PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 2
Automne 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. FAUX. La vitesse est toujours orientée tangentiellement à la trajectoire. La composante normale de la vitesse donc toujours nulle.

10 points de compréhension

B. Puisque la somme des forces sur le système P + E + boulet est nulle avant, pendant et après le tir, la vitesse de son CM est constante. On a donc :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_P\vec{v}_P + m_E\vec{v}_E}{m_P + m_E} = \frac{15000\cdot 20\vec{i} + 12000\cdot 15\vec{j}}{15000+12000} = \left(11{,}11\vec{i} + 6{,}67\vec{j}\right)\text{km/h}$$

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{11{,}11^2 + 6{,}67^2} = 13{,}0\,\text{km/h} = 3{,}60\,\text{m/s}}$$

15 points de compréhension et de calculs

C. La somme des variations de longueur de corde due aux trois objets doit être nulle. Ici, les axes pour A, B et P sont tous choisis vers le haut. Les signes dans la réponse peuvent être différents si des axes différents ont été choisis.

$$\sum \Delta\ell_i = -2\Delta x_A - 2\Delta y_P - \Delta y_B = 0$$

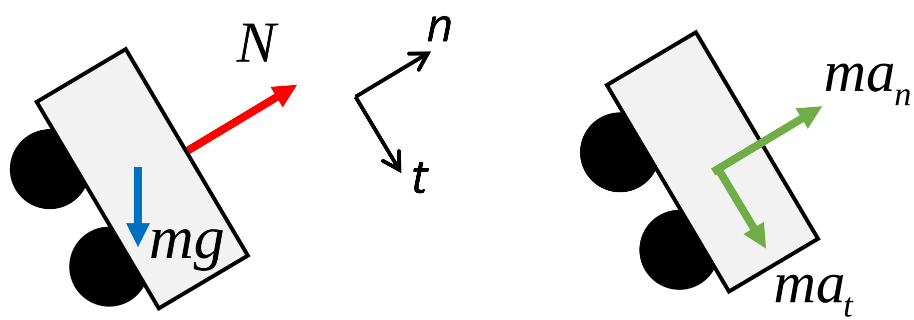
$$2v_A + 2v_P + v_B = 0$$

$$\boxed{v_P = -\left(v_A + \frac{v_B}{2}\right)}$$

15 points de calculs

Q2 – Solution (1/3)

A. DCL-DCE du chariot au point B



DCL : poids vers le sol, normale perpendiculaire au rail et vers le haut

DCE : une composante ma_n et ma_t dans chaque direction, appliquées au CM.

10 points de compréhension

B. Travail des forces du DCL entre A et C.

Travail : $U = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C F \cos\theta \, dr$

Poids : le poids $-mg\vec{j}$ s'applique vers le sol, soit globalement dans la même direction que le déplacement du chariot qui descend. L'angle θ est toujours entre 0 et 90 degrés. **Travail positif.**

Normale : la normale s'applique toujours perpendiculairement au rail. Elle est orientée à 90 degrés par rapport au déplacement du chariot. **Travail nul.**

10 points de compréhension

Q2 – Solution (2/3)

C. Vitesse du chariot en bas de la descente (point C).

$\sum U_{nc} = 0$ sur le chariot, donc l'énergie mécanique est conservée de A à C. $E_A = E_C$

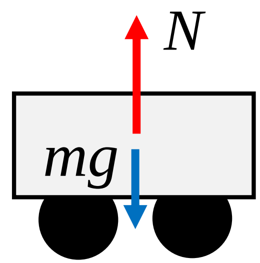
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 + 2gH} = \sqrt{2^2 + 2\cdot 9{,}81\cdot 52} = 32{,}0\,\mathrm{m/s}$$

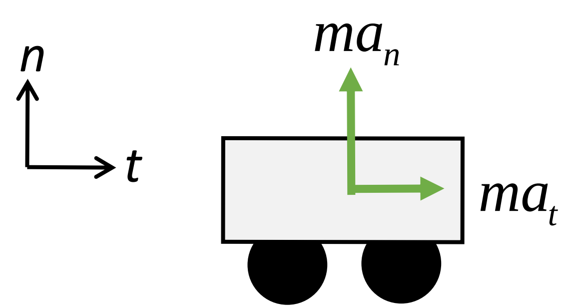
15 points de résolution de problème

D. Force normale ressentie par les passagers en bas de la descente (point C).

$$\sum F_y = N - mg = ma_n = m\frac{v_C^2}{\rho}$$

$$N = m\left(g + \frac{v_C^2}{\rho}\right)$$





Rayon de courbure au point C

(On remarque que le point C est un minimum local de la courbe et donc que $\frac{dy}{dx} = 0$ en ce point)

$$\rho_C = \left.\frac{\left(1 + [dy/dx]^2\right)^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}\right|_C = \frac{1}{\left|d^2y/dx^2\right|_C}$$

Q2 – Solution (3/3)

Rayon de courbure au point C (suite)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_C = -\frac{H\pi}{2L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Bigg|_{x=L} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_C = -\frac{H\pi^2}{2L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Bigg|_{x=L} = \frac{H\pi^2}{2L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_C = \frac{1}{\left|d^2y/dx^2\right|_C} = \frac{2L^2}{H\pi^2} = \frac{2\cdot 95^2}{52\pi^2} \approx 35{,}17\ \text{m}$$

Force normale ressentie par les passagers

$$\boxed{N = m\left(g + \frac{v_C^2}{\rho}\right) = m\left(g + \frac{v_A^2 + 2gH}{2L^2/H\pi^2}\right) = 800\left(9{,}81 + \frac{32{,}0^2}{35{,}17}\right) = 31{,}1\ \text{kN}}$$

Le poids du chariot est mg = 7,848 kN.

La normale est donc 3,97 fois plus grande que le poids du chariot. Cela correspond à une accélération d'environ 4*g*.

20 points de résolution de problème

Q3 – Solution (1/2)

A. Vitesse de A avant de frapper B.

Puisque l'accélération dépend de la vitesse, on a

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{a} \qquad t = \int_0^v \frac{2}{3-v'}\,dv = -2\ln(3-v')\Big|_0^v = 2\ln\left(\frac{3}{3-v}\right)$$

En isolant la vitesse *v*, on trouve : $v = 3\left(1-e^{-t/2}\right)$

Après 2 secondes, on trouve : $\boxed{v_{A0} = 3\left(1-e^{-2/2}\right) = 1{,}90\ \text{m/s}}$

20 points de résolution de problème

B. Vitesse de A juste après avoir frappé B.

La quantité de mouvement du système A + B est conservée pendant l'impact (il n'y a pas de force externe impulsive, donc $\sum \vec{F} = \vec{0}$).

$$L_{0x} = L_{1x}$$

$$m_A v_{A0} - m_B v_{B0}\sin\theta = m_A v_{Ax}$$

$$v_{Ax} = v_{A0} - \frac{m_B}{m_A} v_{B0}\sin\theta = -0{,}831\ \text{m/s}$$

$$L_{0y} = L_{1y}$$

$$-m_B v_{B0}\cos\theta = m_A v_{Ay}$$

$$v_{Ay} = -\frac{m_B}{m_A} v_{B0}\cos\theta = -1{,}91\ \text{m/s}$$

Q3 – Solution (2/2)

B. Vitesse de A juste après avoir frappé B.

$$\boxed{v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 2{,}08\,\mathrm{m/s}}$$

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}}\right) + 180° = 246°}$$

Juste après l'impact A, se déplace à 2,08 m/s à 246 degrés par rapport à l'axe *x*.

20 points de résolution de problème

C. Force moyenne (vecteur) ressentie par A.

$$\vec{L}_{A1} - \vec{L}_{A0} = \vec{F}_{moy}\Delta t \Rightarrow \vec{F}_{moy} = \frac{\vec{L}_{A1} - \vec{L}_{A0}}{\Delta t} = \frac{m_A v_{Ax}\vec{i} + m_A v_{Ay}\vec{j} - m_A v_{A0}\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{moy} = \left(-41{,}0\vec{i} - 28{,}7\vec{j}\right)\mathrm{kN}}$$

10 points de calculs

D. La collision est-elle élastique, inélastique ou parfaitement inélastique ?

On vérifie si l'énergie cinétique de A + B varie pendant la collision.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B0}^2 = 896\,\mathrm{J}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 = 325\,\mathrm{J}$$

$\Rightarrow$ **Puisque l'énergie cinétique n'est pas conservée pendant l'impact et que les autos ne demeurent pas solidaires, la collision est inélastique.**

10 points de calculs

Q4 – Solution (1/1)

A. i. L'énergie mécanique de la capsule n'est pas conservée, car la force de résistance de l'air fait un travail non conservatif non nul. Le poids et la force des câbles sont des forces conservatives.

ii. La quantité de mouvement de la capsule n'est pas conservée, car la somme des forces sur celle-ci est non nulle. On peut aussi dire que sa QM change, car sa vitesse change.

15 points de compréhension

B. Hauteur maximale atteinte par la capsule.

On applique le principe travail-énergie à la capsule.

Principe travail-énergie

État 1 : capsule immobile au sol ($y = 0$)

État 2 : capsule est immobile à la hauteur maximale y.

$$\sum U_{nc} = \Delta E \qquad -f_r y = \left(mgy + 2\cdot\frac{1}{2}k(y-h)^2 \right) - 2\cdot\frac{1}{2}kh^2$$

$$0 = -(f_r + mg)y - k(y-h)^2 + kh^2$$

$$0 = y[-ky + (2kh - f_r - mg)]$$

$$\boxed{y = 2h - \frac{f_r + mg}{k} = 67{,}4\,\mathrm{m}}$$

25 points de résolution de problème