PHS 1101
Mécanique pour ingénieurs

Cours 11
Mouvement plan et dynamique des corps rigides en 2D

Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

Systèmes de particules variables

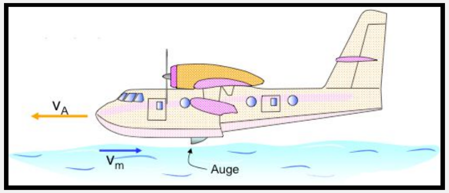
Débits volumique et massique pour un fluide dans une conduite

$$\left|\frac{dV}{dt}\right| = Sv \qquad \mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S v$$

Systèmes à masse variable

$$\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}) = m(t)\vec{a}$$

p : particules ajoutées ou enlevées du système

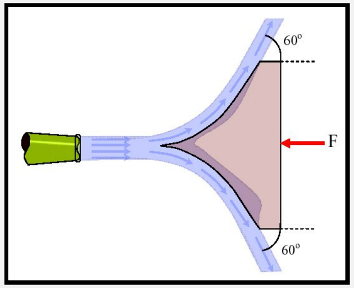


Force exercée par un courant sur un objet

$$\vec{F} = \left|\frac{dm}{dt}\right|(\vec{v_e} - \vec{v_s})$$

e : particules qui entrent

s : particules qui sortent



Si l'objet se déplace à vitesse constante, il faut travailler dans le référentiel où l'objet est **immobile**

Plan de la semaine

- **Mouvement plan d'un corps rigide**
  - **Décomposition translation-rotation**
  - Centre instantané de rotation
- Dynamique de rotation dans un plan
  - 2e loi de Newton en rotation
  - Roulement sans glissement

Dans un monde éloigné de tout, un haltère parfaitement rigide formé de deux masses est en mouvement…

Le centre de masse est immobile et les masses tournent autour.

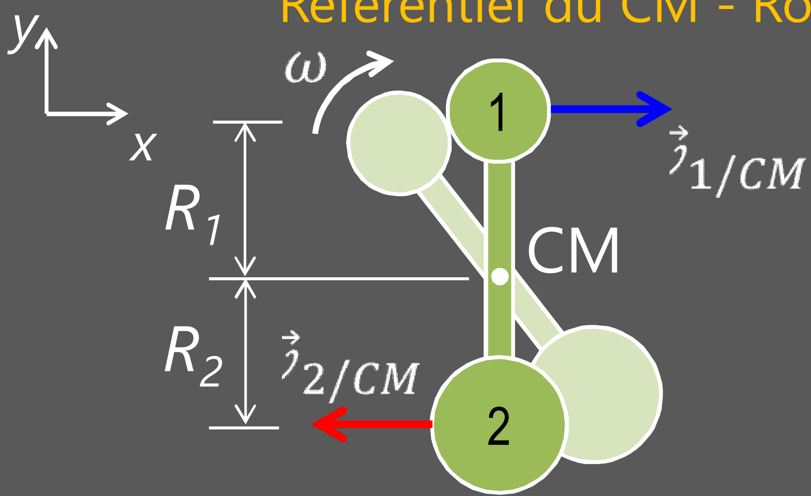
Rotation autour du CM

On donne une petite poussée vers la droite au centre de masse…

Translation du CM + Rotation autour du CM

Situation 1 – On connait $\vec{v}_{CM}$ et ω
Quelles sont les vitesses des masses quand l'haltère est vertical ?

Référentiel du CM - Rotation pure autour du CM



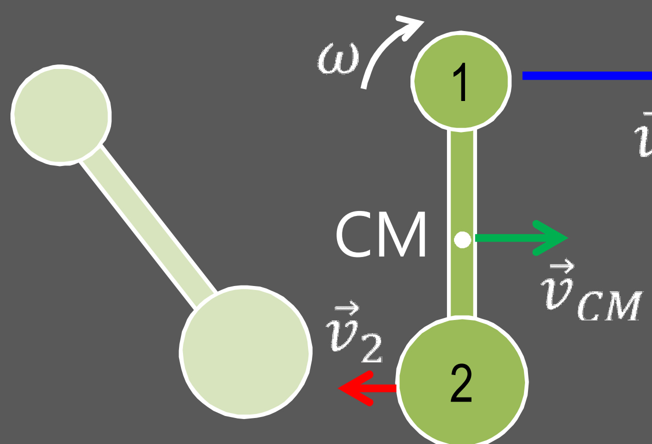
$$\vec{v}_{1/CM} = \omega R_1 \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{2/CM} = -\omega R_2 \vec{\imath}$$

Puisque le CM est immobile, alors ce sont les vitesses relatives au CM. (mouvement circulaire)

Référentiel de « l'espace » – Translation CM + Rotation autour du CM



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{1/CM}\\ &= (v_{CM} + \omega R_1)\vec{\imath}\end{aligned}}$$

$$\vec{v}_{CM} = v_{CM}\vec{\imath}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{2/CM}\\ &= (v_{CM} - \omega R_2)\vec{\imath}\end{aligned}}$$

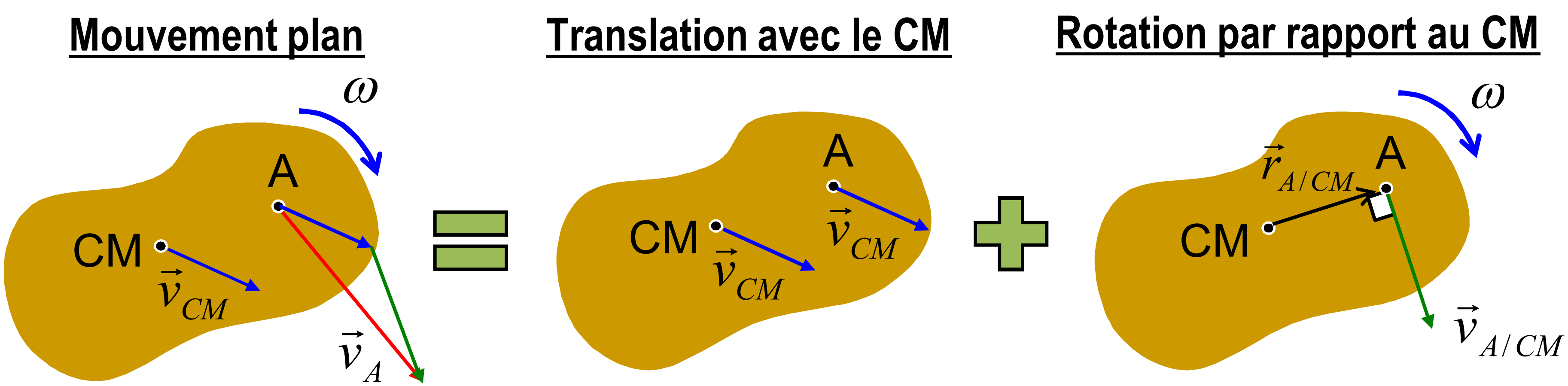
Décomposition translation-rotation

Le mouvement d'un corps rigide peut être entièrement décrit par :

- Le vecteur vitesse $\vec{v}_{CM}$ de son centre de masse ;
- Sa vitesse angulaire ω.

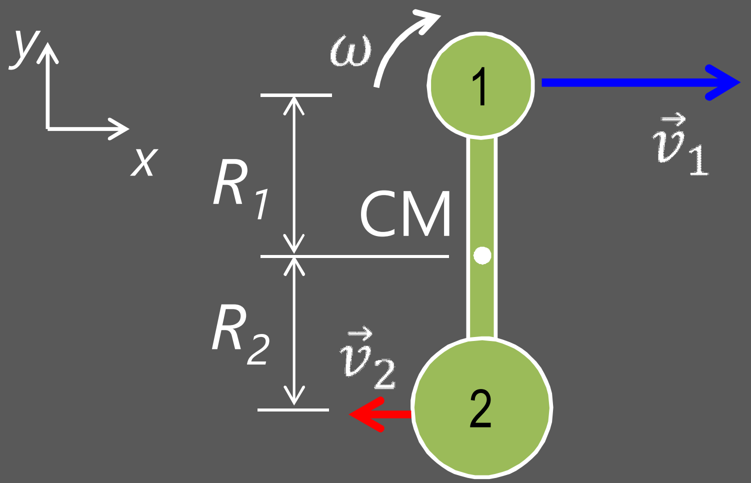
Quelle est la vitesse d'un point A quelconque connaissant la vitesse du CM et la vitesse angulaire ?

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{A/CM}}$$



$$v_{A/CM} = \omega r_{A/CM}$$

Situation 2 – On connait $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (référentiel de « l'espace ») *Quelle est la vitesse angulaire de l'haltère ?*



On a vu que :

$$\vec{v}_{1/CM} = \omega R_1 \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_{2/CM} = -\omega R_2 \vec{\imath}$$

$$\boxed{\omega = \frac{v_{1/CM}}{r_{1/CM}} = \frac{v_{2/CM}}{r_{2/CM}}}$$

On utilise le mouvement relatif :

$$\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_{1/CM} - \vec{v}_{2/CM} = \omega(R_1 + R_2)\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_{1/2} = \vec{r}_{1/CM} - \vec{r}_{2/CM} = (R_1 + R_2)\vec{\jmath}$$

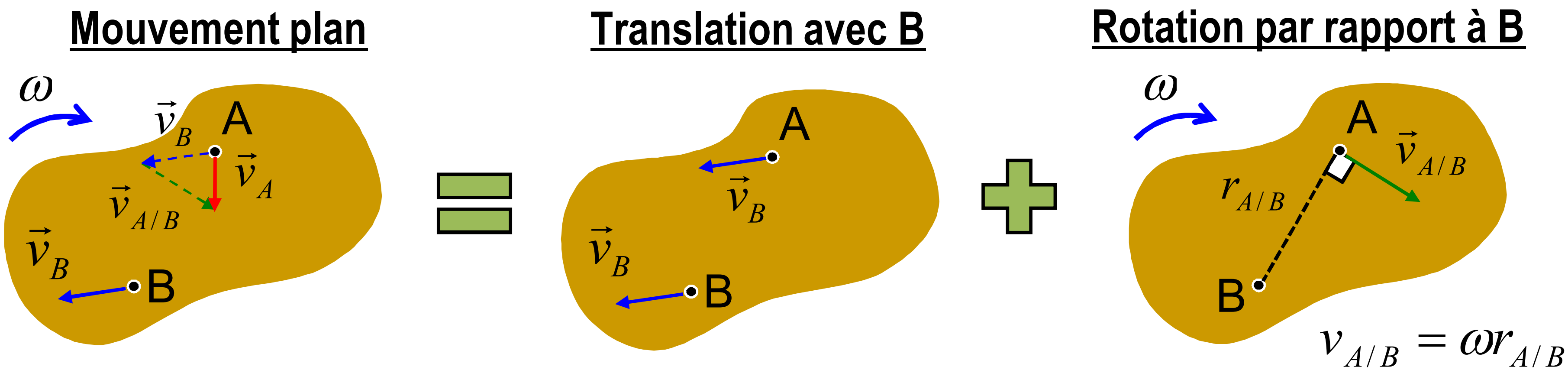
$$\boxed{\omega = \frac{v_{1/2}}{r_{1/2}}}$$

Si on connaît les vecteurs vitesses de deux points d'un corps rigide, alors on connaît sa vitesse angulaire !

Décomposition translation-rotation

On peut appliquer la décomposition translation-rotation en utilisant **n'importe quel point du corps rigide comme référence** (pas nécessairement le CM).

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}$$



Pourquoi la vitesse de relative entre deux points A et B sur un corps rigide s'exprime-t-elle avec l'équation du mouvement circulaire $v_{A/B} = \omega r_{A/B}$?

Un corps rigide ne se déforme pas : la distance entre deux points du corps est toujours la même. Si on se met dans le référentiel du point B (dans lequel il est immobile), alors A ne peut que suivre une trajectoire circulaire autour de B.

Expression vectorielle de la vitesse de rotation

On exprime la vitesse de rotation d'un point autour d'un axe de manière élégante en utilisant le produit vectoriel.

Vitesse de rotation de A par rapport à un axe passant par B

$$\boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

Propriété du produit vectoriel

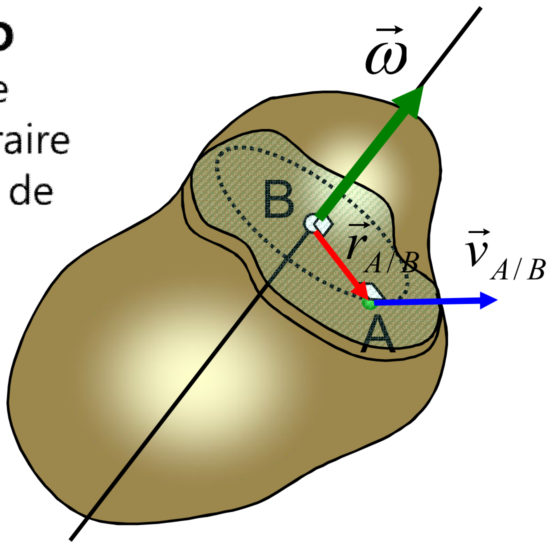
La vitesse relative $\vec{v}_{A/B}$ est perpendiculaire au plan formé par l'axe de rotation et au vecteur rayon $\vec{r}_{A/B}$.

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation. Son sens est dicté par la règle de la main droite.

Exemple en 3D

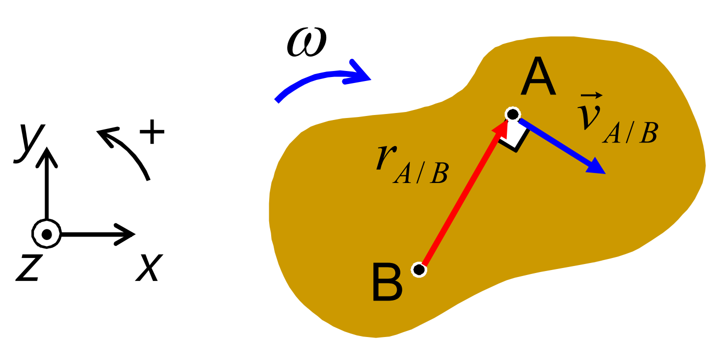
Le corps tourne en sens antihoraire autour de l'axe de rotation.

Avec le pouce orienté selon $\vec{\omega}$, les doigts s'enroulent dans le sens de rotation du corps.



Exemple en 2D

Le vecteur $\vec{\omega}$ entre ou sort de la page. Ici, on aurait $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ (sens horaire).



Mouvement d'un corps rigide
(en résumé)

On peut toujours exprimer le mouvement d'un point A en utilisant un autre point B et la relation de **mouvement relatif** vue dans le cours sur la cinématique.

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}}$$

Relation générale qui s'applique à n'importe quel contexte.

Si A et B sont sur un même **corps rigide**, alors parce que la **distance entre A et B est constante**, alors A suit une **trajectoire circulaire** dans le référentiel de B.

$$\boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

Relation spécifique à deux points A et B sur un même corps rigide.

En combinant les relations précédentes :

Décomposition translation-rotation

$$\boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}}$$

Relation qui régit le mouvement d'un corps rigide

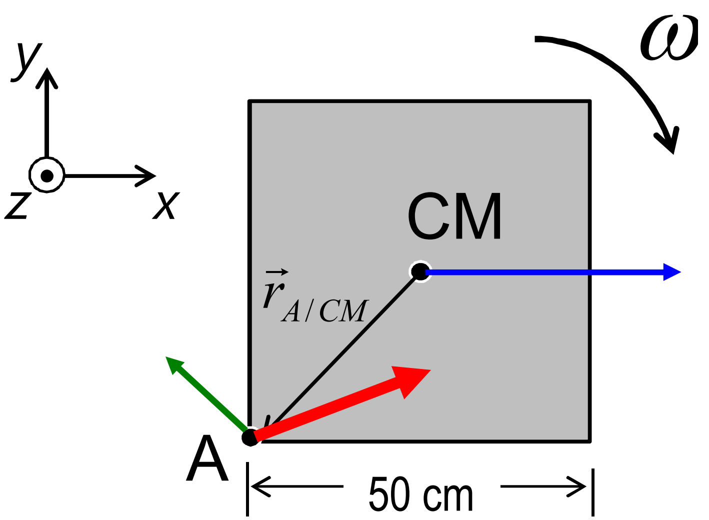
Exemple 1 – Plaque en rotation

Une plaque carrée de 50 cm de côté se déplace à 3 m/s vers la droite tout en tournant sur elle-même en sens horaire avec une vitesse angulaire de 4 rad/s. Quelle est la vitesse du coin inférieur gauche rapport au sol à l'instant représenté sur la figure ?

Signe : sens horaire

$$\vec{v}_{CM} = 3\vec{i}\ \text{m/s} \qquad \vec{\omega} = -4\vec{k}\ \text{rad/s}$$

$$\vec{r}_{A/CM} = \left(-0{,}25\vec{i} - 0{,}25\vec{j}\right)\text{m}$$



Décomposition translation-rotation

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{A/CM}$$

$$\vec{v}_{A/CM} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/CM} = \left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\text{m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_A = 3\vec{i} + -\vec{i} + \vec{j} = \left(2\vec{i} + \vec{j}\right)\text{m/s}}$$

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

Une tige de longueur L = 1 m glisse dans les deux fentes sans frottement ci-dessous. Si la vitesse horizontale au point A est de 5 m/s à l'instant représenté sur la figure, déterminez la vitesse angulaire de la tige et la vitesse du point B.

Information connue ? $v_A = 5\text{ m/s}$ $L = 1\text{ m}$ $\vec{r}_{B/A} = L\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$

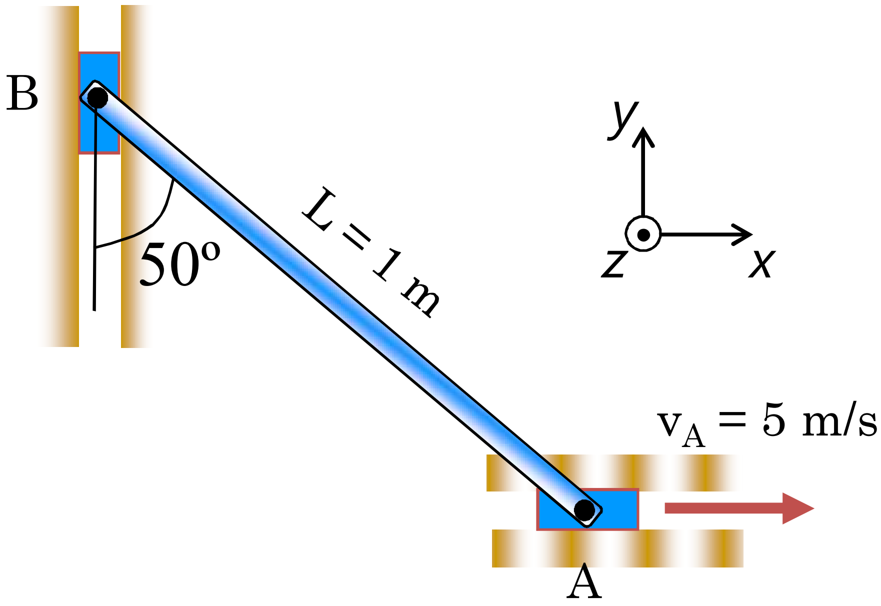
Attention : de A vers B

On cherche ? ω $\vec{v}_B$

Contraintes du mouvement

A bouge horizontalement. $\vec{v}_A = 5\vec{i}\text{ m/s}$

B bouge verticalement. $\vec{v}_B = -v_B\vec{j}$

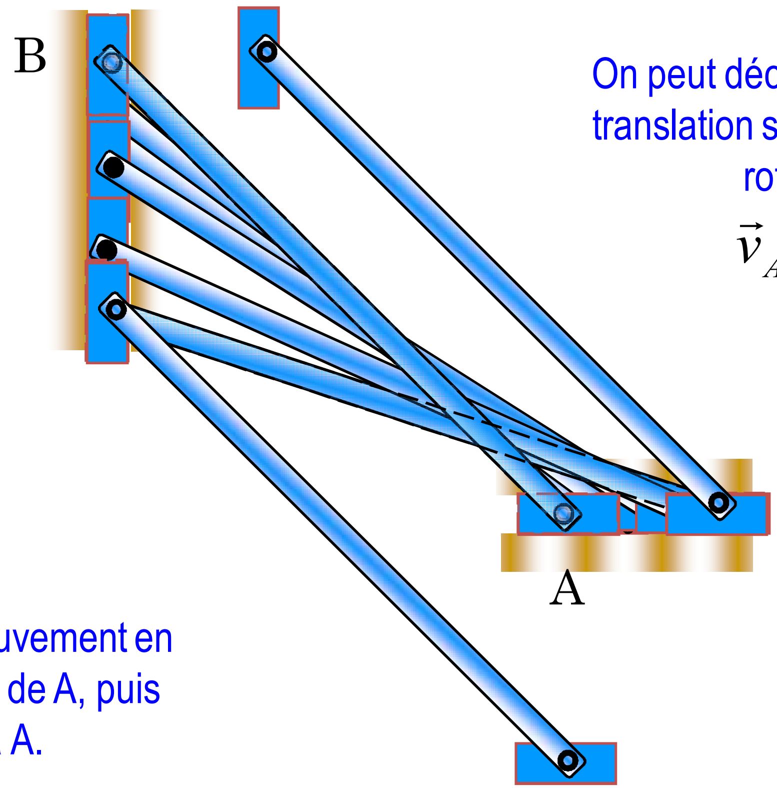


Stratégie

1. Exprimer $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$;
2. En déduire deux équations (une en x et une en y) pour trouver les deux inconnues.

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

La stratégie pour ce problème est de décomposer le mouvement plan en une translation et en une rotation.



On peut décomposer le mouvement en une translation suivant la vitesse de B, puis une rotation par rapport à B.

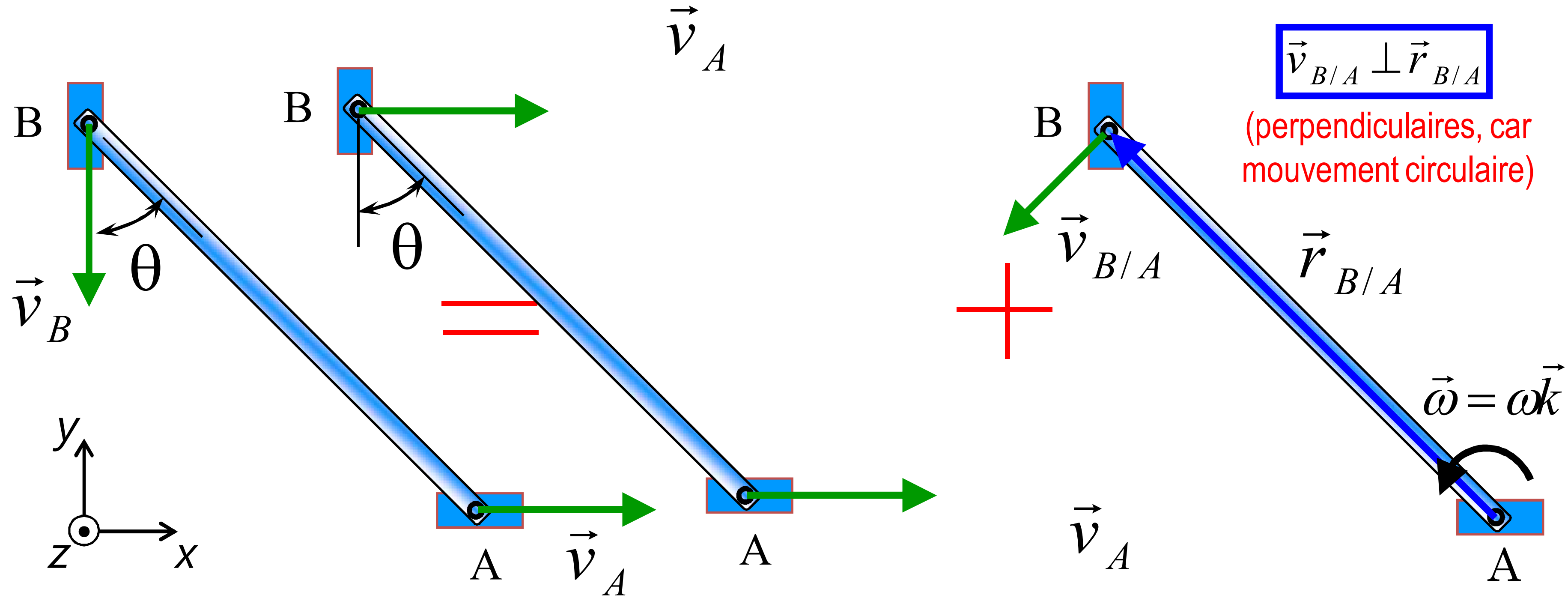
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

On peut aussi décomposer le mouvement en une translation suivant la vitesse de A, puis une rotation par rapport à A.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Les deux approches sont équivalentes !

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités



Mouvement plan de B $\vec{v}_B$ = **Translation de A** $\vec{v}_A$ + **Rotation de B par rapport à A (A est fixe)**

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

Une tige de longueur *L* = 1 m glisse dans les fentes ci-contre. Si la vitesse horizontale au point A est de 5 m/s à l'instant représenté sur la figure, déterminez la vitesse angulaire de la tige et la vitesse du point B.

$$L = 1\ \text{m}$$

$$\vec{v}_A = 5\vec{i}\ \text{m/s} \qquad \vec{v}_B = -v_B\vec{j}$$

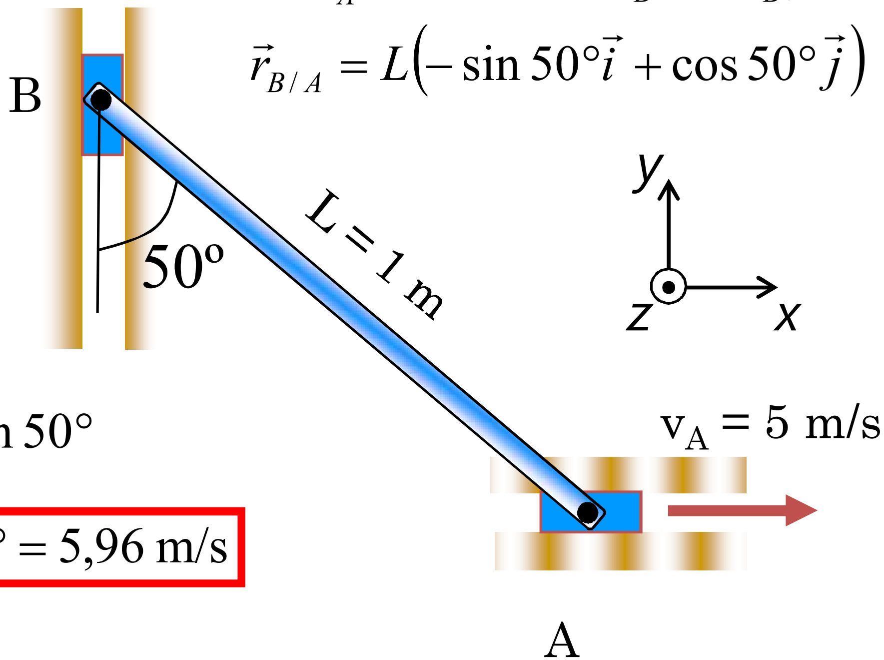
$$\vec{r}_{B/A} = L\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k}\times 1\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$$

$$-v_B\vec{j} = 5\vec{i} + -\omega\sin 50°\vec{j} - \omega\cos 50°\vec{i}$$

$$-v_B\vec{j} = \left(5 - \omega\cos 50°\right)\vec{i} - \omega\sin 50°\vec{j}$$



Selon *x* :

$$0 = 5 - \omega\cos 50°$$

$$\boxed{\omega = \frac{5}{\cos 50°} = 7{,}78\ \text{rad/s}}$$

Selon *y* :

$$-v_B = -\omega\sin 50°$$

$$\boxed{v_B = \omega\sin 50° = 5{,}96\ \text{m/s}}$$

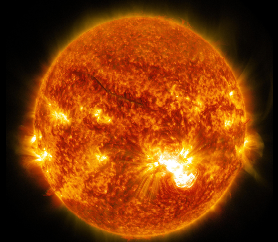
Vitesse angulaire de la Terre

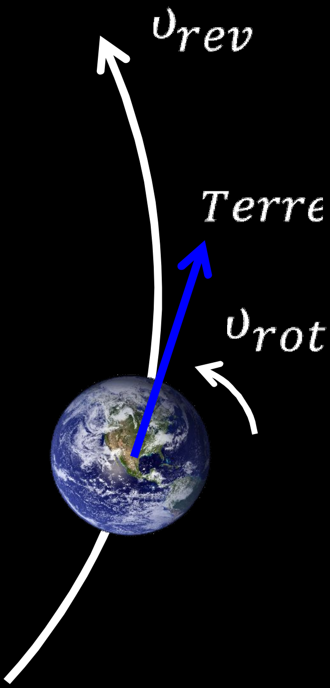
Fait #1 – La Terre tourne autour du Soleil au rythme d'une révolution par 365,25 jours.

Fait #2 – La Terre tourne sur elle-même au rythme d'une rotation par 23 h 56 m 4 s.

Fait #3 – Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Hypothèse – La Terre est un corps rigide.





Quelle est la vitesse angulaire de la Terre ?

(celle qui permet d'écrire $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ avec A et B deux points sur la Terre)

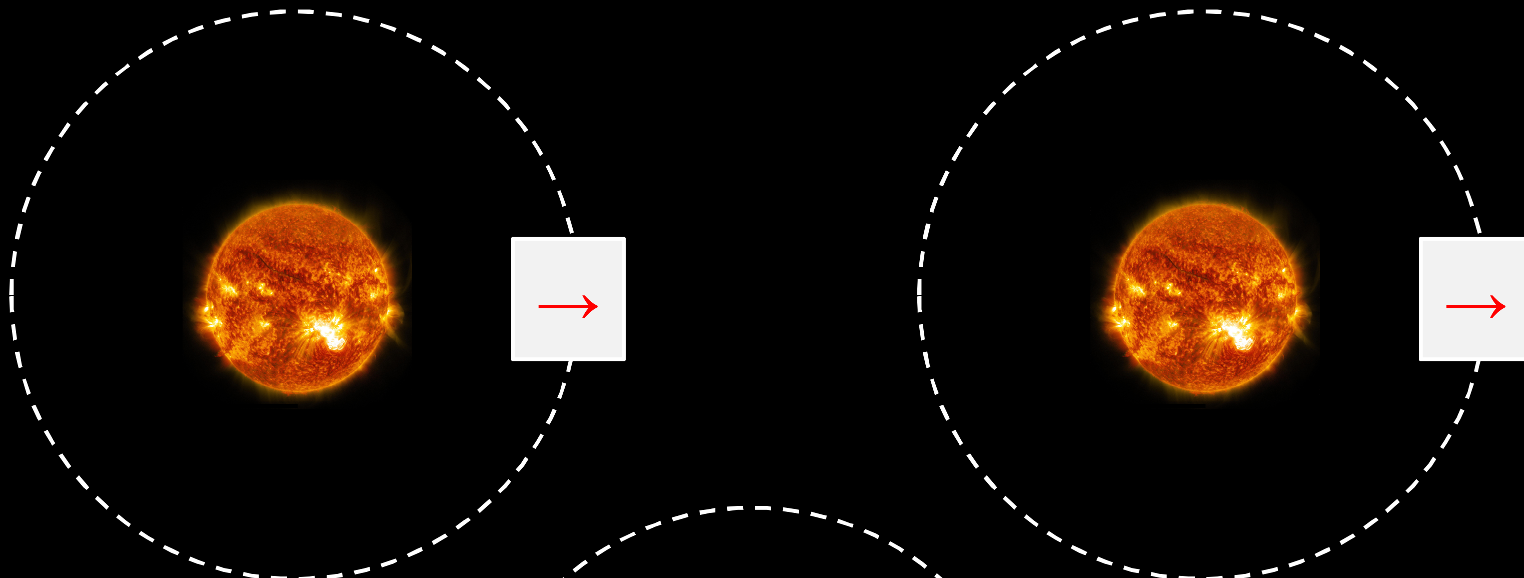
A : $\omega = \omega_{rev} = \dfrac{2\pi}{365{,}25 \times 24 \times 3600} = 1{,}99 \times 10^{-7}$ rad/s

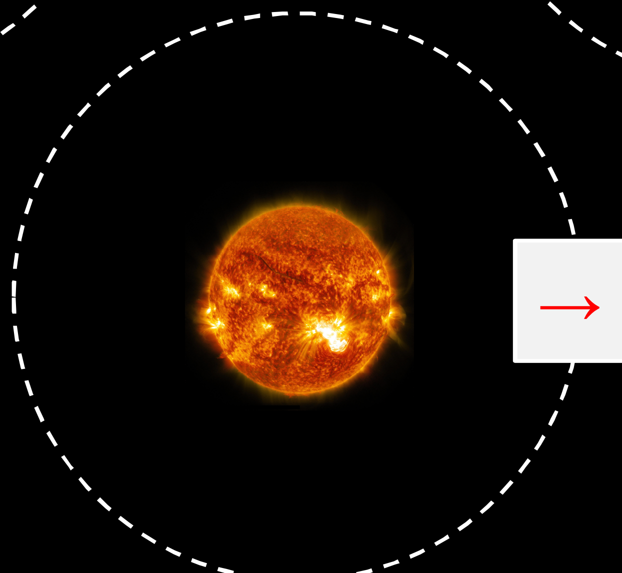
B : $\omega = \omega_{rot} = \dfrac{2\pi}{23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4} = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s

C : Aucune de ces réponses.

Dans le référentiel du CM de la Terre, le CM est immobile et la vitesse relative d'un point sur la Terre par rapport au CM est donnée par $\vec{v}_{A/CM} = \vec{\omega}_{rot} \times \vec{r}_{A/CM}$.

La vitesse angulaire d’un corps est généralement indépendante de sa vitesse angulaire de révolution autour d’un autre corps.





Synchronisation gravitationnelle

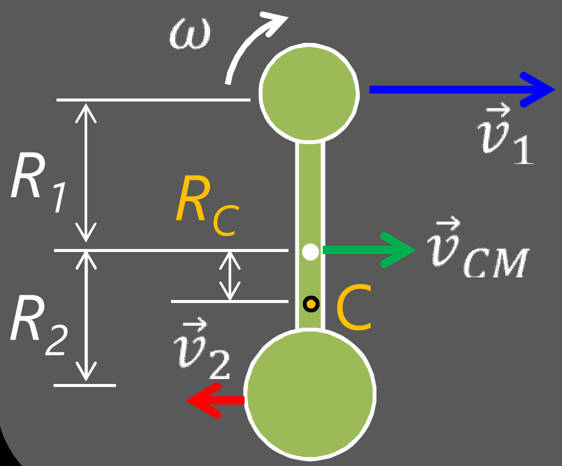
Effets de marées tendent à rendre égales la période de rotation à la période de révolution.

Plan de la semaine

- **Mouvement plan d'un corps rigide**
  - Décomposition translation-rotation
  - **Centre instantané de rotation**
- Dynamique de rotation dans un plan
  - 2^e loi de Newton en rotation
  - Roulement sans glissement

Le mouvement plan est une succession de rotations pures autour d'un centre qui change à chaque instant…

Référentiel de « l'espace »



Prenons un point situé à une distance R_C sous le CM de l'haltère…

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{C/CM} = (v_{CM} - \omega R_C)\vec{\imath}$$

Qu'arrive-t-il si $R_C = v_{CM}/\omega$?

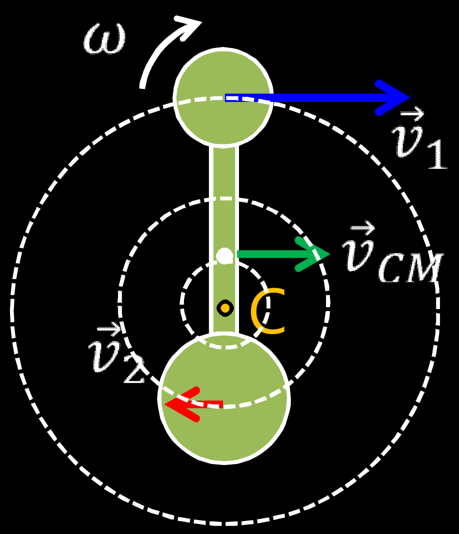
La vitesse de C est nulle <u>à cet instant</u> !

<u>À cet instant</u>, c'est comme si l'haltère tournait instantanément autour du point C !

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_C + \vec{v}_{1/C} = (0 + \omega r_{1/C})\vec{\imath} = \omega(R_1 + R_C)\vec{\imath}$$

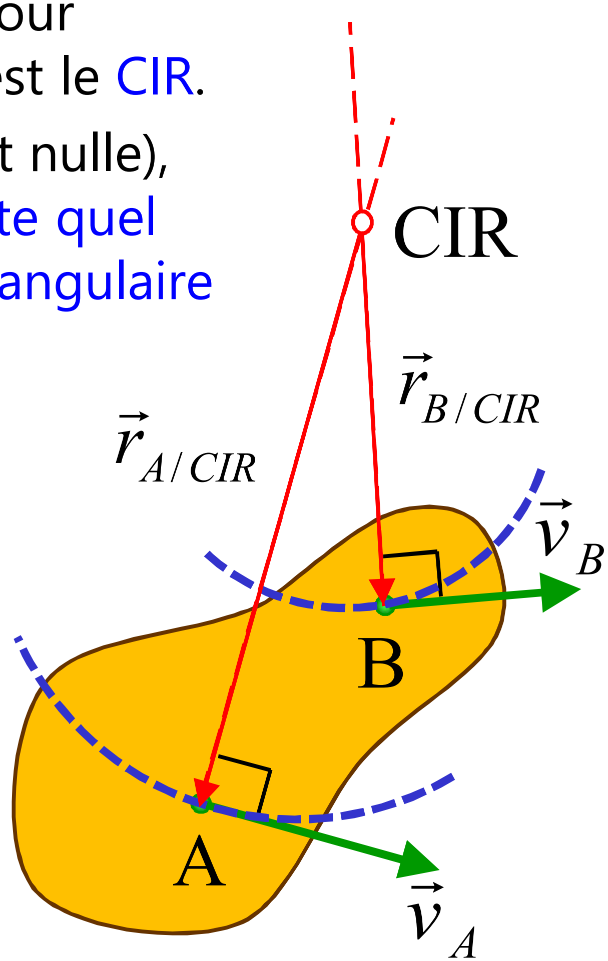
$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM/C} = (0 + \omega r_{CM/C})\vec{\imath} = \omega R_C \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_C + \vec{v}_{2/C} = (0 - \omega r_{2/C})\vec{\imath} = -\omega(R_2 - R_C)\vec{\imath}$$



Centre instantané de rotation (CIR)

- À chaque instant, il existe un point du plan autour duquel le corps rigide est en rotation pure : c'est le CIR.
- À cet instant, le CIR est immobile (sa vitesse est nulle), ce qui permet d'exprimer la vitesse de n'importe quel point du corps rigide en fonction de la vitesse angulaire et de la distance qui le sépare du CIR.



$$\vec{v}_C = 0$$

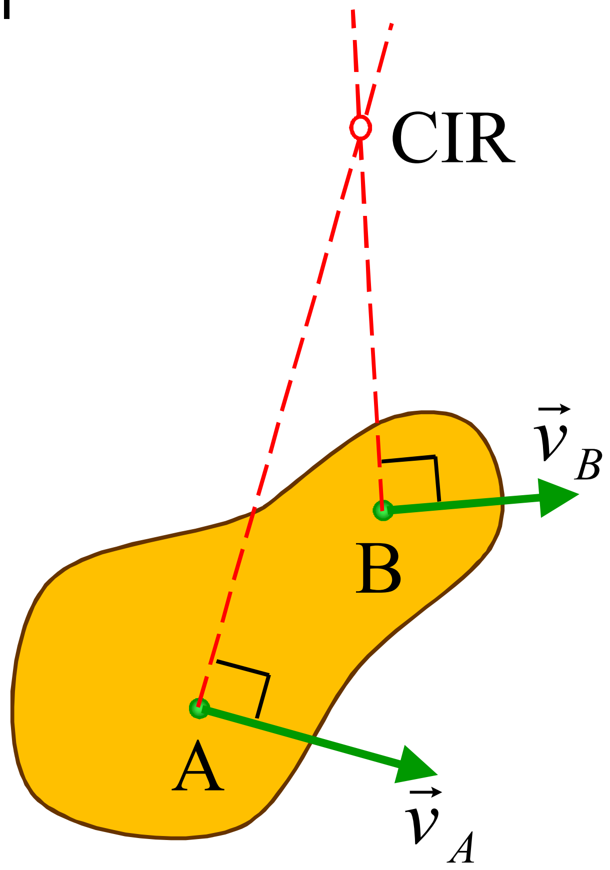
$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{r_{A/CIR}} = \frac{v_B}{r_{B/CIR}}}$$

Remarques

1. Le CIR change à chaque instant ;
2. La vitesse d'un point du corps rigide est toujours perpendiculaire au vecteur rayon qui joint le CIR au point en question.

Comment identifier le CIR ?

Pour identifier le CIR d'un corps rigide, il faut connaître l'orientation des vitesses de deux points du corps.

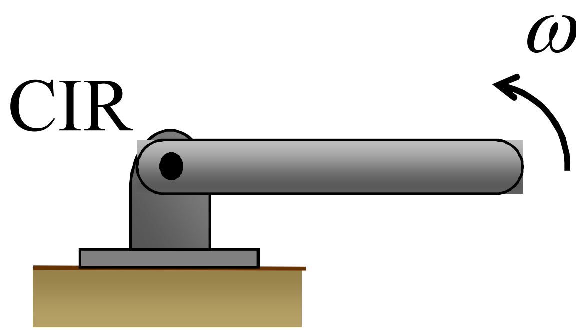


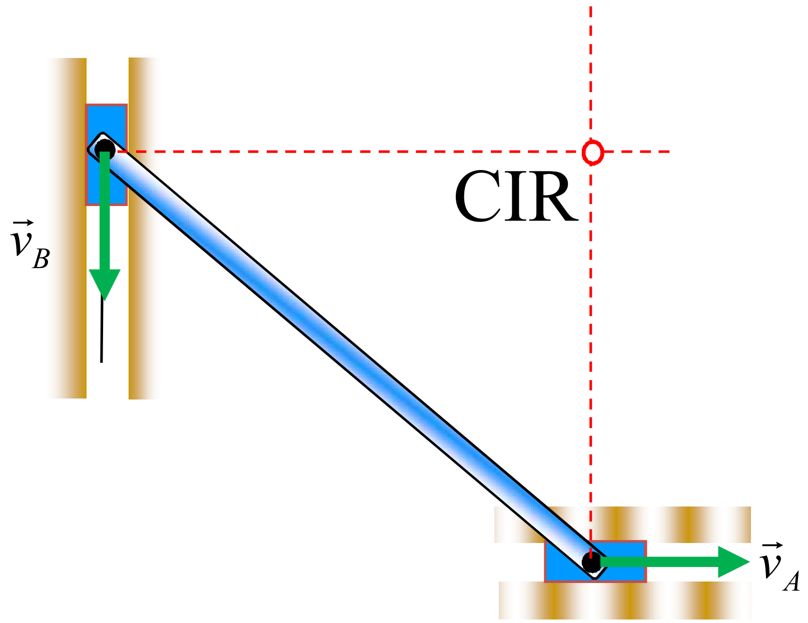
Procédure d'identification du CIR

1. Tracer les droites perpendiculaires aux deux vitesses connues qui passent par les points associés à ces vitesses ;
2. Le CIR se trouve au croisement de ces droites perpendiculaires.

Le CIR n'est pas nécessairement situé sur le corps rigide.

Où est le CIR ?





Tige en rotation autour d'un pivot

La tige est forcée de tourner autour du pivot immobile.

Le CIR est donc le pivot.

Tige guidée par deux manchons

On connaît les directions des vitesses des extrémités de la tige fixées sur les manchons, ce qui permet de déterminer la position du CIR.

Application – Biomécanique du genou

https://www.youtube.com/watch?v=UtdSJZn62H8&list=PL2XZgFSu6J2sMVjGX0ck__tQGqfvp6rxn

Lorsque l'on conçoit une prothèse, il faut s'assurer qu'elle ne déstabilise pas l'articulation pour éviter des chirurgies correctives suite à son implantation.

Un des éléments étudiés lors de la conception est la centrode de la prothèse lorsqu'elle bouge par rapport à l'articulation.

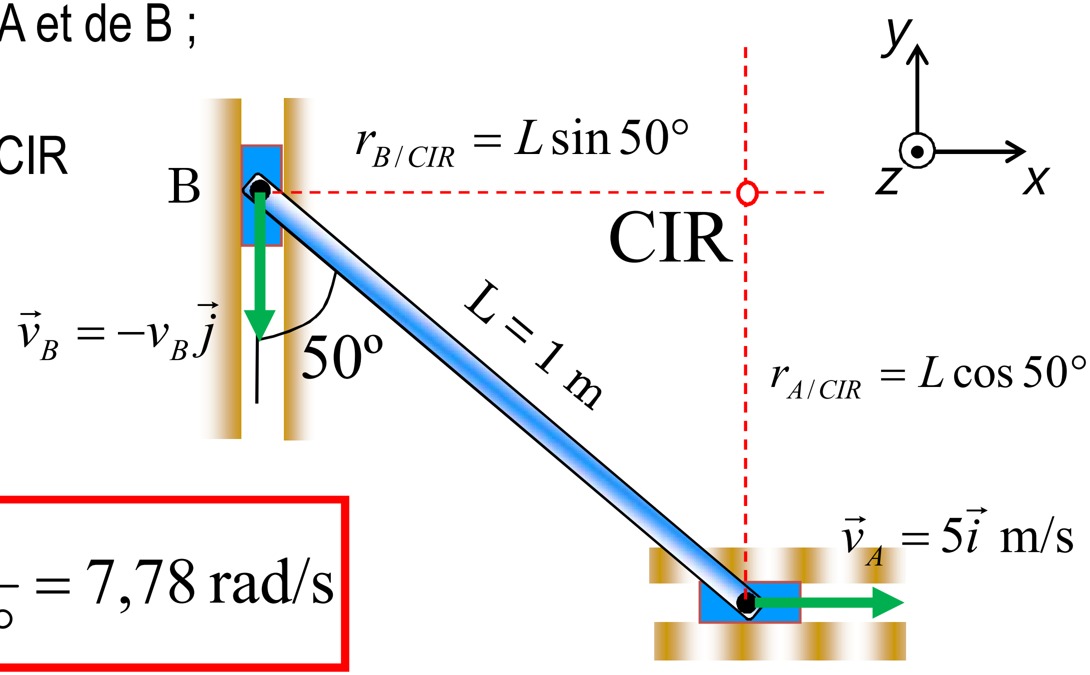
La centrode est la trajectoire du centre instantané de rotation.

Exemple 2 – Solution par le CIR

1. On trouve la position du CIR en traçant les droites perpendiculaires aux vitesses de A et de B ;

2. On calcule les distances entre le CIR et les points A et B (géométrie) ;

3. On détermine la vitesse angulaire de la tige ;



$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{L\cos 50°} = \frac{5}{1\cdot\cos 50°} = 7{,}78 \text{ rad/s}}$$

4. On détermine le vecteur vitesse de B.

$$\boxed{\vec{v}_B = -\omega r_{B/CIR}\vec{j} = -\omega L\sin 50°\vec{j} = -5{,}96\vec{j} \text{ rad/s}}$$

Mêmes résultats !
À vous de choisir la méthode la plus efficace…

Exemple 3 – Deux tiges et un manchon

La barre AB tourne dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire de 6 rad/s. Déterminez les modules des vitesses des points C et D.

Information connue ? $\omega_{AB} = 6\text{ rad/s}$

On cherche ? $v_C \quad v_D$

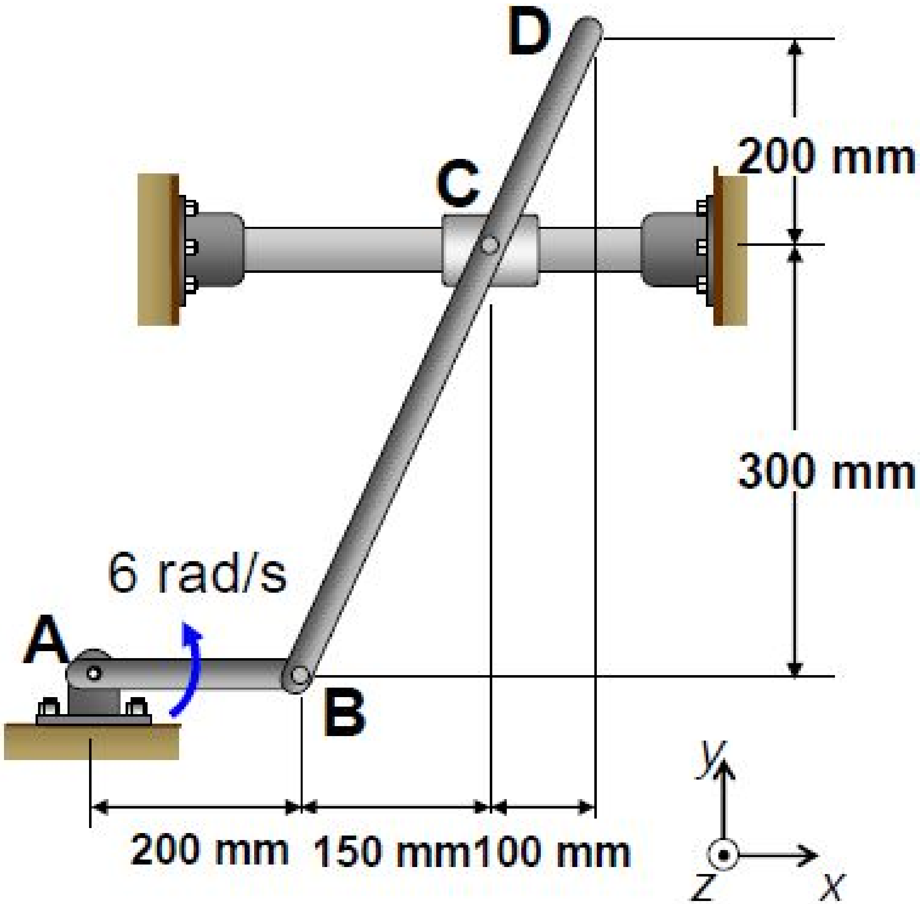
Contraintes du mouvement

B bouge perpendiculairement à AB. $\vec{v}_B = v_B \vec{j}$

C bouge horizontalement. $\vec{v}_C = v_C \vec{i}$

Stratégie

1. Situer le CIR de la tige BCD à l'aide des vitesses de B et de C ;
2. Déterminer les distances entre le CIR et les points B et C et en déduire ω_{BCD} ;
3. Calculer les vitesses de C et de D.



Exemple 3 – Deux tiges et un manchon

1. Situer le CIR de la tige BCD à l'aide des vitesses de B et de C.

$$\vec{v}_B = \omega_{AB} r_{AB} \vec{j} = 6 \cdot 0{,}200 \vec{j} = 1{,}2 \vec{j} \text{ m/s} \qquad \vec{v}_C = v_C \vec{i}$$

2. Déterminer les distances entre le CIR et les points B et C et en déduire ω_{BCD}.

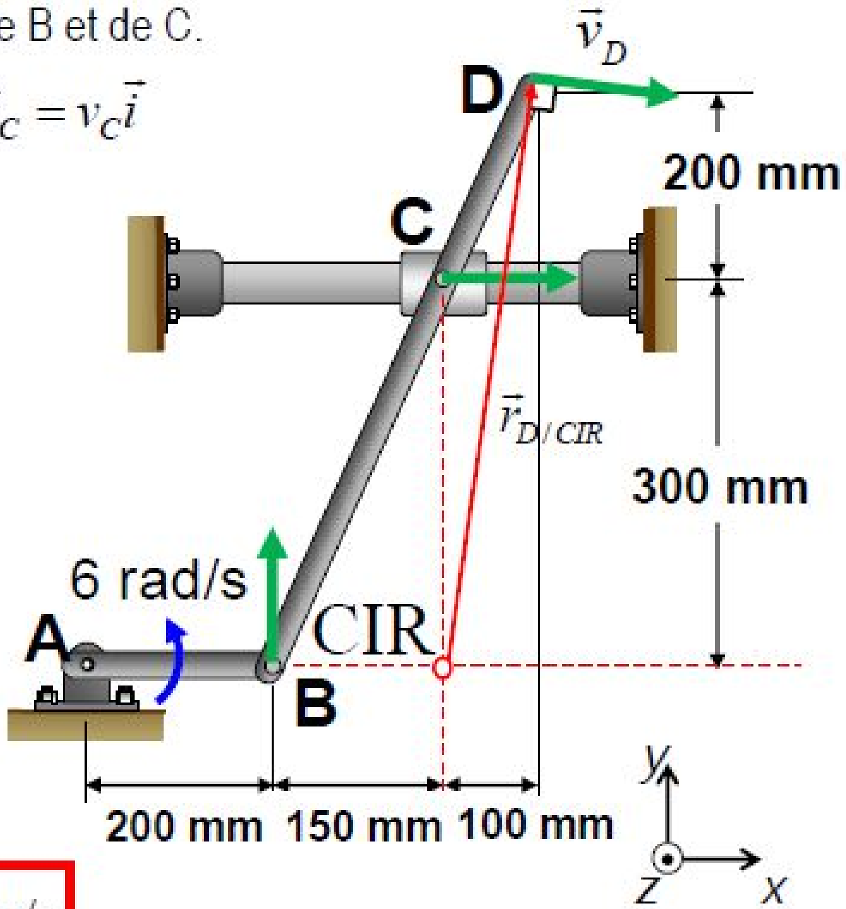
$$r_{B/CIR} = 0{,}150 \text{ m} \qquad r_{C/CIR} = 0{,}300 \text{ m}$$

$$\omega_{BCD} = \frac{v_B}{r_{B/CIR}} = \frac{1{,}2}{0{,}150} = 8 \text{ rad/s}$$

3. Calculer les vitesses de C et de D.

$$\boxed{v_C = \omega_{BCD} r_{C/CIR} = 8 \cdot 0{,}300 = 2{,}4 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v_D = \omega_{BCD} r_{D/CIR} = 8 \cdot \sqrt{0{,}100^2 + 0{,}500^2} = 4{,}08 \text{ m/s}}$$



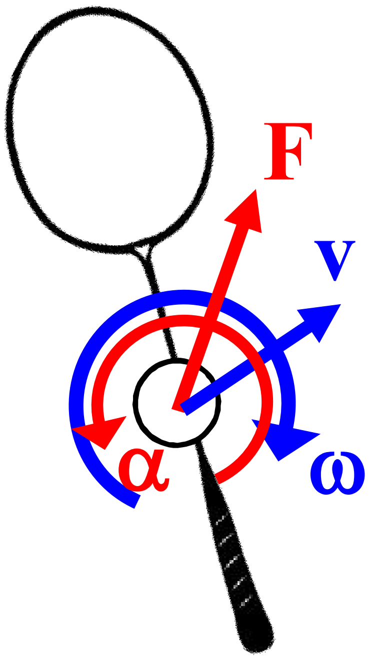
Plan de la semaine

- Mouvement plan d'un corps rigide
  - Décomposition en translation et rotation
  - Centre instantané de rotation
- **Dynamique de rotation dans un plan**
  - **2^{e} loi de Newton en rotation**
  - **Roulement sans glissement**

Votre boîte à outils s'élargit…

	Lois générales	Loi de conservation
Translation **(vectorielle)**	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$
Rotation **(vectorielle)**	$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \vec{\alpha}$ $\quad \sum \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{H}_O}{dt}$	$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$
Translation + rotation **(scalaire)**	$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$ $E = T + V$ $\quad$ Cours 12 $T = T_{CM} + T_{rot/CM}$	$E_1 = E_2$

La dynamique de rotation



v : Vitesse du centre de masse
ω : Vitesse angulaire
α : Accélération angulaire
F : Force résultante

Comme pour la vitesse angulaire, un corps rigide possède une seule accélération angulaire.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\sum \vec{M}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

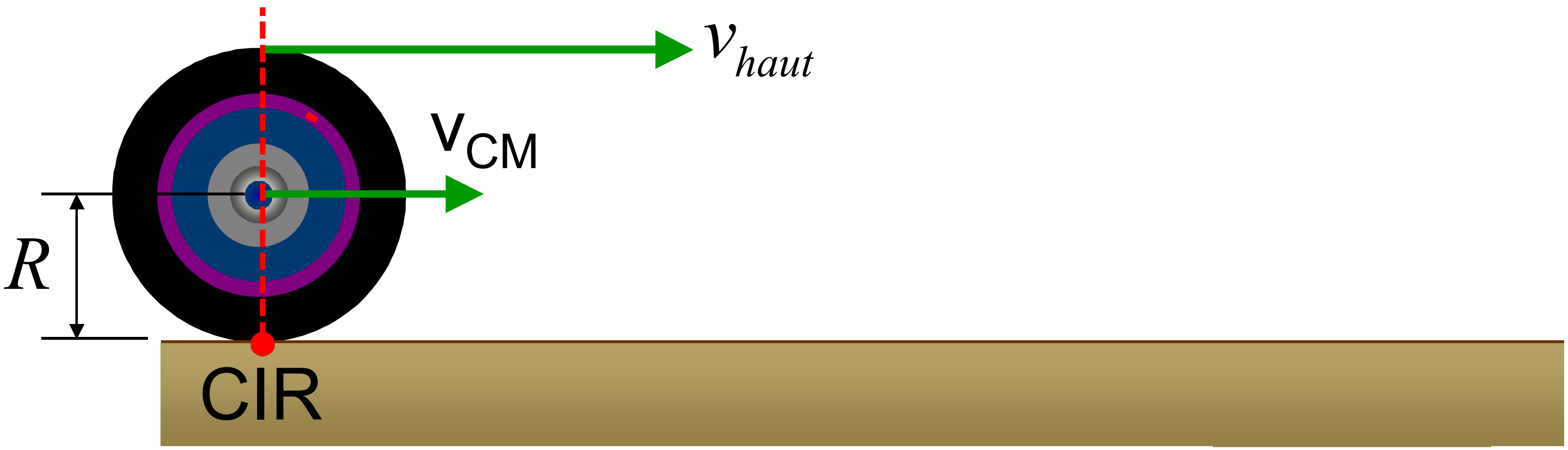
Masse
Résistance d'un corps à modifier son état de translation (inertie).

Moment d'inertie
Résistance d'un objet à modifier son état de rotation.

La plus vieille roue de bois découverte jusqu’à maintenant (5 150 ans)

Roulement sans glissement

Le CM d'une roue de rayon R se déplace horizontalement à une vitesse v_{CM}. Si la roue ne glisse pas en roulant, où est son CIR ? Quelle est la relation entre v_{CM} et la vitesse angulaire ω de la roue ?



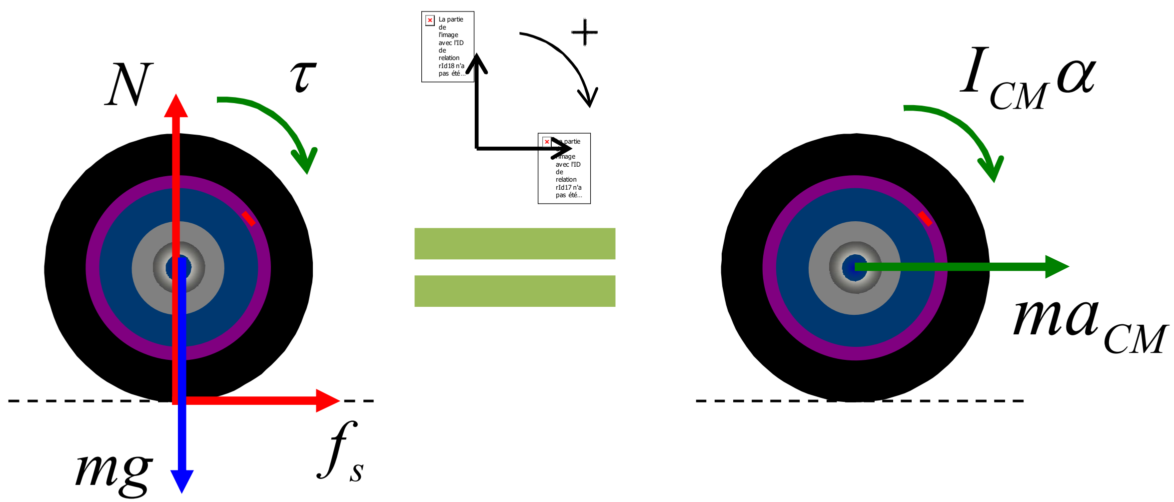
Puisque le roue ne glisse pas, le point de contact avec le sol est nécessairement immobile : c'est donc le CIR de la roue !

$$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$

$$\boxed{v_{haut} = 2\omega R = 2v_{CM}}$$

Roulement sans glissement

La roue d'une voiture (rayon R, moment d'inertie I_{CM}) accélère vers la droite sous l'effet d'un couple externe τ produit le moteur. Quelle est l'accélération du CM de la roue qui en résulte si la roue ne glisse pas ?



Conditions de roulement sans glissement

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

$$\sum F_x = ma_{CM} \Rightarrow f_s = ma_{CM}$$

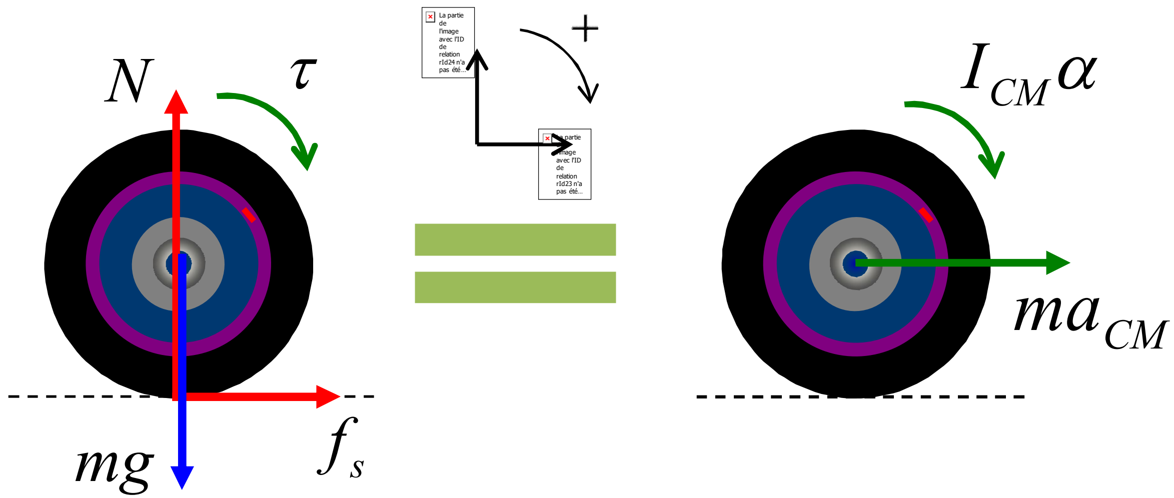
$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow \tau - f_s R = I_{CM}\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}}$$

Qu'est-ce qui détermine si la roue glisse ou non ?

Roulement sans glissement

La roue d'une voiture (rayon R, moment d'inertie I_{CM}) accélère vers la droite sous l'effet d'un couple externe τ produit le moteur. Quel est le coefficient de frottement minimal entre la roue et le sol qui fait que la roue ne glisse pas ? Le frottement est-il statique ou cinétique ?



Coefficient de frottement statique minimal

La roue est sur le point de glisser.

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_{s,\min} N$$

$$\sum F_x = ma_{CM} \Rightarrow f_s = ma_{CM}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

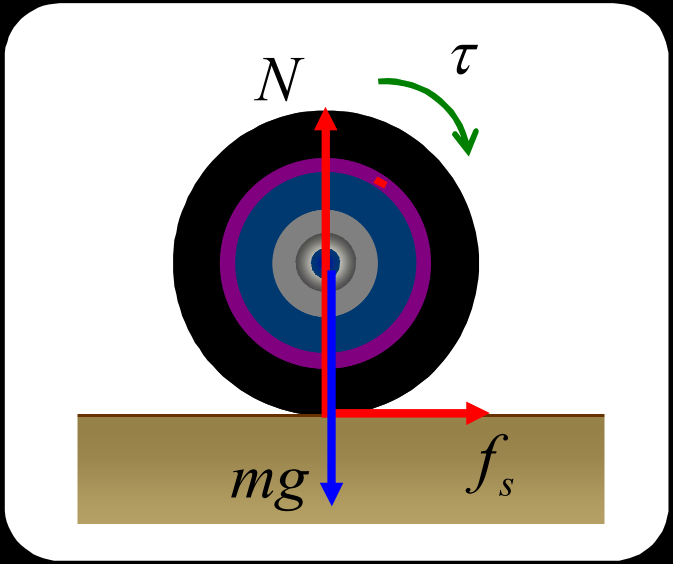
$$\Rightarrow \boxed{\mu_{s,\min} = \frac{f_s}{N} = \frac{a_{CM}}{g} = \frac{\tau R}{g\left(I_{CM} + mR^2\right)}}$$

Quiz

$$\boxed{\sum F_x = f_s = ma_{CM}}$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}}$$

$$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{a_{CM}}{g} = \frac{\tau R}{g\left(I_{CM} + mR^2\right)}}$$



Quelle affirmation est fausse parmi les suivantes ?

A : Une voiture avec des roues parfaitement rigides qui roule à vitesse constante ne subit pas de force de frottement.

B : Une voiture peut accélérer grâce au travail positif fait par la force de frottement entre ses roues et le sol.

C : Une voiture avec des roues parfaitement rigides ne peut pas accélérer sur une surface qui ne génère pas de frottement.

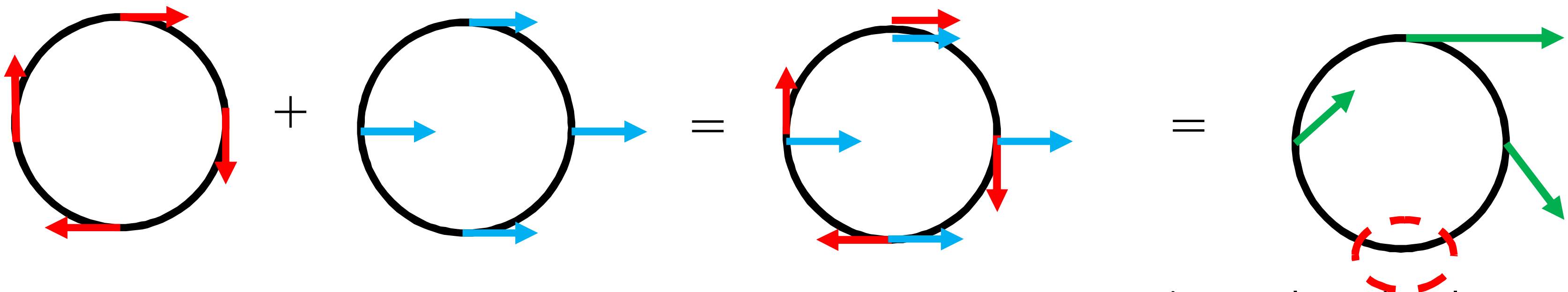
Roue qui roule sans glisser
Décomposition translation-rotation

Point de vue CIR : la roue tourne autour du point de contact au sol.

Point de vue décomposition : translation du CM + rotation autour du CM

Roulement avec et sans glissement

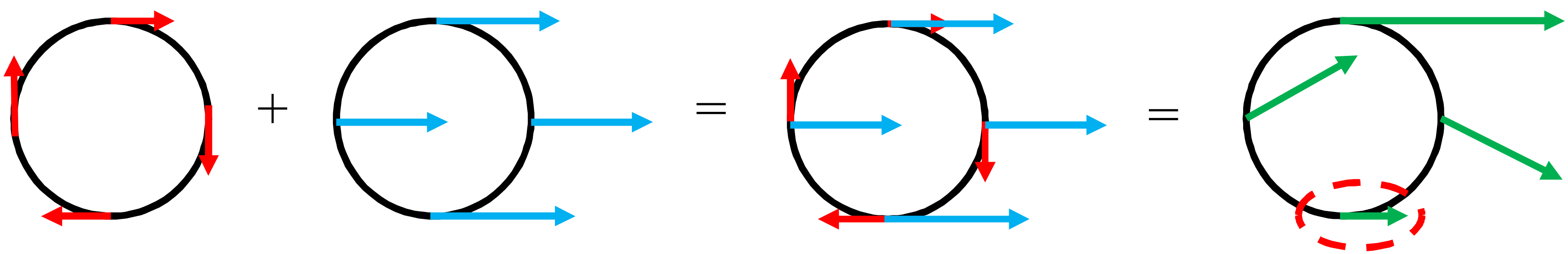
Roulement sans glissement



Rotation pure **Translation pure**

Vitesse du point de contact nulle
Le point de contact s’appuie sur le sol sans glisser.

Roulement avec glissement



Rotation pure **Translation pure**

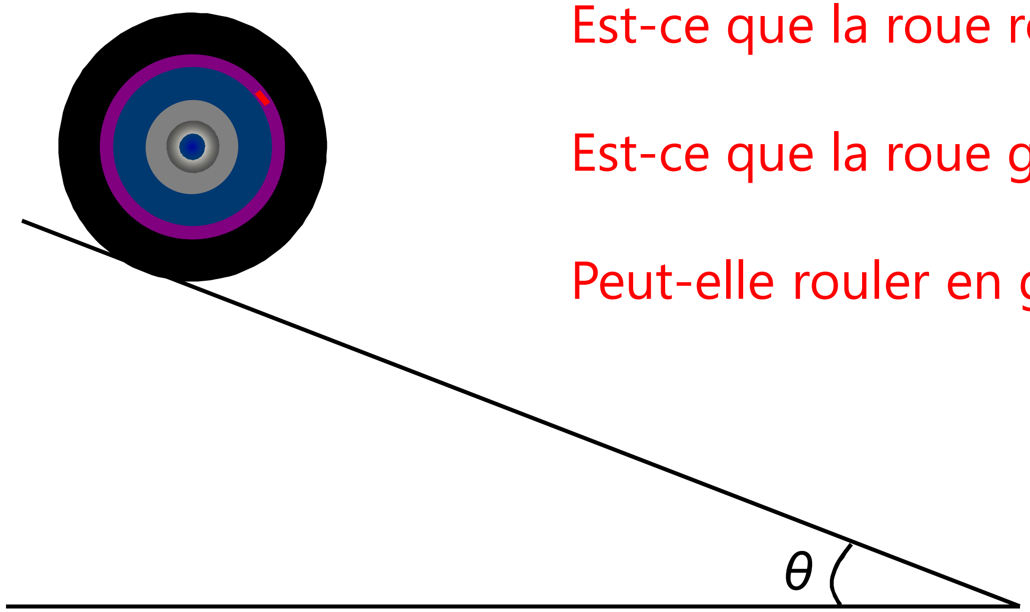
Vitesse du point de contact non nulle
Le point de contact glisse sur le sol.

http://tfleisch.profweb.ca/roulement-sans-glissement.html

Une roue et un plan incliné

Une roue est maintenue immobile au haut d'un plan incliné.
On lâche ensuite la roue : elle est libre de descendre le plan.

Décrivez le mouvement de la roue pendant qu'elle descend.



Est-ce que la roue roule ?

Est-ce que la roue glisse ?

Peut-elle rouler en glissant… ?

Exemple 4 – Une roue et un plan incliné

Une roue est maintenue immobile au haut d'un plan incliné. On lâche ensuite la roue : elle est libre de descendre le plan. Est-ce que la roue :

A. Glisse sans rouler ?
B. Roule sans glisser ?
C. Roule et glisse simultanément ?

Information connue

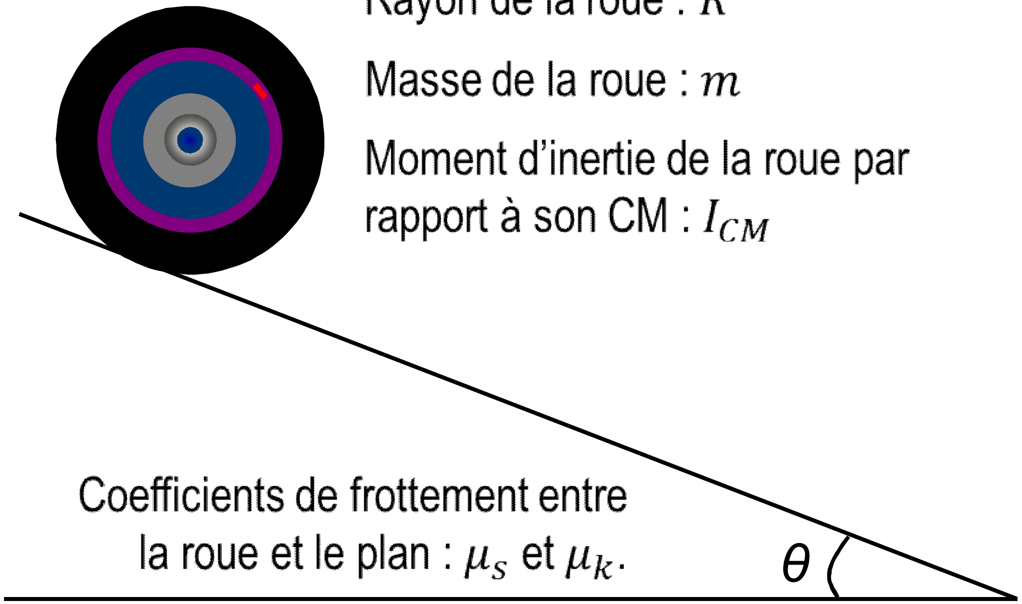
Rayon de la roue : R

Masse de la roue : m

Moment d'inertie de la roue par rapport à son CM : I_{CM}

Stratégie de résolution

1. Faire le DCL-DCE de la roue.
2. Poser les équations de la dynamique (sommes des forces et des moments).
3. Poser les équations de la cinématique associées à chaque cas pour déduire la condition spécifique qui doit être remplie.

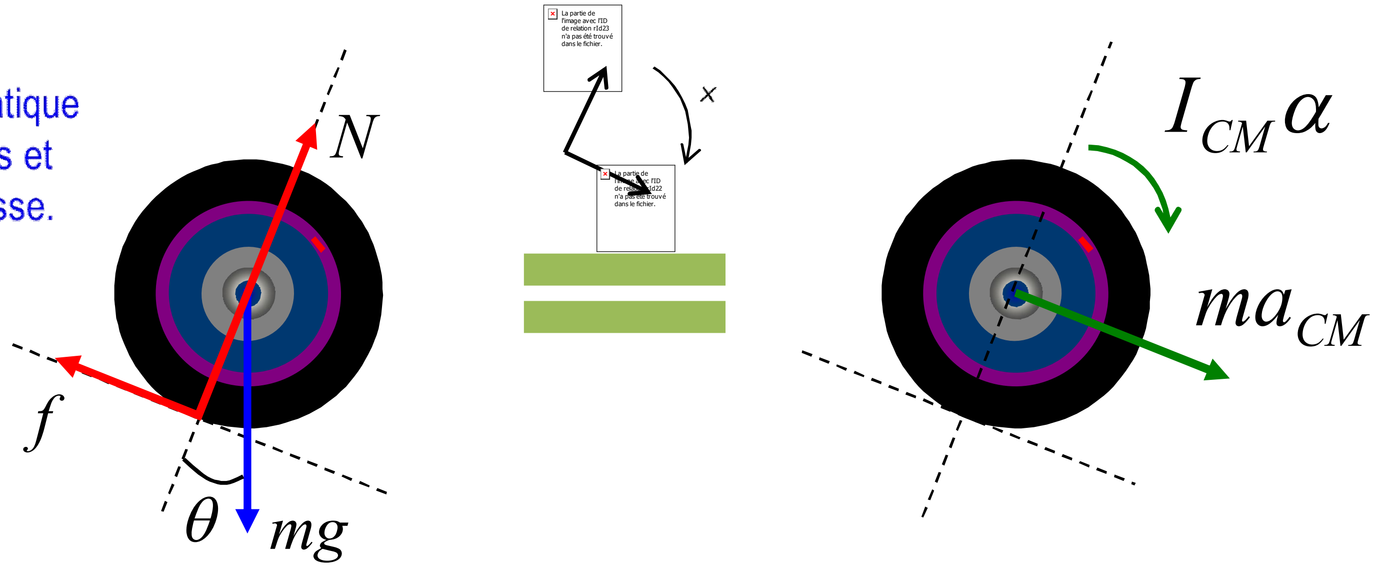


Coefficients de frottement entre la roue et le plan : μ_s et μ_k.

Exemple 4 – Une roue et un plan incliné

1. DCL-DCE de la roue dans le cas général. Le sens positif des moments a été fixé en sens horaire pour faciliter les calculs (si la roue roule, elle roule en sens horaire).

Le frottement f sera statique si la roue ne glisse pas et cinétique si la roue glisse.



2. Équations de la dynamique

$$\sum F_x = ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta - f = ma_{CM}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha \quad \Rightarrow \quad Rf = I_{CM}\alpha$$

Exemple 4 – Une roue et un plan incliné

$$mg\sin\theta - f = ma_{CM}$$
$$N = mg\cos\theta$$
$$Rf = I_{CM}\alpha$$

3. On examine chacun des cas spéficiques.

A. Glisse sans rouler

$\omega = 0 \qquad \alpha = 0$

La vitesse angulaire est nulle et constante.

$$Rf_k = I_{CM}\alpha = 0$$

$$\boxed{f_k = 0}$$

Puisque $f_k = \mu_k N$ et que la normale n'est pas nulle, alors :

$$\boxed{\mu_k = 0}$$

La surface doit être sans frottement.

B. Roule sans glisser

Conditions de roulement sans glissement

$v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$

On résout le système d'équations.

$$a_{CM} = \alpha R = \frac{R^2}{I_{CM}} f_s \qquad mg\sin\theta - f_s = \frac{mR^2}{I_{CM}} f_s$$

$$\boxed{f_s = \frac{mg\sin\theta}{1 + mR^2/I_{CM}}}$$

Coefficient de frottement statique minimal

$$\boxed{\mu_s \geq \mu_{s,\min} = \frac{f_s}{N} = \frac{\tan\theta}{1 + mR^2/I_{CM}}}$$

La surface doit générer suffisamment de frottement.

C. Roule et glisse

Il n'y a pas de relation entre a_{CM} et α : elles sont indépendantes.

Le frottement est cinétique.

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$$

On résout le système d'équations pour trouver a_{CM} et α.

$$\boxed{a_{CM} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\mu_k mgR\cos\theta}{I_{CM}}}$$

Survient si : $\boxed{\mu_s < \mu_{s,\min}}$

La surface ne génère pas suffisamment de frottement.

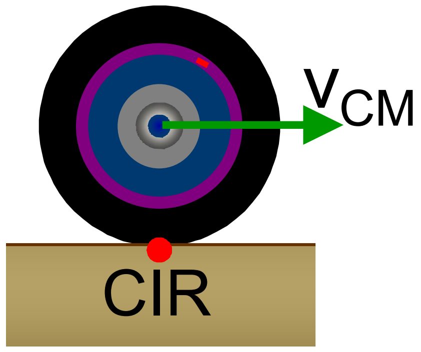
Point de référence de la somme des moments

Dans le problème de la roue et du plan incliné, la somme des moments a été calculée par rapport au CM.

Puis-je calculer la somme des moments par rapport à un autre point ?

Oui, mais l'objet doit être en rotation pure autour de ce point.
Il faut alors utiliser le moment d'inertie de l'objet par rapport à ce point.

Ex. : Une roue qui roule sans glisser.



Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha$$

OU

Par rapport au CIR
(La roue est en rotation pure autour du CIR.)

$$\sum M_{CIR} = I_{CIR}\alpha$$

$$I_{CIR} = I_{CM} + mr^2_{CM/CIR}$$

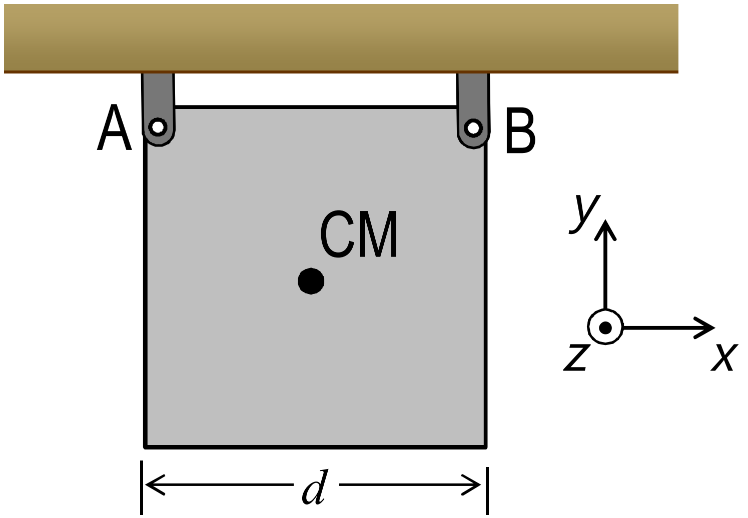
Exemple 5 – Un pivot en moins

Les coins supérieurs d'une plaque homogène carrée de 1 m de côté et de 15 kg sont fixés aux pivots A et B. Soudainement, le pivot A se rompt et la plaque se met à tourner autour du pivot B sous l'effet de son poids. Juste après le bris du pivot A, déterminez :

A. L'accélération angulaire de la plaque ;

B. Les forces de réaction sur la plaque au pivot B.

N.B. Négligez tout frottement.



Information connue $m = 15\ \text{kg} \quad d = 1\ \text{m}$

$$I_{CM} = \frac{m}{12}\left(d^2 + d^2\right) = \frac{md^2}{6}$$

Contrainte du mouvement

La plaque est en mouvement circulaire autour du pivot B.

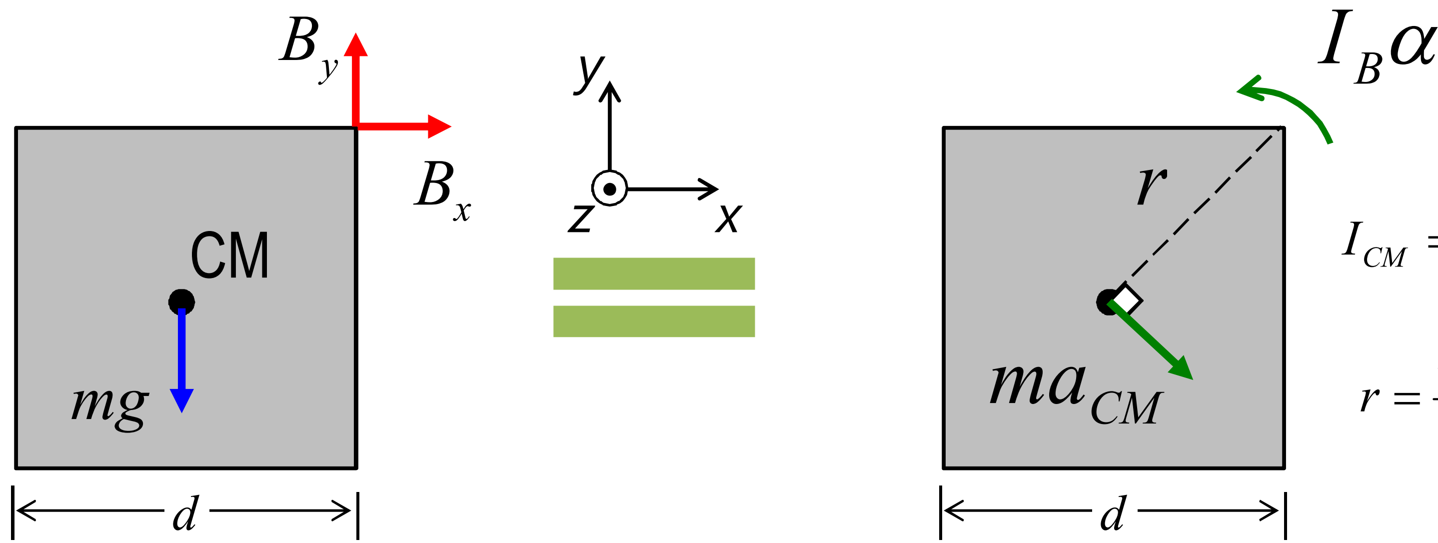
Stratégie de résolution

Faire le DCL-DCE de la plaque.

Faire une somme des forces et une somme des moments par rapport au point B.

Exemple 5 – Un pivot en moins

DCL-DCE de la plaque juste après que A se brise.



$$I_{CM} = \frac{md^2}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

Mouvement circulaire autour de B : l'accélération du CM est perpendiculaire au rayon qui relie B au CM.

A. Pour trouver l'accélération angulaire, on fait la somme des moments par rapport à B.

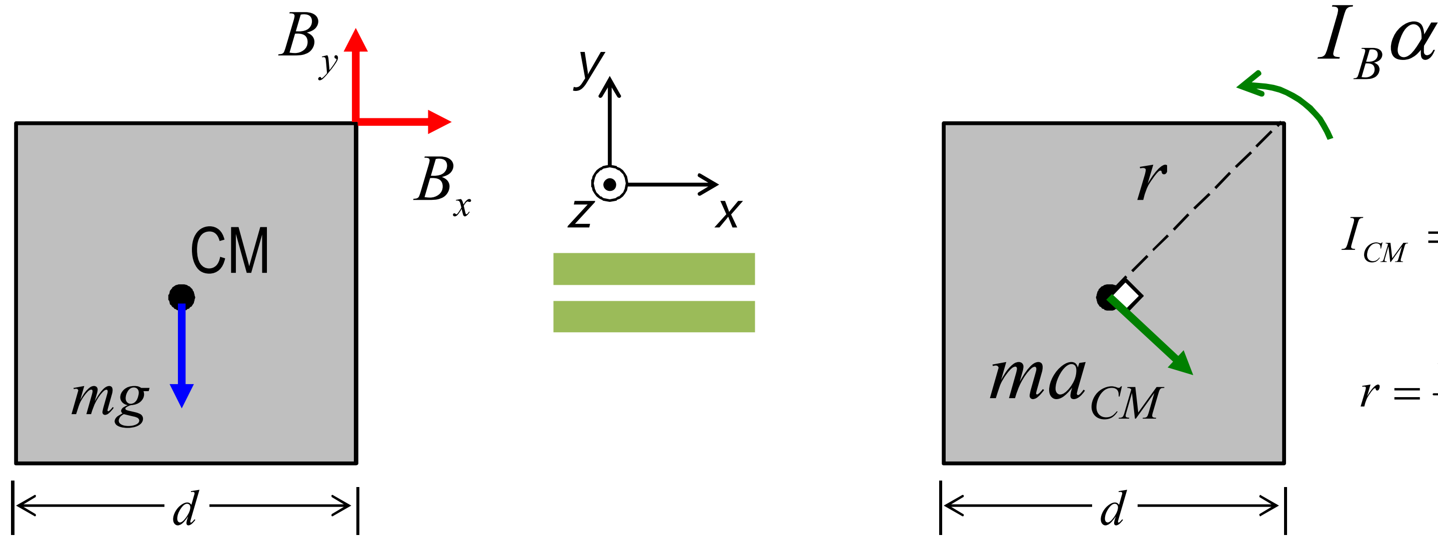
$$\sum M_B = I_B\alpha \Rightarrow mg\frac{d}{2} = \left(I_{CM} + mr^2\right)\alpha \Rightarrow mg\frac{d}{2} = \left(\frac{md^2}{6} + \frac{md^2}{2}\right)\alpha$$

Utiliser I_B.

$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{4d} = \frac{3\cdot 9{,}81}{4\cdot 1} = 7{,}36\ \text{rad/s}^2}$$

Exemple 5 – Un pivot en moins

B. On pose les sommes de forces pour déterminer les forces de réaction.



$$I_{CM} = \frac{md^2}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

$$\sum F_x = B_x = ma_{CM}\cos 45°$$

$$\sum F_y = B_y - mg = -ma_{CM}\sin 45°$$

Mouvement circulaire

$$a_{CM} = r\alpha = \frac{3\sqrt{2}g}{8} = 5{,}203\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\boxed{B_x = 15 \cdot 5{,}203 \cdot \cos 45° = 55{,}2\ \mathrm{N}}$$

$$\boxed{B_y = 15 \cdot 9{,}81 - 15 \cdot 5{,}203 \cdot \sin 45° = 92{,}0\ \mathrm{N}}$$

Synthèse du cours

Mouvement plan d'un corps rigide

Décomposition translation + rotation

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Centre instantané de rotation (CIR)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

À chaque instant, le corps semble être en rotation pure autour du CIR.

Roulement sans glissement → f_s

$$v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$$

Roulement avec glissement → f_k

La translation du CM est indépendante de la rotation autour du CM.

Glissement sans roulement → f_k

$$\omega = \alpha = 0$$

Dynamique de rotation

Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM} \alpha$$

Par rapport au centre instantané de rotation

$$\sum M_{CIR} = I_{CIR} \alpha$$