PHS 1101
Mécanique pour ingénieurs

Cours 10
Systèmes de particules variables

Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

Tableau récapitulatif

Translation	Rotation
$m\,[\text{kg}]$	$I\,[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$
$r\,[\text{m}]$ $v\,[\text{m/s}]$ $a\,[\text{m/s}^2]$	$\theta\,[\text{rad}]$ $\omega\,[\text{rad/s}]$ $\alpha\,[\text{rad/s}^2]$
$\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ **Quantité de mouvement [kg·m/s]** $\vec{L} = m\vec{v}$	$\sum \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{H}_O}{dt}$ **Moment cinétique [kg·m²/s]** $\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ $\vec{H}_O = I_O\vec{\omega}$
$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}dt$ $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$	$\Delta\vec{H}_O = \vec{H}_{O1} - \vec{H}_{O2} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O dt$ $\sum \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$

Boite à outils

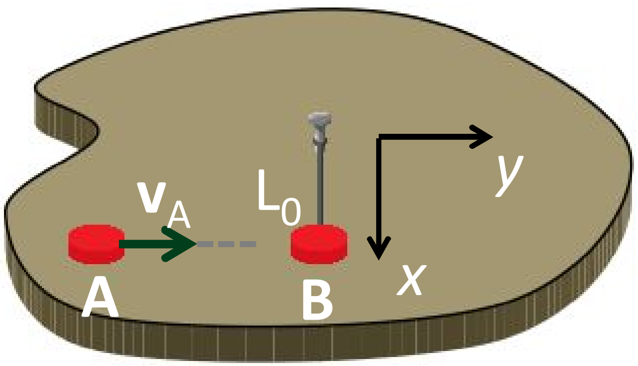
Pour résoudre un problème, il faut souvent utiliser plusieurs lois de conservation simultanément…

	Condition	Application	Attention !
Énergie mécanique	$\sum U_{nc} = 0$	$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$	Forces non conservatives
Quantité de mouvement	$\sum \vec{F} = \vec{0}$	$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$	Forces externes.
Moment cinétique	$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$	$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$	Moments externes. Choisir le bon point.

Dans tous les cas, il faut TOUJOURS bien définir le système étudié.

Exemple intégrateur

Sur un plan horizontal sans frottement, la rondelle A (vitesse v_A) entre en collision avec la rondelle B immobile qui est reliée à un clou fixe par une corde élastique. Initialement, la corde élastique n'est pas étirée. Les deux rondelles restent ensemble après la collision.



A. Trouver la vitesse des deux rondelles immédiatement après la collision.

Système (A et B) isolé en *y*. Conservation de la QM en *y* pour trouver la vitesse commune de AB juste après la collision.

B. La longueur maximale atteinte par la corde après la collision est *L*. Quelle est sa constante d'élasticité (constante de ressort) ?

Après la collision : Énergie mécanique conservée (pas de force non conservative)
MC conservé par rapport au clou (moment de la tension est nul p/r au clou)

État 1 : juste après la collision

État 2 : longueur de corde maximale

1. MC : vitesse de AB à longueur maximale

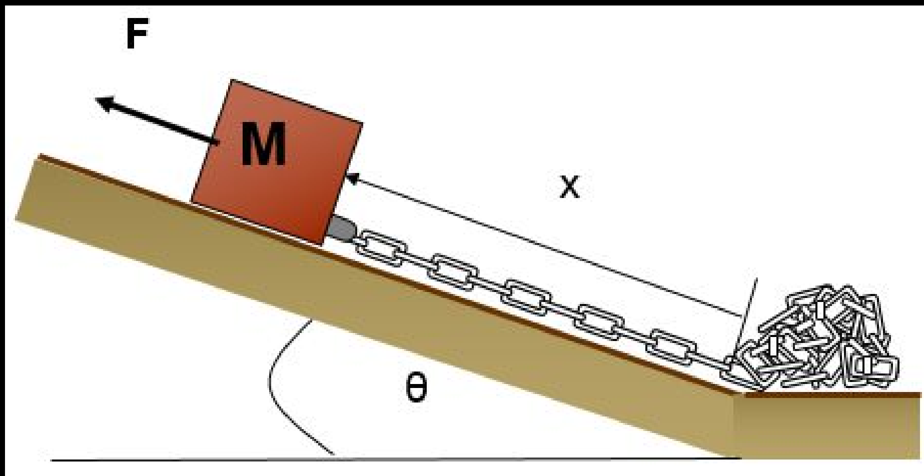
2. Énergie : valeur de la constante d'élasticité

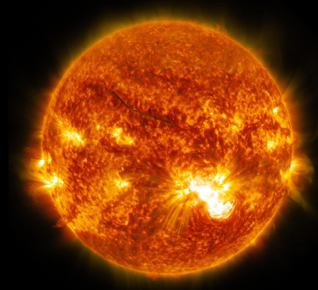
$$\frac{1}{2}k(L-L_0)^2$$

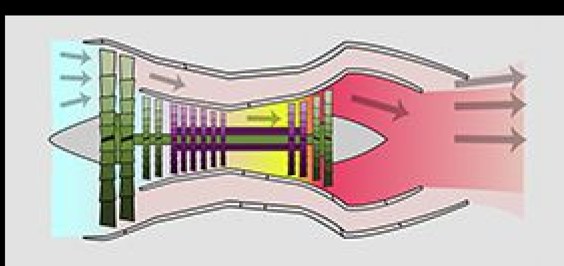
Quiz

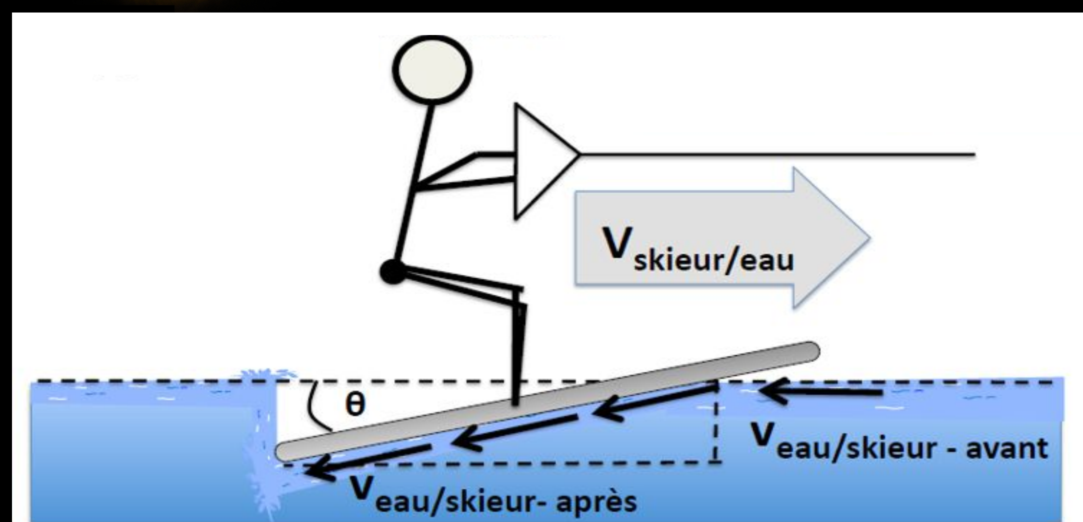
Sur quoi la fusée « s'appuie-t-elle » pour décoller ?

- **A : Sur l'atmosphère**
- **B : Sur le gaz qu'elle éjecte**
- **C : Sur elle-même**
- **D : Sur le sol**
- **E : Sur les oiseaux (?!?)**


F
M
x
θ






$V_{skieur/eau}$
θ
$V_{eau/skieur - avant}$
$V_{eau/skieur- après}$

Système à masse variable

https://www.youtube.com/watch?v=uuYoYl5kyVE
(40s à 1m40s)

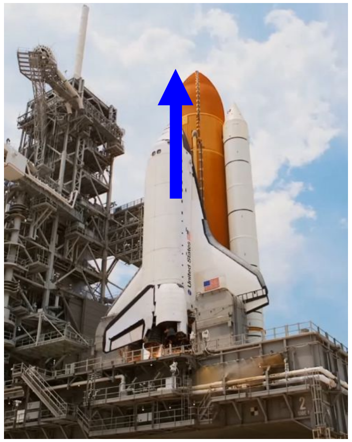
Courants de particules

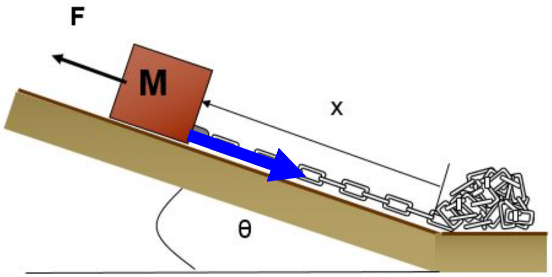
http://www.dailymotion.com/video/x2mpe39
(17m22s à 18m35s)

Système de particules variables

Système à masse variable

Un corps acquiert ou perd de la masse avec le temps. La masse acquise ou perdue génère une force sur le corps.





Courants de particules

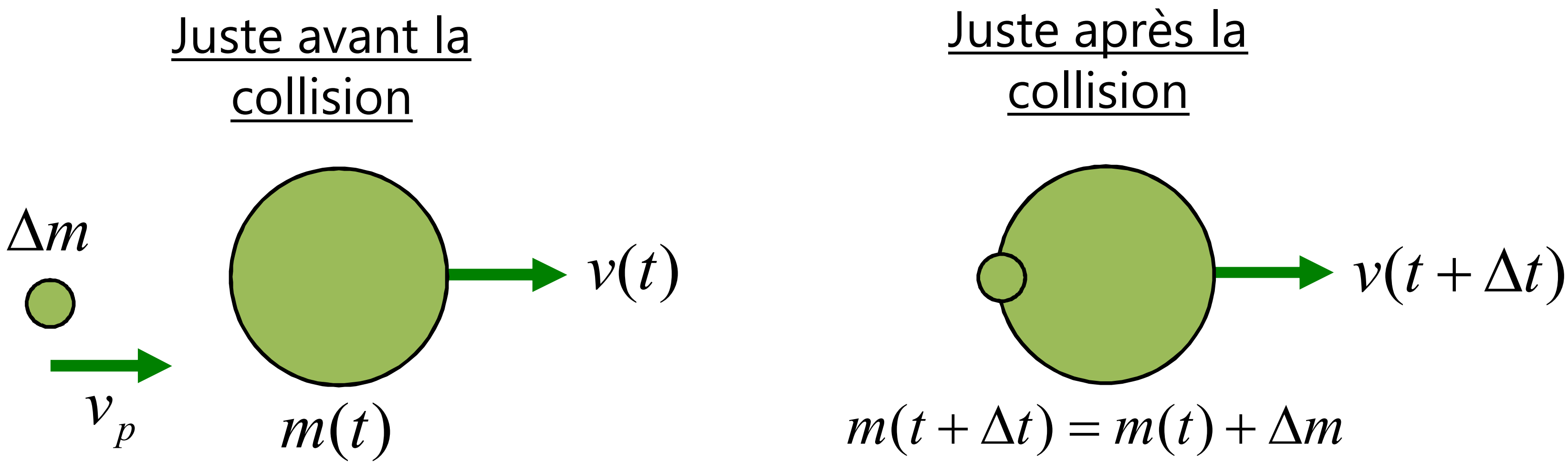
Un corps de masse constante est soumis à des forces parce qu'il dévie un fluide.

Plan de la semaine

- Système de particules variables
    - **Systèmes à masse variable**
    - Courants de particules

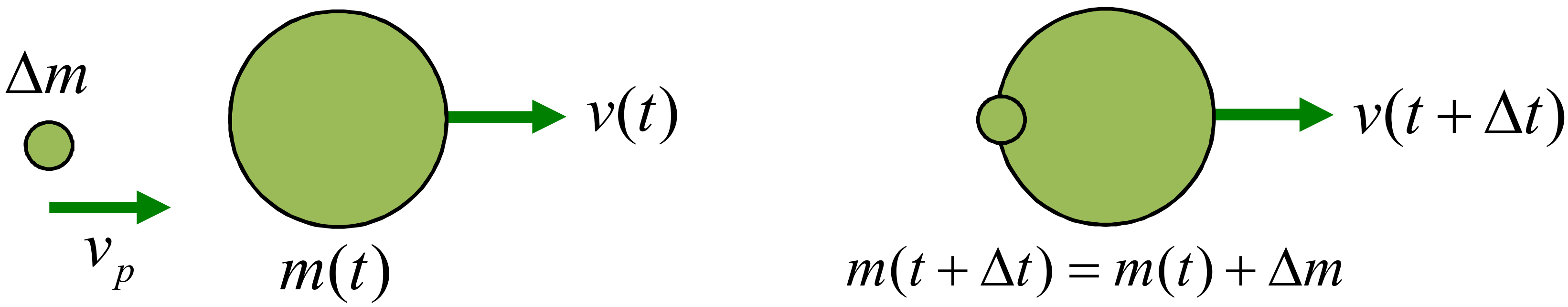
Force associée à une variation de masse

Soit un corps bombardé de petites particules de masse Δm voyageant à une vitesse $\vec{v}_p$. Lorsqu'une particule heurte le corps, elle reste collée (collision parfaitement inélastique), de sorte que la masse totale du corps augmente.



On applique le principe impulsion-QM au système fusée+particule, entre les instants juste avant et juste après la collision.

Force associée à une variation de masse



Différence des quantités de mouvement

$$\vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t) = \left(m(t)+\Delta m\right)\vec{v}(t+\Delta t) - \left[m(t)\vec{v}(t) + \vec{v}_p \Delta m\right]$$

$$= m(t)\left[\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right] + \Delta m[\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}_p]$$

On divise par Δt et on prend la limite pour un intervalle de temps infinitésimal.

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t}}_{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{F}} = \underbrace{m(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}}_{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{a}} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}\left[\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}_p\right]}_{\frac{dm}{dt}\left(\vec{v} - \vec{v}_p\right)}$$

Équation d'un système à masse variable

$$\boxed{\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}) = m(t)\vec{a}}$$

Quelques précisions

1. Le membre de gauche est la somme de forces « habituelle » : poids, tensions, normales, frottements, etc.;
2. La masse $m(t)$ varie avec le temps : c'est la masse du corps dont la masse change;
3. Les variables $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont l'accélération et la vitesse du corps dont la masse change;
4. Le taux de variation de la masse est appelé débit massique. On note souvent sa valeur absolue par la lettre μ;
5. Le terme $\vec{v}_p - \vec{v}$ est la vitesse relative des particules par rapport au corps qui les accumule ou qui les perd. On la note parfois $\vec{u}$.

$$\mu \equiv \left|\frac{dm}{dt}\right| \; [\mathrm{kg/s}]$$

$$\vec{u} \equiv \vec{v}_p - \vec{v}$$

Équation d'un système à masse variable

$$\boxed{\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}) = m(t)\vec{a}}$$

Force de poussée ou de propulsion
Le terme associé à la variation de masse est souvent appelée force de poussée ou force de propulsion selon le contexte.

$$\vec{F}_{poussée} \equiv \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v})$$

Il faut dessiner cette force dans les DCL !

Système qui gagne de la masse

$$\frac{dm}{dt} = \mu > 0$$

Débit massique positif

Système qui perd de la masse

$$\frac{dm}{dt} = -\mu < 0$$

Débit massique négatif

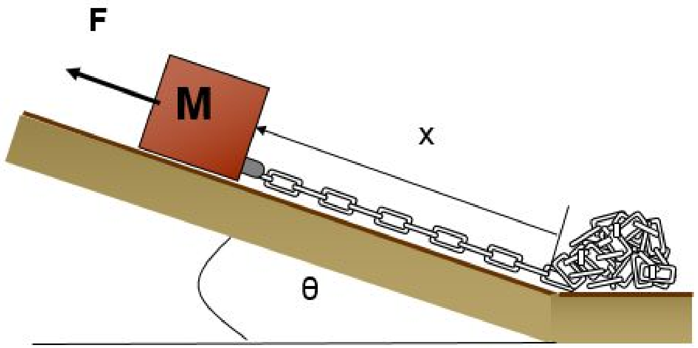
Calcul du débit massique

Si le débit massique n'est pas une donnée connue, il faut le calculer. Le calcul du débit massique dépend de la situation considérée.

Cas général

Dans le cas général, il faut :

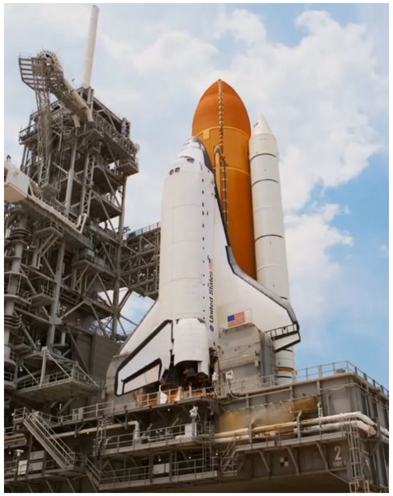
1. Déterminer une expression pour la masse $m(t)$ du système en fonction du temps ;
2. Dériver $m(t)$ par rapport au temps pour obtenir dm/dt.



Cas particulier

La variation de masse est due à un fluide qui entre ou qui sort du système. Dans ce cas, le débit massique dépend de :

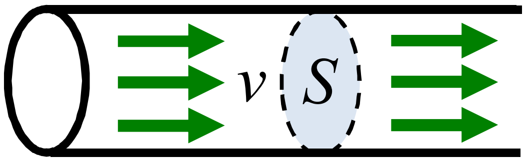
- La vitesse du fluide ;
- La section de la conduite qui contient le fluide.



Débit massique et débit volumique

pour un fluide dans une conduite

Soit une conduite de section S dans laquelle circule un fluide avec une vitesse v.

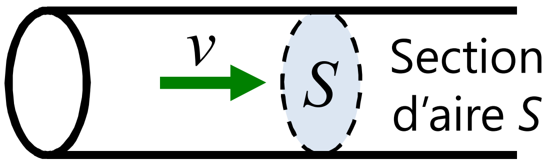


Hypothèses considérées

1. Hypothèse de continuité
   Le débit entrant est égal au débit sortant. Autrement, il y aurait accumulation de fluide à certains endroits.
2. Fluide incompressible
   La masse volumique du fluide est constante (ρ = constante).
3. Fluide parfait (régime uniforme)
   Le fluide n'a pas de viscosité et n'interagit pas avec les parois de la conduite. Le module de la vitesse des particules de fluide est partout le même : il ne dépend pas de la position.
4. Écoulement en régime permanent
   Les variables qui décrivent l'écoulement du fluide ne varient pas dans le temps. (Ex : la vitesse du fluide à une position donnée est toujours la même.)

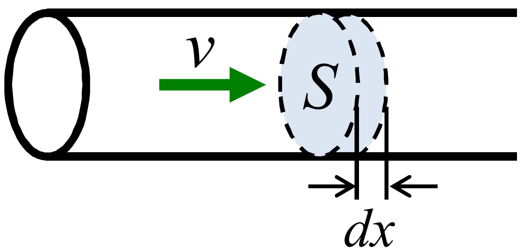
Débit massique et débit volumique
pour un fluide dans une conduite

Soit une conduite de section S dans laquelle circule un fluide avec une vitesse v.



Quel volume de fluide traverse la section à chaque seconde ?

$$dV = Sdx \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = S\frac{dx}{dt}$$



Débit volumique $\boxed{\dfrac{dV}{dt} = \pm Sv}$ en m^3/s

Quelle quantité de matière traverse la section à chaque seconde ?

$$m = \rho V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dm}{dt} = \rho\frac{dV}{dt}}$$

Débit massique $\boxed{\dfrac{dm}{dt} = \pm \rho Sv}$ en kg/s

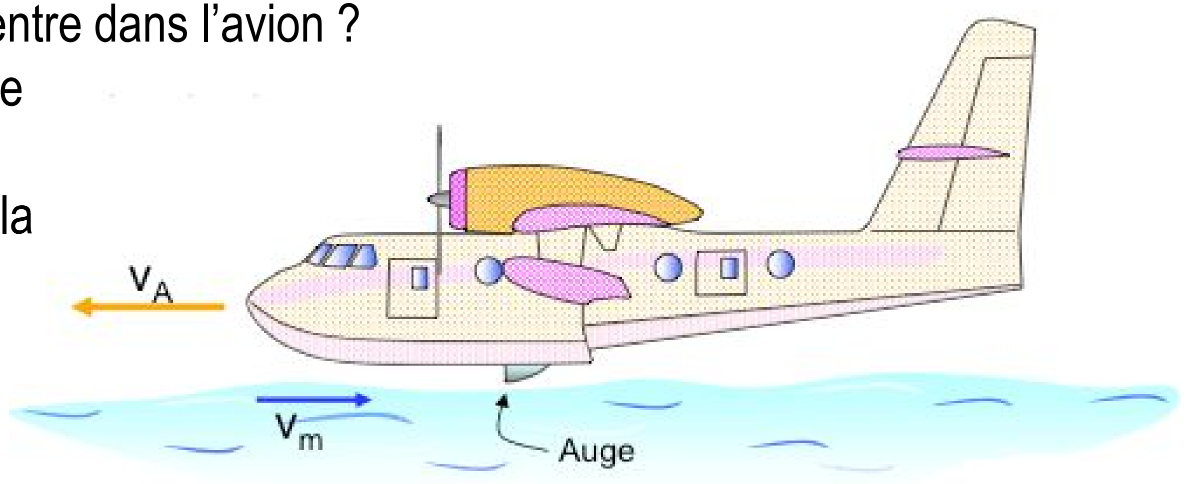
Signe : + si le fluide entre dans le système, – s'il en sort.

Exemple 1 – Le Canadair

Un « Canadair » s'alimente en eau (masse volumique ρ) sur un cours d'eau agité dont la vitesse du courant est V_m. L'avion se déplace à une vitesse V_A et a une masse à vide égale à m_0. Il est capable d'accumuler un volume V d'eau à travers une auge de section S.

À l'instant où l'auge touche la surface de la mer, le pilote augmente la puissance des moteurs pour compenser la décélération causée par l'entrée de l'eau.

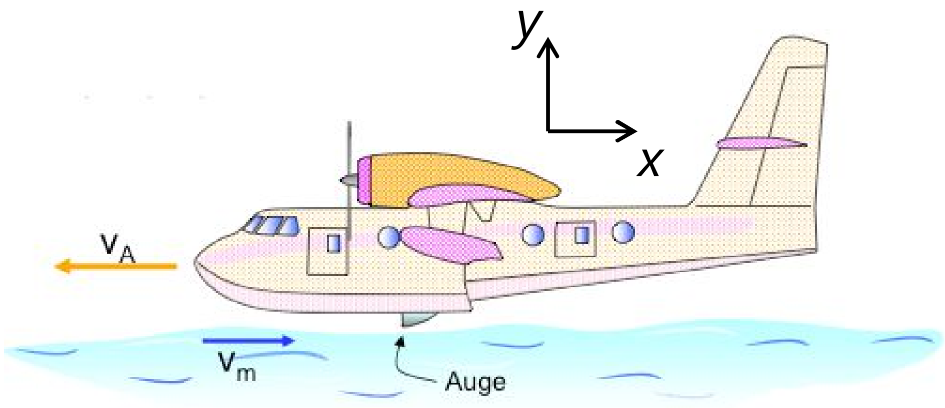
a) Quel est le débit volumique et quel est le débit massique d'eau qui entre dans l'avion ?
b) Quelle est la force associée au remplissage de l'eau ?
c) Quelle est l'expression de la masse de l'avion en fonction du temps et de la distance qu'il a parcourue ?



https://www.youtube.com/watch?v=oLsA-GQaMVQ

Exemple 1 – Le Canadair

a) Débit volumique



$$\frac{dV}{dt} = +Sv$$

Signe + car l'eau entre dans l'avion

La vitesse d'entrée d'eau est la vitesse de l'eau par rapport à l'avion.

$$v = v_{m/A} = \left|v_m - (-v_A)\right| = v_m + v_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dV}{dt} = S(v_m + v_A)}$$

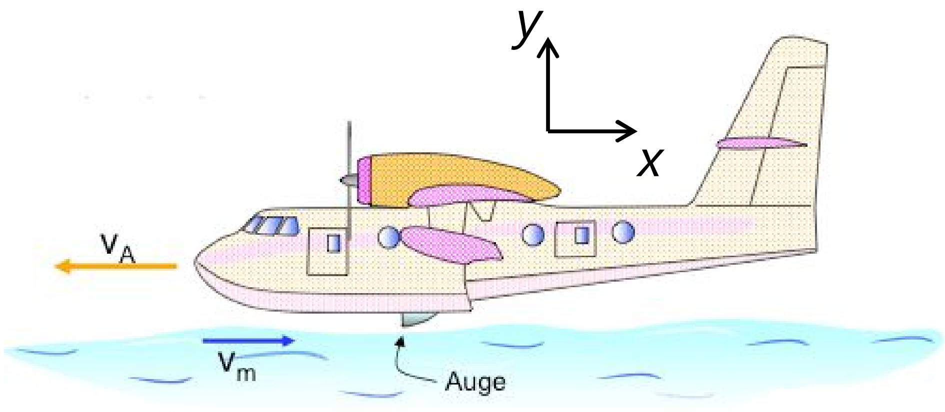
Débit massique

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dm}{dt} = \rho S(v_m + v_A)}$$

Exemple 1 – Le Canadair

b) Force associée au remplissage d'eau

$$\vec{F}_{remplissage} \equiv \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v})$$



La vitesse des particules est la vitesse de l'eau.

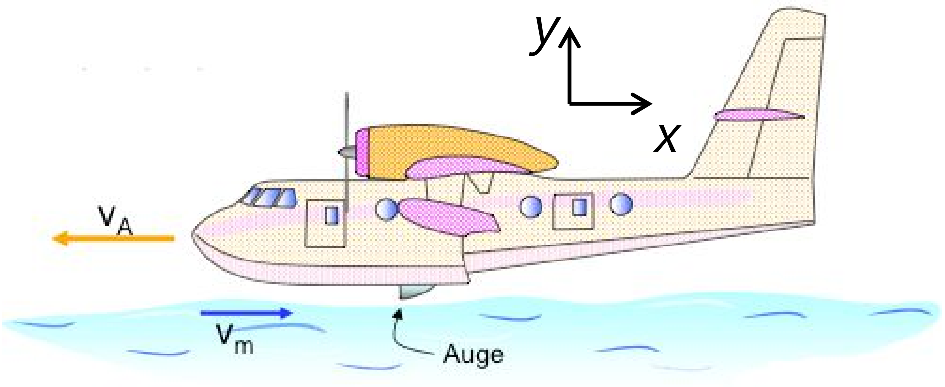
$$\vec{F}_{remplissage} = \frac{dm}{dt}\left[v_m - (-v_A)\right]\vec{i} = \frac{dm}{dt}(v_m + v_A)\vec{i}$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho S(v_m + v_A) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{remplissage} = \rho S(v_m + v_A)^2 \vec{i}}$$

Exemple 1 – Le Canadair

c) Expression de la masse de l'avion en fonction du temps et de la distance qu'il a parcourue.

Le débit massique est le taux auquel la masse de l'avion augmente.



$$\frac{dm}{dt} = \rho S\left(v_m + v_A\right) \Rightarrow dm = \rho S v_m dt + \rho S v_A(t) dt$$

$$\int_{m_0}^{m} dm = \rho S v_m \int_0^t dt - \rho S \int_0^t v_{Ax}(t) dt$$

$$m(t) - m_0 = \rho S v_m t - \rho S\left(x_A(t) - x_{A0}\right)$$

$$\boxed{m(t) = m_0 + \rho S v_m t + \rho S\left(x_{A0} - x_A(t)\right)}$$

$$v_{Ax}(t) = -v_A(t)$$

Relation entre la composante en x de la vitesse de l'avion et son module.

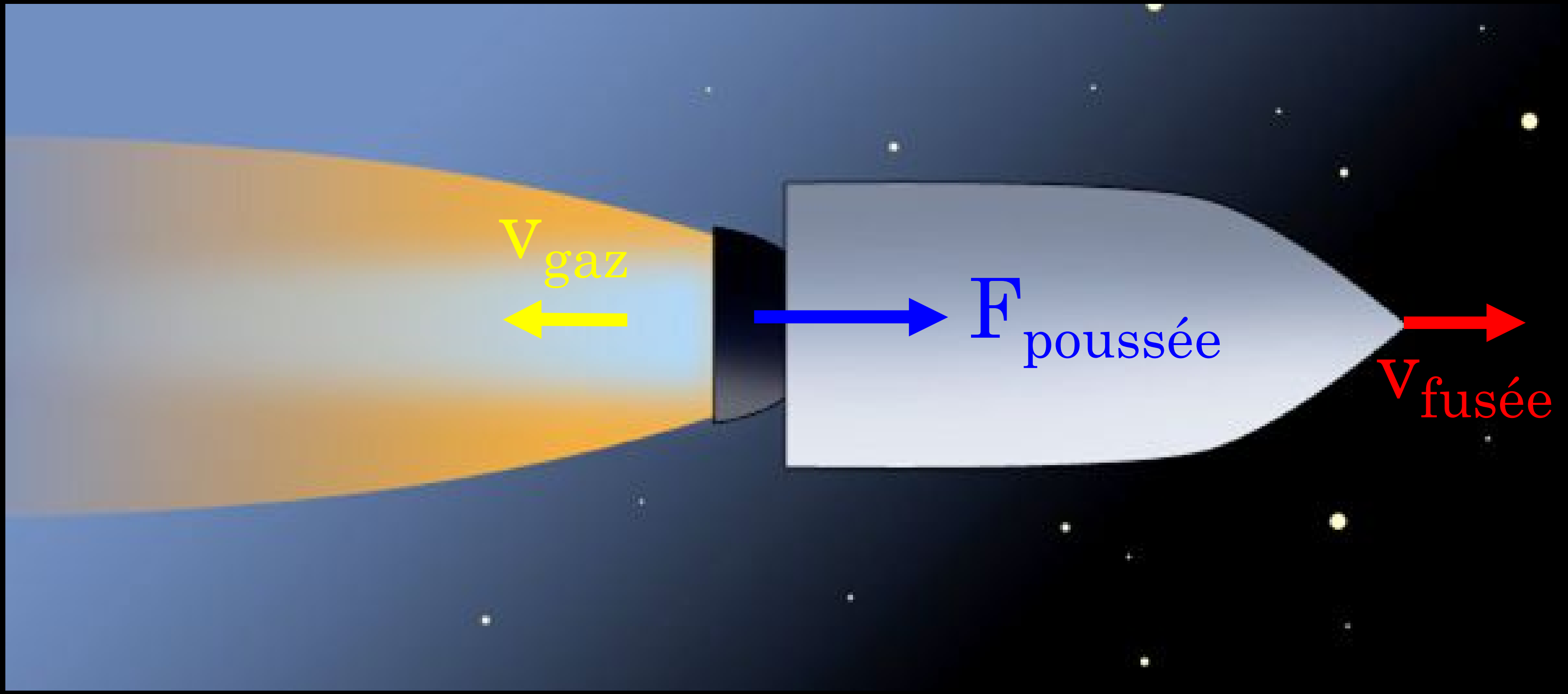
$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\tau) d\tau$$

Définition vue en cinématique (semaine 5)

Le principe de la fusée

Le moteur éjecte des particules de gaz à un certain taux (taux d'éjection des gaz) et avec une certaine vitesse par rapport au moteur (vitesse d'éjection des gaz).

Une force de poussée apparaît alors en sens opposé à la vitesse des gaz, ce qui permet de propulser la fusée.



Exemple 2 – La fusée

Le 26 novembre 2011 à 10h02, la sonde Mars Science Laboratory (MSL) a décollé de Cape Canaveral vers la planète Mars à bord d'une fusée Atlas V. On donne les spécifications suivantes pour la fusée et son contenu (les données proviennent de la NASA) :

Masse totale (fusée + cargo + carburant) : $m_0 = 335$ tonnes
Masse de la sonde MSL : $m_S = 900$ kg
Vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée : $v_{g/f} = 3{,}25$ km/s
Poussée générée par les moteurs au décollage : 4 150 kN
Temps avant le *burn out* (combustion complète du carburant) : 253 s

Supposez un débit massique des gaz constant et une accélération gravitationnelle *g* constante. Négligez le frottement de l'air.

A) Faites le DCL-DCE de la fusée au moment du décollage. (10 points)

B) Déterminez l'accélération de la fusée au moment du décollage. (10 points)

C) Calculez le débit massique des gaz éjectés. (10 points)

D) Quelle sera la masse de la fusée au moment du *burn out* ? (10 points)

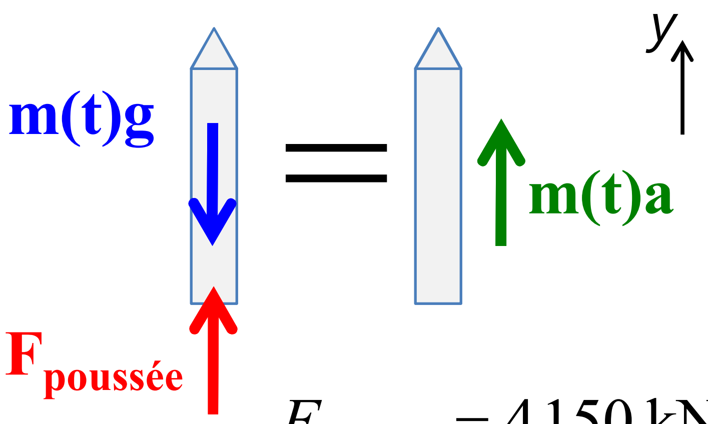
E) Déterminez l'expression de vitesse de la fusée en fonction du temps. (10 points)

$$\int \frac{1}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + Cste$$

Exemple 2 – La fusée

a) DCL-DCE au décollage

b) Accélération au décollage



$$F_{poussée} = 4\,150 \text{ kN}$$

$$\sum \vec{F} + F_{poussée} = m(t)\vec{a}$$

$$-m(t)g + F_{poussée} = m(t)a$$

$$a(t) = \frac{F_{poussée}}{m(t)} - g$$

Au décollage, la masse de la fusée est sa masse initiale. $m(0) = 335\,900 \text{ kg}$

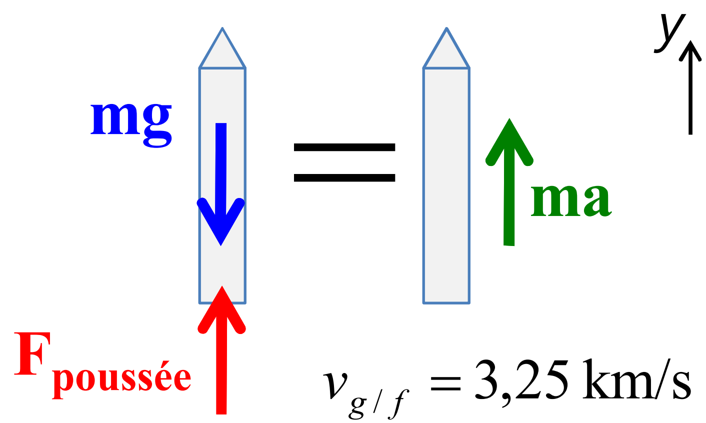
$$\boxed{a(0) = \frac{4\,150\,000}{335\,900} - 9{,}81 = 2{,}54 \text{ m/s}^2}$$

Exemple 2 – La fusée

c) Débit massique des gaz éjectés

$$\vec{F}_{poussée} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}) = -\mu\,\vec{v}_{g/f}$$

$$\boxed{\mu = \frac{F_{poussée}}{v_{g/f}} = \frac{4\,150\,000}{3\,250} = 1\,277\text{ kg/s}}$$



$$v_{g/f} = 3{,}25\text{ km/s}$$

d) Masse de la fusée au moment du *burn out*

Puisque le débit massique est constant, alors la masse de la fusée varie linéairement dans le temps. On n'a qu'à évaluer la masse après 253 s.

$$\frac{dm}{dt} = -\mu \quad \Rightarrow \quad \int_{m(0)}^{m} dm = -\mu \int_0^t dt$$

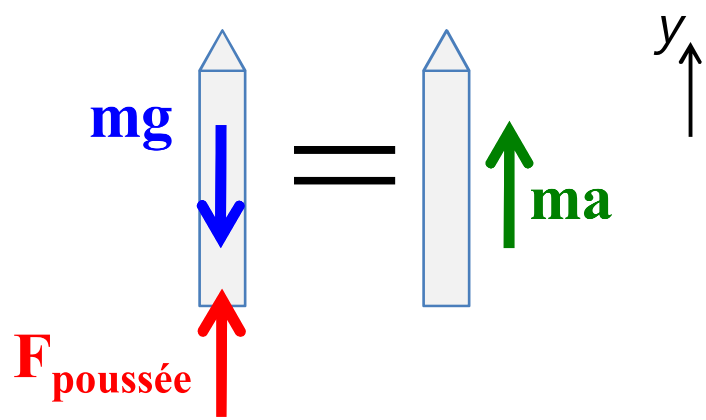
$$m = m(0) - \mu t$$

$$m = 335\,900 - 1\,277 \cdot 253$$

$$\boxed{m = 12\,819\text{ kg}}$$

Exemple 2 – La fusée

e) Expression de la vitesse de la fusée en fonction du temps



$$a(t) = \frac{F_{poussée}}{m(t)} - g$$

$$a(t) = \frac{\mu v_{f/g}}{m(0) - \mu t} - g$$

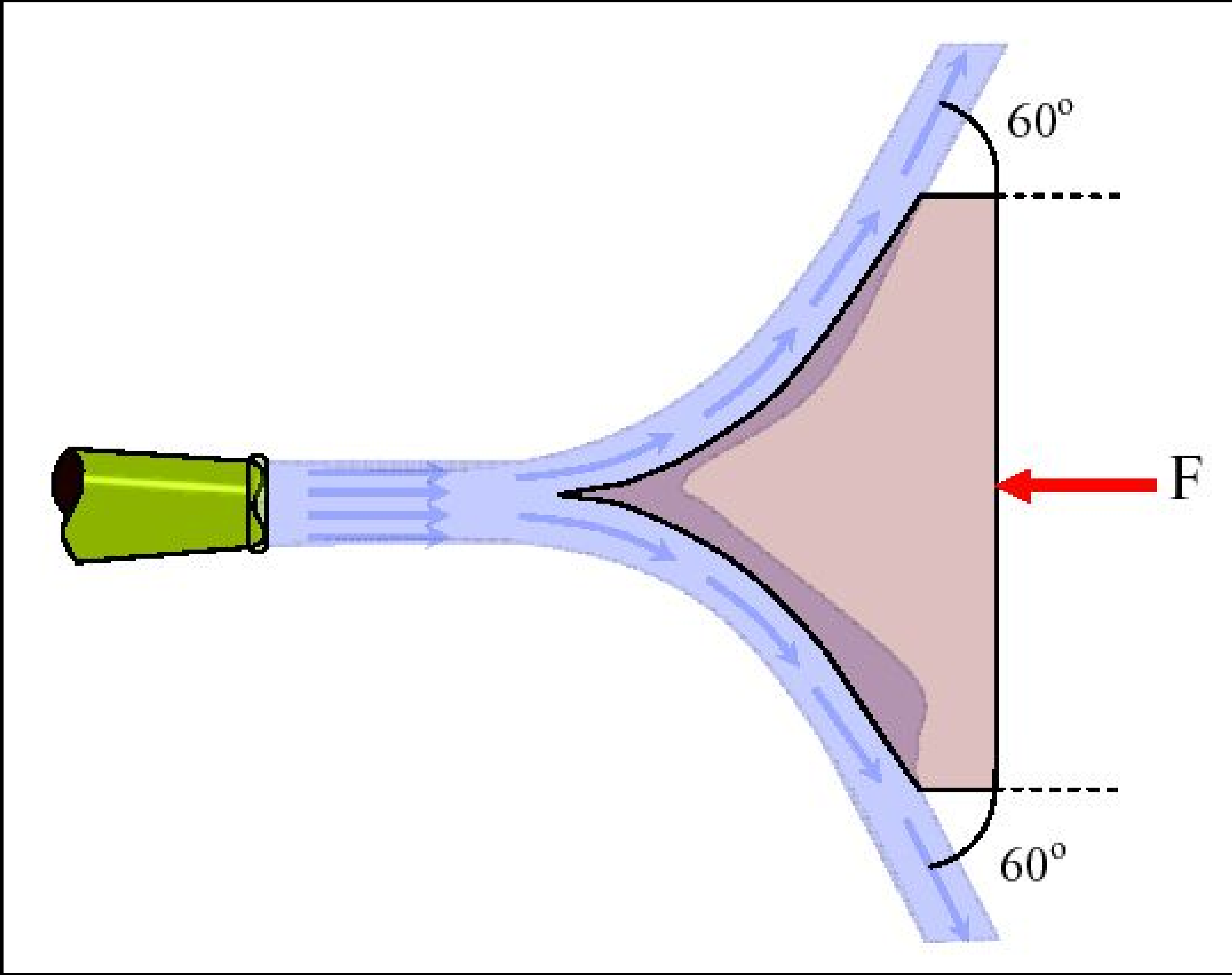
On a l'accélération en fonction du temps : on doit intégrer par rapport au temps pour trouver la vitesse.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)dt = 0 + \int_0^t \left(\frac{\mu v_{f/g}}{m(0) - \mu t} - g \right) dt$$

$$\int \frac{1}{a + bx} dx = \frac{1}{b} \ln(a + bx) + Cste \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_{f/g} \ln\left(\frac{m(0)}{m(0) - \mu t} \right) - gt}$$

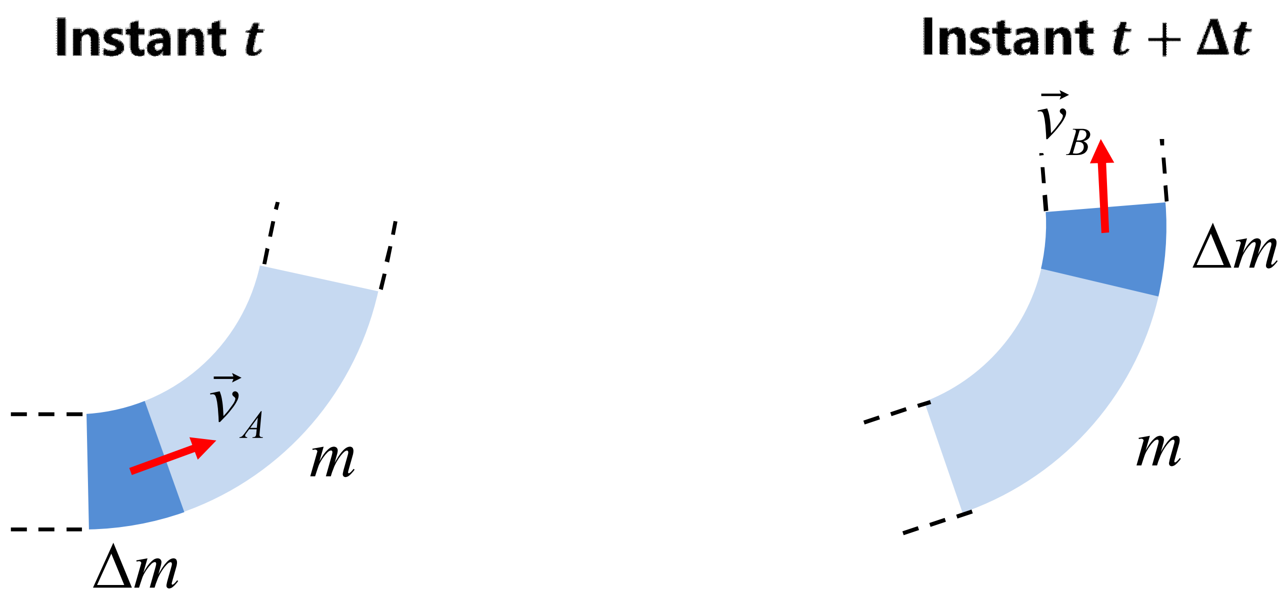
Plan de la semaine

- Système de particules variables
  - Systèmes à masse variable
  - **Courants de particules**


60°
F
60°

Forces associées à un courant de particules

Soit un courant permanent de particules dévié par une conduite de section S. Le débit est constant partout dans la conduite.

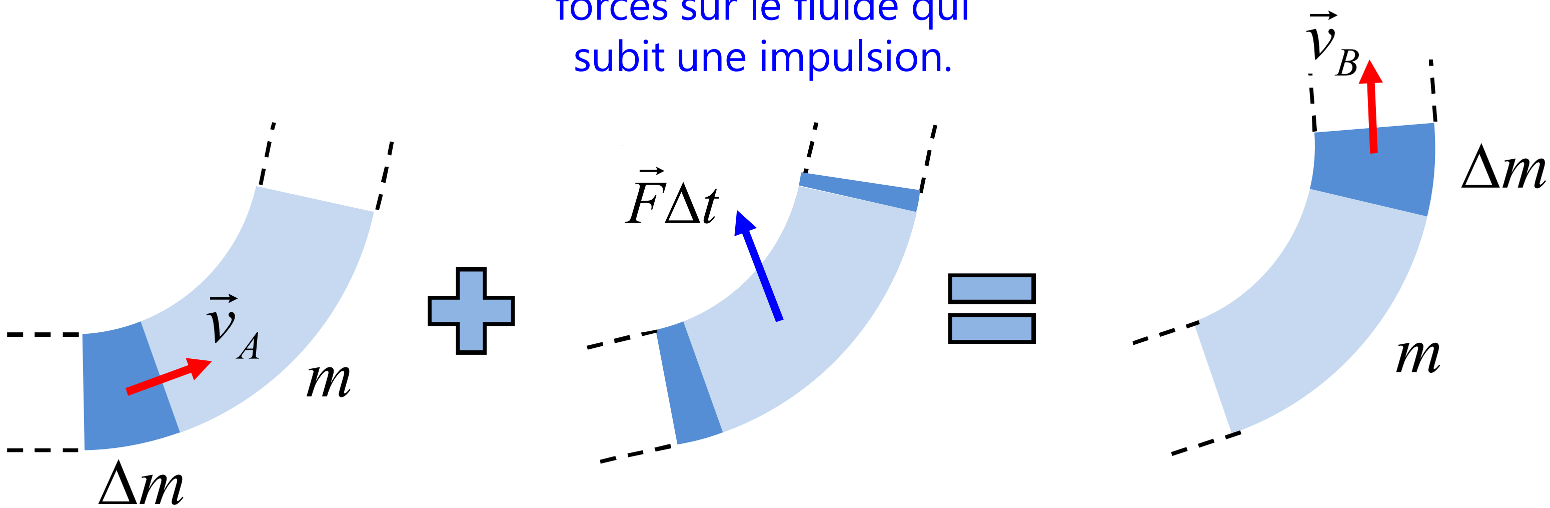


On applique le principe impulsion-QM au système de particules composé des masses m et Δm pour déduire la force exercée par le courant sur la conduite.

(On suit les mêmes particules lors de leur mouvement.)

Forces associées à un courant de particules

Instant t | La conduite exerce des forces sur le fluide qui subit une impulsion. | **Instant $t + \Delta t$**



$$\sum m_i \vec{v}_i + \vec{v}_A \Delta m \quad + \quad \vec{F}\Delta t \quad = \quad \sum m_i \vec{v}_i + \vec{v}_B \Delta m$$

La quantité de mouvement des particules de m (bleu pâle) est la même avant et après : les termes $\sum m_i \vec{v}_i$ se simplifient. En prenant la limite quand $\Delta t \to 0$, on trouve :

$$\vec{F} = \left|\frac{dm}{dt}\right|\left(\vec{v}_B - \vec{v}_A\right)$$

Force résultante exercée par la conduite sur le fluide pour changer sa vitesse

Forces associées à un courant de particules

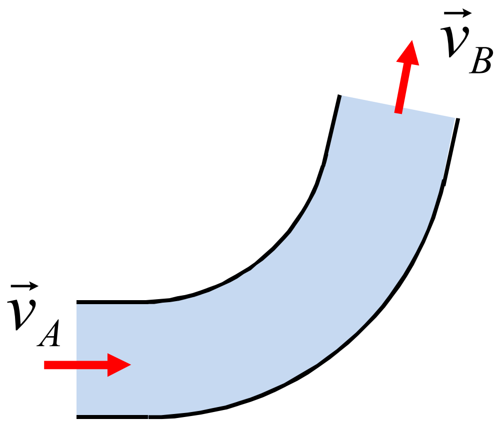
Conduite sur le fluide

$$\vec{F}_{c\to f} = \left|\frac{dm}{dt}\right|(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Fluide sur la conduite

$$\boxed{\vec{F}_{f\to c} = \left|\frac{dm}{dt}\right|(\vec{v}_A - \vec{v}_B)}$$

Action-réaction



On peut généraliser l'expression ci-dessus en définissant une force produite pour chaque courant entrant/sortant.

Force exercée par un courant entrant

$$\boxed{\vec{F}_e = \left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_e = \mu\vec{v}_e}$$

Force exercée par un courant sortant

$$\boxed{\vec{F}_s = -\left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_s = -\mu\vec{v}_s}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_s$$

La force totale exercée par tous les courants est la somme de toutes les forces produites par les courants entrants/sortants.

Exemple 3 – La valve

L'eau sort du gicleur avec une vitesse horizontale de 30 m/s et un débit de 50 000 cm^3/s. Elle est séparée en deux jets symétriques par une valve qui dévie les jets avec un angle de 60°. Calculez la force $\vec{F}$ nécessaire pour maintenir la valve immobile.

N.B. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3. Supposez que le module de la vitesse du courant ne change pas lorsqu'il est dévié.

Information connue ? $v = 30\ \mathrm{m/s}$ $\quad \rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ $\quad \left|\dfrac{dV}{dt}\right| = 0{,}050\ \mathrm{m^3/s}$

Système à étudier ? **Valve (sans le fluide)**

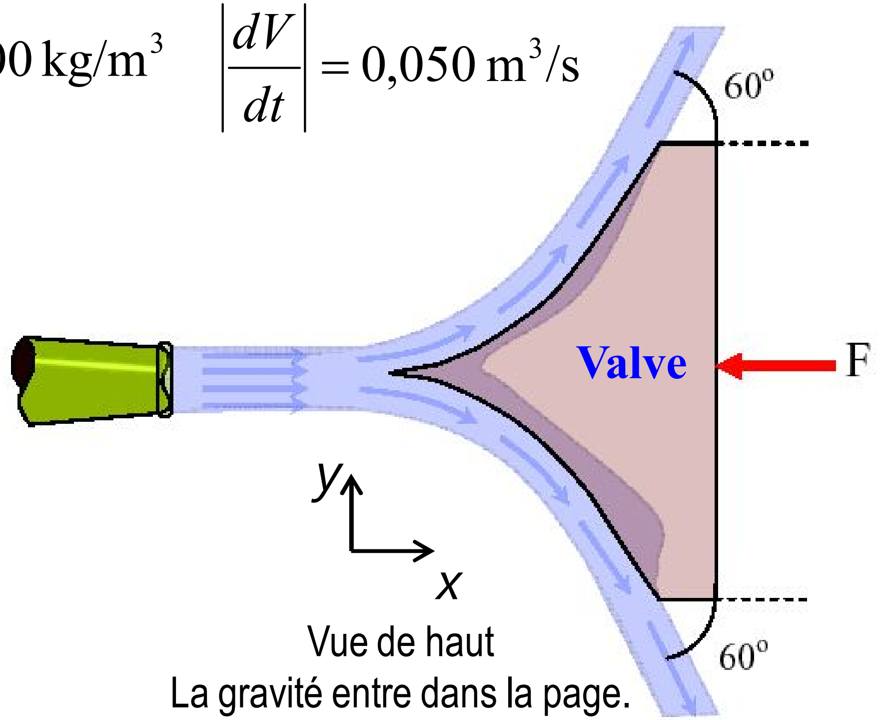
Forces qui s'exercent sur le système ?

Force F

Force du courant entrant

Force du courant sortant vers le haut

Force du courant sortant vers le bas



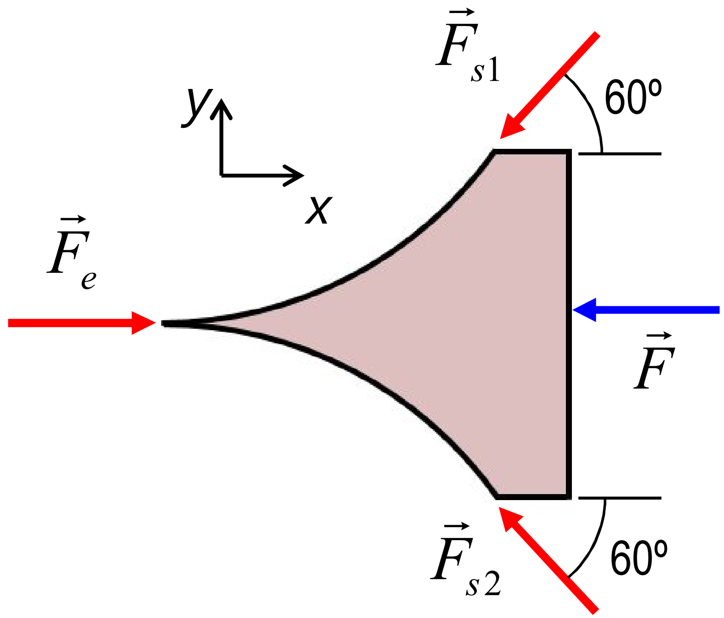
Exemple 3 – La valve

Forces des courants

$$\vec{F}_e = \mu_e \vec{v}_e = \mu_e v \vec{i}$$

$$\vec{F}_{s1} = -\mu_{s1} \vec{v}_{s1} = -\mu_{s1} v \left(\cos 60° \vec{i} + \sin 60° \vec{j} \right)$$

$$\vec{F}_{s2} = -\mu_{s2} \vec{v}_{s2} = -\mu_{s2} v \left(\cos 60° \vec{i} - \sin 60° \vec{j} \right)$$



Vue de haut
La gravité entre dans la page.

Le débit entrant est séparé également entre les deux jets :

$$\mu_{s1} = \mu_{s2} = \frac{\mu_e}{2}$$

Calcul des débits massiques

$$\mu_e = \left| \frac{dm}{dt} \right| = \rho \left| \frac{dV}{dt} \right| = 1000 \cdot 0{,}050 = 50 \text{ kg/s} \qquad \mu_{s1} = \mu_{s2} = 25 \text{ kg/s}$$

Exemple 3 – La valve

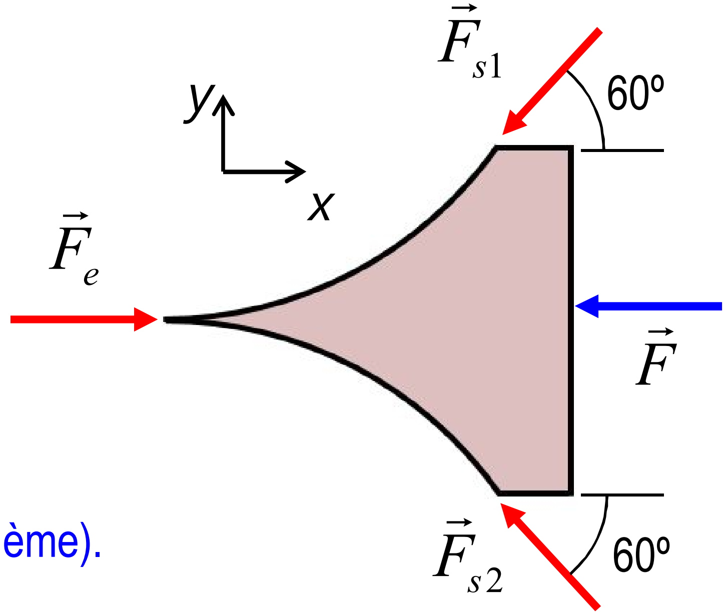
Valve immobile (équilibre statique)

$$\sum F_x + F_{e,x} + F_{s1,x} + F_{s2,x} = -F + \mu_e v - \frac{\mu_e}{2} v\cos 60° - \frac{\mu_e}{2} v\cos 60° = 0$$

$$\boxed{\vec{F} = -\mu_e v(1-\cos 60°) = -\frac{\mu_e v}{2}\vec{i}}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{50\cdot 30}{2} = -750\vec{i}\ \mathrm{N}}$$

La force $\vec{F}$, orientée vers la gauche, compense les forces exercées par les courants sur la valve.



Remarque

La somme des forces en *y* n'apporte rien (symétrie du problème).

$$\sum F_y + F_{e,y} + F_{s1,y} + F_{s2,y} = -\frac{\mu_e}{2} v\cos 60° + \frac{\mu_e}{2} v\cos 60° = 0$$

Vue de haut
La gravité entre dans la page.

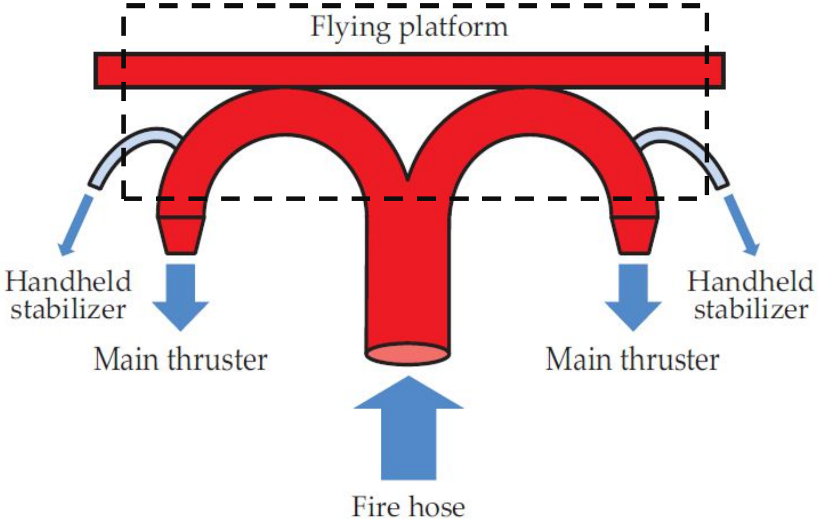
Exemple 4 – Le *jet pack*

Chaîne *Veritasium* : https://www.youtube.com/watch?v=Hx9TwM4Pmhc&index=39&list=UUHnyfMqiRRG1u-2MsSQLbXA

Du début à 1m45s, puis de 5m25s à 6m27s

Comment fonctionne un *jet pack* ?

Le *jet pack* peut être modélisé comme un corps qui gagne de la masse à taux *dm/dt* du boyau d'incendie (*fire hose*) tout en perdant de la masse au même taux via les deux propulseurs principaux (*main thrusters*).



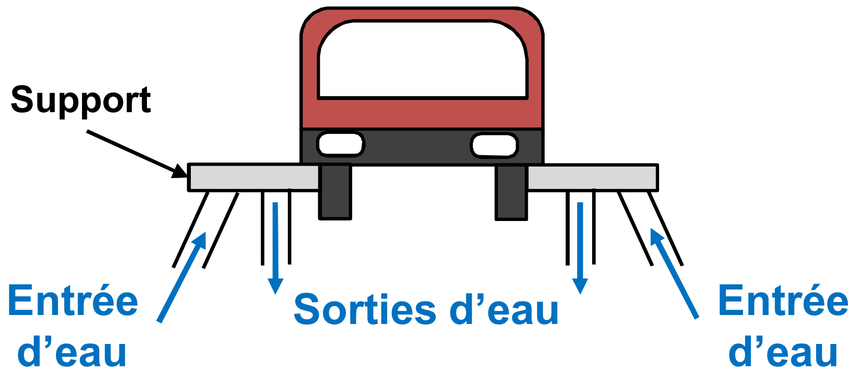
Pourquoi le *jet pack* ressent-il une force si sa masse de change pas ?

Parce que le *jet pack* modifie la quantité de mouvement du courant d'eau!

Exemple 4 – Un *jet pack* et une voiture

Une voiture sans moteur est maintenue immobile dans les airs par six boyaux d'incendie cylindriques (3 à gauche, 3 à droite) ayant un diamètre de 6,0 cm. Ces derniers sont installés sur un support accroché à la voiture. Pour chaque boyau, la partie où l'eau entre fait un angle de 15° par rapport à la verticale tandis que la partie où l'eau sort est verticale. La voiture et son support ont une masse totale de 780 kg. La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3. Le module de la vitesse de l'eau et le débit ne varient pas à l'intérieur d'un boyau.

A) Faire le DCL de la voiture avec le support.
B) Déterminer la grandeur de la vitesse du courant d'eau dans les boyaux.
C) Calculer la quantité d'eau requise (en kg) pour maintenir la voiture immobile dans les airs à une hauteur donnée pendant une minute.



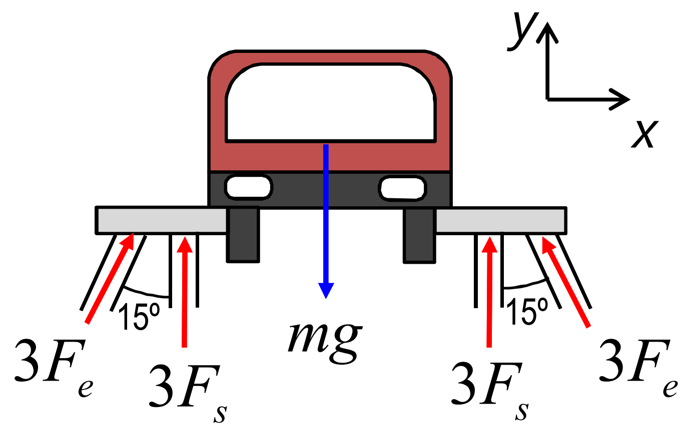
Exemple 4 – Un *jet pack* et une voiture

$$m = 780\,\text{kg} \qquad \rho = 1000\,\text{kg/m}^3 \qquad D = 6{,}0\,\text{cm} = 0{,}060\,\text{m}$$

A) Faire le DCL de la voiture avec le support.

Remarquez que l'eau qui monte et l'eau qui sort vers le bas exercent toutes deux des forces vers le haut!

$$\vec{F}_e = \left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_e \qquad \vec{F}_s = -\left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_s$$



B) Déterminer la grandeur de la vitesse du courant d'eau dans les boyaux.

Équilibre statique de la voiture et du support

$$\sum F_y + 6F_{e,y} + 6F_{s,y} = 6F_s + 6F_e\cos 15° - mg = 0$$

$$6\left(F_s + F_e\cos 15°\right) = mg$$

Modules des forces de poussée

$$F_e = F_s = \left|\frac{dm}{dt}\right| v = \rho v \left|\frac{dV}{dt}\right| = \rho S v^2$$

Exemple 4 – Un *jet pack* et une voiture

B) Déterminer la grandeur de la vitesse du courant d'eau dans les boyaux. (suite)

$$6\left(F_s + F_e \cos 15°\right) = mg$$

$$6\rho S v^2\left(1+\cos 15°\right) = mg$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{6\rho S\left(1+\cos 15°\right)}}$$

La section des boyaux est circulaire puisque les boyaux sont cylindriques.

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

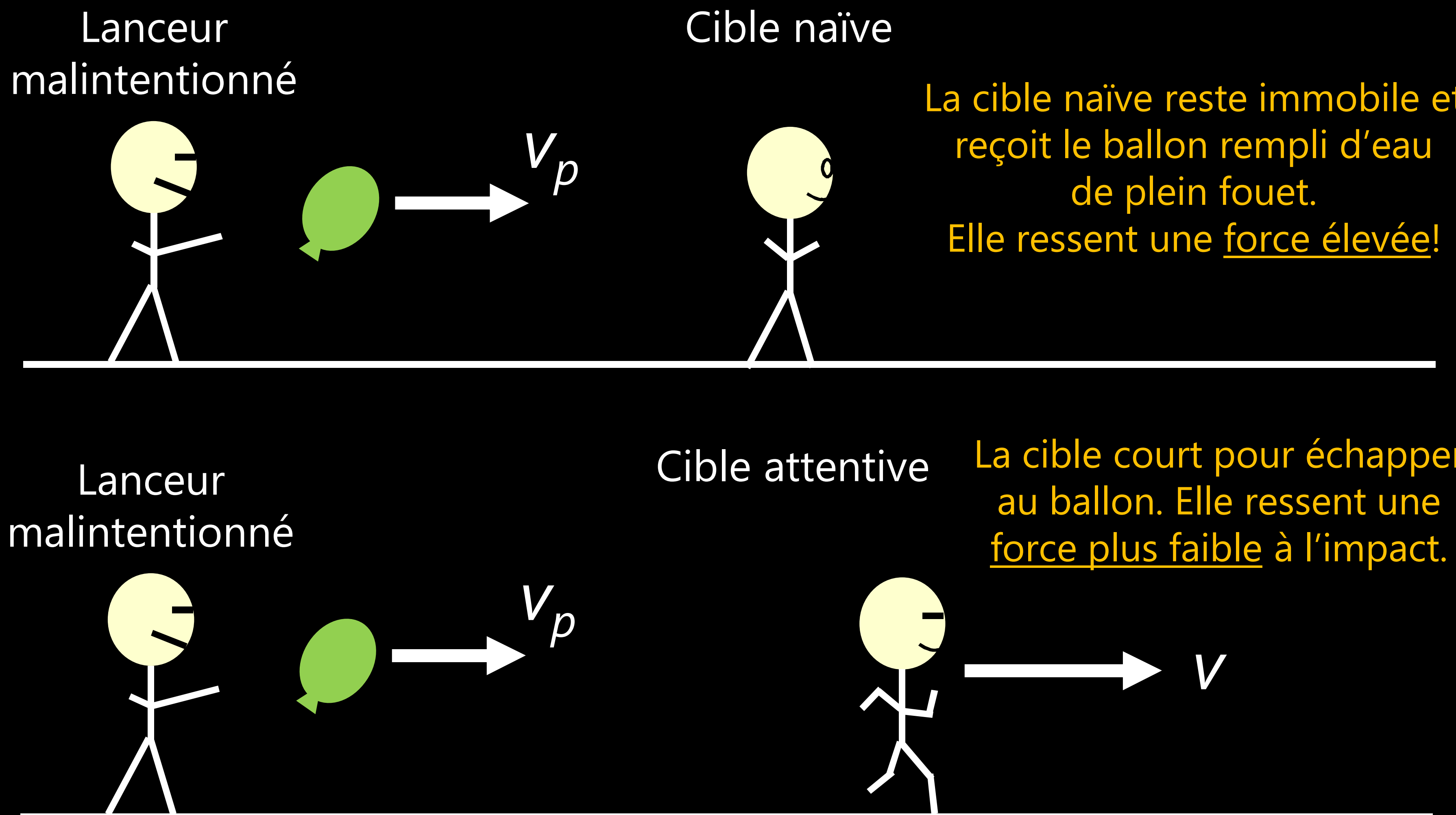
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2mg}{3\rho\pi D^2\left(1+\cos 15°\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 780\cdot 9{,}81}{3\cdot 1000\pi\cdot 0{,}060^2\left(1+\cos 15°\right)}} = 15{,}15\ \mathrm{m/s}}$$

C) Calculer la quantité d'eau requise (en kg) pour maintenir la voiture immobile pendant une minute.

Puisque le débit est constant, la quantité d'eau consommée est proportionnelle au temps écoulé et au nombre de boyaux (6).

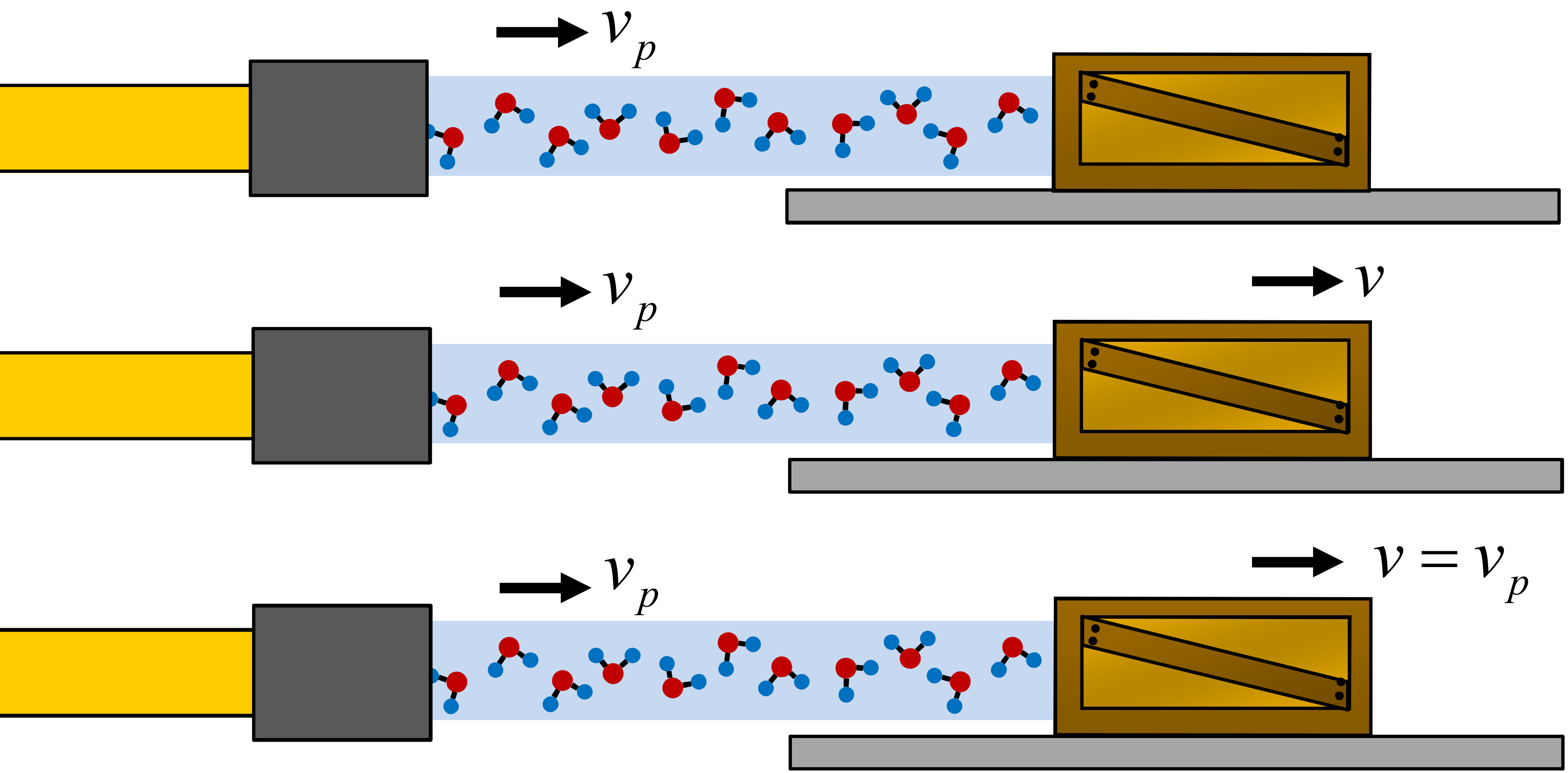
$$\boxed{m_{eau} = 6\left|\frac{dm}{dt}\right|\Delta t = 6\cdot\rho\frac{\pi D^2}{4}v\Delta t = 6\cdot\frac{1000\pi\cdot 0{,}060^2\cdot 15{,}15}{4}\cdot 60 = 15\,421\ \mathrm{kg}}$$

Tout est une question de vitesse relative...



Si la cible est athlétique et qu'elle court à une vitesse égale ou supérieure au ballon, elle ne sentira aucune force!

Courant sur un objet en mouvement



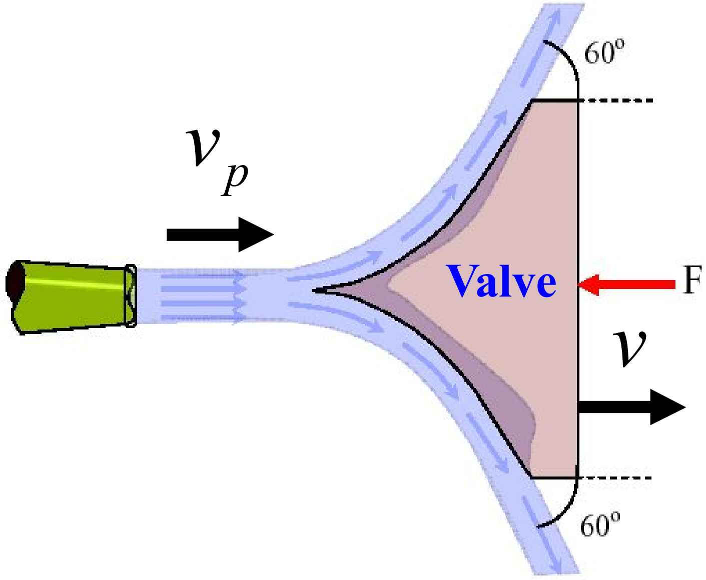
Plus la caisse va vite, moins il y a de particules qui la frappent par unité de temps et plus la force du courant sur la caisse est faible!

Exemple 5 – Valve en mouvement

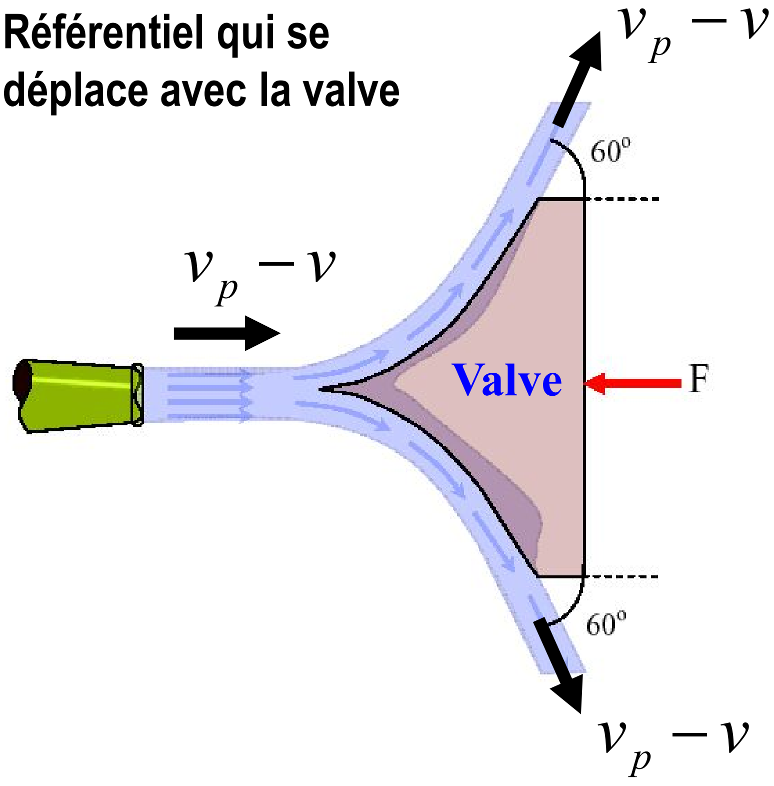
Quelle force $\vec{F}$ faut-il exercer sur la valve pour qu'elle se déplace à vitesse constante v vers la droite si elle reçoit un jet d'eau dont la vitesse est v_p ?

Pour résoudre ce problème, on travaille dans le référentiel de la valve.
Dans ce référentiel, la valve est immobile et la vitesse des courants d'eau est : $v_p - v$

Référentiel du sol



Référentiel qui se déplace avec la valve



Exemple 5 – Valve en mouvement

Quelle force $\vec{F}$ faut-il exercer sur la valve pour qu'elle se déplace à vitesse constante v vers la droite ?

Débit massique qui atteint la valve

$$\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S\left(v_p - v\right)$$

Force exercée par le courant entrant

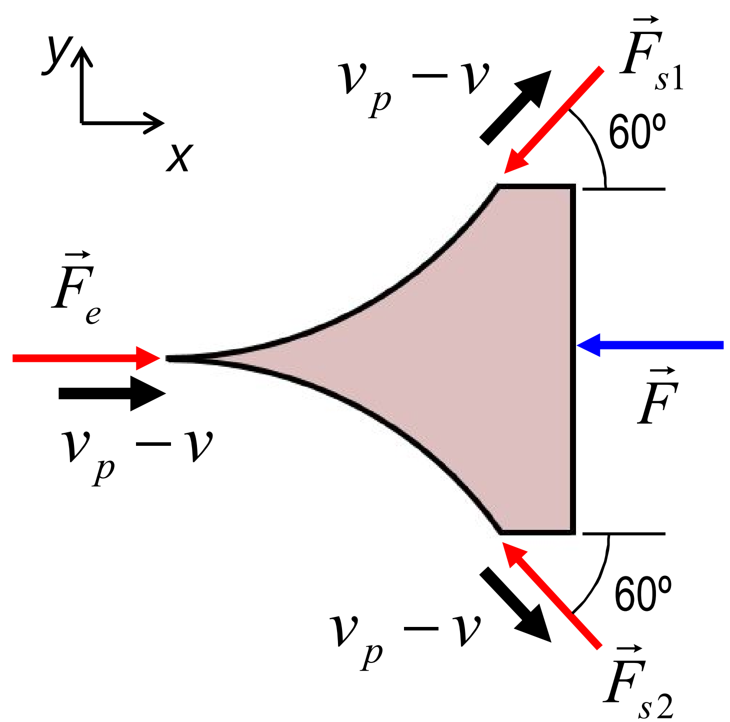
$$\vec{F}_e = \mu\left(v_p - v\right)\vec{i}$$

Forces exercées par les courants sortants

$$\vec{F}_{s1} = -\frac{\mu}{2}\left(v_p - v\right)\left(\cos 60°\,\vec{i} + \sin 60°\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{s2} = -\frac{\mu}{2}\left(v_p - v\right)\left(\cos 60°\,\vec{i} - \sin 60°\,\vec{j}\right)$$

Référentiel qui se déplace avec la valve



Vue de haut
La gravité entre dans la page.

Exemple 5 – Valve en mouvement

Quelle force $\vec{F}$ faut-il exercer sur la valve pour qu'elle se déplace à vitesse constante *v* vers la droite ?

Équilibre statique de la valve (selon *x*)

$$\sum F_x = \mu(v_p - v) - \frac{\mu}{2}(v_p - v)\cos 60° - \frac{\mu}{2}(v_p - v)\cos 60° - F = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\mu(v_p - v)(1 - \cos 60°) = -\frac{\mu(v_p - v)}{2}\vec{i}$$

En substituant l'expression pour le débit massique, on trouve enfin :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\rho S(v_p - v)^2}{2}\vec{i}}$$

Retrouve-t-on le résultat de l'exemple 3 lorsque la valve est immobile ?

Est-il plus difficile de maintenir la valve immobile ou la valve qui se déplace à vitesse constante ?

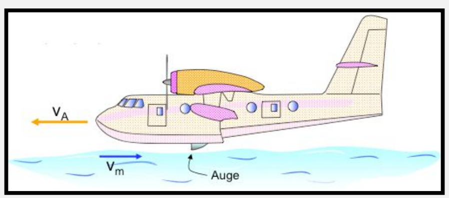
Synthèse du cours

Débits volumique et massique
pour un fluide dans une conduite

$$\left|\frac{dV}{dt}\right| = Sv \qquad \mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S v$$

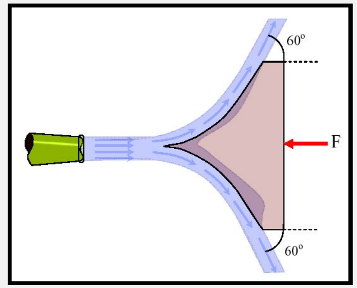
Systèmes à masse variable

$$\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}) = m(t)\vec{a}$$



Force exercée par un courant sur un objet

$$\vec{F} = \left|\frac{dm}{dt}\right|(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$



Si l'objet se déplace à vitesse constante, il faut travailler dans le référentiel où l'objet est immobile.