

PHS 1101

Mécanique pour ingénieurs

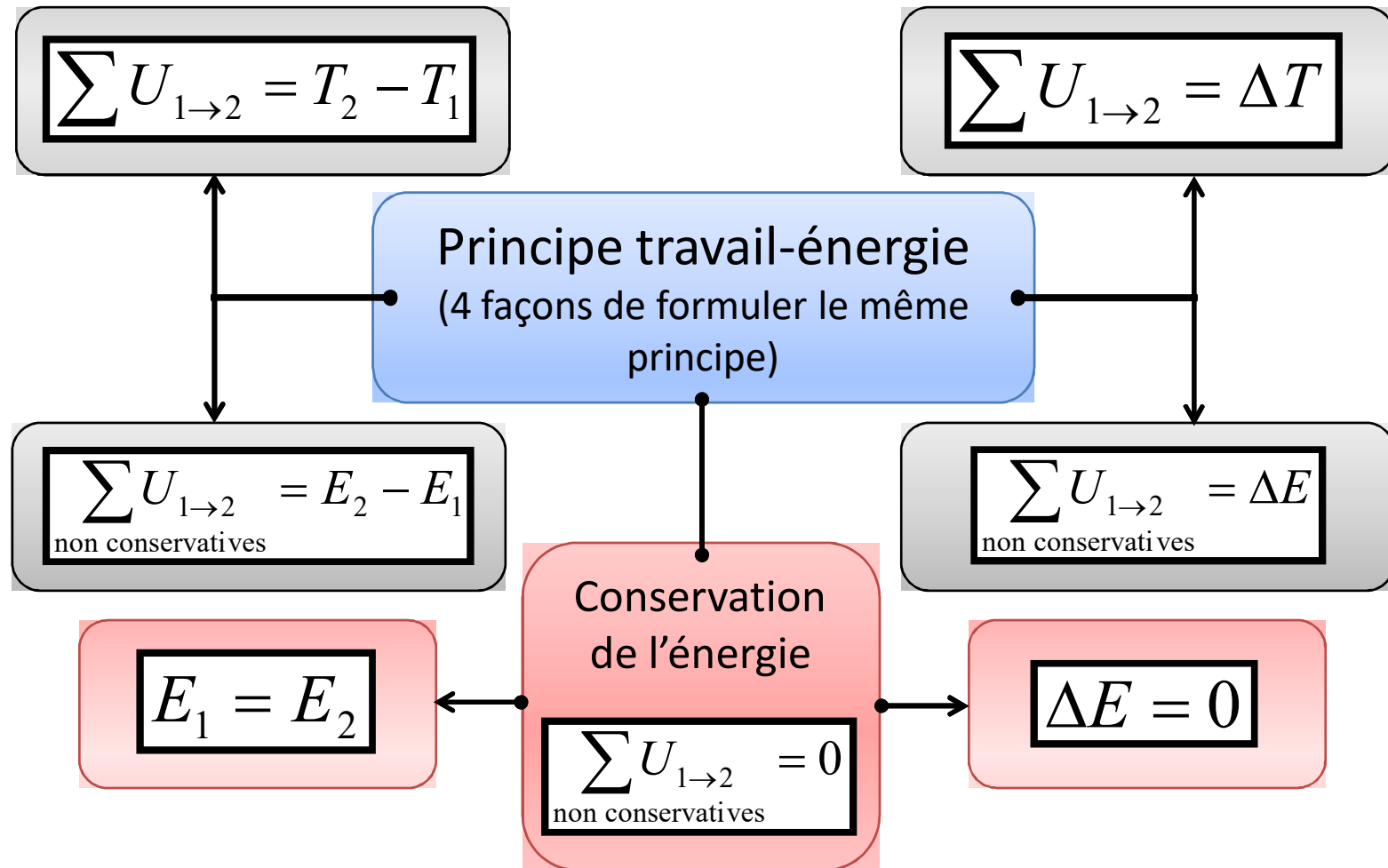
Cours 8

Impulsion-quantité de mouvement et centre de masse

Djamel Seddaoui

Département de Génie Physique

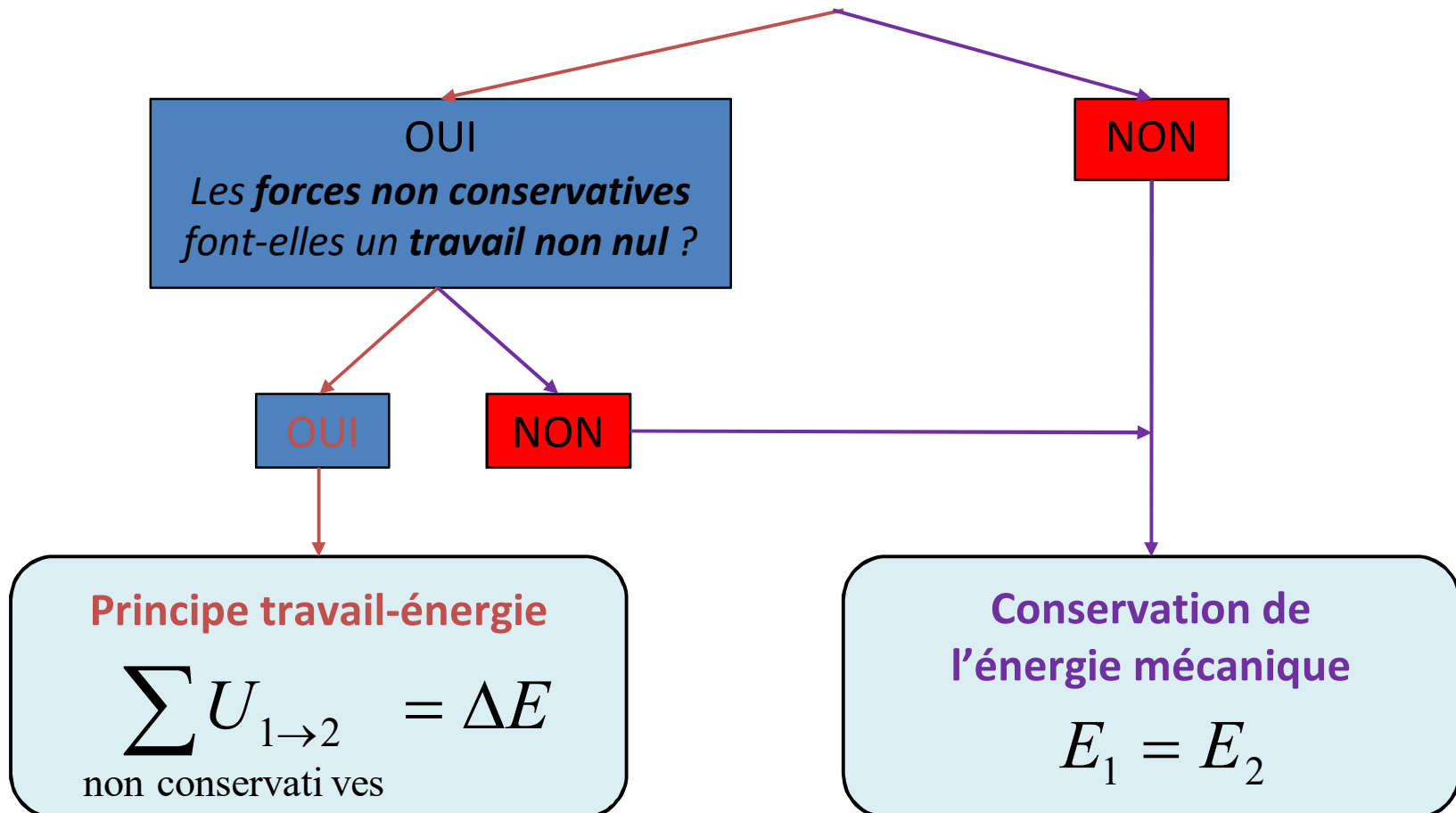
Principe Travail / Énergie



La conservation de l'énergie mécanique est un cas particulier du principe travail-énergie

Choix de la méthode de résolution

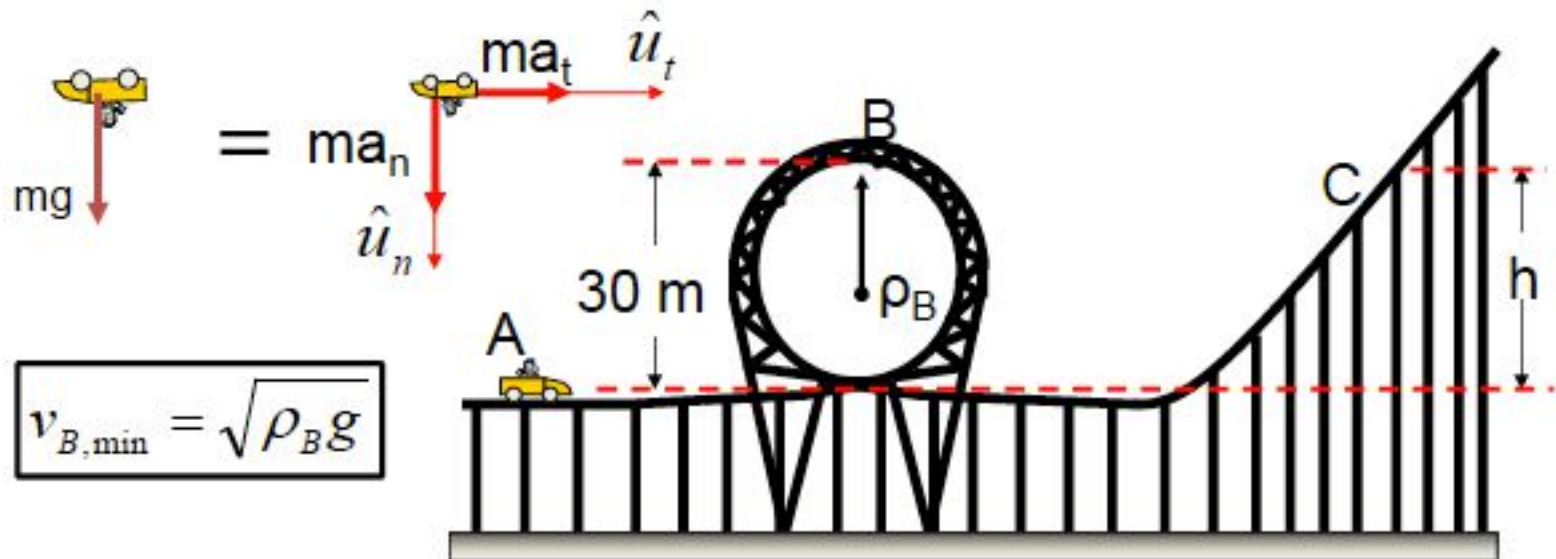
A-t-on des **forces non conservatives** dans le problème ?



L'énergie n'exclut pas les forces !

Même si l'on utilise la méthode de l'énergie pour résoudre un problème, il faut parfois avoir recours à la méthode des forces pour obtenir une information complémentaire.

Ex. : la trajectoire circulaire de la boucle nécessite que la voiturette possède une vitesse minimale au point B pour ne pas tomber. On détermine cette vitesse à l'aide d'un DCL-DCE de la voiturette.



Puissance

Puissance moyenne

$$\bar{P} = \frac{U_{1 \rightarrow 2}}{\Delta t} = \frac{U_{1 \rightarrow 2}}{t_2 - t_1}$$

en watt
1 W = 1 J/s

Puissance instantanée

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Rendement

$$\eta = \frac{P_{\text{fournie}}}{P_{\text{reçue}}}$$

Comment générer plus de puissance sans changer le module de la tension ni la vitesse ?



Votre boîte à outils s'agrandit...

La quantité de mouvement est un outil supplémentaire pour résoudre des problèmes.



Cinématique

(liens entre a , v et x , coordonnées N/T, mouvement relatif, mouvement contraint)

2^e loi de Newton
(translation)

Énergie
mécanique

Quantité de
mouvement

En vous exerçant, vous devrez déterminer quel outil il est préférable d'appliquer dans une situation donnée.

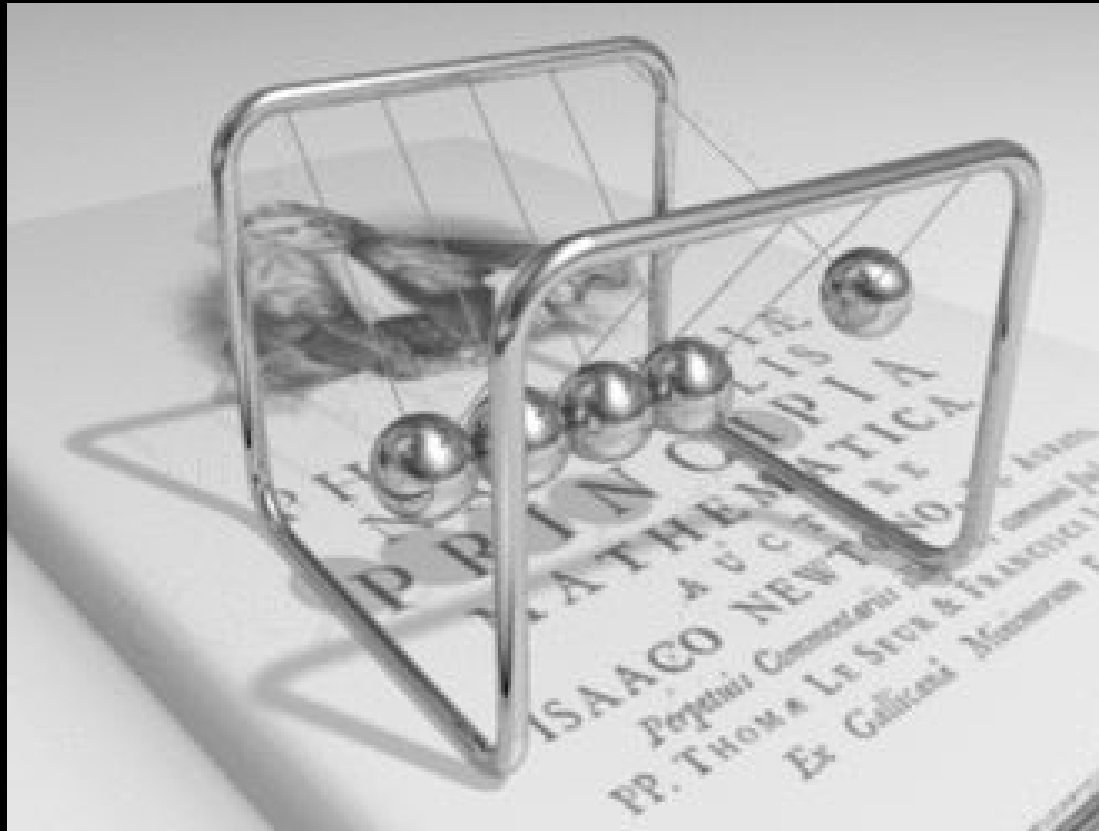
Plan de la semaine

- **Quantité de mouvement (QM)**
 - QM d'une particule
 - Principe impulsion-QM
 - Conservation de la QM
 - Forces impulsives et collisions
- **Systèmes de particules et corps rigides**
 - Centre de masse et QM d'un système de particules
 - 2^e loi de Newton

Quantité de mouvement (QM)

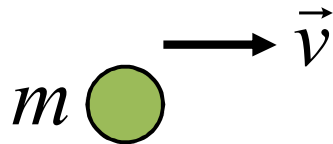
Nom anglais : *[linear] momentum*

Symbole : \vec{L} (souvent \vec{p} en anglais)



Quantité de mouvement – Définition

La QM d'une particule est le produit de sa masse et de sa vitesse.



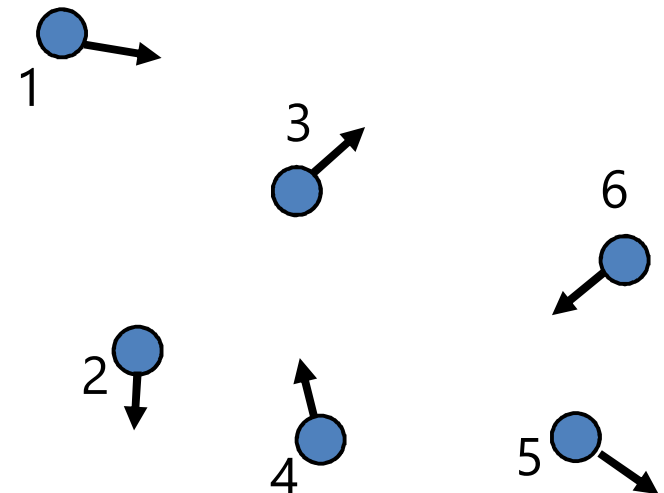
Quantité vectorielle

$$\vec{L} = m\vec{v}$$

Unité : kg·m/s

La QM d'un système de particules est la somme des QM individuelles de chaque particule.

$$\vec{L}_{tot} = \sum m_i \vec{v}_i$$

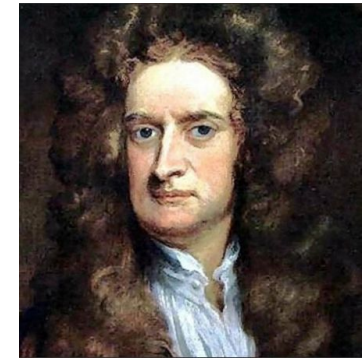
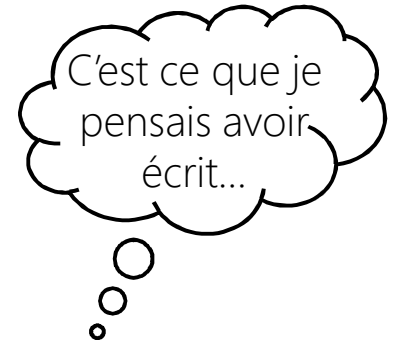


QM et 2^e loi de Newton

En fait, la 2^e loi de Newton s'écrit de façon plus générale en utilisant la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

La **résultante des forces externes** qui s'appliquent sur un système est égale au **taux de variation de QM** du système.



En intégrant entre deux temps t_1 et t_2 , on trouve :

Principe impulsion-quantité de mouvement

Variation
de QM

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt$$

Impulsion

Forces externes

Deux cas possibles

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt$$

Système isolé ou pseudo-isolé

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = 0$$

La quantité de mouvement du système est conservée à tout instant !

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Système à résultante non nulle

$$\sum \vec{F} \neq \vec{0}$$

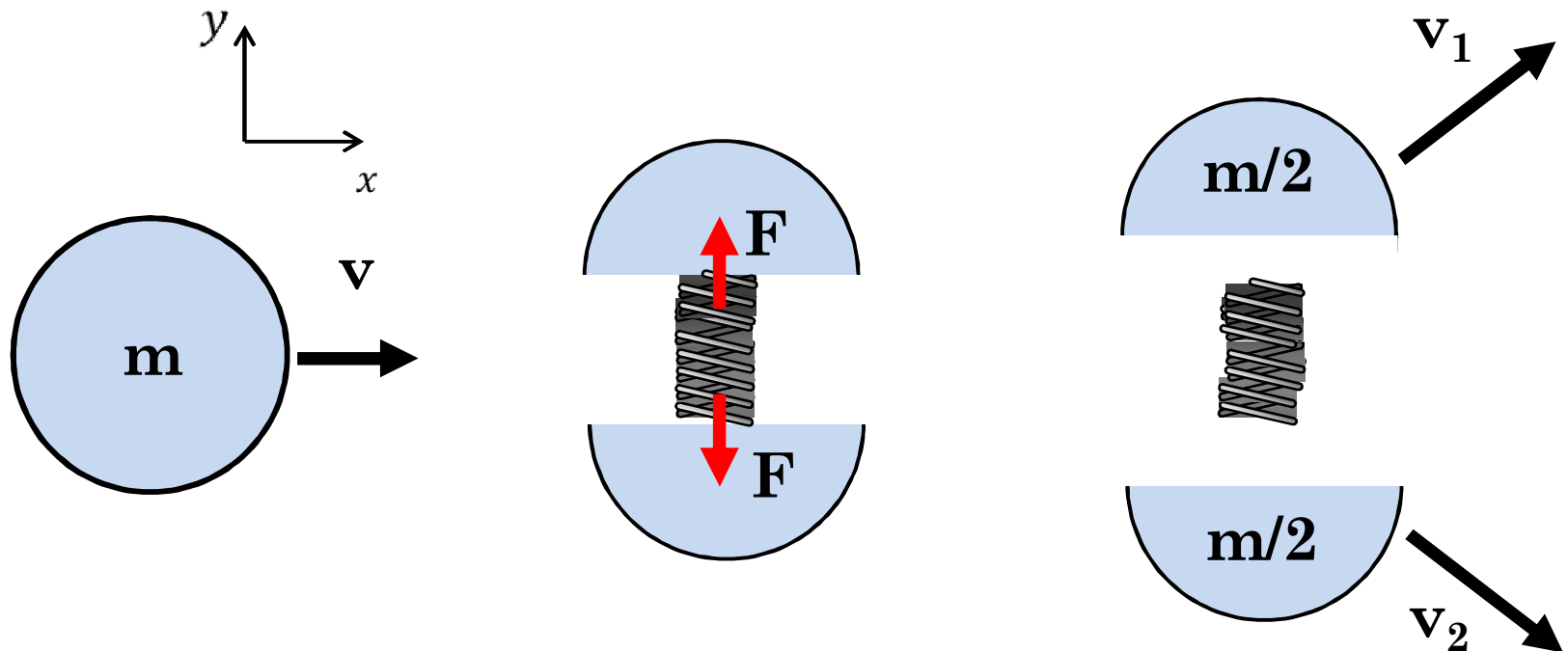
La quantité de mouvement du système change d'une quantité égale à l'impulsion.

Définition de l'impulsion

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} dt = \Delta \vec{L}$$

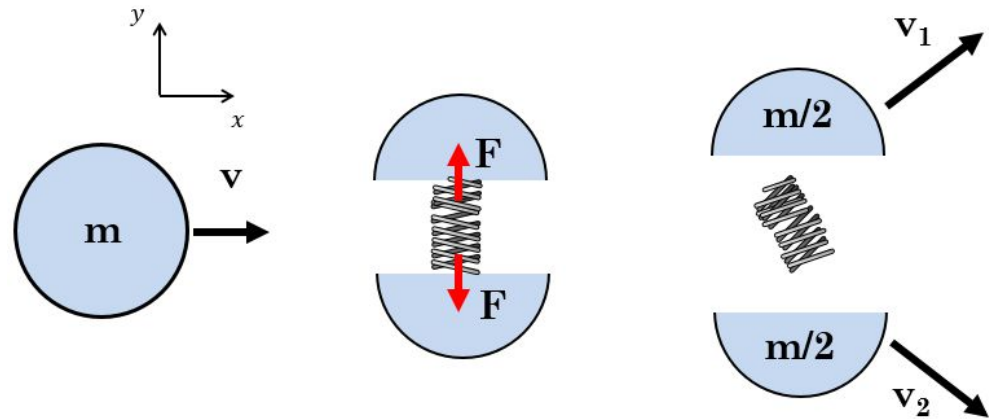
Quantité de mouvement – Exemple

Une sphère de masse m se déplace vers la droite dans l'espace intersidéral. Soudainement, la sphère se sépare en deux demi-sphères (un ressort comprimé à l'intérieur de la sphère est relâché). La quantité de mouvement est-elle conservée ?



Quantité de mouvement – Exemple

Avant de répondre, il faut
définir le système étudié.



Sphère entière

La sphère ne subit pas de force externe
(ressort : forces internes). Sa **QM est conservée**.

$$m\vec{v} = \frac{m}{2}\vec{v}_1 + \frac{m}{2}\vec{v}_2$$

Demi-sphère du haut

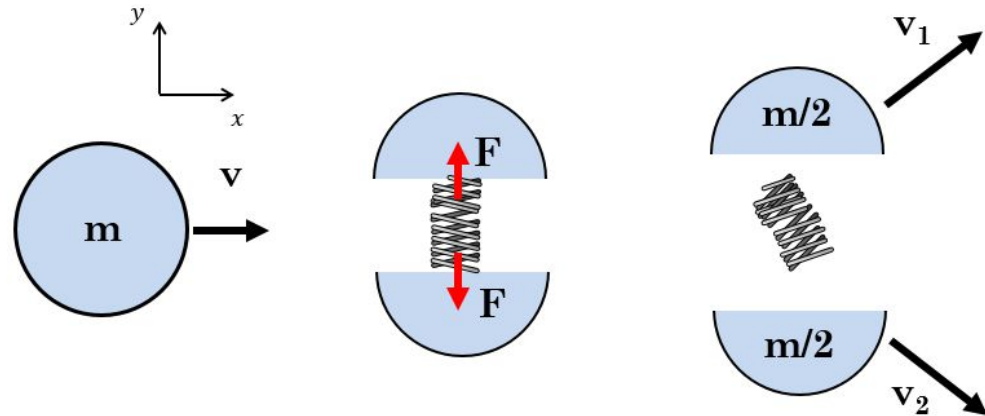
La demi-sphère subit la force du ressort qui est une force
externe pour ce système. Sa **QM n'est pas conservée**.

$$\frac{m}{2}\vec{v} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \frac{m}{2}\vec{v}_1$$

Quantité de mouvement – Exemple

Même si la QM n'est pas globalement conservée, **elle peut être conservée selon un axe particulier.**

(C'est un vecteur!)



Demi-sphère du haut (selon x)

Elle ne subit pas de force externe selon x.

La **composante de sa QM selon x est conservée.**

$$\frac{m}{2} v = \frac{m}{2} v_{1x} \Rightarrow \boxed{v = v_{1x}}$$

Demi-sphère du haut (selon y)

Elle subit la force du ressort selon y.

La **composante de sa QM selon y n'est pas conservée.**

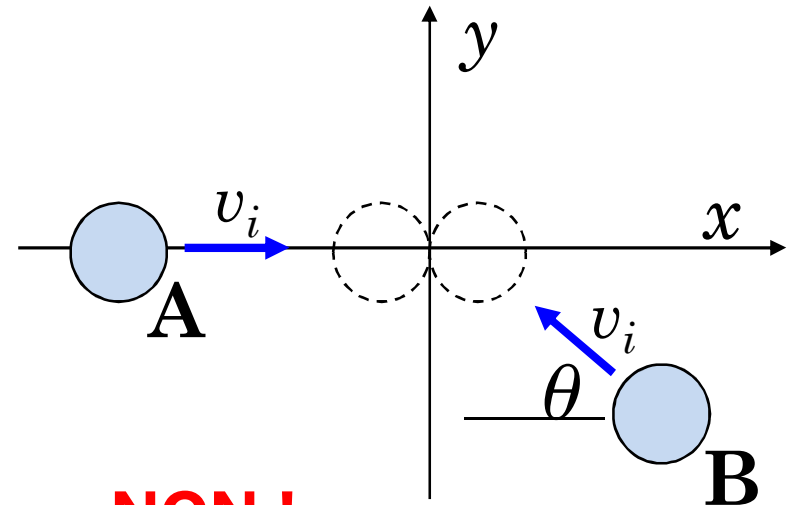
$$0 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = \frac{m}{2} v_{1y} \xRightarrow{F_y = F} \boxed{v_{1y} = \frac{1}{m/2} \int_{t_1}^{t_2} F dt}$$

Comment attaquer ce problème ?

Deux billes identiques A et B de masse m se déplacent avec des vitesses de même module v_i et entrent en collision.

Déterminez les **vecteurs vitesses des billes** après la collision.

Est-ce que l'énergie mécanique totale des deux billes est toujours conservée entre les instants juste avant et juste après la collision ?



NON !

Collision élastique

Lors d'une collision élastique, l'énergie mécanique totale est conservée.

Collision inélastique

Lors d'une collision inélastique, l'énergie mécanique totale **n'est pas** conservée.

Collision parfaitement inélastique

Collision inélastique où les objets restent solidaires après l'impact.

Pertes d'énergie mécanique lors d'une collision

**En pratique, la majorité des collisions sont inélastiques.
Qu'est-ce qui cause les pertes d'énergie ?**

Les forces (internes) exercées par un corps sur l'autre génèrent des pertes d'énergie sous forme de :

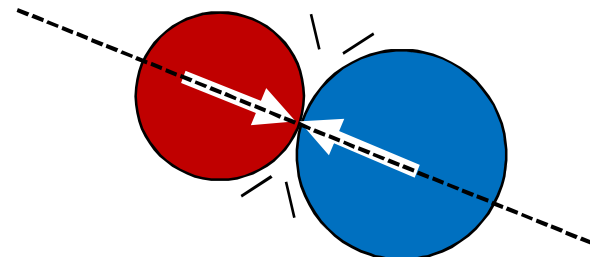
- Bruit (onde acoustique) ;
- Lumière (onde ÉM) ;
- Chaleur (augmentation de la température) ;
- Déformation plastique (changement irréversible de la structure du matériau).



Bubble football

<https://www.youtube.com/watch?v=cl98-HwR15s>

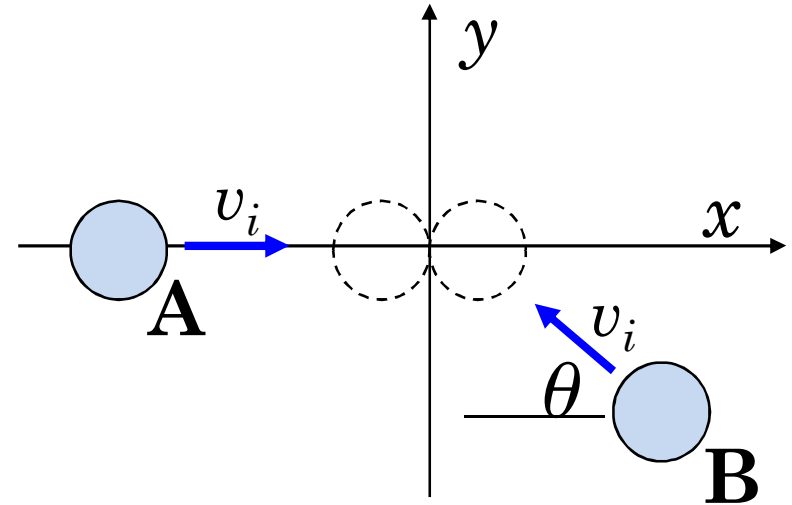
Chaque corps exerce une force sur l'autre corps (action-réaction). Ces forces peuvent produire des pertes d'énergie mécanique.



De retour au problème...

Deux billes identiques A et B de masse m se déplacent avec des vitesses de même module v_i et entrent en collision.

Déterminez les **vecteurs vitesses des billes** après la collision.



Que la collision soit élastique ou inélastique, la méthode de l'énergie est une méthode scalaire (1 seule équation) qui permettrait seulement de trouver les normes des vitesses et non pas leur orientation (vecteurs).

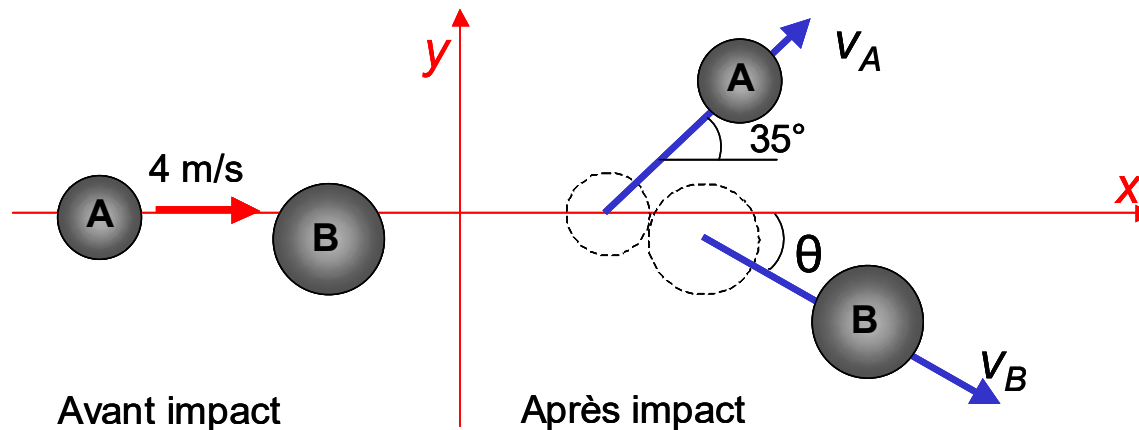


Nous avons besoin d'une nouvelle loi de conservation vectorielle pour résoudre : la conservation de la QM.

Exemple – Collision entre deux billes libres

La bille A frappe la bille B initialement au repos. On observe que la bille A repart avec une vitesse orientée à 35° au-dessus de l'horizontale et que la collision est élastique.

Déterminez les grandeurs des vitesses de A et de B après la collision ainsi que l'angle θ .



$$m = m_A = m_B$$

$$v_{Ai} = 4 \text{ m/s}$$

Collision élastique

$$T_f = T_i$$

Quel système étudier ?

On étudie le système formé de A et de B, de sorte que la QM est conservée (aucune force externe n'agit sur le système).

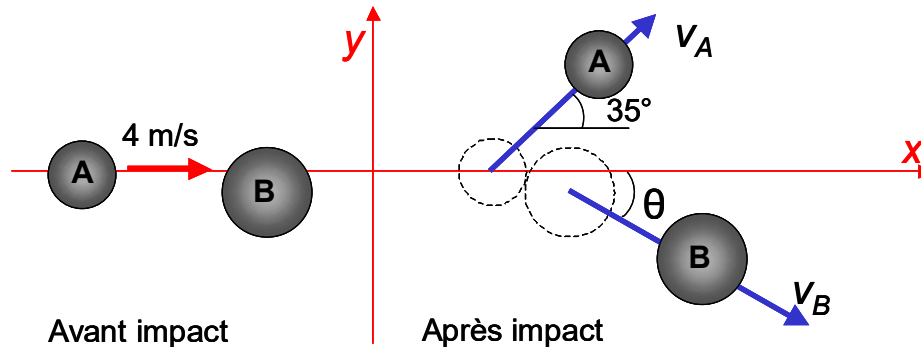
Conservation QM selon x

$$m_A v_{Aix} + \cancel{m_B v_{Bix}} = m_A v_{Afx} + m_B v_{Bfx}$$

Conservation QM selon y

$$m_A v_{Aiy} + \cancel{m_B v_{Biy}} = m_A v_{Afy} + m_B v_{Bfy}$$

Exemple – Collision entre deux billes libres



$$m = m_A = m_B$$

$$v_{Ai} = 4 \text{ m/s}$$

Collision élastique

$$T_f = T_i$$

Conservation de la QM

$$m_A v_{Aix} = m_A v_{Afx} + m_B v_{Bfx} \quad \Rightarrow \quad v_{Ai} = \boxed{v_{Af}} \cos 35^\circ + \boxed{v_{Bf}} \cos \boxed{\theta}$$

$$m_A v_{Aiy} = m_A v_{Afy} + m_B v_{Bfy} \quad \Rightarrow \quad 0 = \boxed{v_{Af}} \sin 35^\circ - \boxed{v_{Bf}} \sin \boxed{\theta}$$

Collision élastique

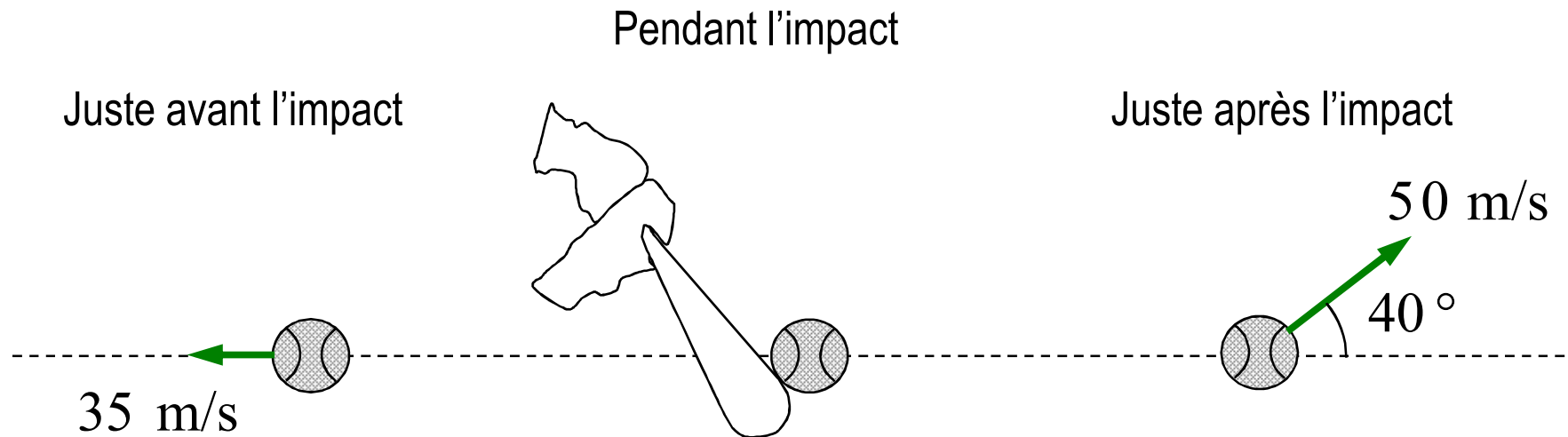
$$\frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{Ai}^2 = \boxed{v_{Af}^2} + \boxed{v_{Bf}^2}$$



Pour résoudre ce système d'équations, il est préférable d'isoler $\sin \theta$ et $\cos \theta$, puis d'utiliser l'identité trigonométrique $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ pour éliminer la variable θ .

Exemple – Collision avec force impulsive

Un joueur de baseball frappe une balle rapide lancée à 35 m/s horizontalement. Juste après l'impact, la balle de 150 g repart à 40° au-dessus de l'horizontale avec une vitesse de 50 m/s. Quelle est la force moyenne exercée par le bâton sur la balle si l'impact dure 5 ms ?



Quel système faut-il étudier ?

La balle (on ne connaît rien sur le bâton !)

La QM du système est-elle conservée entre les instants juste avant et juste après l'impact ?

Non, car la somme des forces externes sur la balle est non nulle pendant l'impact.

Comment calculer la force moyenne exercée par le bâton sur la balle ?

Force moyenne pendant une collision

Lors d'un impact entre deux corps, on cherche souvent à connaître la force subie par chaque corps **pendant la collision**.

Cette force n'est généralement pas constante pendant la durée de l'impact. On définit alors une **force moyenne**.

Force moyenne

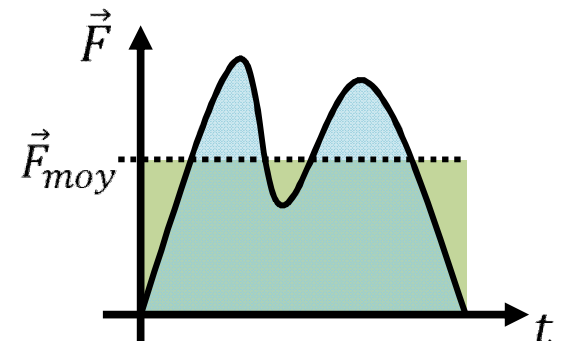
La force moyenne \vec{F}_{moy} est la force constante qui génère la même impulsion qu'une force $\vec{F}(t)$ qui varie dans le temps.

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}(t) dt = \vec{F}_{moy} (t_2 - t_1)$$

Graphique de la force en fonction du temps

L'impulsion est l'aire sous la courbe de $\vec{F}(t)$ pendant un intervalle de temps.

L'aire sous \vec{F}_{moy} (rectangle vert) est égale à l'aire sous $\vec{F}(t)$ (en bleu).



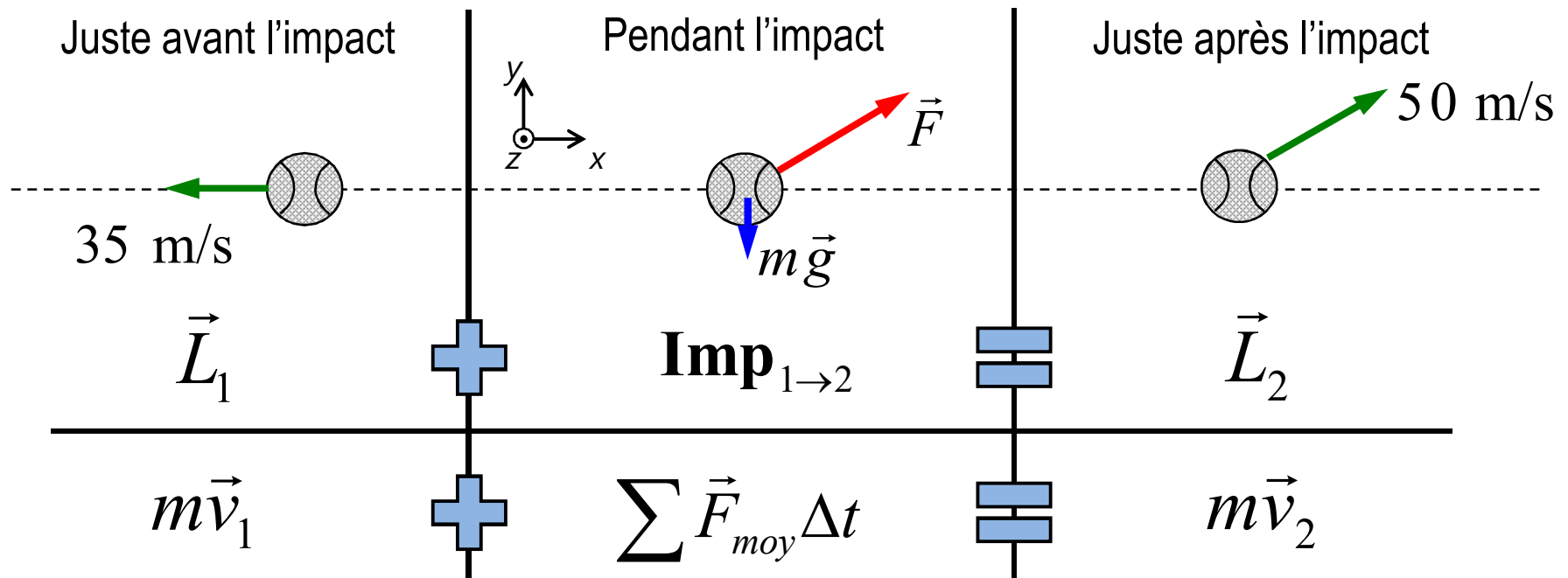
Exemple – Collision avec force impulsive

Principe impulsion-QM sur la balle

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum \vec{F}_{moy} \Delta t$$

La définition de la force moyenne a été utilisée.

DCL de la balle pendant l'impact



Pendant la collision de 5 ms, y'a-t-il une force qui a un effet beaucoup plus important que les autres ?

Force impulsive

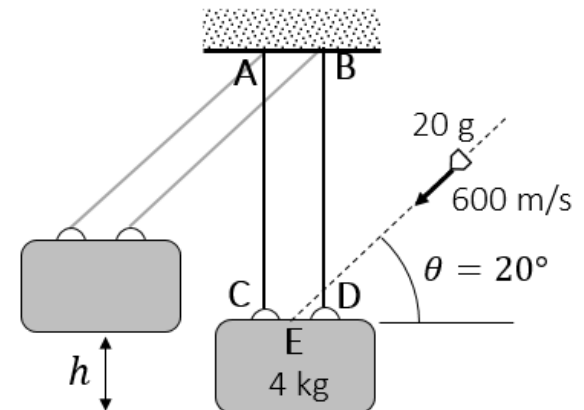
Une **force impulsive** est une force :

- De **module élevé par rapport aux autres forces** qui s'exercent sur un système;
- Qui s'exerce généralement sur une **courte période de temps**.



En PHS1101, les forces impulsives sont créées par des forces de contact (normale, réactions aux appuis, etc.).

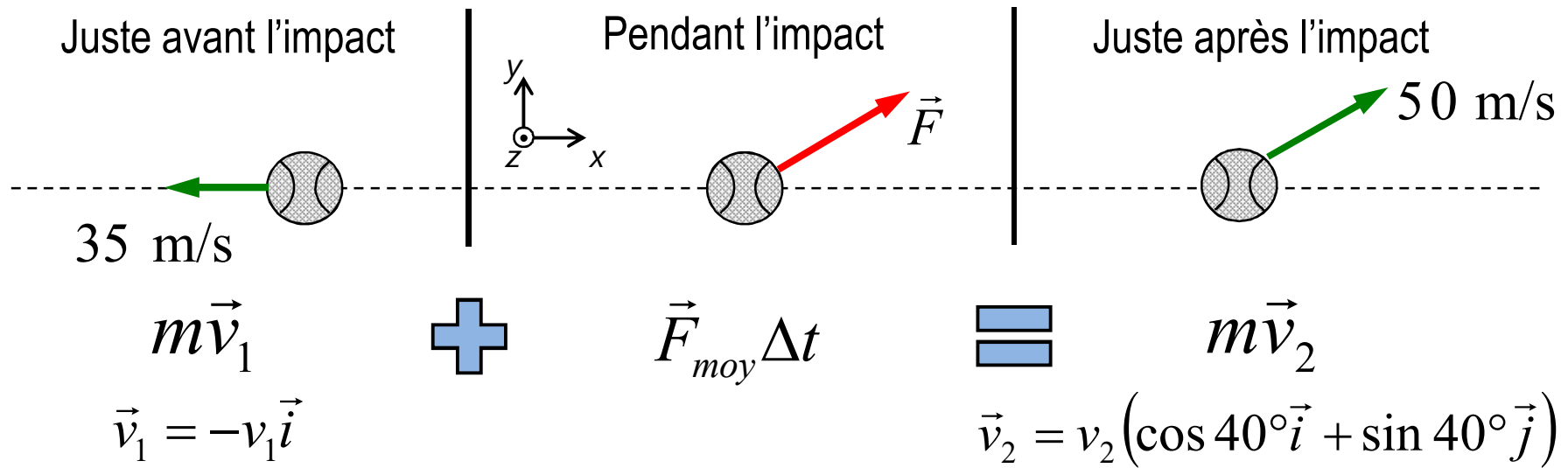
Le poids et la force d'un ressort ne sont pas des forces impulsives, car leur effet est faible (négligeable) lors d'une collision.



Exemple – Collision avec force impulsive

Principe impulsion-QM sur la balle

$$v_1 = 35 \text{ m/s} \quad v_2 = 50 \text{ m/s} \quad m = 0,150 \text{ kg} \quad \Delta t = 0,005 \text{ s}$$



Pendant la collision, on peut négliger le poids de la balle, car ce n'est pas une force impulsive.

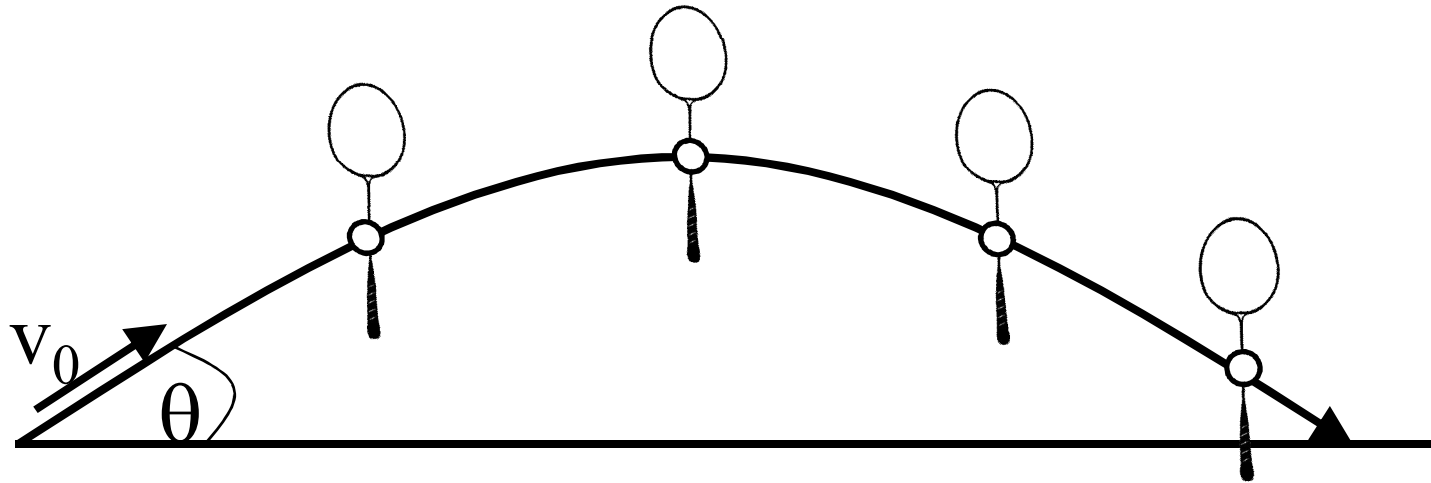
$$\vec{F}_{moy}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{moy} = \frac{m}{\Delta t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = (2,20\vec{i} + 0,964\vec{j}) \text{ kN}}$$

En comparaison, le poids de la balle vaut $mg = 1,47 \text{ N}$, ce qui est négligeable devant F_{moy} .

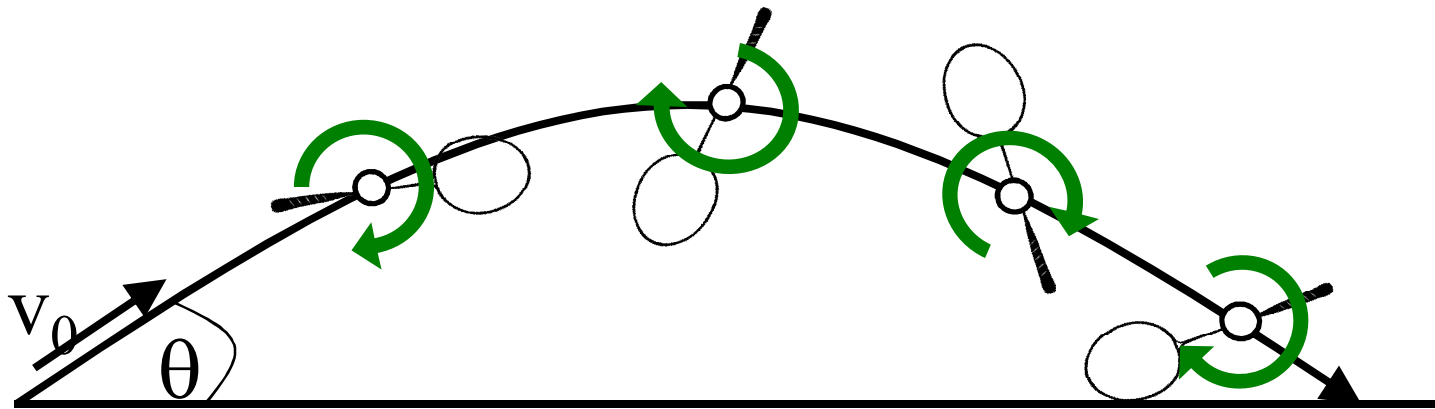
Plan de la semaine

- Quantité de mouvement (QM)
 - QM d'une particule
 - Principe impulsion-QM
 - Conservation de la QM
 - Forces impulsives et collisions
- **Systèmes de particules et corps rigides**
 - Centre de masse
 - QM d'un système de particules
 - 2^e loi de Newton

Introduction à la dynamique du corps rigide



Le **centre de masse** suit toujours la **trajectoire d'une particule ayant la masse du corps**, indépendamment de l'état de rotation du corps sur lui-même.



<http://techtv.mit.edu/videos/3052-center-of-mass-trajectory>

Définition du centre de masse (CM)

Le centre de masse est un **point virtuel** situé à la **position moyenne de la masse** d'un corps ou d'un système.



Le CM est
souvent noté G.

Question

Le poids de la partie droite du balai est-il égal
au poids de la partie gauche ?

NON !

Si la moyenne à un examen est de 70%, cela ne veut pas dire que la moitié
des étudiants a eu plus de 70% et l'autre moitié, moins de 70% !

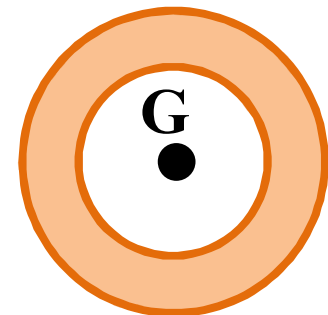
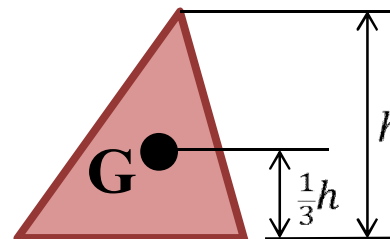
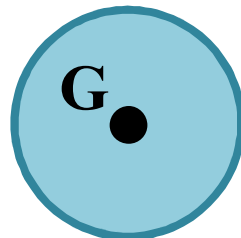
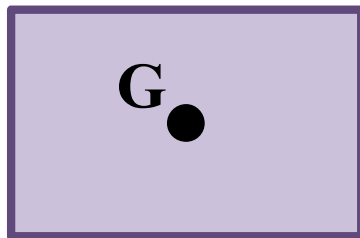
Position du CM

La position du CM d'un corps dépend de la **distribution de la masse** du corps.

Corps homogène

La masse d'un corps homogène est **distribuée uniformément** partout dans son volume (**masse volumique constante**).

Le CM d'un corps homogène coïncide avec son **centroïde** (centre géométrique).



Le CM n'est pas nécessairement situé sur le corps !

Comment déterminer le CM d'un objet avec un fil à plomb : <https://www.youtube.com/watch?v=34AhmNi-uEw>

Position du CM

Le centre de masse est la position moyenne de la masse d'un système.

CM d'un système de particules

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

CM d'un solide (distribution de masse continue)

$$\bar{x} = \frac{\int x \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV} \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho(\mathbf{r}) dV}{\int \rho(\mathbf{r}) dV}$$

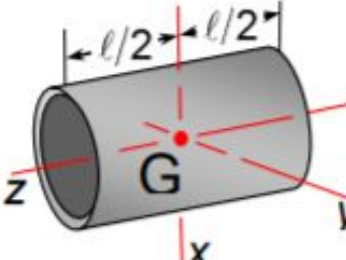
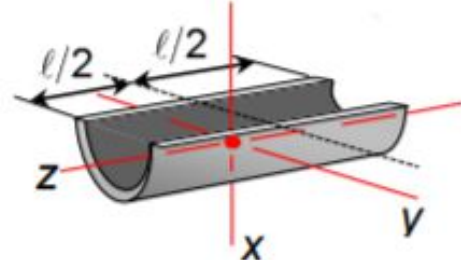
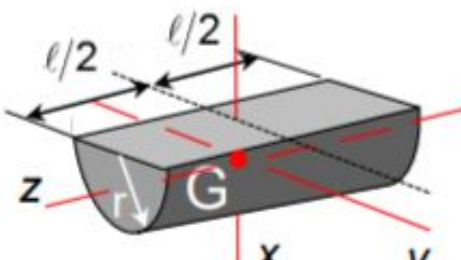
On ne vous demandera pas de calculer des intégrales de volume en PHS1101.



Pour calculer le CM d'un solide composé de plusieurs pièces simples, on traite **chaque pièce comme une particule située au CM de la pièce**, puis on utilise les équations pour un système de particules !

Utilisation du formulaire

Attention à la position et à l'orientation des axes

Corps	Centre de masse	Moments d'inertie
		<p>Cours 9</p> $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = mr^2$
	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{yy} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{yy} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ $I_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$

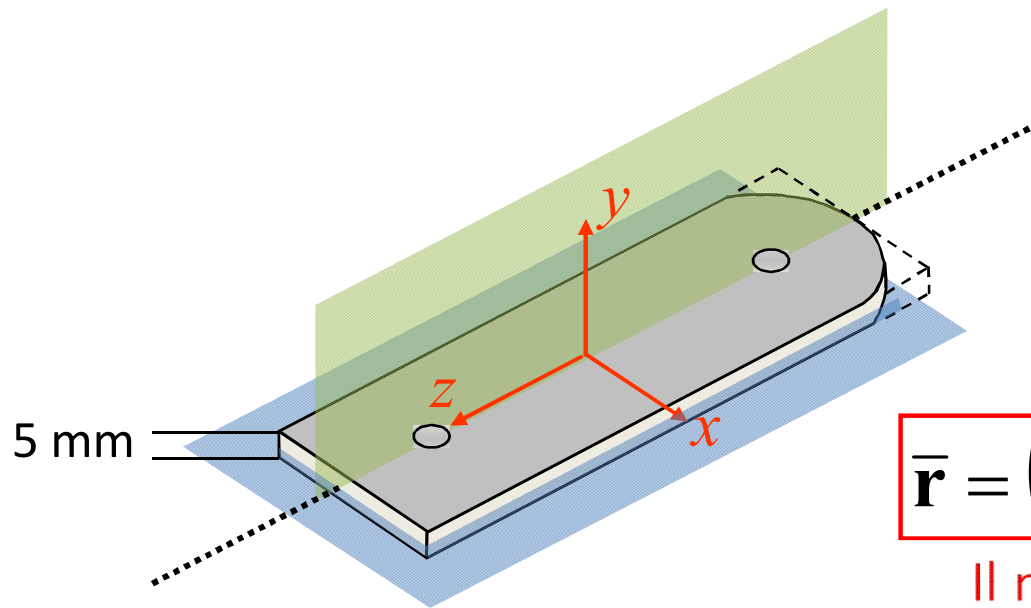
Pour les exemples montrés, les axes passent par le CM (G).

La 2e colonne donne la position du CM par rapport à la base du demi-cylindre.

Pour les corps avec un haut degré de symétrie, rien n'est inscrit dans la 2e colonne puisque la position du CM est le centre géométrique.

Position du CM et symétrie

Si un solide homogène possède un plan de symétrie, alors le CM de l'objet se trouve nécessairement sur ce plan.



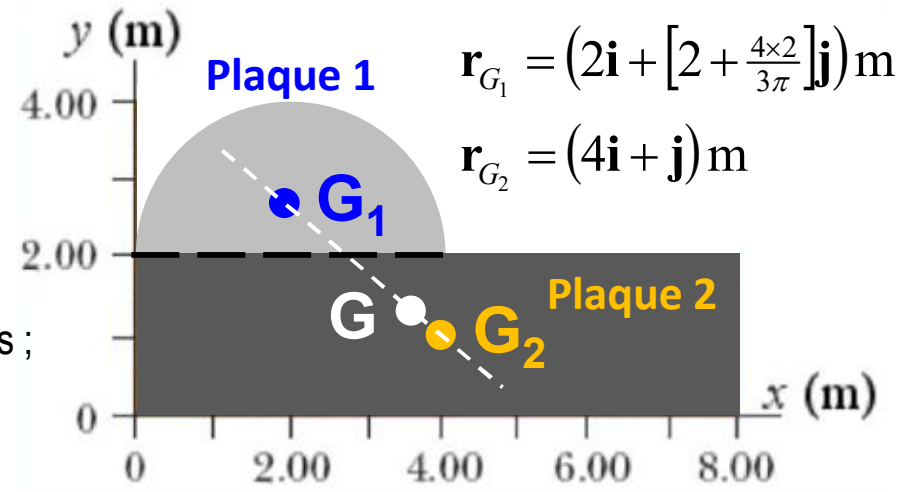
$$\vec{r} = (0\vec{i} - 2,5\vec{j} + \bar{z}\vec{k})\text{mm}$$

Il ne reste qu'à trouver \bar{z} .

Si l'on connaît deux plans de symétrie, alors le CM se trouve sur l'axe où se croisent ces plans.

Exemple – Calcul du centre de masse

Déterminez la position du centre de masse de la pièce composée de deux matériaux homogènes de masses volumiques 400 kg/m^3 (pâle) et 800 kg/m^3 (foncé). L'épaisseur d de la pièce est constante et vaut $0,5 \text{ cm}$.



1. Découpage en solides simples et calcul des masses ;

$$m_1 = \rho_1 V_1 = 400 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \cdot 0,005 = 12,57 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = 800 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 0,005 = 64 \text{ kg}$$

2. Coordonnées des CM de chaque solide simple ;

Formulaire demi-cylindre : $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

3. Calcul du CM de la plaque (voir tableau)

$$\bar{x} = \frac{281,14}{76,57} = 3,67 \text{ m}$$

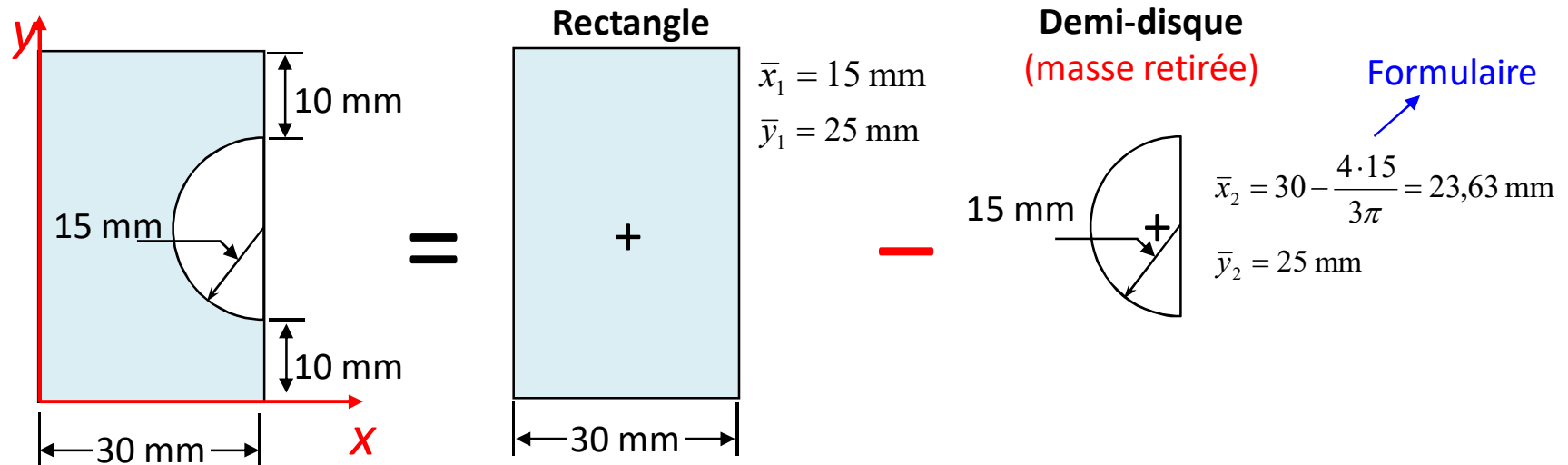
$$\bar{y} = \frac{99,81}{76,57} = 1,30 \text{ m}$$

	$m_i \text{ (kg)}$	$\bar{x}_i \text{ (m)}$	$\bar{y}_i \text{ (m)}$	$m_i \bar{x}_i \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$	$m_i \bar{y}_i \text{ (kg} \cdot \text{m}^2)$
Plaquette 1	12,57	2	2,849	25,14	35,81
Plaquette 2	64	4	1	256	64
Total	76,57			281,14	99,81

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i}$$

Exemple – Décomposition en corps simples

Comment décomposer cette pièce en corps simples pour calculer son centre de masse ?



Lorsque l'on retire de la masse, on calcule le centre de masse avec les équations habituelles en **soustrayant la masse retirée**. Mathématiquement, cela revient à utiliser des masses négatives dans les équations.

La plaque étant symétrique par rapport à l'axe $y=25,0 \text{ mm}$, il ne reste qu'à calculer \bar{x} seulement.

$$\bar{x} = \left(30 \times 50 \times 15 - \frac{\pi \times 15^2}{2} \times 23,63 \right) / \left(30 \times 50 - \frac{\pi \times 15^2}{2} \right)$$

$$\bar{y} = 25,0 \text{ mm}$$

$$\bar{x} = 12,3 \text{ mm}$$

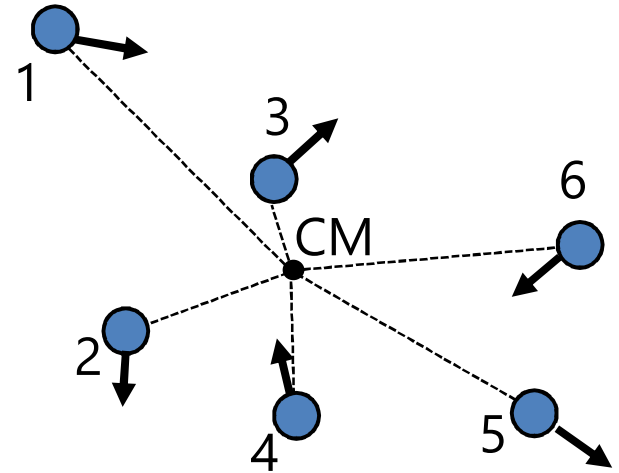
$$\bar{x} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i}$$

Quantité de mouvement et centre de masse

En partant de la définition du CM,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad M = \sum m_i \quad \text{Masse totale du système}$$

on peut la dériver par rapport au temps pour obtenir deux relations.



$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

Vitesse du CM

$$\vec{L}_{tot} = \sum m_i \vec{v}_i$$



$$\vec{L}_{tot} = M\vec{v}_{CM}$$

QM d'un système et vitesse du CM

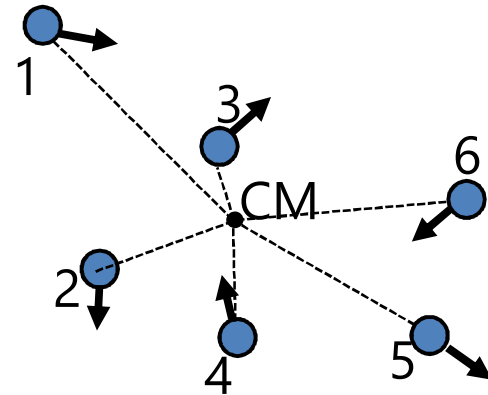
Cette équation vaut aussi pour un corps rigide!

2^e loi de Newton pour un système de particules

En dérivant

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

par rapport au temps, on obtient deux autres relations utiles.



$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

Accélération du CM

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$



$$\sum \vec{F}_i = M \vec{a}_{CM}$$

Théorème du centre de masse



Théorème du centre de masse

Le CM suit la trajectoire d'une particule de masse M (masse totale du système) qui subit la résultante de toutes les forces agissant sur le système.

Conservation de la QM et 2^e loi de Newton

QM d'un système : $\vec{L} = m\vec{v}_{CM}$

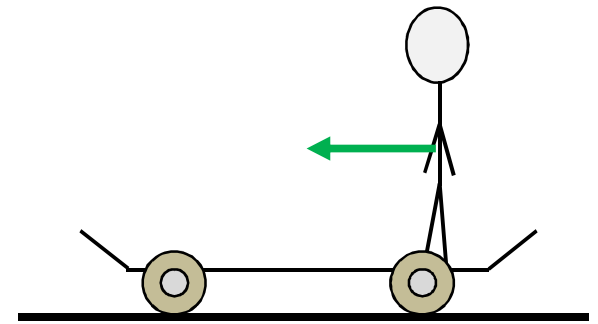
Conservation de la QM

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}$$

2^e loi de Newton

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

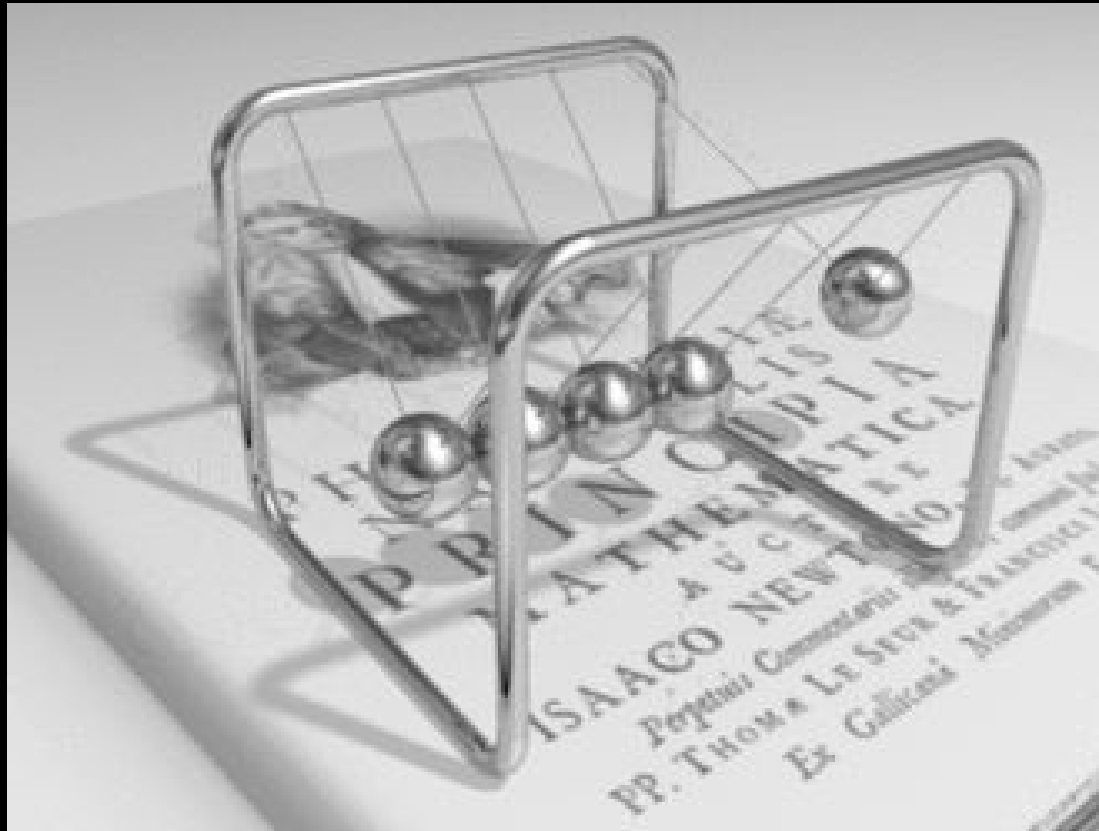
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \text{constante}$$



Si la résultante sur un système est nulle, alors la vitesse de son centre de masse est constante !

Pendule de Newton

Une seule bille s'élève à chaque fois.
Pourquoi n'observe-t-on pas deux billes qui s'élèvent ?



<https://www.youtube.com/watch?v=0LnbyjOyEQ8>

Lois de conservation en résumé

Pour résoudre un problème, il faut souvent utiliser plusieurs **lois de conservation** simultanément...



Condition

Application

Attention !

Énergie
mécanique

$$U_{1 \rightarrow 2, nc} = 0 \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Définir le système.
Forces non
conservatives
(internes et externes).

Quantité de
mouvement

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Définir le système.
Forces externes.

Vous devez être en mesure de définir le système à étudier et à vérifier (et expliquer) si une loi de conservation est valide ou non en appliquant les critères ci-dessus.