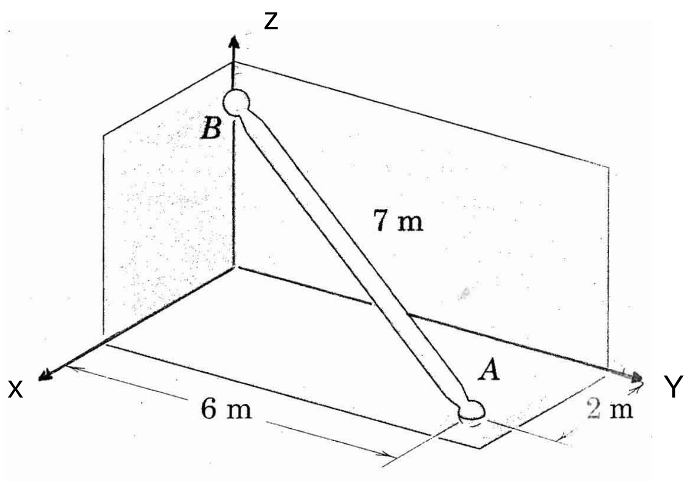
Examen Final Été 2008

Thomas Gervais et Pierre Baulaigue
Chargés de Cours

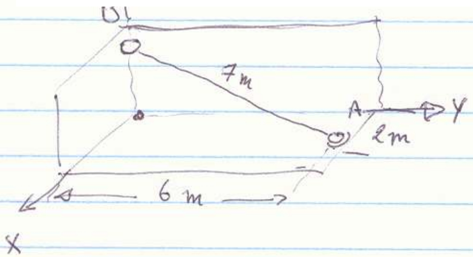
Question 1

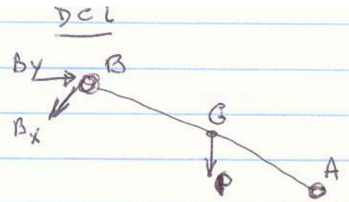
Une barre d’acier de 7 m de long et de masse 200 kg est maintenu par une rotule-pivot ancrée au point A. La boule en B repose sur deux murs verticaux lisse et sans frottement (voir figure, les murs sont situés dans les plans xz et yz respectivement)

1) Faire le DCL de la poutre. (20 points)
2) Déterminer toutes les réactions aux appuis (en A et B); (30 points)



Question 1: Solution





Methode vectorielle

CALCUL DU MOMENT DES FORCES PAR RAPPORT À A

$\vec{r}_{AG} = -1\vec{i} - 3\vec{j} + 1.5\vec{k}$ m

$\vec{r}_{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ m

$\Sigma \vec{M}_A = \vec{0}$

$$\vec{r}_{AB} \times (\vec{B}_x + \vec{B}_y) + \vec{r}_{AG} \times \vec{W} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -6 & +3 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1.5 \\ 0 & 0 & -1962 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$(-3B_y + 5890)\vec{i} + (3B_x - 1962)\vec{j} + (-2B_y + 6B_x)\vec{k} = \vec{0}$$

$B_x = 654\,N \qquad B_y = 1962\,N$

$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \qquad (654 - A_x)\vec{i} + (1962 - A_y)\vec{j} + (-1962 + A_z)\vec{k} = \vec{0}$

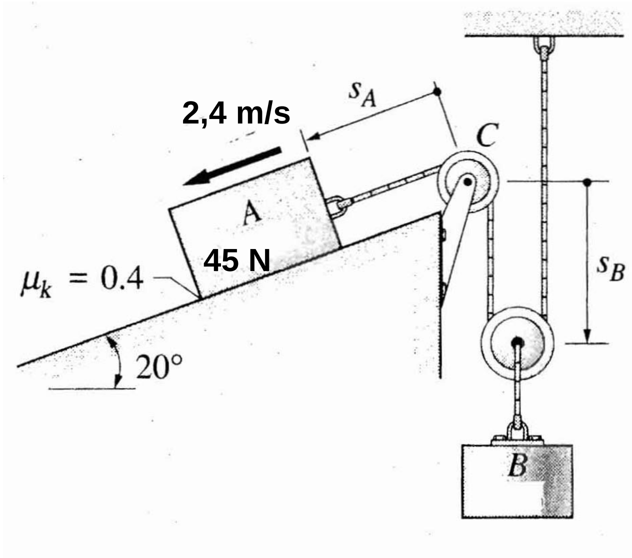
$A_x = 654\,N \qquad A_y = 1962\,N \qquad A_z = 1962\,N$

$A = \sqrt{} = 2850\,N$

Question 2:

Les blocs A et B sont reliés par un câble qui s’enroule autour de 2 poulies de masse négligeable et sans frottement (voir figure). Le coefficient de frottement cinétique entre le plan incliné et le bloc A est 0.4.

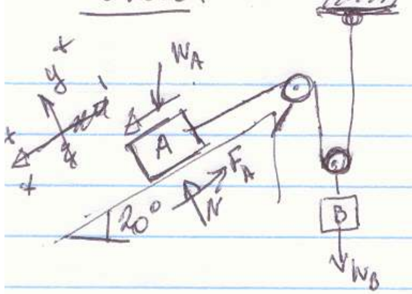
Si la vitesse initiale de A est de 2.4 m/s vers le bas du plan, déterminer :



1) Le DCE de A en prenant soin d’inclure la force de frottement cinétique, la tension, le système d’axes et toute autre variable importante; (15 points)
2) La relation entre la vitesse v_A et v_B; (10 points)
3) En utilisant la relation travail-énergie, déterminer le déplacement Δs_A du bloc A (mesuré à partir de sa position initiale) lorsque le système arrive au repos. (25 points)

Q2 Solution

Problème 1



$A = 45\ N$ $\qquad V_A = 2.4\ m/s \leftarrow$

$B = 28\ N$

①

$\Sigma F_y = 0$ $\quad +\nwarrow \quad N_A - W_A \cos 20 = 0$

$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A \cos 20° = 0.4$

$$F_A = \mu_k W_A \cos 20° = 0.4 \times 45 \times \cos 20° = 16.9 N \ *$$

② $s_A + 2s_B \longrightarrow v_A + 2v_B = 0$

③ TRAVAIL ENERGIE

$$(W_A \sin 20)\Delta s_A - F_A \Delta s_A + W_B \Delta s_B = 0 - T_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{W_A}{g}(v_A)_1^2 + \frac{W_B}{g}(v_B)_1^2\right]$$

En remplaçant

$$(45 \sin 20)\Delta s_A - 16.9\,\Delta s_A + \overbrace{28\left(-\frac{\Delta s_A}{2}\right)}^{14} = -\overbrace{\frac{1}{2}\frac{45}{9.81}(2.4)^2}^{13.21}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{28}{9.81}\right)\left(-\frac{2.4}{2}\right)^2}_{2.055} \qquad 15.27$$

$$\Delta s_A\left[45 \sin 20 - 16.9 - 14\right] =$$

$$\Delta s_A(-15.50) = -15.27 \longrightarrow \boxed{\Delta s_A = 0.985\,m}$$

Question 3, semaine 11

Question 3, semaine 11 : Coefficients de restitution : inspiré de p799 problème 13.62 **(ne pas écrire cette ligne)**

Dans un entrepôt, on transporte des paquets au quai de chargement en les poussant sur un convoyeur à rouleaux à frottement négligeable. À l'instant représenté, les paquets B et C sont au repos et le paquet A possède une vitesse de 2m/s. Le coefficient de restitution entre les paquets A et B est de $\mathbf{e_{AB}=0,3}$. Entre les paquets B et C, la collision est parfaitement plastique ($\mathbf{e_{BC}=0}$), calculer :

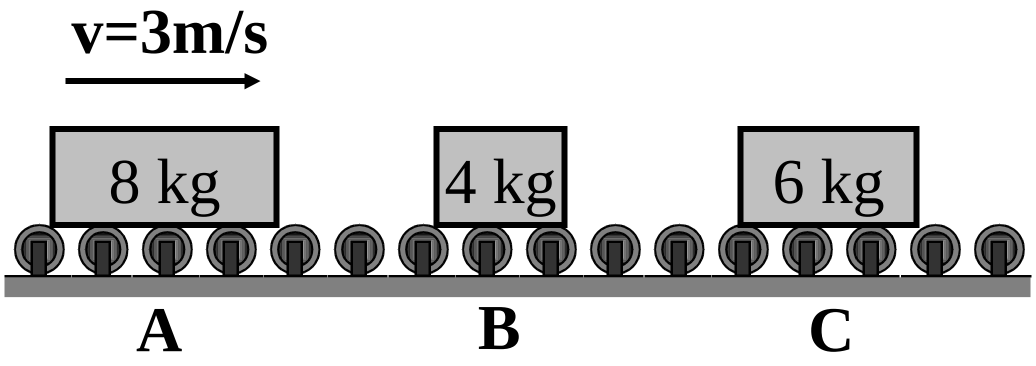
Déterminer :

A) La vitesse du paquet C après que A eut heurté B et que B eut heurté C. (20 points)

B) La vitesse du paquet B après que A eut heurté B pour la deuxième fois; (15 points)

C) Le pourcentage de l'énergie totale du système perdue suite à toutes ces collisions. (10 points)

D) D'après vous, y aura-t-il une autre collision entre ces paquets? Expliquer (5 points)



Solution Q3:

En absence de frottement, le système est isolé et il y a donc conservation de la quantité de mouvement:

A)

Choc 1: $m_A v_{A1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2}$

De plus on connaît le coefficient de restitution: $e = 0,3 = (v_{B2} - v_{A2})/v_{A1}$

On obtient: $m_A v_{A1} = m_A(-e v_{A1} + v_{B2}) + m_B v_{B2}$

$$v_{B2} = \frac{m_A\left(v_{A1}(1+e)\right)}{m_A + m_B} \qquad v_{B2} = \frac{8\left(3(1,3)\right)}{12} = 2,6 m/s$$

$$v_{A2} = v_{B2} - e v_{A1} = 2,6 - 0,9 = 1,7 m/s$$

Choc 2: Le choc est parfaitement plastique, nous savons donc que les blocs B et C partageront la même vitesse après l’impact

$$v_{C2} = \frac{m_B v_{B2}}{m_A + m_B} = \frac{4 \cdot 2,6}{10} = 1,04 m/s$$

Solution Q3:

B) Comme le bloc BC bouge maintenant à 1,04 m/s et que A bouge à 1,7 m/s, il y aura de nouveau collision.

$$m_A v_{A2} + m_{BC} v_{BC1} = m_A v_{A3} + m_{BC} v_{BC2}$$

$$e=0,3 = (v_{BC2}-v_{A3})/(v_{A2}-v_{BC1})$$

On obtient: $m_A v_{A2} + m_{BC} v_{BC1} = m_A(-e(v_{A2} - v_{BC1}) + v_{BC2}) + m_{BC} v_{BC2}$

$$v_{BC2} = \frac{m_A v_{A2}(1+e) + (m_{BC} - e m_A) v_{BC1}}{m_A + m_{BC}}$$

$$v_{BC2} = \frac{8(1,7(1+0,3)) + (10-0,3 \cdot 8) \cdot 1,04}{18} = 1,42\, m/s$$

$$v_{A3} = v_{BC2} - e(v_{A2} - v_{BC1}) = 1,42 - 0,3 \cdot (1,7 - 1.04) = 1,22\, m/s$$

Question 3:

C) Le pourcentage de pertes avant et après la collision est donné par:

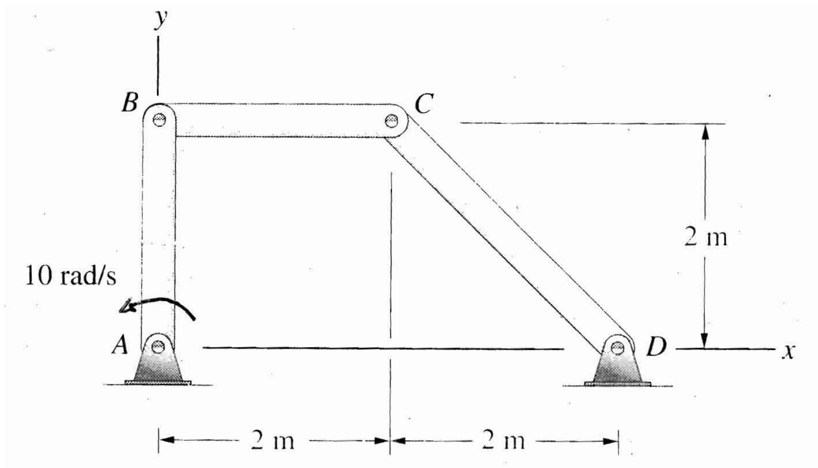
$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A3}^2 - \frac{1}{2} m_{BC} v_{BC2}^2}{\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2}$$

$$\frac{\Delta E}{E_i} = \frac{8 \cdot 9 - 8 \cdot 1{,}05^2 - 10 \cdot 1{,}56^2}{8 \cdot 9} = 54\%$$

D) La vitesse finale de A est de 1,05 m/s, la vitesse finale de BC est de 1,56 m/s. Il n’y aura donc pas d’autres collisions entre ces deux blocs.

Question 4A

La barre AB tourne à la vitesse de
10 rad/s (sens inverse des aiguilles
d’une montre) (voir schéma).



1) Déterminer la vitesse $\vec{v}_B$; (10 points)

2) Déterminer la vitesse angulaire de la membrure BC ($\vec{\omega}_{BC}$) en utilisant la méthode des centres instantanés de rotation (CIR). (25 points)

3) Déterminer la vitesse angulaire de la membrure CD ($\vec{\omega}_{CD}$) en utilisant la méthode de votre choix. (15 points)

Q4A Solution

PROBLEME 3

① $\vec{V}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -20\vec{i}$ m/s

②

ⓐ $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{r}_{C/B}$, $\vec{V}_C = -20\vec{i} + 2\omega_{BC}\vec{j}$ (m/s)

$\vec{r}_{C/B} = 2\vec{i}$ m

et $\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{\omega}_{CD} \times \vec{r}_{C/D}$, $\vec{V}_D = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{r}_{C/D} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

ⓑ $\vec{V}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{CD} \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\omega_{CD}(\vec{i} + \vec{j})$

Egalons ⓐ et ⓑ $\Longrightarrow$

$(-20 + 2\omega_{CD})\vec{i} = \vec{0}$

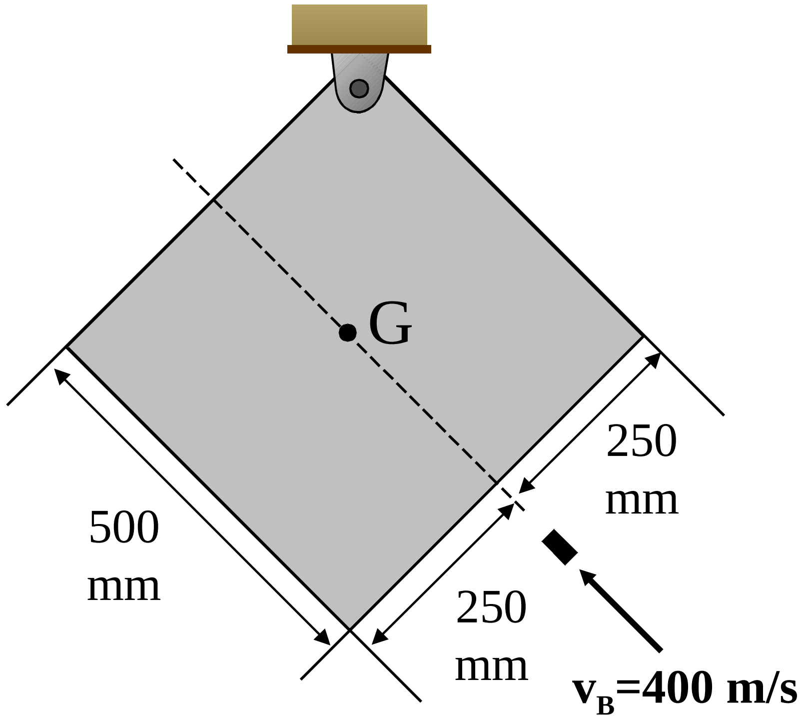
et $(2\omega_{BC} + 2\omega_{CD})\vec{j} = \vec{0}$

D'où $\vec{\omega}_{CD} = 10\vec{k}$ rd/s $\quad \omega_{BC} = -\omega_{CD}$ rd/s.

Question 4B (17.139, p. 1066):

On tire une balle de fusil B de 35g avec une vitesse de 400 m/s sur le côté d'un mince panneau carré de 3kg et de 0,5m de côté. Le panneau est suspendu en A au moyen d'une charnière, comme l'indique la figure. Sachant que le panneau est initialement au repos et que la balle y pénètre et s'arrête en 2 ms, déterminer:

A) La distance de pénétration de la balle dans la plaque. (15 points)
B) Le moment d'inertie de la plaque autour de son point d'ancrage (10 points)
C) La vitesse angulaire du panneau immédiatement après la pénétration de la balle; (25 points)



Question 4B: Solution

A) La balle subit une forte décélération en 1,5 ms:

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{400-0}{0,0015} = -2,67 \times 10^5 \, m/s^2$$

On peut donc obtenir la distance parcourue:

$$\Delta s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a_{moy}} = \frac{0-160000}{2(-2,67\times 10^5)} = 0,3m$$

15 points

B) Le moment d'inertie d'une plaque carrée autour de son centre de masse est donné par: I_{CM}=m/12*(0,5^2+0,5^2) = 1/8 kgm^2.

On utilise le théorème des axes parallèles pour trouver le moment d'inertie autour de la charnière:

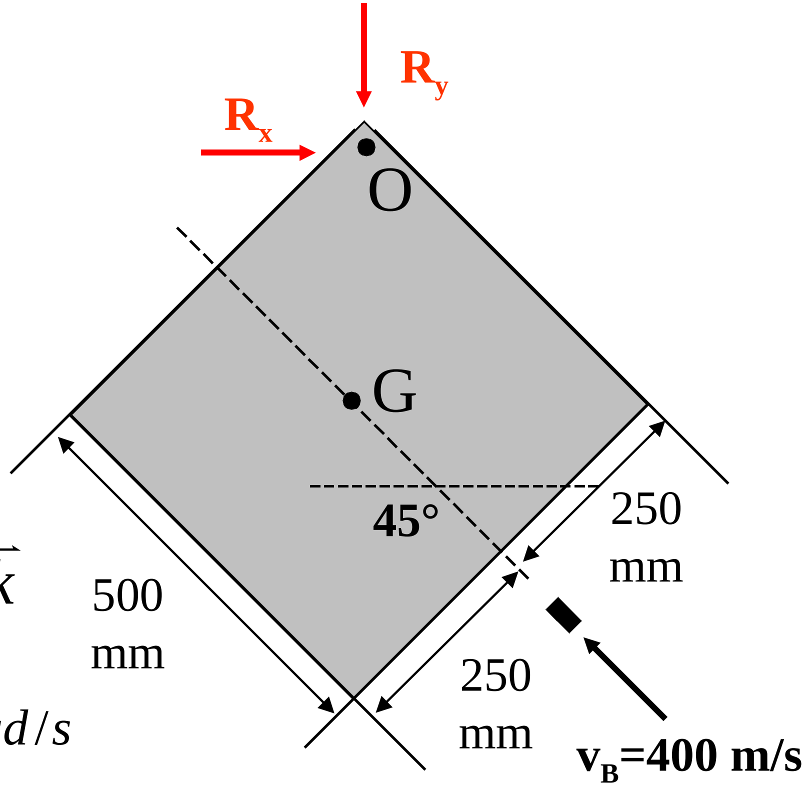
$$I = I_{CM} + md^2 = \quad \frac{1}{8} + 3\cdot\left(0,25\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{0,5 kgm^2}$$

10 points

Question 4B: solution

C) Lors de l'impact, une force de réaction impulsive est créée au point d'ancrage pour réduire à zéro sa quantité de mouvement (le système balle-plaque n'a plus de mouvement de translation après l'impact). Cette impulsion augmente également le moment cinétique de la plaque (initialement à zéro).

En prenant le moment cinétique au point d'ancrage, on peut éviter de traiter de la force impulsive dans nos équations.



$$\vec{H}_O = \overrightarrow{\text{Imp}} = \vec{r}_{OG} \times m\vec{v}_0 = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{H}_O = 0{,}25 \cdot 0{,}035 \cdot 400 \vec{k} = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

On trouve rapidement: $\omega_y = 0 \, rad/s$ $\omega_x = 0 \, rad/s$

$$\omega_z = \frac{3{,}5}{I_z} = \frac{3{,}5}{0{,}5} = -7 \, rad/s$$

25 points

Question 4C (problème 14.73, p. 853)

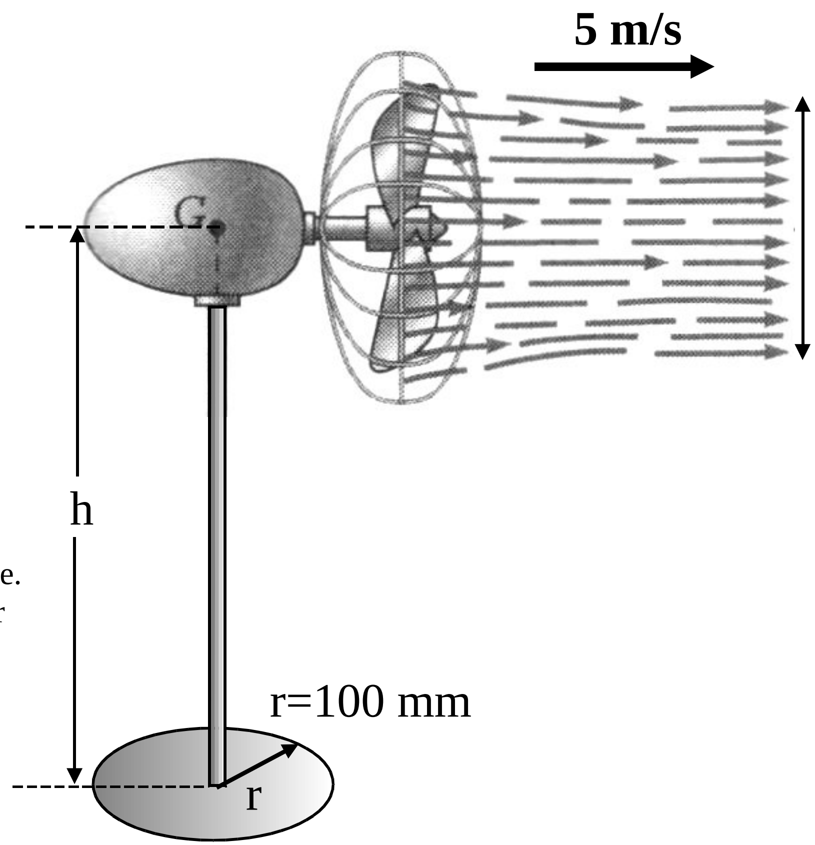
Question 4C : Un ventilateur de plancher conçu pour fournir de l'air à une vitesse maximale de 5 m/s dans un remous d'un diamètre de 400 mm est supporté par une plaque circulaire de 200 mm de diamètre. Sachant que le poids total de l'ensemble est de 50 N et que son centre de masse est directement au-dessus du centre de la plaque,

1) Calculer la force de poussée du ventilateur. (25 points)

À cette force de poussée correspond une réaction de l'air sur le ventilateur de grandeur égale et de sens opposé.

2) Faire le DCL du système tel qu'il est juste avant qu'il ne commence à basculer. Supposer que le ventilateur est sur du tapis et qu'il ne glisse donc pas au sol. (10 points)
3) Déterminer la hauteur maximale h à laquelle le ventilateur peut fonctionner sans se renverser. (15 points)

Note: On donne la densité de l'air comme étant $\rho = 1{,}2$ kg/m³ dans ce problème. On suppose également que la vitesse de l'air juste derrière le ventilateur est négligeable.



Question 4C: solution

1) La force de poussée du ventilateur dépend du débit massique d'air qu'il peut projeter et de la vitesse de l'air qu'il projette:

$$\sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u} = ma$$

Débit massique [kg/s]: $\frac{dm}{dt} = \rho A u = 1{,}2 \cdot \pi \left(\frac{0{,}4}{2}\right)^2 \cdot 5 = 0{,}754\, kg/s$

Comme l'accélération finale est nulle, la force de poussée du ventilateur est donnée par:

$$F + \frac{dm}{dt}u = 0$$

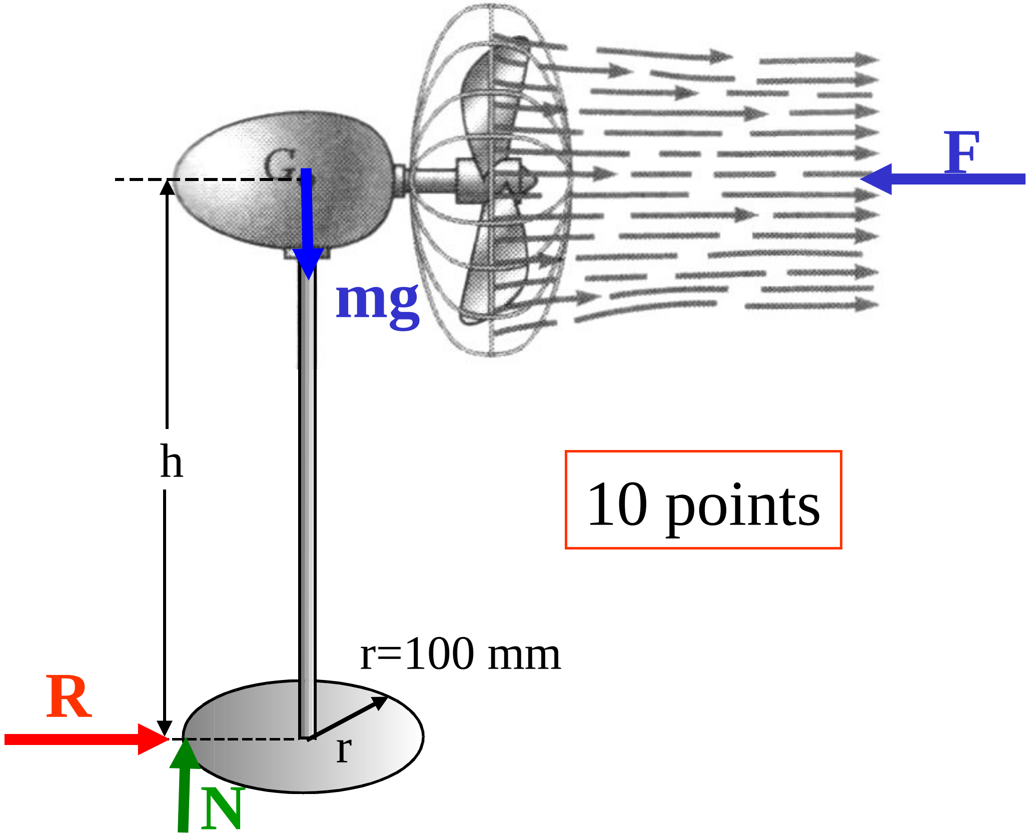
$$F = -\frac{dm}{dt}u = -0{,}754 \cdot 5 = -3{,}77\, N$$

25 points

Le ventilateur agit comme une fusée qui se déplace vers la gauche.

Question 4C: solution

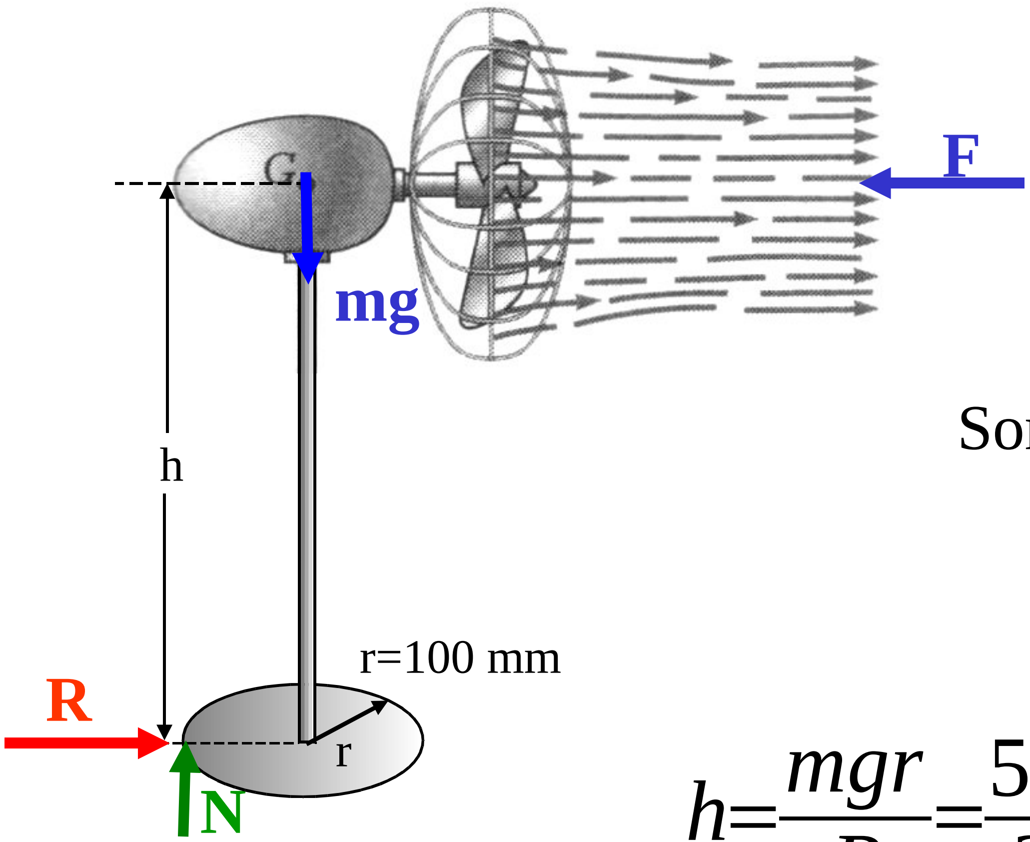
2) Avant que le ventilateur ne bascule, la force normale agit juste à l'extrémité du support circulaire. Autrement dit, le reste du support circulaire ne touche plus le sol. Tout le système est en équilibre au dessus du point où la normale s'applique. Le système ne glisse pas au sol non plus donc une force de frottement statique égale à la poussée s'exerce horizontalement à la base.



10 points

Question 4C: solution

3) Nous avons maintenant un système en équilibre statique:



Somme des forces en x:

$$\boxed{\mathbf{R=-F=3{,}77N}}$$

Somme des forces en y:

$$\boxed{\mathbf{N=mg=50N}}$$

Somme des moments au point G:

$$\boxed{\mathbf{M_G= Rh-mgr=0}}$$

$$h=\frac{mgr}{R}=\frac{50\cdot 0{,}1}{3{,}77}=1{,}33m$$

15 points