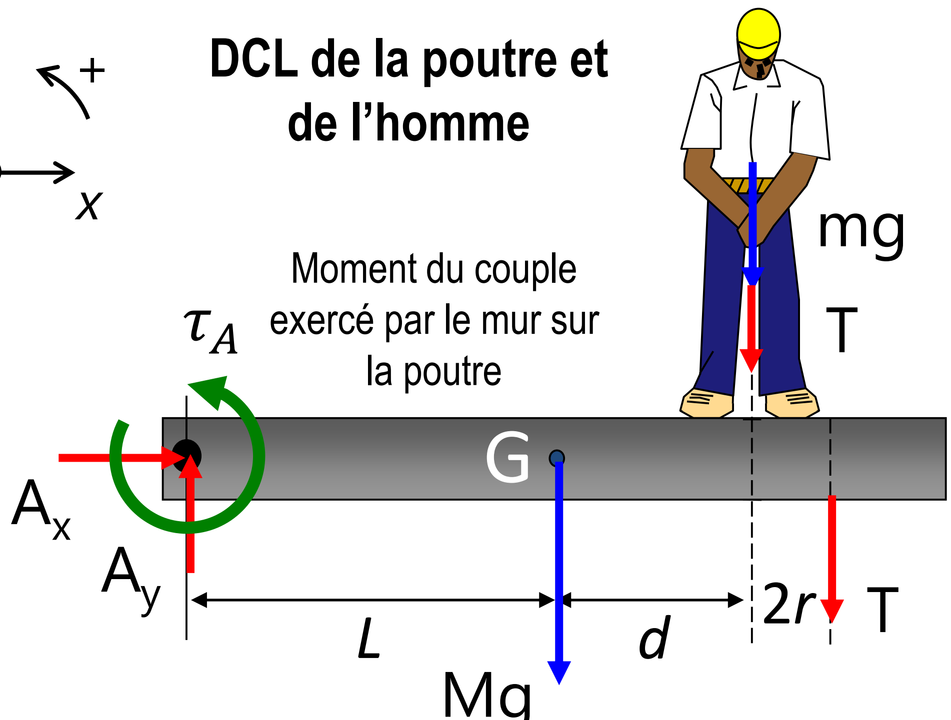
Faire le DCL de la poutre encastrée en incluant l'homme.

On suppose que l'on connaît :
- Masse de la poutre M ;
- Masse de l'homme m.

Attention à :
- Bien isoler le système ;
- Bien reconnaître les appuis ;
- Bien poser les tensions.



DCL de la poutre et de l'homme

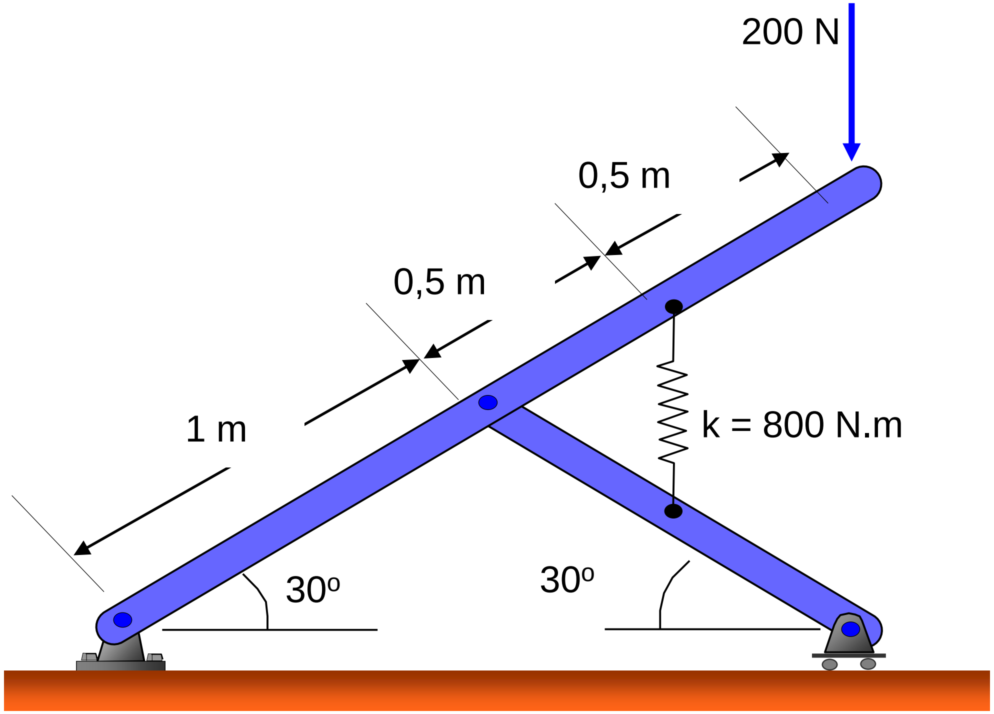


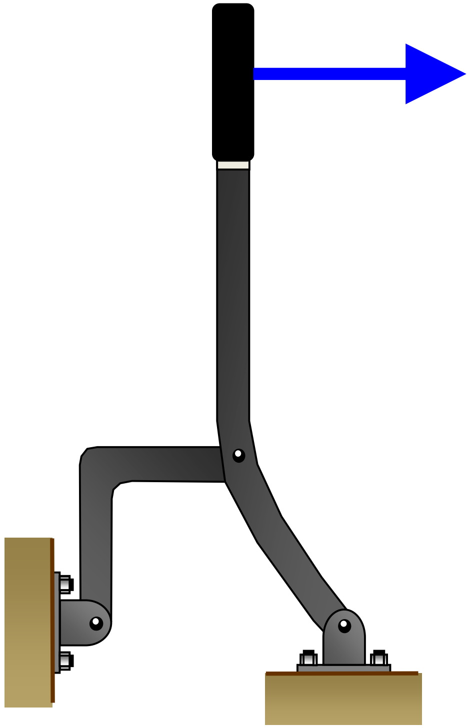
Plan de la semaine

- Révision
  - Diagramme du corps libre (DCL)
  - Équilibre statique (1re loi de Newton)
- Réactions aux appuis
- **Applications aux structures**
  - Systèmes de membrures
  - Membrure à deux forces

Structures de membrures

Une membrure est une poutre (corps rigide) dont le poids est négligeable par rapport aux autres forces qui s'exercent sur elle.





Systèmes de membrures à l’équilibre statique

Dans l’étude des systèmes de membrures, on veut souvent connaître les **réactions aux appuis/liaisons** entre les diverses membures.

Il faut donc être en mesure de :

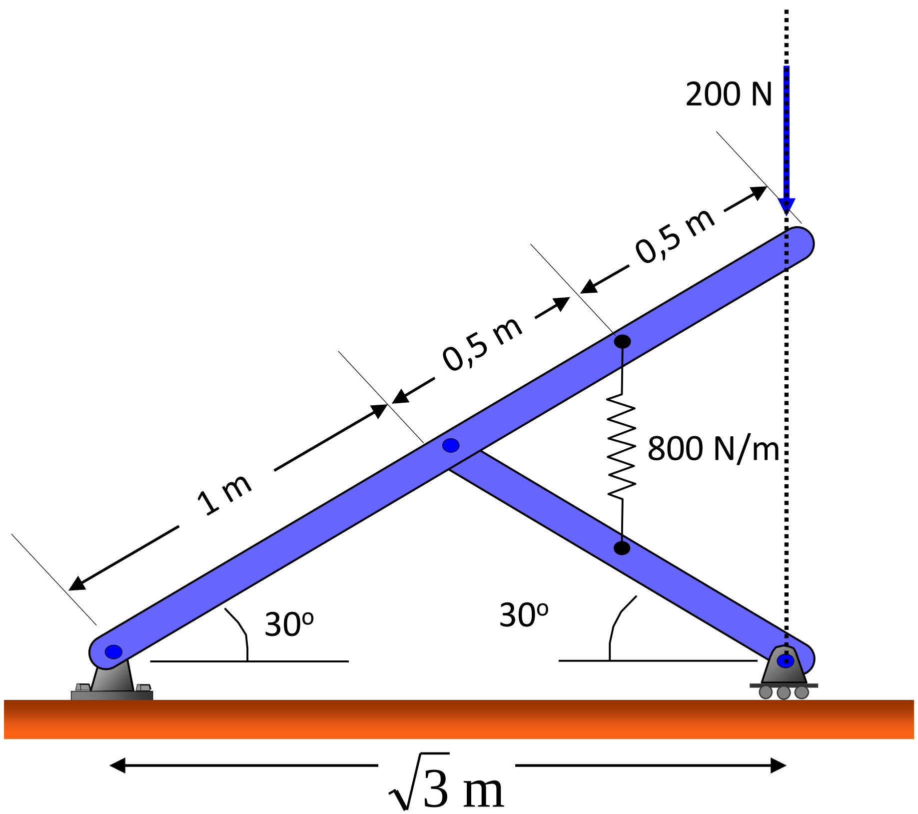
- Faire le DCL de la structure entière ou de toute subdivision de la structure.
  - **Maîtriser la 3e loi de Newton** ;
  - Seules les **forces externes** doivent être schématisées ;
  - Les **forces internes** entre deux éléments qui font partie d’un même DCL **ne doivent pas apparaître** sur le DCL.
- Poser les équations de l’équilibre statique pour la structure entière et pour chaque subdivision en choisissant bien les points de référence pour les sommes de moments.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0}$$

Pour tout point O de l’espace.

Exemple 3 – Ancien CP1

La structure suivante est à l'équilibre statique. Déterminer la force exercée par le ressort.



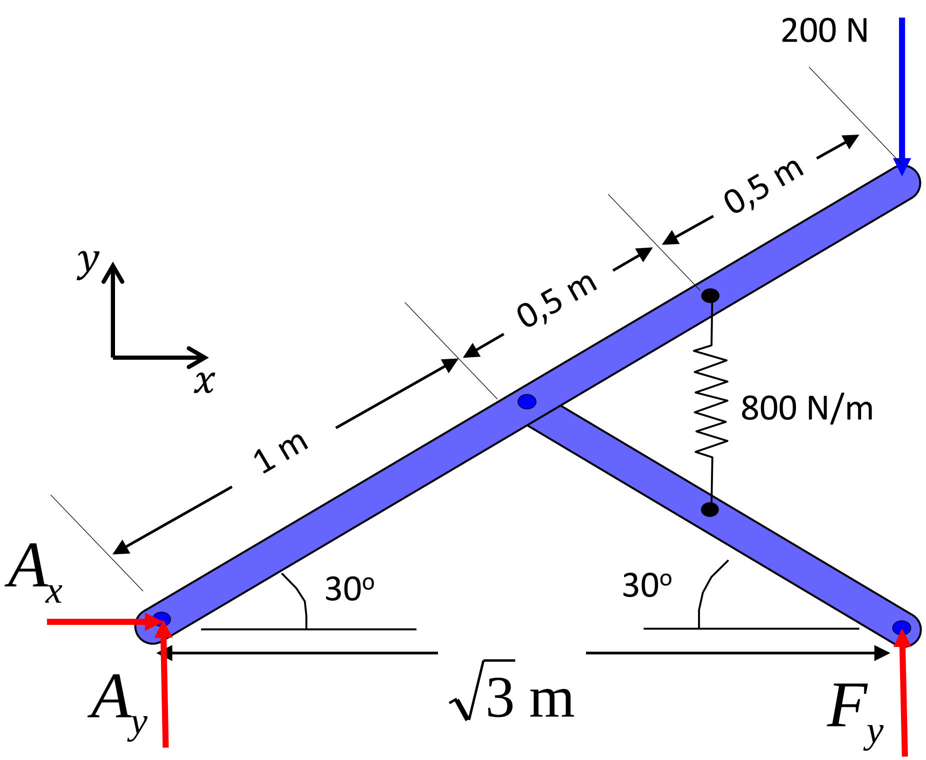
Questions à se poser

Est-ce que le ressort est en tension ou en compression ?

Le ressort exerce une force sur quelle(s) subdivision(s) de la structure ?

Exemple 3 – Ancien CP1

DCL 1 – Structure entière



Problème

La force du ressort est une force interne qui n'apparaît pas dans le DCL.

Solution

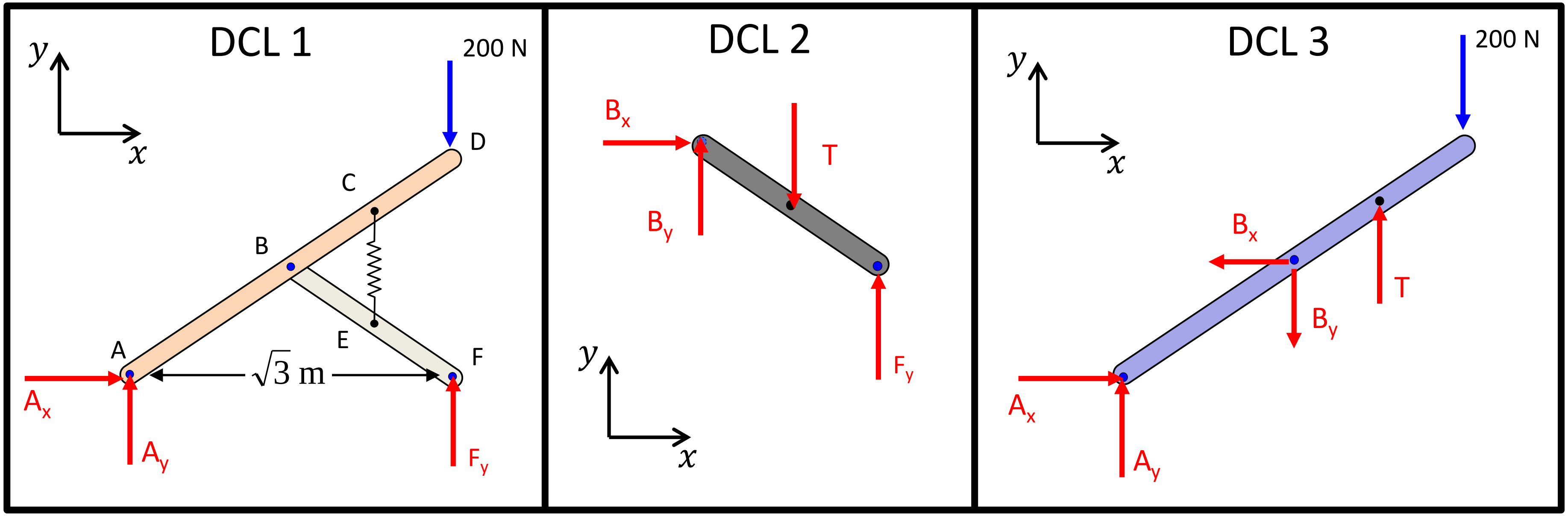
Découper le système de façon à faire apparaître la force du resort.

ATTENTION !

Cela ne veut pas dire que ce DCL sera nécessairement inutile !
Il pourrait servir à déterminer des inconnues intermédiaires nécessaires à la détermination de la force du ressort.

Exemple 3 – Ancien CP1

On construit les DCL des deux membrures de la structure.

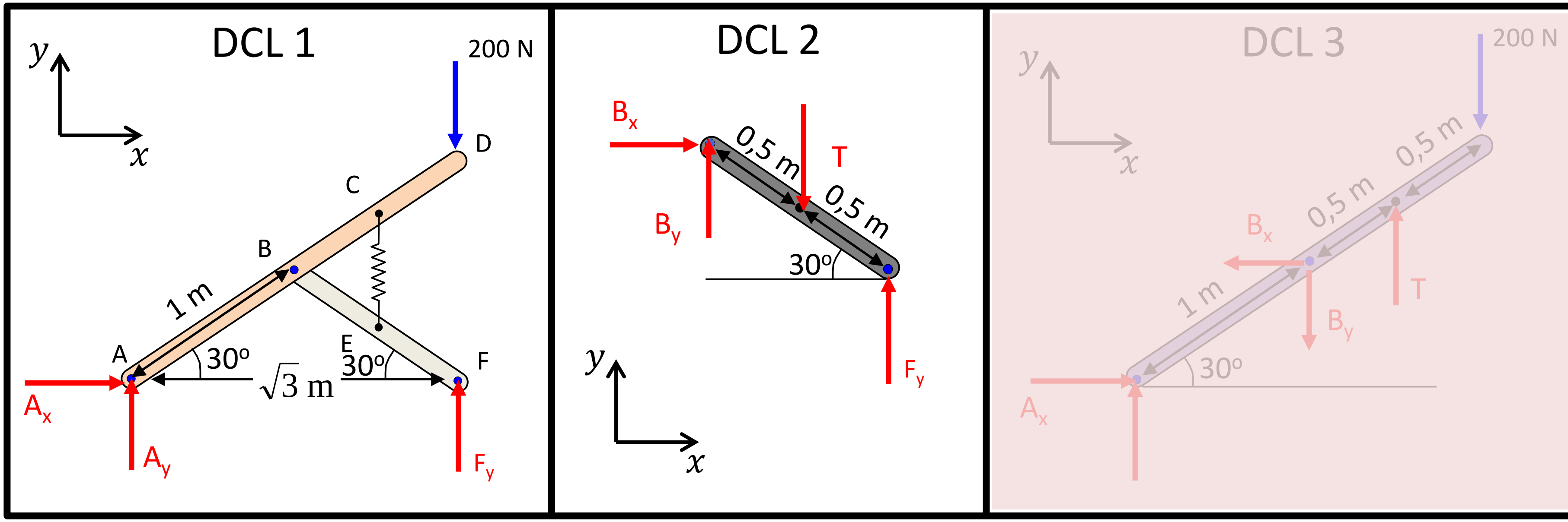


DCL 1 : Les forces de réaction en B entre les membrures ABCD et BEF sont des **forces internes** : **il ne faut pas les dessiner** ;

DCL 2 et 3 : Les réactions en B sont des **forces externes qu'il faut dessiner**, car elles sont dues à un corps qui n'est pas inclus dans le DCL ;

DCL 2 et 3 : En orientant Bx vers la gauche dans le DCL 2, il faut orienter Bx vers la droite dans le DCL 3 (**paire action-réaction**).

Stratégie 1 – DCL 1 et 2



On cherche T.

DCL 2 : $\Sigma M_B = 0$ – Permet de trouver T si on connaît F_y.

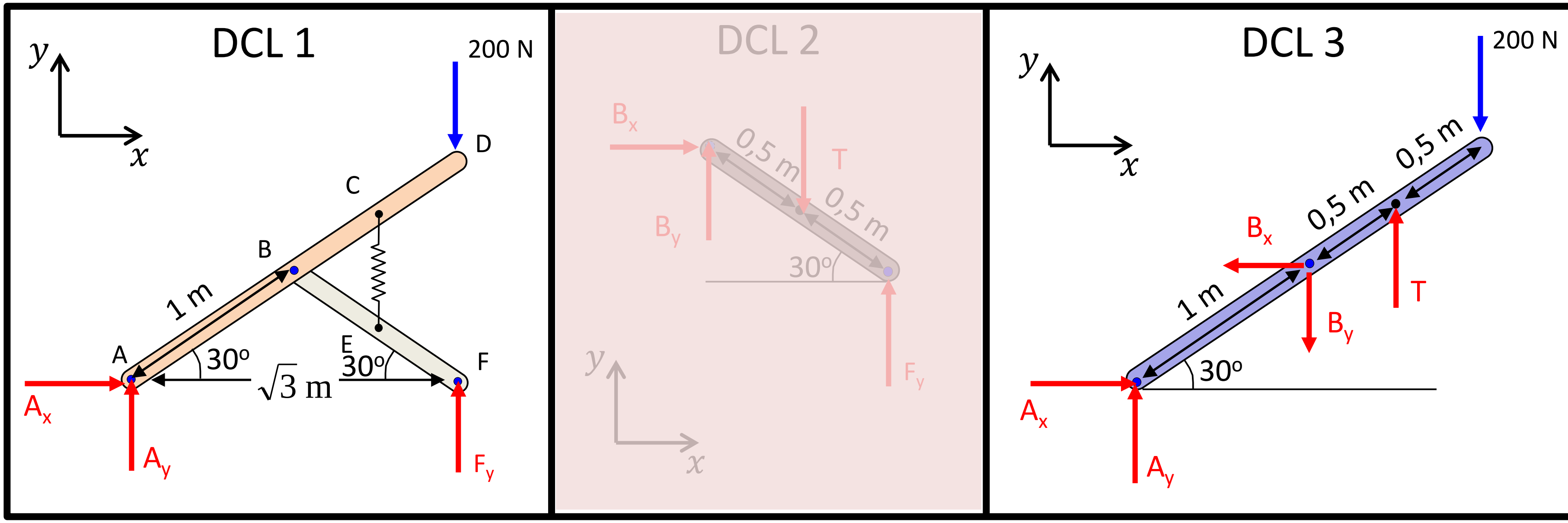
Chercher F_y.

$$1\cos 30° F_y - 0{,}5\cos 30° T = 0$$

DCL 1 : $\Sigma M_A = 0$ – Permet de trouver F_y à l'aide de la force de 200 N.

$$\sqrt{3}F_y - \sqrt{3}\cdot 200 = 0 \qquad \boxed{T = 400\ \text{N}}$$

Stratégie 2 – DCL 1 et 3



On cherche T.

DCL 3 : $\Sigma M_B = 0$ – Permet de trouver T si on connaît A_x et A_y.

$$\tfrac{1}{2}A_x \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot A_y + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot T - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 200 = 0$$

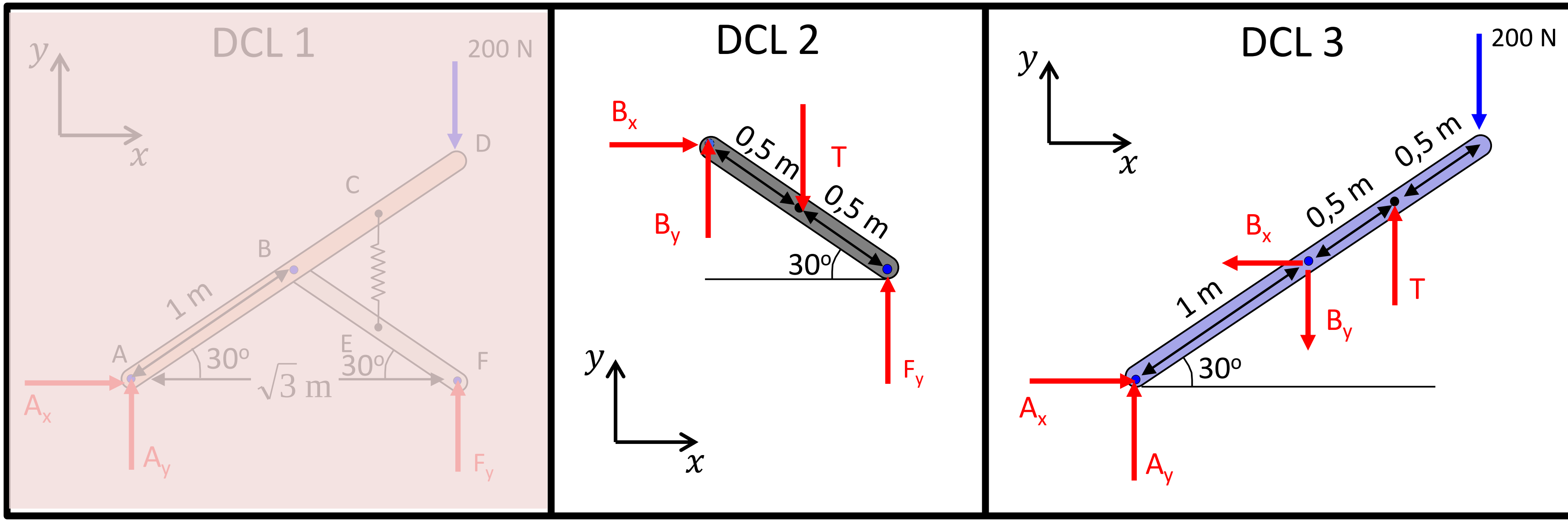
Chercher A_x et A_y.

DCL 1 : $\Sigma F_x = 0$ – Permet de trouver A_x. $\quad A_x = 0$

$\Sigma M_F = 0$ – Permet de trouver A_y. $\quad -A_y\sqrt{3} = 0 \Rightarrow A_y = 0$

$$\boxed{T = 400\text{ N}}$$

Stratégie 3 – DCL 2 et 3



On cherche T.

DCL 3 : $\Sigma M_A = 0$ – Permet de trouver T si on connaît B_x et B_y.

$$\tfrac{1}{2} B_x - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot B_y + \tfrac{3}{4}\sqrt{3}\cdot T - \sqrt{3}\cdot 200 = 0$$

Chercher B_x et B_y.

DCL 2 : $\Sigma F_x = 0$ – Permet de trouver B_x. $\qquad B_x = 0$

$\Sigma M_F = 0$ – Permet de trouver B_y. $-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot B_y + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot T = 0 \;\Rightarrow\; B_y = \tfrac{1}{2}T$

$$\boxed{T = 400\text{ N}}$$

Comparaison des stratégies

Avec plusieurs, DCL, il y a plusieurs stratégies de réponse possibles !

Stratégie 1

$$2F_y - T = 0 \qquad F_y - 200 = 0$$

$$\boxed{T = 400\ \mathrm{N}}$$

Stratégie 2

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot T + \tfrac{1}{2}A_x \cdot - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot A_y - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 200 = 0$$

$$A_x = 0$$

$$-A_y\sqrt{3} = 0$$

$$\boxed{T = 400\ \mathrm{N}}$$

Stratégie 3

$$\tfrac{1}{2}B_x - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot B_y + \tfrac{3}{4}\sqrt{3}\cdot T - \sqrt{3}\cdot 200 = 0$$

$$B_x = 0$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot B_y + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\cdot T = 0$$

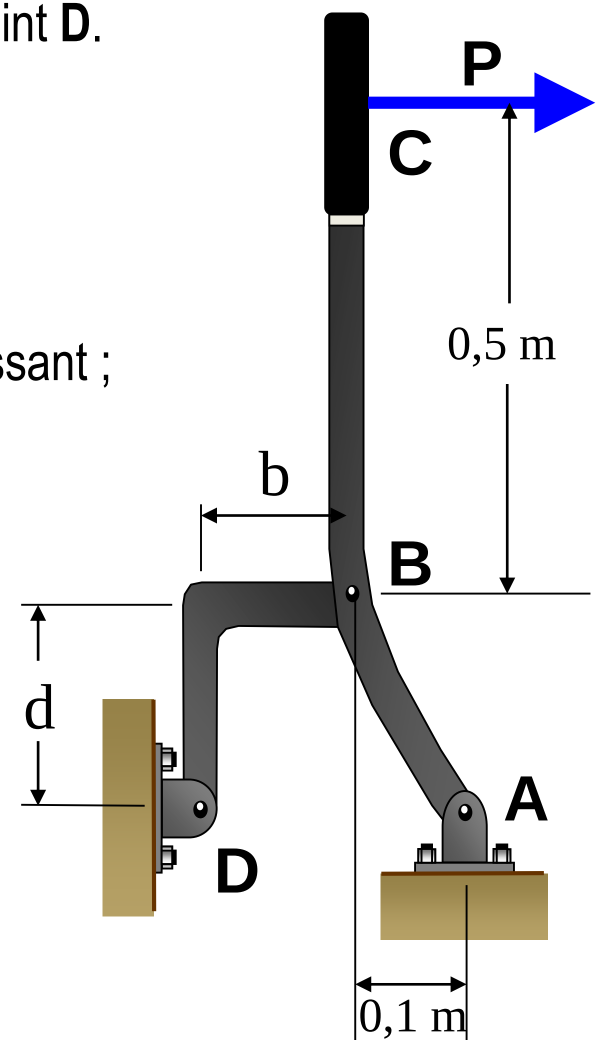
$$\boxed{T = 400\ \mathrm{N}}$$

***T* est positif**
Le ressort est bel et bien comprimé.

Auriez-vous pu prédire quelle stratégie serait la plus efficace ?
L'importance de s'exercer !

Astuce importante – Membrure à deux forces

Déterminez la force exercée par le pivot sur le levier au point **D**.
On donne d = 0,3 m et P = 100 N.

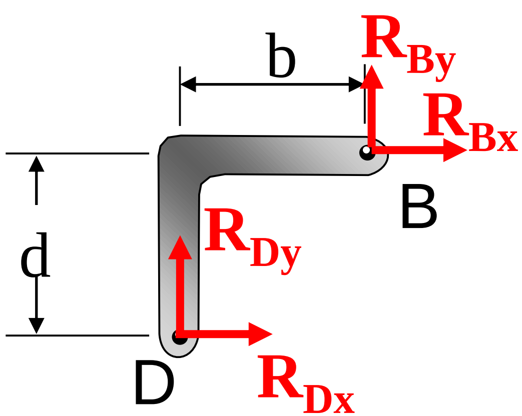


Stratégie

- On peut faire 3 DCL : ABCD, ABC et BD ;
- On cherche la force au point D : ABC est moins intéressant ;
- Parmi ABCD et BD, BD est le plus simple à étudier.

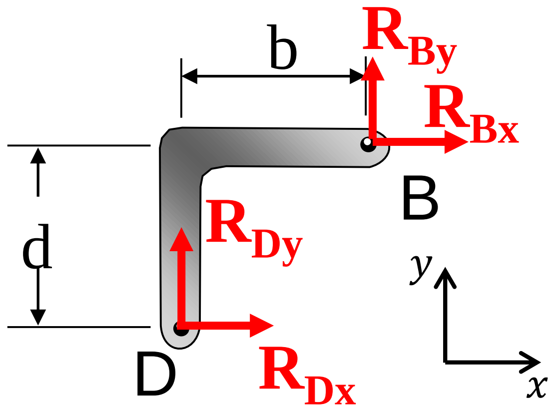
DCL de la membrure BD

Les corps soumis à des forces qui s'appliquent en deux points seulement (sans couple) ont une propriété très intéressante…



Astuce importante – Membrure à deux forces

Toutes les forces sur le corps s’appliquent en deux points seulement et le corps ne subit aucun couple.



Équilibre en translation : les forces sont de même norme et de sens opposé.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = -D_x$$

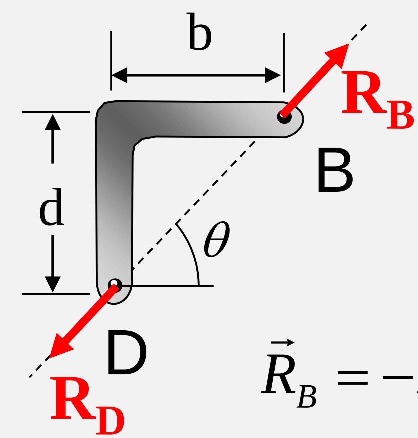
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = -D_y$$

Équilibre en rotation : la ligne d’action des deux forces passe par les deux points où elles s’appliquent.

$$\sum M_D = -d \cdot B_x + b \cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = \arctan\left(\frac{d}{b}\right)$$

Résultat pour une membrure à deux forces



$$\vec{R}_B = -\vec{R}_D$$

Synthèse du cours

Étapes d'un problème de statique

- Faire le(s) DCL du système entier et de ses sous-systèmes :
  - Choisir un système d'axes pour chaque DCL ;
  - Connaître les réactions aux appuis et liaisons et n'indiquer que les forces externes au système considéré.
- Pour chaque DCL, poser les conditions d'équilibre statique utiles : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$
  - Décomposer les forces selon les axes ;
  - Maîtriser le calcul des moments de forces ;
  - Reconnaître les membrures à deux forces afin de gagner du temps !

Il faut se pratiquer…

- Rien ne nous dit comment diviser nos structures pour isoler certaines parties et faire leur DCL ;
- Rien ne nous dit quel point de référence choisir pour calculer la somme des moments pour obtenir les équations les plus simples ;
- Il y a plusieurs façons valables de poser un problème, mais il existe une infinité de mauvaises façons !

La pratique permet de développer votre intuition.