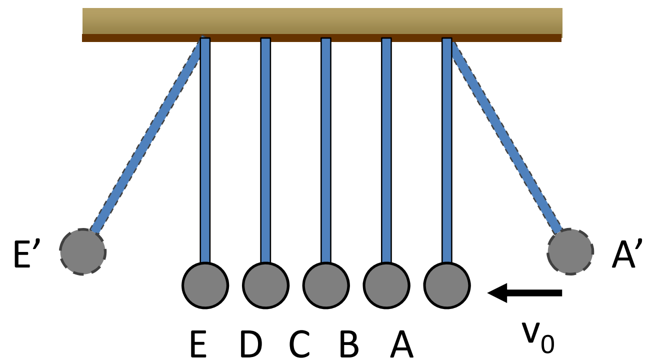
PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Examen final – Hiver 2012

Par
David Rioux,
Étienne Saloux,
et Thomas Gervais

Question 1

Un pendule de Newton est un pendule composé de 5 billes identiques (A,B,C,D et E) légèrement espacées. Lorsque la bille A est tirée en arrière (position A’) et lâchée, elle heurte la bille B, qui heurte alors C et ainsi de suite. La bille E est alors frappée par D et se retrouve dans une position semblable à la bille A à l’état initial (position E'). À son tour, elle redescend et frappe la bille D qui heurte C et ainsi de suite.

<u>Informations utiles :</u>
-Les billes ont une masse identique : m
-Les cordes tenant les billes sont de même longueur
-Le coefficient de restitution entre les billes : e=0,98
-La vitesse de A juste avant qu’elle heurte B : v_0=1 m/s
-Toutes les vitesses sont calculées immédiatement après les collisions
-Les vecteurs vitesses sont tous horizontaux



A) Donner, en vos mots, toutes les étapes pour déterminer les vitesses des billes après chaque collision. (10 points)
B) Calculer les vitesses de A et B après que A ait heurté B en fonction de e et v_0. Trouver le résultat numérique pour e=0,98 et v_0=1 m/s. (15 points)
C) Calculer les vitesses de D et E après que D ait heurté E en fonction de e et v_0. Trouver le résultat numérique pour e=0,98 et v_0=1 m/s. (15 points)

Pour la suite de l’exercice, supposer que les vitesses des billes incidentes sont négligeables après la collision. Par exemple, lorsque B heurte C, juste après la collision, on a : $v_B \approx 0$m/s.

D) Déterminer la vitesse de A après un « aller-retour », soit A qui frappe B puis C, D et E (aller) et E qui frappe D puis C, B et A (retour), en fonction de e et v_0. Faites l’application numérique pour e=0,98 et v_0=1 m/s. (5 points)
E) Calculer le nombre N d’allers-retours nécessaires pour que la vitesse de A soit égale à 0,1 m/s. (5 points)

Question 1 - Solution

A) <u>Démarche pour déterminer les vitesses après chaque collision</u>

-On s'intéresse seulement aux composantes horizontales des vitesses : problème 1D
-Juste après la collision, On écrit l'équation de conservation de la quantité de mouvement (système pseudo-isolé)
-On utilise la relation du coefficient de restitution
-On résout le système de 2 équations à 2 inconnues (soit les vitesses après les collisions)

B) <u>Vitesses de A et B après que A ait heurté B en fonction de e et v_0.</u>

Conditions avant collision : $v_A = v_0$ et $v_B = 0$

$$\begin{cases} mv_A + mv_B = mv_A^{'} + mv_B^{'} \\ e(v_A - v_B) = v_B^{'} - v_A^{'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = v_A^{'} + \left(v_A^{'} + e.v_0\right) \\ v_B^{'} = v_A^{'} + e.v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_A^{'} = \left(\dfrac{1-e}{2}\right).v_0 \\ v_B^{'} = \left(\dfrac{1+e}{2}\right).v_0 \end{cases}$$

Pour v_0 = 1m/s et e = 0.98 :

$$\begin{cases} v_A^{'} = 0.01m/s \\ v_B^{'} = 0.99m/s \end{cases}$$

Question 1 – Solution (suite)

C) Vitesses de B et C après que B ait heurté C en fonction de e et v_0.

Conditions avant collision : $v_B'=(1+e)v_0/2$ et $v_C' = 0$

$$\begin{cases} mv_B' + mv_C' = mv_B'' + mv_C'' \\ e\left(v_B' - v_C'\right) = v_C'' - v_B'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_B' = v_B'' + \left(v_B'' + e.v_B'\right) \\ v_C'' = v_B'' + e.v_B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_B'' = \left(\frac{1-e}{2}\right).v_B' = \left(\frac{1-e}{2}\right)\left(\frac{1+e}{2}\right).v_0 \\ v_C'' = \left(\frac{1+e}{2}\right).v_B' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2.v_0 \end{cases}$$

En effectuant une démarche analogue, on obtient :

$$\begin{cases} v_C''' = \left(\frac{1-e}{2}\right).v_C'' = \left(\frac{1-e}{2}\right)\left(\frac{1+e}{2}\right)^2.v_0 \\ v_D''' = \left(\frac{1+e}{2}\right).v_C'' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^3.v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_D'''' = \left(\frac{1-e}{2}\right).v_D''' = \left(\frac{1-e}{2}\right)\left(\frac{1+e}{2}\right)^3.v_0 \\ v_E'''' = \left(\frac{1+e}{2}\right).v_D''' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^4.v_0 \end{cases}$$

Pour v_0 = 1m/s et e = 0.98 :

$$\begin{cases} v_B'' = 0.0099 m/s \\ v_C'' = 0.9801 m/s \\ v_C''' = 0.0098 m/s \\ v_D''' = 0.9703 m/s \\ v_D'''' = 0.0097 m/s \\ v_E'''' = 0.9606 m/s \end{cases}$$

Question 1 – Solution (suite)

D) Vitesses de A après un aller-retour en fonction de e et v_0.

Après chaque collision, la vitesse de la bille heurtée est égale à la vitesse de la bille qui frappe multiplié par un coefficient (1+e)/2.
Pour 5 billes et un aller-retour, il y a 4 collisions pour l'aller A-B-C-D-E et 4 autres pour le retour E-D-C-B-A. Au total, 8 collisions :

$$\frac{v_A^{1a-r}}{v_0} = \left(\frac{1+e}{2}\right)^8 = 0.9227 \Rightarrow v_A^{1a-r} = 0.9227 m/s$$

F) Vitesses de A après un aller-retour en fonction de e et v_0.

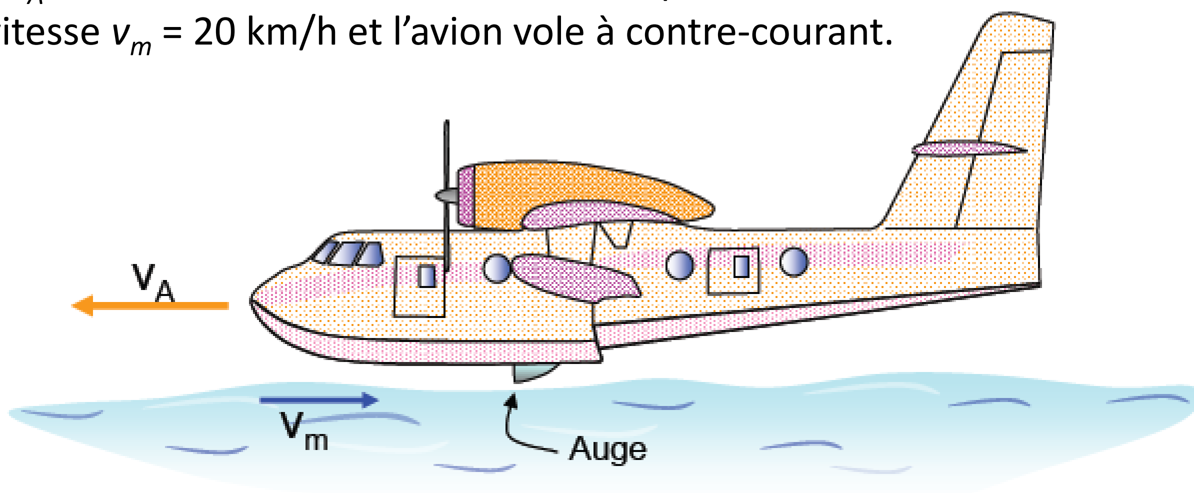
Après chaque aller-retour, la vitesse de A est égale à la vitesse de la bille au début de chaque aller-retour multiplié par un coefficient $(1+e)^8/2$. Au total près N allers-retours, 8N collisions :

$$\frac{v_A^{Na-r}}{v_0} = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{8N} \Rightarrow N = \frac{1}{8}\frac{\ln\left(\frac{v_A^{Na-r}}{v_0}\right)}{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)} = \frac{1}{8}\frac{\ln(0.1)}{\ln\left(\frac{1+0.98}{2}\right)} = 29$$

$\Rightarrow$ 29 allers-retours, soit 232 collisions

Question 2

On utilise un avion CL-415 pour ramasser de l'eau d'une rivière afin de la larguer au dessus d'un incendie de forêt. Cet avion a une masse à vide de 12,8 tonnes et peut emmagasiner jusqu'à 6200 litres d'eau. Il est équipé de deux moteurs offrant une poussée maximale de 2600 kW au total. L'auge servant à amasser l'eau a une ouverture de 9 cm x 10 cm. Pour des raisons de sécurité, l'avion doit voler à une vitesse v_A située entre 200 et 300 km/h lorsqu'il amasse l'eau de la rivière. L'eau de la rivière coule à une vitesse v_m = 20 km/h et l'avion vole à contre-courant.



A) Calculer la masse d'eau amassée par unité de temps en fonction de la vitesse de l'avion. (15 points)

B) Déterminer la force exercée par le fluide sur l'avion au moment où l'avion touche l'eau à
   1- 200 km/h
   2- 300 km/h (15 points)

C) Quelle sera l'accélération résultante de l'avion au moment où il touche l'eau s'il approche à puissance maximale à:
   1- 200 km/h
   2- 300 km/h (10 points)

D) En supposant maintenant que l'avion ramasse l'eau sur un lac où v_M = 0, trouver la vitesse maximale à laquelle l'avion peut voler pour amasser l'eau tout en conservant une vitesse constante. (10 points)

Question 2 - Solution

A) Trouver les débits volumique et massique en fonction de la vitesse de l'avion. (15 points)

On trouve le débit volumique à partir de la surface de l'ouverture de l'auge et de la vitesse de l'avion par rapport à l'eau:

$$\frac{dV}{dt} = S_{Auge}\left|\vec{v}_{Avion/Eau}\right| = 0{,}1\times 0{,}09\text{m}^2\times\left(\frac{20}{3{,}6}+v_A\right)\text{m/s}$$

$$\frac{dV}{dt} = S_{Auge}\left(v_M + v_A\right) = 0{,}009\left(5{,}556+v_A\right)\text{m}^3\text{/s}$$

Le débit massique sera donc simplement le débit volumique multiplié par la densité de l'eau:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \rho_{Eau}\frac{dV}{dt} = \rho_{Eau}S_{Auge}\left(v_M + v_A\right)\\ \frac{dm}{dt} &= 9\times\left(5{,}556+v_A\right)\text{kg/s}\end{aligned}}$$

15 points

Question 2 – Solution (suite)

B) Déterminer la force exercée par le fluide sur l'avion au moment où l'avion touche l'eau à

1- 200 km/h

2- 300 km/h (15 points)

$$F_{Eau} = \frac{dm}{dt} v_{Eau/Avion} = \rho_{Eau} S_{Auge} \left(v_M + v_A\right)^2$$

À 200 km/h: $$F_{Eau} = 33{,}6 kN$$

$\boxed{\text{15 points}}$

À 300 km/h: $$F_{Eau} = 71{,}1 kN$$

Question 2 – Solution (suite)

C) Quelle sera l'accélération de l'avion au moment où il touche l'eau s'il approche à puissance maximale à:

1- 200 km/h

2- 300 km/h (10 points)

L'accélération sera reliée à la différence entre la force de poussée des moteurs et la force causée par l'entrée d'eau (qui tend à freiner l'avion). Or, cette force dépend de la vitesse d'entrée d'eau dans l'avion et du débit massique:

$$\sum F_x = F_{moteursMax} - F_{Eau} = ma$$

$$\text{avec} \quad F_{Eau} = \frac{dm}{dt} v_{Eau/Avion} = \rho_{Eau} S_{Auge} \left(v_M + v_A\right)^2$$

La force des moteur est simplement leur puissance divisée par la vitesse de l'avion.

$$F_{moteursMax} = \frac{P_{moteursMax}}{v_A}$$

$$\text{alors} \quad a = \frac{P_{moteursMax}}{m_A v_A} - \frac{\rho_{Eau} S_{Auge}}{m_A} \left(v_M + v_A\right)^2$$

Question 2 – Solution (suite)

C) (suite) Quelle sera l'accélération de l'avion au moment où il touche l'eau s'il approche à puissance maximale à:

1- 200 km/h

2- 300 km/h (10 points)

1- 200 km/h:

$$a = \frac{2600\text{kW}}{12800\text{kg} \times \frac{200}{3,6}\text{m/s}} - \frac{9}{12800\text{kg}}\left(\frac{20+200}{3,6}\text{m/s}\right)^2$$

$$\boxed{a = 1,030\text{m/s}}$$

2- 300 km/h:

$$a = \frac{2600\text{kW}}{12800\text{kg} \times \frac{300}{3,6}\text{m/s}} - \frac{9}{12800\text{kg}}\left(\frac{20+300}{3,6}\text{m/s}\right)^2$$

$$\boxed{a = -3,118\text{m/s}}$$

10 points

À 300 km/h, la force de l'eau freine l'avion.

Question 2 – Solution (suite)

D) Trouver la vitesse maximale à laquelle l'avion peut voler lorsqu'il amasse l'eau tout en conservant une vitesse constante. (10 points)

Pour que la vitesse soit constante, il faut que la poussée des moteurs soit égale et opposée à la force causée par l'entrée d'eau (qui tend à freiner l'avion). Or, cette force dépend de la vitesse d'entrée d'eau dans l'avion et du débit massique:

$$\sum F_x = F_{moteurs} - F_{Eau} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{moteurs} = F_{Eau}$$

$$\text{avec} \quad F_{Eau} = \frac{dm}{dt} v_{Eau/Avion} = \rho_{Eau} S_{Auge} (v_A)^2$$

La force des moteur est simplement leur puissance divisée par la vitesse de l'avion.

$$F_{moteurs} = \frac{P_{moteurs}}{v_A}$$

La vitesse maximale sera donc celle pour laquelle les moteurs sont à pleine puissance:

$$\frac{P_{moteursMax}}{v_A} = \rho_{Eau} S_{Auge} (v_A)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{moteursMax}}{\rho_{Eau} S_{Auge}} = v_A^3$$

Question 2 – Solution (suite)

D) (suite) Trouver la vitesse maximale à laquelle l'avion peut voler lorsqu'il amasse l'eau tout en conservant une vitesse constante… Suite (25 points)

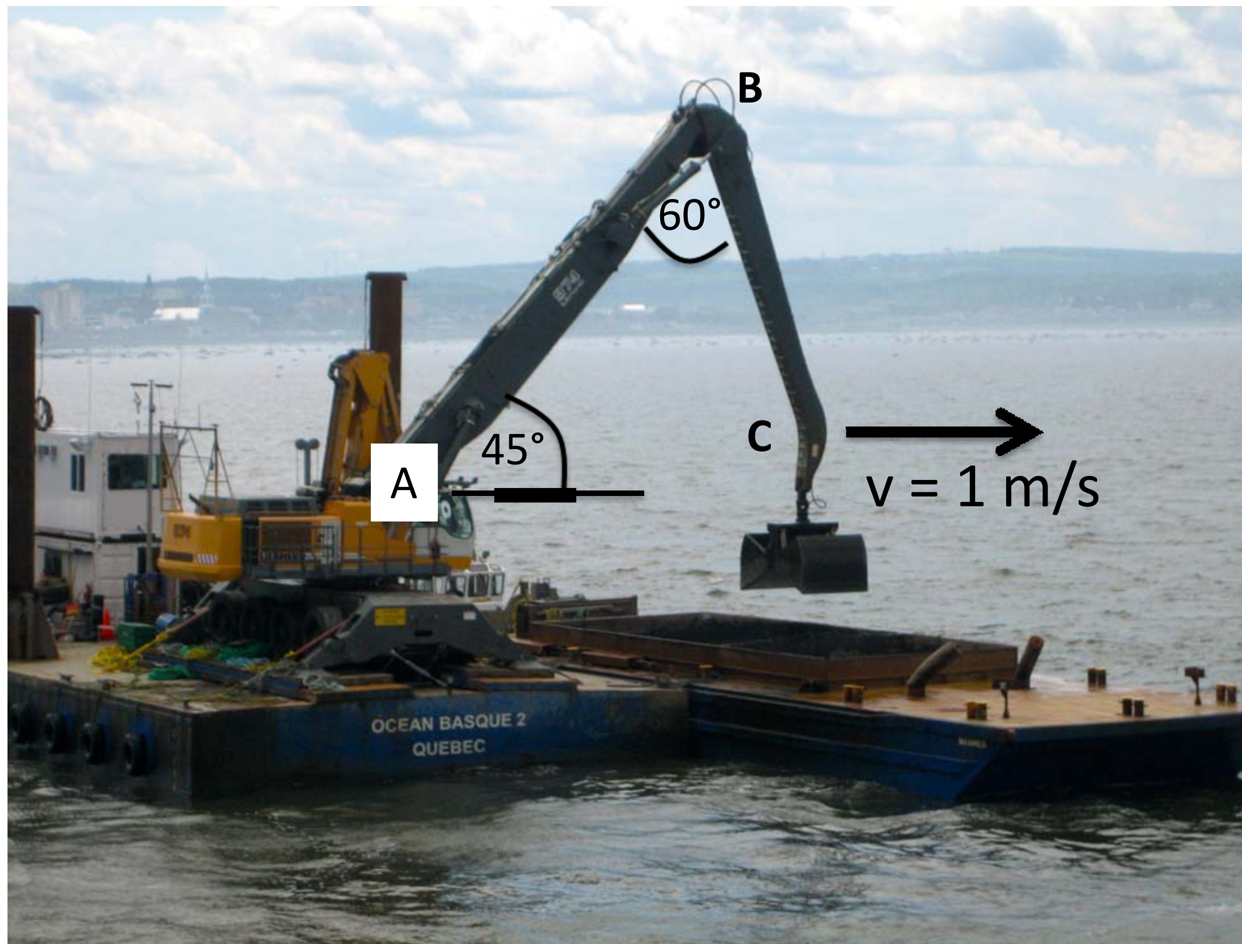
On trouvera alors:

$$\boxed{\begin{aligned} v_A &= \sqrt[3]{\frac{P_{moteursMax}}{\rho_{Eau} S_{Auge}}} = \sqrt[3]{\frac{2600\text{kW}}{1000\text{kg/m} \times 0{,}009\text{m}}} \\ v_A &= 66{,}1\text{m/s} = 238\text{km/h} \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{10 points}}$

Question 3

L'Océan Basque 2 est une plateforme de dragage affectée au creusage de la voie maritime du Saint-Laurent. On la voit ici à l'œuvre dans le port de Rimouski en 2009. Au moment où la photo est prise, la pelle s'éloigne horizontalement de la plateforme à une vitesse v = 1 m/s dans le plan ABC. La longueur de AB vaut 6 m et la longueur de BC vaut 4 m. Les points A et B sont des pivots.



Question 3 - Suite

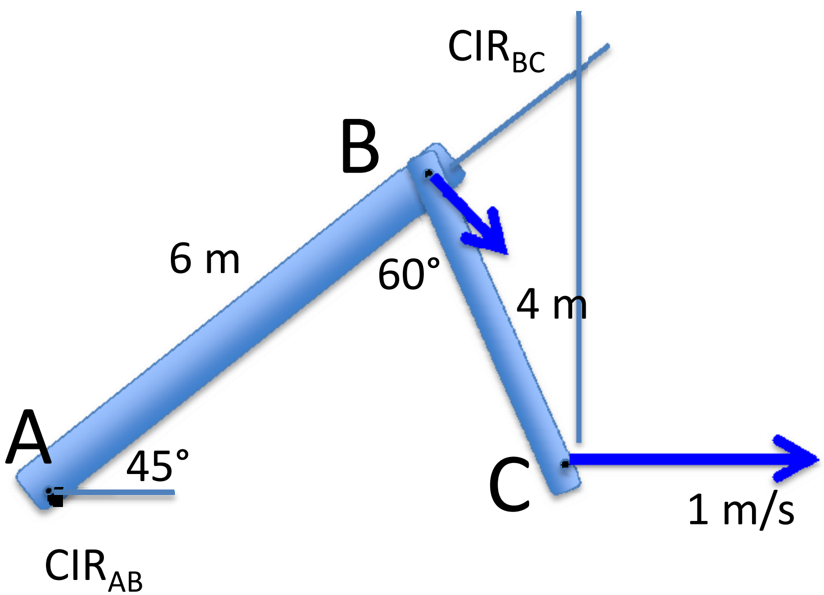
A) Faire un schéma du problème et, sans faire de calcul, identifier la position des CIR des tiges AB et BC. (10 points)

B) Calculer les coordonnées des CIR des tiges AB et BC par rapport au point A. Poser x et y dans le plan ABC. (20 points)

C) Déterminer la vitesse angulaire des tiges AB et BC (20 points)

Question 3 – Solution (suite)

A) Le CIR de AB est le point fixe A.

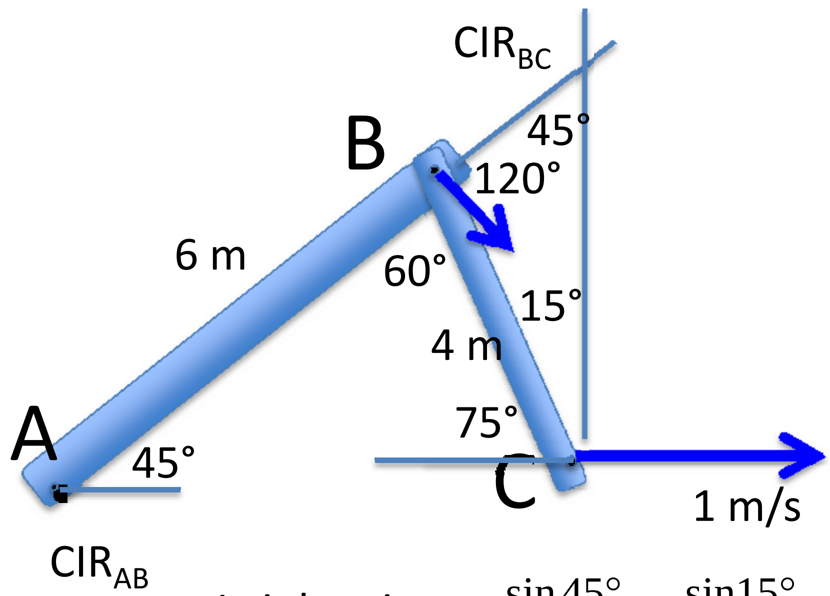


Attention: A et C ne sont pas nécessairement au même niveau.

10 points

B) **Coordonnées du CIR de AB: (0,0)**

Coordonnées du CIR de BC:



Loi des sinus: $\dfrac{\sin 45°}{4} = \dfrac{\sin 15°}{\overline{BCIR_{BC}}}$

$$\overline{BCIR_{BC}} = 4\frac{\sin 15°}{\sin 45°} = 1{,}46m$$

$$\overrightarrow{ACIR_{BC}} = (6 + 1{,}46)\left(\cos 45°\vec{i} + \sin 45°\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{ACIR_{BC}} = (5.28, 5.28)m}$$

15 points

Question 3 – Solution (suite)

C) $v_B = \omega_{AB} AB$ (relation entre la vitesse tangentielle de B et la vitesse angulaire de AB)

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{\overline{BCIR_{BC}}}} = \frac{v_C}{\overline{\overline{CCIR_{BC}}}}$$ (relation employant le CIR de BC)

$$\frac{\sin 45°}{4} = \frac{\sin 120°}{\overline{\overline{CCIR_{BC}}}} \qquad \overline{CCIR_{BC}} = 4\frac{\sin 120°}{\sin 45°} = 4{,}90m$$

$$v_B = \frac{\overline{BCIR_{BC}}}{\overline{\overline{CCIR_{BC}}}} v_C = \frac{1{,}46}{4{,}90} \cdot 1 = 0{,}30m/s$$

De ces relations, on trouve:

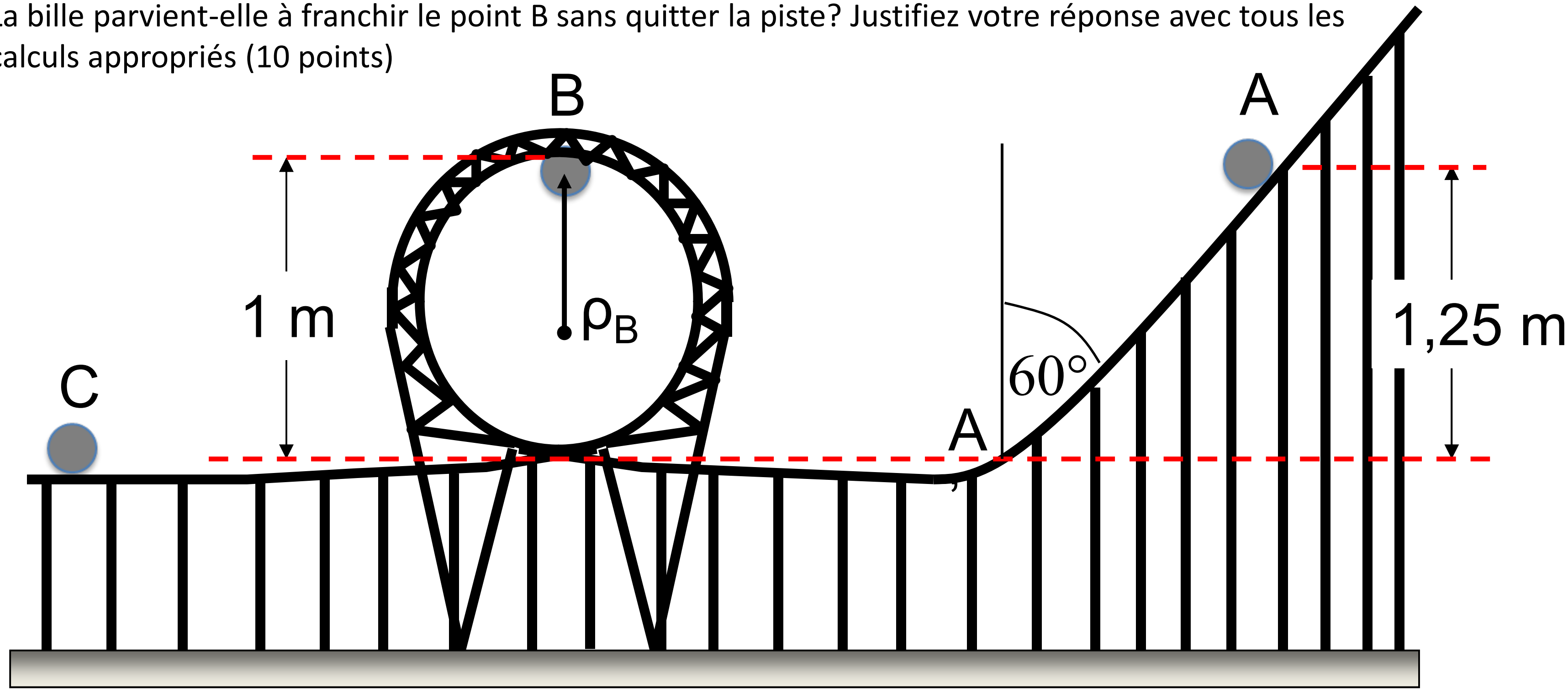
$$\omega_{AB} = 0{,}05 rad/s, \text{ horaire}$$

$$\omega_{BC} = 0{,}20 rad/s, \text{ anti} - \text{horaire}$$

Question 4

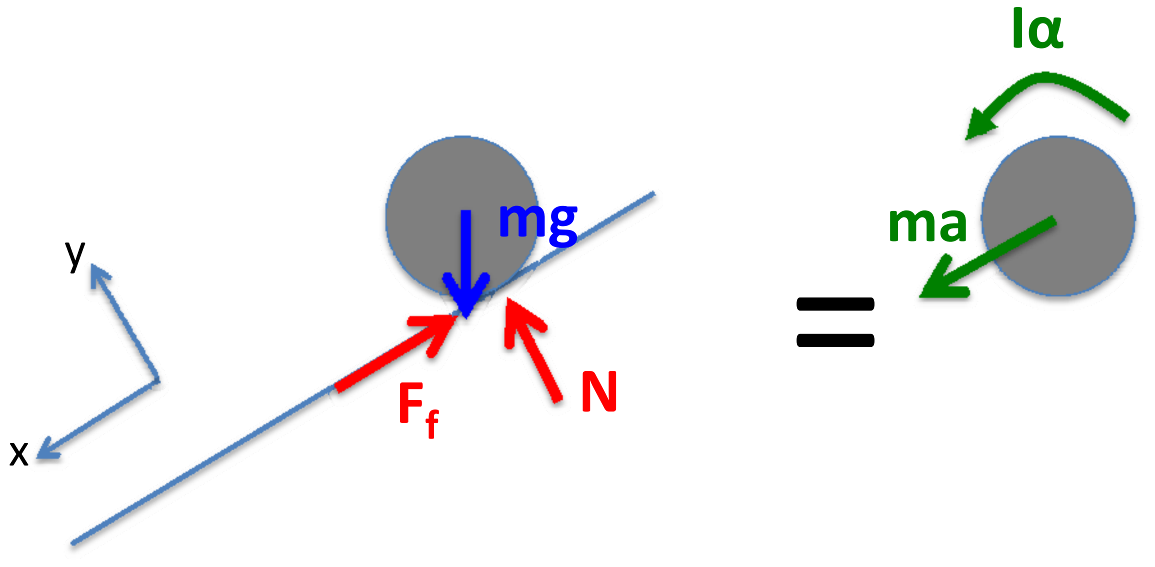
Une bille d'acier pleine de masse m = 1 kg et de rayon R = 5 cm roule sur un rail dans un manège miniature possédant les dimensions décrites sur la figure. La portion circulaire possède un rayon ρ_B = 0,5 m. Le coefficient de friction entre le rail et la sphère partout sur le manège vaut μ_S = 0,8. On laisse filer la sphère à partir du repos. On suppose que la bille roule sans glisser en tout temps.

A) Donner la relation entre la vitesse de translation du centre de masse de la bille et sa vitesse de rotation (10 points)
B) Par la méthode de votre choix, déterminer la vitesse du centre de masse de la bille en bas de la pente (point A')? (20 points)
C) Combien de temps la bille prend-elle pour passer de A à A'? (10 points)
D) La bille parvient-elle à franchir le point B sans quitter la piste? Justifiez votre réponse avec tous les calculs appropriés (10 points)



Question 4 - Solution

A) $v_{CM} = \omega R$



Question 4 – Solution (suite)

B) **i) Par le principe travail-énergie** $\sum U_{1\to 2} = T_2 - T_1$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \qquad v_{CM} = \omega R$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 \qquad \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 4{,}19 m/s}$$

ii) Par la 2e loi de Newton appliquée p/r au sol (voir DCL-DCE en A)).

$$\sum M_{sol} = I_{sol}\alpha = mgR\sin 30° \qquad a = \alpha R$$

$$a = \frac{mgR^2 \sin 30°}{7/5\, mR^2} = \frac{5}{7}g\sin 30° \qquad v_{CM}^2 = 2aL = \frac{2ah}{\sin 30°} = \frac{10}{7}gh$$

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}}$$

Question 4 – Solution (suite)

iii) Par la 2e loi de Newton appliquée au CM (voir DCL-DCE en A)).

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\,\alpha = F_f R \qquad \sum F_x = ma = mgR\sin 30° - F_f \qquad a = \alpha R$$

En combinant les 3 équations: $$ma = mgR\sin 30° - \frac{I_{CM}\,a}{R^2}$$

$$a + \frac{2a}{5} = gR\sin 30° \qquad a = \frac{5}{7} g\sin 30° \qquad \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}}$$

C) i) Si on a utilisé le principe travail-énergie:

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}} \qquad \frac{v_{CM}^2}{2L} = a = \frac{5}{7}\frac{gh}{L} = \frac{5}{7} g\sin 30°$$

$$L = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{5}{14} gt^2 \sin 30° \qquad \boxed{t = \sqrt{\frac{14h}{5g\sin^2 30°}} = 2\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 1{,}2s}$$

Question 4 – Solution (suite)

C) ii) Si on a utilisé la 2e loi de Newton, on a l'accélération directement:

$$a = \frac{5}{7} g \sin 30° \qquad L = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{5}{14} g t^2 \sin 30°$$

$$\boxed{t = 2\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 1{,}2s}$$

D) Par le principe travail-énergie: $\sum U_{1\to 2} = T_2 - T_1$

$$mg\Delta h = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2, \Delta h = h - (2\rho_B - R) \quad v_{CM} = \omega R \quad \boxed{v_{CM}^2 = \frac{10g(h + R - 2\rho_B)}{7}}$$

Or pour que la bille reste collée au rail: $mg < m v_{CM}^2 / (\rho_B - R)$

$$\frac{10g(h + R - 2\rho_B)}{7} \overset{?}{>} \rho_B g \quad h \overset{?}{>} \left(\frac{7}{10}\rho_B + 2\rho_B - R\right) \quad \boxed{1{,}25 \overset{?}{>} \frac{27}{10}\rho_B - R = 1{,}3, \text{ donc } FAUX}$$

La bille quitte donc le rail avant d'arriver au sommet

P a r l e m e m e r a