Poznámky k Přednáškám z Matematické Analýzy I

aktualizovaná verze poznámek V. Jelínka a T. Klimošové z LS 2019/20

Vít Jelínek

LS 2023/24

Obsah

1 Číselné obory a jejich vlastnosti

Části studijního textu v takovémto rámečku jsou volitelné. Nebudu vás z nich zkoušet, ale možná vám pomohou lépe pochopit ostatní látku.

Předpokládejme, že všichni známe následující číselné obory:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} && \text{(přirozená čísla)}\\
&\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} &&\\
&\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{(celá čísla)}\\
&\mathbb{Q} = \left\{\frac{k}{n};\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} && \text{(racionální čísla)}
\end{aligned}$$

Zjevně platí $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Můžeme říci, že množina $\mathbb{Q}$ je „větší“ než množina $\mathbb{N}$? Obě mají nekonečně mnoho prvků. V teorii množin se pro potřeby porovnávání (zejména nekonečných) množin podle velikosti zavádí pojem *mohutnost* (cizím slovem *kardinalita*). Mohutnost konečné množiny je prostě počet jejích prvků. Mohutnost nekonečné množiny formálně definovat nebudeme, řekneme si ale, jak mohutnosti množin porovnávat mezi sebou.

Definice 1.1. Řekneme, že dvě množiny A a B mají *stejnou mohutnost* (zapisujeme $|A| = |B|$), pokud existuje bijekce z A na B. Řekneme, že mohutnost A je nejvýš tak velká jako mohutnost B, což zapisujeme $|A| \leq |B|$, pokud existuje prostá funkce z A do B.

Dá se dokázat, že když pro dvě množiny platí $|A| \leq |B|$ a zároveň $|B| \leq |A|$, tak platí i $|A| = |B|$. Tento výsledek je známý jako Cantorova–Bernsteinova věta a spadá do teorie množin.

Definice 1.2. Řekneme, že množina A je *spočetná*, pokud platí $|A| \leq |\mathbb{N}|$, neboli pokud existuje prosté zobrazení z A do $\mathbb{N}$.

Dle naší definice je každá konečná množina spočetná. Terminologie však není úplně konzistentní: někteří autoři konečné množiny jako spočetné neberou a pojem ‘spočetná množina’ vyhrazují pouze pro množiny se stejnou mohutností jako $\mathbb{N}$.

Pokud množina není spočetná, říkáme, že je *nespočetná*. Snadno nahlédneme, že množina celých čísel je spočetná, stačí všechna celá čísla uspořádat do posloupnosti $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$ a následně můžeme n-té číslo v této posloupnosti zobrazit na $n \in \mathbb{N}$, čímž získáme prosté zobrazení (dokonce bijekci) ze $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{N}$. Pro racionální čísla lze opět celkem snadno ukázat, že jejich množina je spočetná, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 1.3. *Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.*

Důkaz. Zkonstruujeme prosté zobrazení $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Volme libovolně $q \in \mathbb{Q}$ a zapišme ho jako zlomek v základním tvaru $q = \frac{a}{b}$, kde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ a čísla a,b jsou nesoudělná, tedy nemají žádného společného dělitele většího než 1. Nyní pokud $a \geq 0$, definujme $f(q) = 2^a 3^b$, a pokud $a < 0$, definujme $f(q) = 5^{|a|} 7^b$. Vzhledem k tomu, že každé přirozené číslo lze jednoznačně napsat jako součin prvočísel, je takto definované zobrazení f prostá funkce z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. $\square$

Jak jistě víte, každé racionální číslo lze reprezentovat *desetinným rozvojem*, který je vždy konečný nebo periodický. Abychom nemuseli řešit konečné desetinné rozvoje jako speciální případ, budeme si představovat, že každý konečný desetinný rozvoj 'nastavíme' nekonečnou posloupností nul, a budeme tedy odteď předpokládat, že každý desetinný rozvoj je nekonečný.

Pomocí desetinných rozvojů si zavedeme (ne zcela formálně) reálná čísla.

Definice 1.4. *Množina reálných čísel*, značená $\mathbb{R}$, je tvořena všemi desetinnými rozvoji

$$\pm d_0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots$$

kde $d_0 \in \mathbb{N}_0$ a $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Symbolem $\pm$ zde označujeme znaménko $+$ nebo $-$ (přičemž znaménko $+$ s v praxi většinou vypouští).

Pozor: Jednomu reálnému číslu může odpovídat více než jeden desetinný rozvoj. Například $+0{,}000\ldots = -0{,}000\ldots$ a $144{,}5000\ldots = 144{,}4999\ldots$.

Čísla v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *iracionální*.

Věta 1.5 (Nespočetnost reálných čísel)**.** *Množina reálných čísel není spočetná.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje existuje prostá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. Pomocí této funkce zkonstruujeme posloupnost reálných čísel $g(1), g(2), \ldots$, v níž se každé reálné číslo vyskytne aspoň jednou. To uděláme takto: pokud pro dané přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ existuje nějaké reálné číslo x takové, že $f(x) = n$, definujeme $g(n) = x$ (toto x je zjevně určeno jednoznačně, jelikož f je prostá funkce). Pokud žádné takové x neexistuje, tj. pokud n nepatří do obrazu funkce f, definujeme například $g(n) = 0$. Díky vlastnostem funkce f máme zaručeno, že každé reálné číslo se aspoň jednou vyskytuje v posloupnosti $g(1), g(2), g(3), \ldots$.

Nyní však zkonstruujeme reálné číslo α, které v té posloupnosti není. Pro $n \in \mathbb{N}$ si jako a_n označíme n-tou cifru za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji čísla $g(n)$; pokud má $g(n)$ dva různé desetinné rozvoje, zvolíme libovolně jeden z nich. Nyní nechť b_n je nejmenší nenulová číslice, která se liší od a_n. Všimněme si, že b_n není nula ani devítka; ve skutečnosti b_n může být buď jednička nebo dvojka.

Číslo α pak definujeme desetinným rozvojem

$$\alpha = 0{,}b_1b_2b_3\dots,$$

V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka nebo nula, a je tedy jednoznačný. Tvrdíme, že α se liší od všech čísel v posloupnosti $g(1), g(2), \dots$. Pro spor předpokládejme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha = g(n)$. Protože α ná jednoznačný desetinný rozvoj, má i $g(n)$ ten samý jednoznačný desetinný rozvoj. Ovšem n-tá číslice desetinného rozvoje $g(n)$ je a_n, zatímco n-tá číslice rozvoje α je b_n, tedy $g(n) \neq \alpha$, což je spor. To ukazuje, že $\mathbb{R}$ je vskutku nespočetná. □

Zmiňme též obor komplexních čísel $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, kde 'i' je imaginární jednotka, popsaná rovnicí $\mathrm{i}^2 = -1$. Komplexními čísly se budeme v této přednášce zabývat pouze okrajově. Množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou (algebraická) *tělesa*.

Relace $\leq$ definuje *uspořádání* na reálných (a tedy i racionálních) číslech, které se navíc „hezky chová" vůči aritmetickým operacím, v následujícím smyslu:

- pokud $a < b$, tak pro každé c platí $a + c < b + c$
- pokud platí $a < b$ a $0 < c$, tak platí i $ac < bc$.

Tělesům, která mají uspořádání s takovýmito vlastnostmi, se říká *uspořádaná tělesa*. Těleso $\mathbb{R}$ i každé jeho podtěleso (např. $\mathbb{Q}$) je tedy uspořádané těleso. Naopak $\mathbb{C}$ uspořádané není — prvky $\mathbb{C}$ sice lze nějak uspořádat, ale neexistuje uspořádání, které by mělo výše popsané vlastnosti vůči aritmetickým operacím.

Uveďme si některé důležité pojmy související s uspořádáním na $\mathbb{R}$. (Obdobné pojmy se užívají i u jiných uspořádaných množin než $\mathbb{R}$, ty pro nás ale nebudou důležité.)

Definice 1.6. Nechť A je podmnožina $\mathbb{R}$.

- *Horní mez* (nebo též *horní závora*) množiny A je libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $y \in A$ platí $y \leq x$. Všimněte si, že horní mez množiny A nemusí nutně být prvkem A. Všimněte si také, že pokud je x horní mez A, tak i každé číslo větší než x je horní mez A. Obdobně *dolní mez* množiny A je reálné číslo x takové, že pro každé $y \in A$ platí $y \geq x$.
- Množina A je *shora omezená*, pokud má nějakou horní mez, a *zdola omezená*, pokud má nějakou dolní mez. Množina A je *omezená*, pokud je omezená shora i zdola.

- Číslo u je *maximum množiny* A (nebo *největší prvek* A), pokud u je horní mez A a zároveň $u \in A$. Zapisujeme $u = \max A$. Obdobně číslo $v \in A$ je *minimum množiny* A (nebo *nejmenší prvek* A), pokud je v dolní mez A a zároveň $v \in A$. Zapisujeme $v = \min A$.
- Číslo $s \in \mathbb{R}$ je *supremum množiny* A, pokud s je nejmenší horní mez A. Zapisujeme $s = \sup A$. Všimněte si, že pokud má množina maximum, je toto maximum i její supremum. Obdobně, $t \in \mathbb{R}$ je *infimum množiny* A, pokud t je největší dolní mez A. Zapisujeme $t = \inf A$.

Pokud množina není shora omezená, nemá podle výše uvedené definice supremum ani maximum. Podobně množina, která není zdola omezená, naopak nemá minimum ani infimum. Prázdná množina je omezená, ale nemá supremum ani infimum, a tedy ani maximum či minimum.

Příklad 1.7. Nechť A je otevřený interval $(0,1)$. Pak A je shora omezená množina — například 1 je její horní mez, a tedy i každé číslo větší než 1 je její horní mez. Snadno vidíme, že $1 = \sup A$. Ovšem A nemá maximum.

Příklad 1.8. Uvažme nyní množinu $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Rozmysleme si, že $\sup A = \max A = 1$ a $\inf A = 0$, přičemž A nemá minimum. Protože $1 \in A$ a všechny prvky A jsou zjevně menší nebo rovny 1, je 1 maximem a zároveň supremem A. Všechny prvky A jsou kladné, 0 je tedy dolní mez A. Sporem ukážeme, že nemůže existovat žádná větší dolní mez a 0 je tedy infimem množiny A. Předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ je dolní mez A. Uvažme přirozené číslo n splňující $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (takové číslo vždy existuje, například $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$). Pak $\frac{1}{n} < \varepsilon$ a zároveň $\frac{1}{n} \in A$, což je spor s tím, že je ε dolní mez A. Dokázali jsme tedy, že $\inf A = 0$. Protože $0 \notin A$, A nemá minimum.

Ukažme si nyní jednoduchý algebraický fakt, známý už ve starověkém Řecku v 5. století př. n. l., který nám poslouží k ilustraci rozdílu mezi racionálními a reálnými čísly.

Tvrzení 1.9. *Neexistuje žádné racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ splňující $q^2 = 2$.*

Důkaz. Předpokládejme, že takové číslo q existuje, a zapišme ho zlomkem v základním tvaru, tedy jako $q = \frac{a}{b}$, kde a a b jsou nesoudělná. Pak tedy platí $a^2 = 2b^2$, tedy a^2 je sudé číslo, což znamená, že a je také sudé. Potom ale a^2 je násobek čtyř, a $\frac{a^2}{2}$ je sudé číslo. Protože $b^2 = \frac{a^2}{2}$, znamená to, že b^2 je sudé, tedy i b je sudé, a to je spor s tím, že a a b jsou nesoudělná. □

Příklad 1.10. Nechť A je množina racionálních čísel q splňujících $q^2 < 2$. Tato množina je shora omezená: každé kladné číslo q splňující $q^2 > 2$ (například $q = 2$) je její horní mez. Pokud bychom však hledali supremum této množiny v oboru racionálních čísel, tak nepochodíme: ze všech racionálních čísel, která tvoří horní mez A, není žádné nejmenší, tedy A nemá supremum v $\mathbb{Q}$ — neexistuje nejmenší racionální horní mez.

Následující fakt, v kombinaci s předchozím příkladem, ukazují podstatný rozdíl mezi chováním $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Fakt 1.11 (Vlastnost suprema pro $\mathbb{R}$)**.** *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*

Tento fakt nebudeme dokazovat. Rozmyslete si, že z vlastnosti suprema plyne, že každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Následující tvrzení ilustruje jeden z důsledků vlastnosti suprema pro reálná čísla.

Tvrzení 1.12. *Existuje kladné reálné číslo r splňující $r^2 = 2$. (Toto číslo označujeme $\sqrt{2}$.)*

Důkaz. Definujme množinu $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 2\}$. Tato množina je jistě neprázdná (např. $1 \in A$) a shora omezená (např. 2 je horní mez A). Tedy má dle Faktu 1.11 nějaké supremum, které označme r. Všimněme si, že $1 \leq r \leq 2$. Tvrdíme, že $r^2 = 2$. To dokážeme sporem — pokud $r^2 \neq 2$, mohou nastat dva případy: $r^2 < 2$ a $r^2 > 2$.

Předpokládejme nejprve, že $r^2 < 2$. Ukážeme, že r není supremum A, protože se dá najít číslo větší než r, které patří do A. Označme $\varepsilon = 2 - r^2$, máme tedy $0 < \varepsilon \leq 1$ (ta druhá nerovnost plyne z toho, že $r \geq 1$). Nyní definujme $r^+ = r + \frac{\varepsilon}{10}$. Tvrdíme, že r^+ patří do množiny A. Vskutku:

$$\begin{aligned}
(r^+)^2 &= \left(r + \frac{\varepsilon}{10}\right)^2 \\
&= r^2 + \frac{r\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon^2}{100} \\
&\leq r^2 + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{100} && \text{(protože } r \leq 2 \text{ a } \varepsilon^2 \leq \varepsilon\text{)} \\
&< r^2 + \varepsilon \\
&= 2,
\end{aligned}$$

tedy $r^+ \in A$, což je spor s tím, že r je supremum A. Nemůže tedy nastat možnost $r^2 < 2$.

Nyní předpokládejme, že $r^2 > 2$. Teď ukážeme, že r není supremum A, protože existuje menší horní mez A. Označme $\varepsilon = r^2 - 2$. Dle předpokladu je $\varepsilon > 0$. Nyní definujme $r^- = r - \frac{\varepsilon}{10}$. Pak platí

$$(r^-)^2 = r^2 - \frac{r\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon^2}{100} > r^2 - \varepsilon = 2,$$

tedy r^- je horní mez A menší než r, což je opět spor.

Zbývá tedy jediná možnost, že $r^2 = 2$, čímž je důkaz hotov. □

Nyní se věnujme další důležité vlastnosti reálných čísel, totiž tomu, že můžeme pomocí absolutní hodnoty definovat „vzdálenost“ dvou čísel na reálné ose.

Definice 1.13. Absolutní hodnota reálného čísla $a \in \mathbb{R}$ je definována

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost daného reálného čísla od nuly. Obecně, pro dvě reálná čísla x a y odpovídá hodnota $|x - y|$ vzdálenosti mezi x a y na reálné ose. Reálná čísla, spolu s pojmem vzdálenosti definovaným pomocí absolutní hodnoty rozdílu, jsou příkladem obecnější struktury zvané 'metrický prostor'.

Definice 1.14. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je libovolná množina a $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ je funkce splňující následující podmínky:

(*i*) $\forall x, y \in M\colon d(x, y) \geq 0$, a navíc $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$,

(*ii*) $\forall x, y \in M\colon d(x, y) = d(y, x)$ (této vlastnosti říkáme, že d je *symetrická*),

(*iii*) $\forall x, y, z \in M\colon d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (tento vztah se nazývá *trojúhelníková nerovnost*).

Funkci d splňující výše uvedené vlastnosti pak nazýváme *metrika na M*.

Funkce $d(x, y) = |x - y|$ (pro $x, y \in \mathbb{R}$) zřejmě splňuje první dvě podmínky. Z následujícího tvrzení plyne, že funkce $|x - y|$ splňuje i třetí podmínku (dosazením $a = x - z$ a $b = z - y$).

Tvrzení 1.15 (Trojúhelníková nerovnost pro $|x - y|$)**.** *Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí, že $|a + b| \leq |a| + |b|$.*

Důkaz. Cvičení. □

Funkce $|x - y|$ rozhodně není jediná metrika, kterou lze definovat na reálných číslech, a reálná čísla rozhodně nejsou jediná množina, na níž lze definovat metriku. Zmiňme například takzvanou *diskrétní metriku*, kterou lze definovat na libovolné množině M.

Definice 1.16. Nechť M je libovolná množina a nechť $d\colon M \times M \to \{0, 1\}$ je funkce definovaná pro libovolné $x, y \in M$ následovně:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x = y \\ 1 & \text{pokud } x \neq y. \end{cases}$$

Funkci d nazýváme *diskrétní metrika* na M.

Snadno se ověří, že diskrétní metrika opravdu splňuje axiomy metriky.

2 Posloupnosti a jejich limity

Definice 2.1. Nechť M je množina. *Posloupnost s hodnotami v M* je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Každé přirozené číslo n je tedy zobrazeno na nějaký prvek a_n množiny M. Tomuto prvku říkáme *n-tý prvek posloupnosti*. Posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ obvykle značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo jen (a_n). Zápis $(a_n) \subseteq M$ znamená, ze jde o posloupnost s hodnotami v M.

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme se zabývat posloupnostmi reálných čísel. Některé poznatky také zobecníme pro posloupnosti s hodnotami v jiných metrických prostorech, například v $\mathbb{R}^d$.

Definice 2.2. Posloupnost reálných čísel (a_n) je

- *shora omezená*, pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *omezená*, pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí*, pokud $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající* (nebo též *slabě rostoucí*), pokud $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající*, pokud $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *nerostoucí* (nebo *slabě klesající*), pokud $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.3 (Vlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *vlastní limita* posloupnosti (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Pokud posloupnost má vlastní limitu, říkáme, že *konverguje*, případně, že je *konvergentní* a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Definice (vlastní) limity se dá zobecnit na posloupnosti v libovolném metrickém prostoru (M, d): pro posloupnost $(a_n) \subseteq M$ řekneme, že má limitu $A \in M$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in (0, +\infty)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon d(a_n, A) < \varepsilon.$$

Ve skutečnosti existují ještě obecnější struktury než metrický prostor, na nichž lze zavést pojem limity, a s ním pak i další související pojmy, jako třeba pojem spojité funkce: jsou to takzvané topologické prostory. O nich se ale nebudeme na této přednášce dále zmiňovat.

Definice 2.4 (Nevlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $+\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Všimněte si, že každá posloupnost, která má limitu $+\infty$, je shora neomezená. Opačná implikace ale neplatí: například posloupnost

$$1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, \ldots$$

je shora neomezená, ale nemá limitu.

Pro práci s nevlastními limitami se hodí formálně zavést obor takzvaných *rozšířených reálných čísel* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Na tento obor nyní rozšíříme (aspoň částečně) relaci uspořádání na $\mathbb{R}$ jakož i základní aritmetické operace:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}\colon -\infty < x < +\infty\\
&\forall x \in \mathbb{R}^*, x \neq -\infty\colon x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty\\
&\forall x \in \mathbb{R}^*, x \neq +\infty\colon x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty\\
&\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0\colon x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \text{ a } x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty\\
&\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 0\colon x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \text{ a } x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty\\
&\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0\\
&\forall x, y \in \mathbb{R}^*\colon x - y = x + (-1) \cdot y\\
&\forall x, y \in \mathbb{R}^*\colon \frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right).
\end{aligned}$$

Všimněte si, že předchozí definice ponechává nedefinované některé výrazy, konkrétně

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty), (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty),\\
&0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot 0, \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ a } \frac{x}{0} \text{ pro } x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Jsou to tzv. *neurčité výrazy* a jejich hodnoty ponecháme nedefinované.

Všimněte si dále, že díky rozšíření relace $<$ na $\mathbb{R}^*$ nyní každá podmnožina $\mathbb{R}^*$ (a tedy speciálně i každá podmnožina $\mathbb{R}$) má horní mez $+\infty$ a dolní mez $-\infty$. S využitím toho, že supremum množiny je její nejmenší horní mez a infimum její největší dolní mez, nyní můžeme určit suprema a infima i pro množiny, pro něž v $\mathbb{R}$ nebylo supremum či infimum definováno.

- Pokud M je shora neomezená podmnožina $\mathbb{R}$, pak $\sup M = +\infty$.

- Pokud M je zdola neomezená podmnožina $\mathbb{R}$, pak $\inf M = -\infty$.
- Pro prázdnou množinu platí, že každé $x \in \mathbb{R}^*$ je její dolní i horní mez, což vede na $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$.

Definice 2.5 (Okolí bodu)**.** Pro $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in (0, +\infty)$ definujme množinu $\mathcal{U}(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, kterou nazýváme *okolí bodu x o poloměru ε*. Definujme také okolí nekonečen, opět jen pro $\varepsilon \in (0,+\infty)$, takto: $\mathcal{U}(+\infty,\varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$ a $\mathcal{U}(-\infty,\varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$.

Všimněte si, že s tímto značením můžeme zformulovat definici limity způsobem, který sjednocuje vlastní a nevlastní limity. Pro $A \in \mathbb{R}^*$ a posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ platí, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, právě když

$$\forall \varepsilon \in (0,+\infty)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in \mathcal{U}(A,\varepsilon).$$

Slovy řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše konečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ takových, že a_n nepatří do $\mathcal{U}(A,\varepsilon)$.

Tvrzení 2.6 (Jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost reálných čísel (a_n) má nejvýše jednu limitu (vlastní či nevlastní).*

Důkaz. Pro spor budeme předpokládat, že (a_n) má dvě různé limity $K, L \in \mathbb{R}^*$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\mathcal{U}(K,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L,\varepsilon) = \emptyset$ (snadno rozmyslíme, že takové ε existuje pro libovolné $K \neq L$). Potom z toho, že $\lim_{n\to\infty} a_n = K$ plyne, že existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \in \mathcal{U}(K,\varepsilon)$. Zároveň z toho, že $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ plyne, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_1$ platí $a_n \in \mathcal{U}(L,\varepsilon)$. Zvolme tedy $n = \max\{n_0, n_1\}$ a máme $a_n \in \mathcal{U}(K,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L,\varepsilon)$, což je spor s tím, že $\mathcal{U}(K,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L,\varepsilon) = \emptyset$. □

monotonni fukce
kolorovano

Tvrzení 2.7 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}^*$ limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že (a_n) je slabě rostoucí (pro slabě klesající posloupnosti je argument obdobný). Označme $s = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Tvrdíme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Pokud by toto nebyla pravda, znamenalo by to, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \notin \mathcal{U}(s,\varepsilon)$. Protože s je horní mez množiny $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, znamená to, že pokud $a_n \notin \mathcal{U}(s,\varepsilon)$, tak a_n je menší než všechny prvky $\mathcal{U}(s,\varepsilon)$. Protože je však (a_n) slabě rostoucí, znamená to, že všechny členy této posloupnosti jsou menší než všechny prvky $\mathcal{U}(s,\varepsilon)$. To ale znamená, že každý prvek $\mathcal{U}(s,\varepsilon)$ je horní mez $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, což je spor s tím, že s má být nejmenší horní mez této množiny. Tím je důkaz hotov.

Prostě An musí
být menší než
okolí. To znamená
že supremum
je s- epsilon a ne s.

Všimněte si, že výše uvedený argument funguje jak pro situaci, kdy s je reálné číslo, tak i pro $s = +\infty$. □

Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Věta 2.8 (Aritmetika limit)**.** *Nechť (a_n),(b_n) jsou posloupnosti reálných čísel s $\lim_{n\to\infty} a_n = K \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}^*$. Pak*

CO TO JE ZA PICOVINU???????

(i) *je-li* $K + L$ *definováno, tak* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = K + L$,

(ii) *je-li* KL *definováno, tak* $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = KL$,

(iii) *je-li* $\frac{K}{L}$ *definováno a navíc* $b_n \neq 0$ *pro každé* n, *pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{K}{L}$.

Důkaz této věty vynecháme.

Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně. Formulace věty svádí k úpravám typu

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \stackrel{??}{=} \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

ovšem je důležité mít na paměti, že pokud pravá strana této rovnosti není definována (ať už proto, že počítané limity neexistují, nebo proto, že jejich součet není definován), nelze z toho nic usuzovat o existenci a hodnotě limity na levé straně.

Spočítejme například limitu posloupnosti zadané předpisem $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$. Kdybychom postupovali mechanicky podle aritmetiky limit, došli bychom k

$$\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n + \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1},$$

což nám ovšem nepomáhá, protože ani jedna ze dvou limit na pravé straně neexistuje. Lepší je všimnout si, že pro každé n máme $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0$, tedy zjevně $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obdobný příklad je výpočet limity posloupnosti zadané vztahem $a_n = \frac{3n+2}{7n-5}$. Zbrklé použití aritmetiky limit nevede k cíli:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{7n-5} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3n+2}{\lim_{n\to\infty} 7n-5} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

což dává neurčitý výraz, z nějž nelze nic usoudit o existenci a hodnotě limity na levé straně. Lépe je nejdřív použít krácení $\frac{3n+2}{7n-5} = \frac{3+2/n}{7-5/n}$ a nyní lze příklad dořešit pomocí aritmetiky limit:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{7n-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{7-\frac{5}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n}}{\lim_{n\to\infty} 7-\frac{5}{n}} = \frac{3}{7}.$$

3 Limity posloupností, hromadné body, řady

Minule jsme viděli větu o aritmetice limit, která ukazuje, jak se limity posloupností chovají ve vztahu k aritmetickým operacím. Tuto větu nebudeme dokazovat. Určitým zesílením této věty je následující tvrzení.

Věta 3.1 (O násobení limitní nulou)**.** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je omezená posloupnost, a nechť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost splňující* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*. Potom* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$*.*

Všimněte si, že kdybychom mohli v předchozí větě předpokládat, že (a_n) má vlastní limitu, plynul by závěr věty přímo z věty o aritmetice limit. Věta 3.1 je silnější v tom smyslu, že místo existence limity pro (a_n) pouze předpokládá omezenost.

Důkaz. Mějme dáno $\varepsilon > 0$ a chtějme dokázat, že existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n b_n \in \mathcal{U}(0, \varepsilon)$, neboli explicitněji $-\varepsilon < a_n b_n < \varepsilon$. Protože (a_n) je omezená, tak existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna n platí $-K \leq a_n \leq K$. Protože $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tak existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ platí $-\varepsilon/K < b_n < \varepsilon/K$. Z těchto nerovností plyne, že pro $n \geq n_0$ platí $-\varepsilon < a_n b_n < \varepsilon$. $\square$

Nyní zmiňme několik tvrzení ukazujících, jaká je souvislost mezi limitami a standardním uspořádáním reálných čísel podle velikosti.

Věta 3.2 (O limitě a uspořádání)**.** *Nechť* (a_n) *je posloupnost s limitou* $A \in \mathbb{R}^*$ *a nechť* (b_n) *je posloupnost s limitou* $B \in \mathbb{R}^*$*. Potom*

1. *pokud* $A > B$*, tak existuje* n_0 *takové, že pro každé* $m, n \geq n_0$ *platí* $a_m > b_n$*,*
2. *pokud pro nekonečně mnoho indexů* n *platí* $a_n \geq b_n$*, tak* $A \geq B$*.*

Poznamenejme, že z toho, že $a_m > b_n$ pro všechna m, n *neplyne*, že $A > B$, ale pouze $A \geq B$. Viz třeba posloupnosti $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ a $(-\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$, které mají obě limitu 0.

Důkaz Věty 3.2. **První bod.** Jelikož $A > B$, tak pro dost malé $\varepsilon > 0$ platí, že $\mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset$ a tudíž každý prvek $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$ je větší než všechny prvky $\mathcal{U}(B, \varepsilon)$.

Z definice limity plyne, že existuje n_1 takové, že pro $n \geq n_1$ platí $a_n \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ a také existuje n_2 takové, že pro $n \geq n_2$ platí $b_n \in \mathcal{U}(B, \varepsilon)$. Tudíž pro každé $m, n \geq \max\{n_1, n_2\}$ platí $a_m > b_n$.

Druhý bod. Toto je v podstatě obměněná implikace z prvního bodu: pro spor předpokládejme, že $A < B$. Potom dle tvrzení z prvního bodu pro všechna dost velká m, n platí $a_m < b_n$, což je ve sporu s předpoklady na a_n a b_n. $\square$

Věta 3.3 (Věta o dvou policajtech pro posloupnosti)**.** *Mějme tři posloupnosti splňující $a_n \le b_n \le c_n$ pro každé n. Předpokládejme, že (a_n) i (c_n) mají obě stejnou limitu $L \in \mathbb{R}^*$. Potom i (b_n) má limitu, a ta je také rovna L.*

Důkaz. Nechť máme dáno $\varepsilon > 0$ a chceme dokázat, že pro každé dost velké n platí $b_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Víme ale, že pro každé dost velké n platí $a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$ i $c_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$ a z nerovností $a_n \le b_n \le c_n$ pak plyne $b_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. □

Poznamenejme, že ve Větě o dvou policajtech by stačilo předpokládat, že nerovnosti $a_n \le b_n \le c_n$ platí pouze pro každé n větší než nějaké dané n_0.

Všimněte si také, že v případě $L = +\infty$ nám stačí jen 'dolní policajt': pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a $a_n \le b_n$ pro všechna (dost velká) n, tak nutně $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Podobně pro $L = -\infty$ stačí jen 'horní' policajt.

Příklad 3.4. Hledejme limitu posloupnosti (b_n) definované takto:

$$b_n = \frac{2n + \sqrt{n}\sin(1/n)}{3n + 5\sin(\lfloor n/27 \rfloor)}.$$

S využitím nerovností $-1 \le \sin(x) \le 1$ vidíme, že platí

$$\frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{2n - \sqrt{n}}{3n + 5} \le b_n \le \frac{2n + \sqrt{n}}{3n - 5} = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{3 - \frac{5}{n}}.$$

Horní i dolní odhad má limitu $\frac{2}{3}$, což je tedy i limita (b_n).

Zabývejme se nyní otázkou, co lze říci o posloupnostech, které nemají limitu. Klíčovou roli v dalším výkladu bude hrát pojem *hromadný bod*, který si nyní zavedeme.

Definice 3.5. Řekneme, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je *podposloupnost* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud existuje rostoucí funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n = a_{f(n)}$.

Například posloupnost $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ je podposloupnost posloupnosti $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, což dosvědčuje funkce $f(n) = 2^n$.

Pozorování 3.6. *Pokud má posloupnost (a_n) limitu L, tak i každá její podposloupnost má tuto limitu.*

Definice 3.7 (Hromadný bod)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $H \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud H je limitou nějaké podposloupnosti (a_n). Množinu všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) budeme označovat $\mathcal{H}(a_n)$.

Z Pozorování 3.6 plyne, že pokud má posloupnost (a_n) limitu L, tak je L její jediný hromadný bod. Dá se dokázat i opačná implikace, tedy že pokud má posloupnost jediný hromadný bod, tedy pokud $\mathcal{H}(a_n) = \{H\}$ pro nějaké $H \in \mathbb{R}^*$, tak potom má (a_n) limitu a ta je rovna H.

Z definice hromadného bodu není zjevné, zda má každá posloupnost vůbec nějaký hromadný bod. Ve skutečnosti tomu tak je, jak si brzy ukážeme.

Nejprve si ovšem pro budoucí potřebu zavedeme ekvivalentní definici hromadného bodu posloupnosti.

Věta 3.8 (Alternativní definice hromadného bodu)**.** *Hodnota $K \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti (a_n), právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho hodnot $n \in \mathbb{N}$ takových, že $a_n \in \mathcal{U}(K, \varepsilon)$.*

Důkaz. $\Rightarrow$: Nechť $K \in \mathcal{H}(a_n)$ a nechť (b_n) je podposloupnost (a_n) s limitou K. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je rostoucí funkce splňující $b_n = a_{f(n)}$. Nechť máme určeno $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim b_n = K$, tak pro každé dost velké n platí $b_n \in \mathcal{U}(K, \varepsilon)$. Z toho plyne, že pro každé dost velké n platí $a_{f(n)} \in \mathcal{U}(K, \varepsilon)$, a tedy pro nekonečně mnoho n máme $a_n \in \mathcal{U}(K, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$: Předpokládejme, že pro $K \in \mathbb{R}^*$ platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho n takových, že a_n patří do $\mathcal{U}(K, \varepsilon)$. Nyní induktivně definujeme hodnoty $f(1) < f(2) < f(3) < \cdots$ tak, že posloupnost (b_n) definovaná jako $b_n = a_{f(n)}$ bude mít limitu K.

Označme $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Nechť $f(1)$ je nejmenší $m \in \mathbb{N}$ takové, že $a_m \in \mathcal{U}(K, \varepsilon_1)$ (nějaké takové m určitě existuje, protože dle předpokladů $\mathcal{U}(K, \varepsilon_1)$ obsahuje a_m pro nekonečně mnoho hodnot m). Nyní předpokládejme, že už jsme určili hodnoty $f(1) < f(2) < \cdots < f(n-1)$ a definujme $f(n)$ jako nejmenší m takové, že $m > f(n-1)$ a a_m patří do $\mathcal{U}(K, \varepsilon_n)$.

Snadno nahlédneme, že posloupnost (b_n) definovaná jako $b_n = a_{f(n)}$ je podposloupnost (a_n), která má limitu K, a tedy $K \in \mathcal{H}(a_n)$ (například pro $K \in \mathbb{R}$ můžeme použít nerovnosti $K - \frac{1}{n} < b_n < K + \frac{1}{n}$ a větu o policajtech). $\square$

Věta 3.9 (O monotónní podposloupnosti)**.** *Každá posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že prvek a_n této posloupnosti je *nízký*, pokud pro každé $m > n$ platí $a_m > a_n$. Jinými slovy, prvek posloupnosti je nízký, pokud je menší než všechny prvky, které po něm následují.

Nyní rozlišíme dva případy: buďto (a_n) obsahuje nekonečně mnoho nízkých prvků, nebo ne. Pokud (a_n) má nekonečně mnoho nízkých prvků, jsme hotovi, protože nízké prvky z definice tvoří rostoucí podposloupnost.

Teď předpokládejme, že nízkých prvků je jen konečně mnoho, a induktivně definujeme slabě klesající podposloupnost $a_{f(1)} \geq a_{f(2)} \geq a_{f(3)} \geq \cdots$. Nechť $f(1)$ je index prvku, který následuje za posledním nízkým prvkem posloupnosti (a_n). Tedy prvek $a_{f(1)}$ ani žádný prvek, který po něm následuje, není nízký. Předpokládejme, že už jsme určili $a_{f(1)} \geq a_{f(2)} \geq \cdots \geq a_{f(k)}$ pro nějaké k. Nechť $f(k+1)$ je definováno jako nejmenší m takové, že $m > f(k)$ a zároveň $a_{f(k)} \geq a_m$. Takové m existuje, protože $a_{f(k)}$ není nízký. Takto induktivně definujeme slabě klesající podposloupnost (a_n). $\square$

Věta 3.10 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle Věty 2.7 je (b_n) konvergentní. □

> Věta 3.10 je ve skutečnosti jen slabší verze skutečné Bolzanovy–Weierstrassovy věty, která říká, že dokonce každá omezená posloupnost bodů v konečně-dimenzionálním euklidovském prostoru $\mathbb{R}^d$ má konvergentní podposloupnost.

Podle Věty 3.10 má každá omezená posloupnost hromadný bod. Pro neomezenou posloupnost je hromadným bodem ∞ nebo $-\infty$.

Příklad 3.11. Ukažme si několik příkladů posloupností a jejich množin hromadných bodů.

- Posloupnost $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ má dva hromadné body: 1 a -1.
- Posloupnost $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ má jediný hromadný bod $+\infty$.
- Posloupnost $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$ vznikla konkatenací bloků $B_1, B_2, B_3, \ldots$, kde $B_k = 1, 2, 3, \ldots, k$. Její množina hromadných bodů je $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
- Posloupnost $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots$ vznikla konkatenací bloků $C_1, C_2, C_3, \ldots$, kde $C_k = \frac{0}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k}{k}$. Její množina hromadných bodů je uzavřený interval $[0, 1]$. Všimněte si, že množina hromadných bodů je zde nespočetná, přestože samotná posloupnost obsahuje jen spočetně mnoho hodnot.

Ve všech předchozích případech měla množina hromadných bodů největší i nejmenší prvek v $\mathbb{R}^*$. Ukážeme si, že to nebyla náhoda.

Definice 3.12 (Limes superior a limes inferior)**.** Nechť (a_n) je posloupnost a $\mathcal{H}(a_n)$ její množina hromadných bodů. Největší prvek $\mathcal{H}(a_n)$ se nazývá *limes superior* posloupnosti a_n a značí se $\limsup_{n\to\infty} a_n$, zatímco nejmenší prvek $\mathcal{H}(a_n)$ se nazývá *limes inferior* a značí se $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Věta 3.13 (O existenci lim sup a lim inf)**.** *Pro každou posloupnost* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *má množina* $\mathcal{H}(a_n)$ *největší i nejmenší prvek v* $\mathbb{R}^*$*. Jinými slovy, každá posloupnost má limes superior i limes inferior.*

Důkaz. Dokažme existenci lim sup, pro lim inf je argument obdobný.

Pokud je posloupnost (a_n) shora neomezená, tak zjevně $+\infty$ je její největší hromadný bod, a tedy $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Pokud platí $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, tak $\mathcal{H}(a_n) = \{-\infty\}$ a tedy $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Předpokládejme odteď, že pro (a_n) nenastává ani jeden z těchto případů, a dokážeme, že existuje $\limsup_{n\to\infty} a_n$, které je navíc reálné.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujme množinu

$$M_k = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \{a_m;\ m \geq k\}.$$

a označme $s_k = \sup M_k \in \mathbb{R}$. Zjevně $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$, a tedy $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots$. Z toho plyne, že posloupnost (s_n) má limitu $S := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Tvrdíme, že S je největší prvek $\mathcal{H}(a_n)$.

Kdyby platilo $S = -\infty$, znamenalo by to, že i (a_n) má limitu $-\infty$ (rozmyslete proč!), což je případ, který jsme už rozebrali na začátku. Máme tedy $S \in \mathbb{R}$. Potřebujeme dokázat dvě věci: že S patří do $\mathcal{H}(a_n)$ a že žádný větší prvek $\mathbb{R}^*$ do $\mathcal{H}(a_n)$ nepatří.

Kdyby S nepatřilo do $\mathcal{H}(a_n)$, tak by dle alternativní definice hromadného bodu existovalo okolí $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$, které obsahuje nejvýše konečně mnoho prvků z posloupnosti (a_n). Předpokládejme, že m je největší index takový, že a_m patří do $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$. Potom ale pro každé $n > m$ máme $M_n \cap \mathcal{U}(S, \varepsilon) = \emptyset$, a tedy buď $s_n \geq S + \varepsilon$ (pokud má M_n nějaký prvek větší nebo rovný $S + \varepsilon$), nebo $s_n \leq S - \varepsilon$. Toto je ale ve sporu s tím, že $\lim s_n = S$.

Zbývá dokázat, že S je největší hromadný bod (a_n). Pro spor předpokládejme, že $\mathcal{H}(a_n)$ obsahuje nějaké $T > S$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby platilo $\mathcal{U}(T, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(S, \varepsilon) = \emptyset$. Jelikož S je limita posloupnosti (s_n), tak existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $s_n \in \mathcal{U}(S, \varepsilon)$. Protože $s_n = \sup M_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, znamená to, že pro každé $n \geq n_0$ platí $S + \varepsilon > s_n \geq a_n$, a tedy $a_n \notin \mathcal{U}(T, \varepsilon)$. To je ale spor s tím, že T je hromadný bod (a_n).

Tím je dokázáno, že $S = \limsup a_n$. Obdobně se dokáže existence $\liminf a_n$.

$\square$

Všimněte si, že z předchozího důkazu vyplývá alternativní definice lim sup a lim inf:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\right).$$

Řady reálných čísel

Definice 3.14 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots , \quad \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots , \sum_{k\geq 8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots .$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti (s_n) částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ je jejím *součtem*. Pokud je limita s_n nevlastní, tak i v tomto případě definujeme součet řady jako limitu (s_n), ale řadu neoznačujeme jako konvergentní.

Příklad 3.15. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1,0,1,0,1,\ldots)$.

Příklad 3.16. Důležitým příkladem řady je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots ,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \ldots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \ldots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \ldots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

To vyplývá to ze vzorce pro částečný součet ($q \neq 1$):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pro $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ a podle aritmetiky limit $\lim_{n\to\infty} s_n = (0 - 1)/(q-1) = 1/(1-q)$. Pro $q > 1$ jako limita vyjde $(+\infty - 1)/(q-1) = +\infty$ a pro $q = 1$ také (tehdy $s_n = n$). Pro $q \leq -1$ limita $\lim_{n\to\infty} q^n$ neexistuje a neexistuje tedy ani limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(q^n - 1)/(q-1)$.

Příklad 3.17. Při práci s řadami je potřeba určité obezřetnosti. Například existence i hodnota součtu se může změnit, když sčítance v řadě uzávorkujeme. Uvažme například řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots ,$$

o níž jsme v předchozím příkladu ukázali, že nekonverguje. Pokud ovšem řadu uzávorkujeme tak, že sloučíme každý záporný sčítanec s následujícím kladným, dostaneme konvergentní řadu:

$$\begin{aligned} &1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots \\ =&1 + 0 + 0 + \cdots \\ =&1. \end{aligned}$$

Pokud naopak sloučíme kladné členy s následujícími zápornými, vznikne řada konvergující k jinému součtu:

$$\begin{aligned} &(1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots \\ =&0+0+0+\cdots \\ =&0. \end{aligned}$$

Příklad 3.18. Součet řady není závislý jen na tom, jaké hodnoty sčítáme, ale i na tom, v jakém je sčítáme pořadí. Na rozdíl od konečných součtů tedy není u nekonečných řad možné libovolně měnit pořadí sčítanců. Uvažme například řadu $1+(-1)+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})+\cdots$. Její částečné součty tvoří posloupnost $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\ldots$, která má limitu 0, což je tedy součet této řady.

Nyní uvažme řadu, která má stejnou množinu sčítanců jako ta předchozí, ale sčítá je v jiném pořadí: vždy vezmeme nejprve dva kladné sčítance, a pak jeden záporný:

$$1+\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

O této řadě lze dokázat, že má součet $\ln 2 \doteq 0{,}693\ldots$, přestože obsahuje stejnou množinu sčítanců jako předchozí řada.

4 Funkce

Funkce $f\colon A \to B$ je, formálně řečeno, binární relace, která každému prvku množiny $x \in A$ přiřadí právě jeden prvek množiny $y \in B$, což zapisujeme $f(x) = y$. Množina A je pak *definiční obor* funkce f. Množinu $\{f(x);\ x \in A\}$ nazýváme *obor hodnot* funkce f a označujeme $\mathrm{Im}(f)$. Pro funkci $f\colon A \to B$ je tedy $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$, ale obecně nemusí platit $\mathrm{Im}(f) = B$. Pro množinu $M \subseteq A$ používáme značení $f(M)$ jako zkratku pro $\{f(x);\ x \in M\}$.

Funkce $f\colon A \to B$ je *prostá*, pokud pro každá dvě různá $x_1,x_2 \in A$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

V této přednášce se budeme zabývat hlavně funkcemi, jejichž definiční obor i obor hodnot jsou podmnožiny $\mathbb{R}$. Zaveďme několik pojmů specifických pro takovéto funkce.

Definice 4.1. Nechť M je podmnožina $\mathbb{R}$. Řekneme, že funce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je

- *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) < K$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) > K$,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud pro každé $x, y \in M$ platí $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- *neklesající* (nebo též *slabě rostoucí*) pokud pro každé $x, y \in M$ platí $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- *klesající* pokud pro každé $x, y \in M$ platí $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- *nerostoucí* (nebo též *slabě klesající*) pokud pro každé $x, y \in M$ platí $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí,
- *periodická* s periodou $p \in (0, +\infty)$, když pro každé $x \in M$ je i $x + p \in M$ a $f(x) = f(x + p)$.

Na rozdíl od posloupností mohou být monotónní funkce neomezené shora i zdola, příkladem je třeba $f(x) = x$.

Definice 4.2. Nechť M je podmnožina $\mathbb{R}$ a nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce. Potom *inverzní funkce k funkci* f je funkce $f^{<-1>}\colon \mathrm{Im}(f) \to M$ splňující $f^{<-1>}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

Příklad 4.3. Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0,\infty)$. Funkce inverzní k f na tomto intervalu je $\sqrt{x}\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Na intervalu $(-\infty,0]$ je funkce $f(x) = x^2$ také prostá, její inverzní funkcí je ale $-\sqrt{x}\colon [0, +\infty) \to (-\infty,0]$.

4.1 Některé důležité funkce

Při seznamování s funkcemi zmíněnými v těchto poznámkách se vám může hodit aplikace k vykreslování grafů funkcí, třeba GeoGebra.

Definice 4.4 (Exponenciální funkce)**.** Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme *exponenciální funkci* $\exp(x)$ jako součet řady

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Poznamenejme bez důkazu, že tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže exponenciální funkce je všude definovaná. Přímo z definice je vidět, že $\exp(0) = 1$, že $\exp(x) \geq 1$ pro $x \geq 0$ a že funkce exp je rostoucí na intervalu $[0, +\infty)$. Další vlastnosti exponenciální funkce lze odvodit z následující věty.

Věta 4.5 (Funkce exp převádí součet na součin)**.** *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Nebudeme uvádět důkaz předchozí věty, ale naznačme aspoň, jakými úpravami lze příslušnou rovnost odvodit:

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{dle binomické věty} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\overset{!!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} && \text{prohozením pořadí sum} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \right) && \text{přeznačením } m = n-k \\
&= \exp(x)\exp(y).
\end{aligned}$$

Co chybí k úplnému důkazu je zdůvodnění, proč změna pořadí sčítanců v rovnosti označené vykřičníky nezmění hodnotu nekonečných sum – víme, že obecně změna pořadí sčítanců v nekonečné sumě může ovlivnit hodnotu součtu. Potřebná teorie se opírá o pojem absolutní konvergence řad, který se probírá v pokročilejších kurzech matematické analýzy.

S využitím Věty 4.5 můžeme odvodit další vlastnosti exp.

- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ (protože $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$),
- $\exp(x) \in (0, 1)$ pro každé $x < 0$ (plyne z předchozího bodu),
- $\exp(x)$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, protože pokud $x < y$, tak platí $\exp(y) = \exp(x)\exp(y - x)$ a $\exp(y - x) > 1$,
- tudíž je $\exp(x)$ prostá na $\mathbb{R}$.

Z výše uvedených vlastností plyne, že obor hodnot funkce $\exp(x)$ je podmnožinou $(0, +\infty)$. Poznamenejme bez důkazu, že ve skutečnosti je tento obor hodnot přímo roven $(0, +\infty)$.

Speciální význam má hodnota $\exp(1) = 2{,}7182818\ldots$, což je iracionální číslo známé jako *Eulerovo číslo*, označované symbolem e.

Existují i jiné, ekvivalentní způsoby, jak definovat funkci $\exp(x)$: například ji lze definovat jako limitu

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Speciálně tedy platí $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Jak jsme podotkli výše, exp je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$. Existuje k ní tedy funkce inverzní, kterou si nyní zavedeme.

Věta 4.6 (Logaritmus)**.** *Funkce* $\exp^{<-1>}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*, která je inverzní k funkci* exp*, se nazývá* přirozený logaritmus *a značí se* ln.

Pomocí exp a ln můžeme definovat umocňování obecných reálných čísel.

Definice 4.7. Pro $b \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme $b^x = \exp(x \ln b)$.

Všimněte si, že pro $b \in (0, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$ je tato definice konzistentní s "obvyklým" umocňováním, například

$$\begin{aligned} b^4 &= \exp(4 \ln b) \\ &= \exp(\ln b + \ln b + \ln b + \ln b) \\ &= \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) \cdot \exp(\ln b) \\ &= b \cdot b \cdot b \cdot b. \end{aligned}$$

Všimněte si také, že e^x je synonymum pro $\exp(x)$. Oba tyto způsoby zápisu exponenciální funkce budeme nadále využívat.

Pro každé pevné kladné b a proměnnou $x \in \mathbb{R}$ nyní můžeme uvažovat funkci b^x, která je dle definice rovna $\exp(x \ln b)$. S využitím známých vlastností funkce exp vidíme, že pro $b = 1$, je funkce b^x identicky rovna jedné, pro $b > 1$ se jedná o rostoucí funkci z $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$, zatímco pro $b \in (0, 1)$ je tato funkce klesající a opět zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$.

Pro pevné $b \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ a proměnnou $x \in \mathbb{R}$ je funkce $b^x = \exp(x \ln b)$ prostá funkce z $\mathbb{R}$ do $(0,+\infty)$. Má tedy inverzní funkci, která je známá jako *logaritmus o základu b* a značí se obvykle $\log_b(x)$. Lze snadno odvodit, že logaritmus o základu b lze vyjádřit vzorečkem

$$\log_b(x) = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

Definice 4.8 (Funkce sinus a kosinus)**.** Funkce *sinus a kosinus* definujeme jako součty řad

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad \text{a}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Obě tyto řady konvergují pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Funkce $\exp(x)$, $\sin(x)$ a $\cos(x)$ jsme definovali pomocí speciálního typu číselné řady, takzvané *mocninné řady*. Obecně, mocninná řada (s proměnnou x) má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných (nebo obecněji komplexních) čísel, takzvaných *koeficientů* mocninné řady. Mocninné řady jsou tedy zobecnění polynomů. Funkcím, které lze definovat pomocí součtu nějaké mocninné řady, se říká analytické funkce. Hrají významnou úlohu v reálné analýze, a ještě významnější úlohu v analýze komplexní.

Jednou z výhod našich definic $\exp(x)$, $\sin(x)$ a $\cos(x)$ je, že je lze použít i pro komplexní hodnoty proměnné x (řady komplexních čísel se sčítají analogicky jako řady reálných čísel), čímž definiční obor těchto funkcí rozšíříme na celou množinu $\mathbb{C}$. Dosazováním komplexních hodnot lze navíc vypozorovat blízkou souvislost těchto tří funkcí. Označíme-li i imaginární jednotku (tj. $i^2 = -1$), pak pro $x \in \mathbb{C}$ z definice máme

$$\exp(ix) = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{a}$$

$$\exp(-ix) = 1 - i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + i\frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

z čehož (pokud uvěříme, že mocninné řady lze "sčítat člen po členu") plyne

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}, \\ \sin(x) &= \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i} \qquad\qquad \text{a} \\ \exp(ix) &= \cos(x)+i\sin(x). \end{aligned}$$

Limity funkcí

Připomeňme, že okolí bodu $A \in \mathbb{R}^*$ o poloměru $\varepsilon > 0$ značíme $\mathcal{U}(A,\varepsilon)$. Nyní zaveďme nové typy okolí, takzvaná prstencová okolí.

Definice 4.9 (Okolí)**.** Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $A \in \mathbb{R}$ definujeme

- *prstencové okolí bodu A o poloměru $\varepsilon > 0$*, značené $\mathcal{P}(A,\varepsilon)$, jako $(A-\varepsilon, A) \cup (A, A+\varepsilon)$,
- *levé prstencové okolí bodu A o poloměru $\varepsilon > 0$*, značené $\mathcal{P}^-(A,\varepsilon)$, jako $(A-\varepsilon, A)$,
- *pravé prstencové okolí bodu A o poloměru $\varepsilon > 0$*, značené $\mathcal{P}^+(A,\varepsilon)$, jako $(A, A+\varepsilon)$.

Pro $A \in \mathbb{R}$ tedy platí $\mathcal{P}(A,\varepsilon) = \mathcal{U}(A,\varepsilon) \setminus \{A\}$. Prstencová okolí nekonečen definujeme jako totožná s úplnými okolími: $\mathcal{P}(-\infty,\varepsilon) = \mathcal{U}(-\infty,\varepsilon)$ a $\mathcal{P}(+\infty,\varepsilon) = \mathcal{U}(+\infty,\varepsilon)$. Jednostranná okolí nekonečen definovat nebudeme.

Definice 4.10 (Limita funkce)**.** Řekneme, že funkce f *má v bodě $A \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$*, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{P}(A,\delta)\colon f(x) \in \mathcal{U}(L,\varepsilon),$$

neboli ekvivalentně,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon f\left(\mathcal{P}(A,\delta)\right) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon).$$

Zapisujeme

$$\lim_{x\to A} f(x) = L.$$

Poznámka. Limita funkce f v bodě A nijak nezávisí na hodnotě $f(A)$, f ani nemusí být v A definovaná. Aby však měla funkce f v bodě A limitu, musí její definiční obor obsahovat nějaké prstencové okolí A jako podmnožinu.

Pojem limity lze zavést pro funkci mezi libovolnými metrickými prostory, nikoliv jen pro reálné funkce. Už víme, že v libovolném metrickém prostoru (M, d_M) můžeme definovat okolí bodu A jako $\mathcal{U}_M(A,\varepsilon) = \{x \in M;\ d_M(x,A) < \varepsilon\}$ (používám zde $\mathcal{U}_M$ místo $\mathcal{U}$, aby bylo zřejmé, který metrický prostor se uvažuje). Prstencové okolí pak definujeme jako $\mathcal{P}_M(A,\varepsilon) = \mathcal{U}_M(A,\varepsilon) \setminus \{A\}$.

Máme-li metrické prostory (M, d_M) a (N, d_N) a funkci $f\colon M \to N$, pak řekneme, že tato funkce má v bodě $A \in M$ limitu $L \in N$, pokud platí, že
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon f\left(\mathcal{P}_M(A, \delta)\right) \subseteq \mathcal{U}_N(L, \varepsilon).$$

Příklad 4.11. Pokud $f(x) = x$ a $A \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x\to A} f(x) = A$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme f jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x\to A} f(x) = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$, i pro $A = 0$.

Příklad 4.12. Funkce *signum* (znaménko), která je definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x\to A} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(A)$ pro $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Předchozí příklad ukazuje, že někdy je vhodné uvažovat levé a pravé prstencové okolí bodu zvlášť.

Definice 4.13 (Jednostranné limity)**.** Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $A \in \mathbb{R}$ *limitu zprava* rovnou $L \in \mathbb{R}^*$, což zapisujeme

$$\lim_{x\to A+} f(x) = L,$$

pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{P}^+(A, \delta)\colon f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme *limitu zleva*, pouze $\mathcal{P}^+(A, \delta)$ se nahradí levým prstencovým okolím $\mathcal{P}^-(A, \delta)$. Má-li funkce f v bodě A limitu zleva rovnou L, píšeme

$$\lim_{x\to A-} f(x) = L.$$

Jednostranné limity v nevlastních bodech (tj. $A = +\infty$ nebo $A = -\infty$) definovat nebudeme.

Pro funkci sgn z Příkladu 4.12 snadno nahlédneme, že $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ a $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Obě jednostranné limity v nule jsou tedy různé, a navíc se ani jedna z nich nerovná hodnotě $\operatorname{sgn}(0)$.

Pozorování 4.14. *Funkce f má v bodě $A \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, právě když má f v bodě A limitu zleva i zprava a obě se rovnají L.*

Podobně jako u posloupnosti, limita funkce, pokud existuje, je jednoznačně určena.

Věta 4.15 (Jednoznačnost limity funkce)**.** *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Předpokládejme, že pro nějakou funkci f a bod $A \in \mathbb{R}^*$ platí zároveň $\lim_{x\to A} f(x) = L$ i $\lim_{x\to A} f(x) = L'$ pro dvě různé hodnoty $L, L' \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon > 0$ dost malé tak, aby platilo $\mathcal{U}(L,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L',\varepsilon) = \emptyset$, a pro toto ε použijme definici limity. Jelikož $\lim_{x\to A} f(x) = L$, tak musí existovat $\delta > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon)$, a podobně musí existovat $\delta' > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}(A,\delta')) \subseteq \mathcal{U}(L',\varepsilon)$.

Zvolíme-li $\delta'' = \min\{\delta,\delta'\}$, máme $f(\mathcal{P}(A,\delta'')) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L',\varepsilon)$, což je spor s $\mathcal{U}(L,\varepsilon) \cap \mathcal{U}(L',\varepsilon) = \emptyset$. □

Zcela obdobně nahlédneme, že každá funkce má v daném bodě nejvýš jednu limitu zleva i nejvýš jednu limitu zprava.

5 Limity funkcí a spojitost

Následující věta nám ukazuje blízkou souvislost mezi limitami funkcí a limitami posloupností.

Věta 5.1 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce, jejíž definiční obor M obsahuje nějaké prstencové okolí $\mathcal{P}(A, \delta_0)$ bodu $A \in \mathbb{R}^*$. Následující dvě tvrzení jsou pak ekvivalentní:*

(I) $\lim_{x\to A} f(x) = L$;

(II) pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ *takovou, že* $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ *a zároveň pro každé* n *je* $x_n \neq A$, *platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Důkaz. Nechť platí bod I. Mějme posloupnost (x_n) dle předpokladů bodu II a dokažme, že posloupnost $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ má limitu L. Nechť je tedy dáno $\varepsilon > 0$. Díky bodu I víme, že existuje $\delta > 0$ splňující $f(\mathcal{P}(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Protože (x_n) má limitu A a zároveň $x_n \neq A$ pro každé n, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $x_n \in P(A, \delta)$. Pro $n > n_0$ tudíž platí $f(x_n) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Proto $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$, a tedy platí bod II.

Nyní předpokládejme, že bod I neplatí, tj. $\lim_{x\to A} f(x)$ neexistuje nebo se nerovná L. To znamená, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in \mathcal{P}(A, \delta)$ s vlastností $f(x) \notin \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Pro každé $\delta_n = \min\{1/n, \delta_0\}$, kde $n = 1, 2, 3, \ldots$, vezmeme takové $x \in \mathcal{P}(A, \delta_n)$ a označíme ho x_n. Zjevně $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu A pro $n \to \infty$ a zároveň (x_n) neobsahuje A, ale $f(x_n) \notin \mathcal{U}(L, \varepsilon)$, takže $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ není L. Bod II tedy také neplatí; není splněn pro posloupnost (x_n). □

Příklad 5.2. Pomocí předchozí věty ukážeme, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, nemá limitu v nule. Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ a všechny členy posloupností (x_n) a (y_n) jsou nenulové. Kdyby měla funkce f v nule limitu $L \in \mathbb{R}^*$, muselo by dle Heineho věty platit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = L,$$

ale $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \text{ a } \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1.$$

Z toho plyne, že $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

Díky Heineho definici limity můžeme snadno ukázat, že pro limity funkcí platí analogie mnoha vět pro limity posloupností. Konkrétně uvedeme větu o aritmetice limit funkcí, větu o vztahu limit funkcí a uspořádání a větu o dvou policajtech.

Věta 5.3 (Aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť pro funkce* f, g *platí* $\lim_{x\to A} f(x) = L$ *a* $\lim_{x\to A} g(x) = K$*, pro nějaká* $A, K, L \in \mathbb{R}^*$*. Potom*

(a) pokud je $L + K$ *definováno, tak* $\lim_{x\to A} f(x) + g(x) = L + K$*,*

(b) pokud je $L \cdot K$ *definováno, tak* $\lim_{x\to A} f(x)g(x) = L \cdot K$*,*

(c) pokud je $\frac{L}{K}$ *definováno (a tudíž speciálně* $K \neq 0$*), tak je* $g(x)$ *nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu* A *a platí* $\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$*.*

Důkaz. Pomocí Heineho definice limity (Věta 5.1) tyto výsledky snadno převedeme na výsledky o aritmetice limit posloupností, které známe z druhé přednášky.

Dokažme třeba bod (a). Ověřme, že funkce $f + g$ splňuje bod II Věty 5.1. Nechť (x_n) je posloupnost s limitou A. Protože $\lim_{x\to A} f(x) = L$, tak podle Věty 5.1 (implikace I $\Rightarrow$ II) platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. Obdobně se ukáže, že platí $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = K$. Z věty o aritmetice limit posloupností pak plyne $\lim_{n\to\infty} f(x_n) + g(x_n) = L + K$. Tedy $f + g$ splňuje bod II Věty 5.1 a to podle Věty 5.1 (implikace II $\Rightarrow$ I) znamená, že $\lim_{x\to A} f(x) + g(x) = L + K$.

Body (b) a (c) se dokazují analogicky. $\square$

Obdobně se dá Heineho věta využít k důkazu následujících dvou vět. Důkazy uvádět nebudeme.

Věta 5.4 (Limity funkcí a uspořádání)**.** *Nechť* f *a* g *jsou funkce, pro které platí* $\lim_{x\to A} f(x) = L$ *a* $\lim_{x\to A} g(x) = K$*, pro nějaká* $A, K, L \in \mathbb{R}^*$*. Potom*

1. *pokud* $L > K$*, tak existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každé* $x \in \mathcal{P}(A, \delta)$ *platí* $f(x) > g(x)$*, a*

2. *pokud pro každé* $\delta > 0$ *existuje* $x \in \mathcal{P}(A, \delta)$ *takové, že* $f(x) \geq g(x)$*, tak* $L \geq K$*.*

Věta 5.5 (O dvou policajtech pro funkce)**.** *Mějme tři funkce* f, g, h *a body* $A, L \in \mathbb{R}^*$*. Nechť platí* $\lim_{x\to A} f(x) = \lim_{x\to A} h(x) = L$ *a nechť existuje nějaké* $\delta > 0$ *takové, že pro každé* $x \in \mathcal{P}(A, \delta)$ *platí* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$*. Potom i* $g(x)$ *má v bodě* A *limitu a ta je rovna* L*.*

Nyní zformulujme definici jednoho z klíčových pojmů matematické analýzy.

Definice 5.6 (Spojitost funkce)**.** Řekneme, že funkce f je v bodě $A \in \mathbb{R}$ *spojitá*, pokud

$$\lim_{x\to A} f(x) = f(A).$$

Funkce $f(x)$ je v bodě A *spojitá zprava*, pokud $\lim_{x\to A+} f(x) = f(A)$. Podobně se definuje spojitost zleva.

Tak jako lze pojem limity funkce rozšířit na libovolnou funkci mezi metrickými prostory, tak i pojem spojitosti lze takto rozšířit.

Všimněte si, že aby mohla být funkce v bodě A spojitá, musí její definiční obor obsahovat nejen samotný bod A, ale i nějaké jeho okolí, jinak by $\lim_{x \to A} f(x)$ nebylo definováno. Zjevně platí, že funkce je v daném bodě $A \in \mathbb{R}$ spojitá právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i zprava.

Například pro funkci $\operatorname{sgn}(x)$ se snadno přesvědčíme, že je spojitá v libovolném bodě $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, neboť je na dostatečně malém okolí takového bodu konstantní. Naopak v bodě $A = 0$ není spojitá, protože v tomto bodě nemá limitu. Navíc v bodě $A = 0$ není ani jednostranně spojitá, protože $\operatorname{sgn}(0) = 0$, zatímco obě jednostranné limity jsou nenulové.

Pro funkce f definované jednoduchým vzorečkem lze obvykle spojitost v bodě $A \in \mathbb{R}$ 'vykoukat' z grafu f: pokud graf v okolí A vypadá jako nepřerušená čára, je možno soudit, že tam je funkce spojitá. Ovšem ve složitějších případech se na takovouto neformální intuici nelze spoléhat. Podívejme se na jeden takový příklad.

Příklad 5.7 (Riemannova funkce)*.* Definujme funkci $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q} \text{ racionální a } p, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná} \end{cases}$$

Vyšetřeme, kde je tato funkce spojitá. Dokažme nejprve, že pro každé $A \in (0,1)$ platí $\lim_{x \to A} f(x) = 0$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Všimněme si, že je jen konečně mnoho bodů $x \in (0,1)$, pro něž platí $f(x) \geq \varepsilon$, konkrétně jsou to racionální body tvaru $x = \frac{p}{q}$ pro $0 < p < q \leq 1/\varepsilon$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Zvolme tedy $\delta > 0$ dost malé na to, aby žádný z těchto konečně mnoha problematických bodů nepatřil do $\mathcal{P}(A, \delta)$ a aby navíc platilo $\mathcal{P}(A, \delta) \subseteq (0,1)$. Potom platí $f(\mathcal{P}(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(0, \varepsilon)$, což dokazuje, že $\lim_{x \to A} f(x) = 0$, jak jsme tvrdili. Z toho pak vyplývá, že funkce f je spojitá v bodě $A \in (0,1)$ právě tehdy, když $f(A) = 0$, neboli právě tehdy, když A je iracionální číslo.

Vlastnostem spojitých funkcí se budeme podrobněji věnovat na příští přednášce. Nyní dokážeme důležitou větu pro výpočet limit funkcí, v níž spojitost figuruje jako jeden z předpokladů.

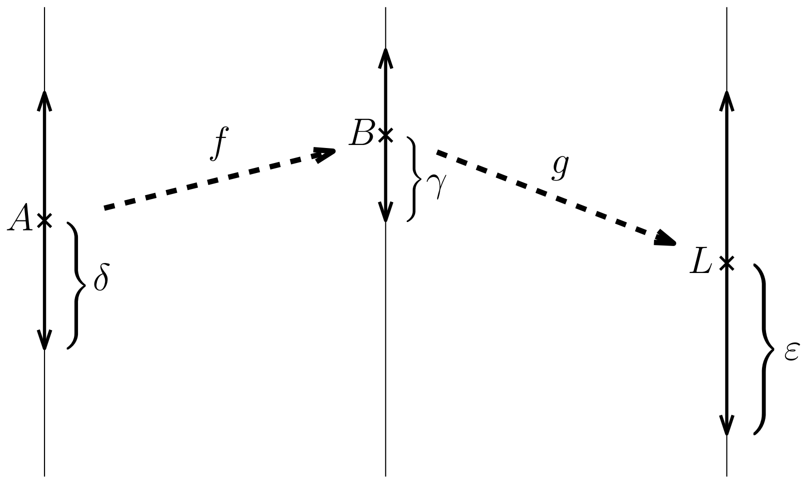
Věta 5.8 (O limitě složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x \to A} f(x) = B$ a $\lim_{x \to B} g(x) = L$, pro nějaká $A, B, L \in \mathbb{R}^*$. Navíc nechť je splněna aspoň jedna z následujících dvou podmínek P1 a P2:*

(P1) *Funkce $g(x)$ je spojitá v B (jinými slovy, $g(B) = \lim_{x \to B} g(x) = L$).*

(P2) *Na nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(A, \delta_0)$ funkce $f(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin f(\mathcal{P}(A, \delta_0))$.*

Potom

$$\lim_{x \to A} g(f(x)) = L.$$



Obrázek 5.1: Ilustrace k důkazu věty o limitě složené funkce

Důkaz. (Viz Obrázek 5.1.) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Naším cílem je ukázat, že existuje $\delta > 0$ takové, že $g(f(\mathcal{P}(A,\delta)))$ je podmnožina $\mathcal{U}(L,\varepsilon)$.

Protože $\lim_{x\to B} g(x) = L$, existuje $\gamma > 0$ takové, že

$$g(\mathcal{P}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon). \tag{5.1}$$

Protože $\lim_{x\to A} f(x) = B$, tak pro toto γ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(B,\gamma). \tag{5.2}$$

Jediná obtíž nyní je ta, že okolí $\mathcal{U}(B,\gamma)$ není obsaženo v okolí $\mathcal{P}(B,\gamma)$ – má navíc bod B. Nyní musíme využít toho, že platí jedna z podmínek P1 a P2.

Pokud je splněna podmínka P1, tj. pokud platí $g(B) = L$, tak inkluze (5.1) se dá zesílit na

$$g(\mathcal{U}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon). \tag{5.3}$$

Pak obtíž mizí a pomocí (5.2) a (5.3) dostaneme

$$g(f(\mathcal{P}(A,\delta))) \subseteq g(\mathcal{U}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to A} g(f(x)) = L$.

Pokud je splněna podmínka P2, můžeme $\delta > 0$ zvolit tak, aby navíc platilo $\delta < \delta_0$, a potom lze inkluzi (5.2) zesílit na

$$f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{P}(B,\gamma). \tag{5.4}$$

Obtíž opět mizí a pomocí (5.4) a (5.1) dostaneme

$$g(f(\mathcal{P}(A,\delta))) \subseteq g(\mathcal{P}(B,\gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L,\varepsilon)$$

a $\lim_{x\to A} g(f(x)) = L$. □

6 Spojitost

Připomeňme z předchozí přednášky, že funkce f je *spojitá* v bodě $A \in \mathbb{R}$, pokud platí $\lim_{x\to A} f(x) = f(A)$. Explicitněji to znamená, že f je spojitá v A, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ splňující $f(\mathcal{P}(A,\delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(A),\varepsilon)$. Hlavním obsahem dnešní přednášky bude seznámení s některými netriviálními vlastnostmi spojitých funkcí.

Jako *interval* označíme jakoukoliv množinu $I \subseteq \mathbb{R}$ takovou, že pro každá tři reálná čísla $x < y < z$ platí, že pokud x a z náleží I, tak i y náleží I. Řekneme, že interval je *netriviální*, pokud obsahuje aspoň dva body (a tím pádem nekonečně mnoho bodů).

Vnitřní bod nějakého intervalu I je bod, který v I leží i s nějakým svým okolím. *Krajní bod* intervalu je bod, který není vnitřní. Například $(-\infty, 5)$ nemá krajní body, jen vnitřní, ale $(-\infty, 5]$ má právě jeden krajní bod a to 5. Všimněte si, že krajní bod intervalu je zároveň jeho největší nebo nejmenší prvek, a naopak, pokud interval má nějaký největší nebo nejmenší prvek, je tento jeho krajním bodem. Nejmenší prvek intervalu je zvykem označovat jako levý krajní bod, zatímco největší prvek je pravý krajní bod.

Definice 6.1 (Spojitost na intervalu)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je množina, nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je funkce a nechť $I \subseteq M$ je netriviální interval. Řekneme, že f *je spojitá na intervalu* I, je-li spojitá v každém vnitřním bodu I a v každém případném krajním bodu I je odpovídajícím způsobem jednostranně spojitá, tj. pokud I má největší prvek, tak je v něm f spojitá zleva, a pokud f má nejmenší prvek, tak je v něm f spojitá zprava.

Příklad 6.2. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na intervalu $(0, +\infty)$, a tedy i na jakémkoliv jeho podintervalu. Není však spojitá na intervalu $[0, 1)$ (bez ohledu na to zda a jak je definovaná v nule), protože $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

Věta 6.3 (Bolzano)**.** *Nechť $I = [A, B]$ je uzavřený interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na I. Pokud platí $f(A) < 0 < f(B)$ nebo $f(A) > 0 > f(B)$, tak existuje bod $C \in [A, B]$ takový, že $f(C) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f(A) < 0 < f(B)$, případ s opačnými nerovnostmi je analogický. Definujme množinu $Z = \{x \in [A, B];\ f(x) < 0\}$. Zjevně je tato množina neprázdná (obsahuje např. bod A) a shora omezená (B je její horní mez), má tedy supremum $S \in [A, B]$. Ukážeme, že $f(S) = 0$, čímž bude věta dokázána. Předpokládejme pro spor, že $f(S) \neq 0$ a uvažme případy $f(S) < 0$ a $f(S) > 0$.

Pokud $f(S) > 0$, tak platí $S \in (A, B]$, tedy f je v S spojitá zleva, což dle definice spojitosti zleva znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $f(\mathcal{P}^-(S,\delta))$ je podmnožina $\mathcal{U}(f(S),\varepsilon)$. Zvolme $\varepsilon = f(S)$ a jemu odpovídající δ. Pak vidíme, že funkce f je kladná na celém intervalu $(S-\delta, S)$, z čehož plyne, že žádný bod z tohoto intervalu nepatří do množiny Z. Tedy $S - \delta$ je horní mez Z menší než S, což je spor s tím, že S je supremum Z.

Uvažme nyní možnost $f(S) < 0$. Potom jistě S patří do $[A, B)$, a tedy f je spojitá v bodě S zprava. Obdobně jako v předchozím případě to znamená, že existuje $\delta > 0$ takové, že f je záporná na celém intervalu $(S, S + \delta)$, což je spor s tím, že S je horní mez množiny Z.

Vyloučením všech ostatních možností jste odvodili, že $f(S) = 0$. □

Z Bolzanovy věty plyne několik snadných důsledků.

Věta 6.4 (Věta o nabývání mezihodnot[1]). *Nechť f je funkce spojitá na intervalu I a nechť A a B jsou dva body v I, kde $A < B$. Označme $m = \min\{f(A), f(B)\}$ a $M = \max\{f(A), f(B)\}$. Potom pro každé $Y \in [m, M]$ existuje $C \in [A, B]$ takové, že $f(C) = Y$.*

Důkaz. Zvolme nějaké $Y \in [m, M]$. Pro $Y = m$ a $Y = M$ závěr věty zjevně platí, tedy předpokládejme, že $m < Y < M$. Pak stačí uvažovat funkci $g(x) = f(x) - Y$, která je spojitá na I, tedy i spojitá na $[A, B]$, a splňuje předpoklady Věty 6.3. Z té věty pak plyne, že existuje $C \in [A, B]$ takové, že $g(C) = 0$, tedy $f(C) = Y$. □

Aplikací Bolzanovy věty je metoda půlení intervalů pro přibližný výpočet kořenů spojité funkce.

Příklad 6.5. Polynom $f(x) = x^2 - 2$ je spojitá funkce. Protože $f(1) = -1$ a $f(2) = 2$, z předchozí věty plyne, že f má kořen x_0 (tj. $f(x_0) = 0$) splňující $1 < x_0 < 2$. Postupným půlením intervalu můžeme tento kořen přibližně numericky spočítat, tedy aproximovat hodnotu $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} f(1{,}5) &= 0{,}25 > 0 \text{ tedy } 1 < x_0 < 1{,}5 \\ f(1{,}25) &= -0{,}4375 < 0 \text{ tedy } 1{,}25 < x_0 < 1{,}5 \\ f(1{,}375) &= -0{,}109375 < 0 \text{ tedy } 1{,}375 < x_0 < 1{,}5. \end{aligned}$$

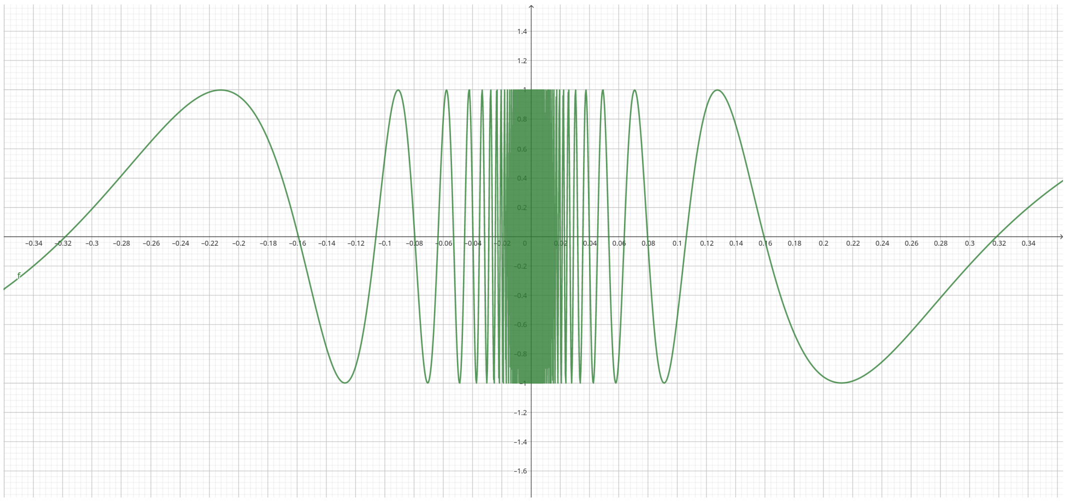
A tak dále.

Větu o nabývání mezihodnot lze ekvivalentně zformulovat i takto:

Důsledek 6.6 (Obor hodnot spojité funkce). *Spojitá funkce zobrazuje interval na interval. Jinými slovy, je-li $I \subseteq \mathbb{R}$ interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na I, je množina $f(I) = \{f(x);\ x \in I\}$ opět interval.*

Poznamenejme, že implikaci z předchozího důsledku nelze obrátit: to, že funkce zobrazí každý interval opět na interval, ještě neznamená, že tato funkce je spojitá.

[1] Tato věta je někdy též označovaná jako "Darbouxova věta", což je ovšem historicky nesprávné, a navíc to může způsobit záměnu s Darbouxovou větou o mezihodnotách derivace, kterou uvidíme na některé z dalších přednášek.



Obrázek 6.1: Fragment grafu funkce $f(x) = \sin(1/x)$.

Příkladem nespojité funkce, která každý interval zobrazí na interval, může být třeba Conwayova funkce, která dokonce každý netriviální interval zobrazí na $\mathbb{R}$ a není spojitá v žádném bodě. Trochu méně extrémní příklad je funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Tato funkce není spojitá v nule a každý netriviální interval obsahující nulu zobrazí na interval $[-1, 1]$ (viz Obrázek 6.1).

Lze ovšem ukázat, že pokud je funkce monotónní a každý interval zobrazí na interval, tak je i spojitá. Než toto ukážeme, tak si jako přípravu ukážeme, že monotónní (ne nutně spojité) funkce mají jednostranné limity.

Věta 6.7. *Nechť I je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Funkce f má limitu zleva v každém bodě I kromě případného levého krajního bodu. Obdobně má f limitu zprava v každém bodě I kromě případného pravého krajního bodu.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je neklesající (nerostoucí případ je obdobný). Volme bod $A \in I$, který není levý krajní bod I, a ukažme, že v něm f má limitu zleva (případ limity zprava je opět obdobný). Označme $I^- = I \cap (-\infty, A)$ a $S = \sup f(I^-)$. Všimněte si, že hodnota $f(A)$ je horní mez množiny $f(I^-)$, protože f je neklesající funkce. Speciálně platí $S < +\infty$. Ukažme, že

$$\lim_{x \to A-} f(x) = S.$$

Nechť máme dáno $\varepsilon > 0$ a hledejme $\delta > 0$ takové, aby platilo $f(\mathcal{P}^-(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(S, \varepsilon)$. Z vlastností suprema plyne, že $S - \varepsilon$ není horní mez množiny $f(I^-)$, tedy existuje $B \in I^-$ takové, že $f(B) > S - \varepsilon$. Z monotonie f a z definice S plyne, že pro každé $x \in (B, A)$ platí $S - \varepsilon < f(B) \leq f(x) \leq S$. Zvolíme-li $\delta = A - B$, tak $f(\mathcal{P}^-(A, \delta))$ bude podmnožina $(S - \varepsilon, S)$, což je podmnožina $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$. □

Věta 6.8. *Nechť je I interval a nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom f je spojitá na I právě tehdy, když pro každý interval $J \subseteq I$ platí, že $f(J)$ je také interval.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ plyne už z Důsledku 6.6, dokažme tedy implikaci $\Leftarrow$. Předpokládejme, že f je monotónní funkce, která každý interval $J \subseteq I$ zobrazí opět na interval. Naším cílem je dokázat, že f je spojitá na I, tedy že je spojitá v každém vnitřním bodě I a v případných krajních bodech je příslušným způsobem jednostranně spojitá.

Volme tedy bod $A \in I$. Ukážeme, že pokud A není levý krajní bod I, tak platí $\lim_{x \to A-} f(x) = f(A)$. Analogicky lze ukázat, že pokud A není pravý krajní bod I, tak platí $\lim_{x \to A+} f(x) = f(A)$, z čehož dohromady plyne spojitost f na I.

Předpokládejme, že f je neklesající (nerostoucí případ je obdobný), a volme bod A, který není levým krajním bodem I. Označme $I^- = I \cap (-\infty, A)$ a $S = \sup f(I^-)$. V důkazu Věty 6.7 jsme viděli, že jednostranná limita $\lim_{x \to A-} f(x)$ je rovna S. Pro spor předpokládejme, že se tato limita liší od $f(A)$.

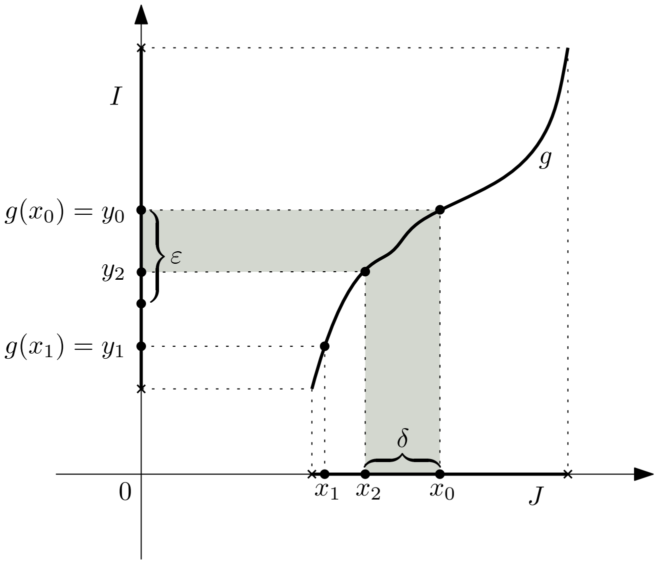
Pokud platí $S > f(A)$, znamená to dle definice suprema, že $f(A)$ není horní mez množiny $f(I^-)$, tedy že existuje $x \in I^-$ takové, že $f(x) > f(A)$. To je ovšem ve sporu s tím, že f je neklesající funkce.

Pokud platí $S < f(A)$, tak označme $J = I^- \cup \{A\}$ a všimněme si, že J je interval, ale množina $f(J)$ interval není: to proto, že $f(J) = f(I^-) \cup \{f(A)\}$, přičemž všechny hodnoty v $f(I^-)$ jsou shora omezené S, zatímco $f(A)$ je ostře větší než S. To je spor s předpokladem, že f zobrazí každý interval na interval. Musí tedy platit $S = f(A)$.

Tímto jsme tedy ukázali, že pro jakýkoliv bod $A \in I$ kromě případného levého krajního bodu I platí $\lim_{x \to A-} f(x) = f(A)$. Obdobná rovnost platí i pro limity zprava, což ukazuje, že f je spojitá na I. □

Předpokládejme nyní, že máme dánu spojitou funkci $f: I \to \mathbb{R}$, kde I je nějaký netriviální interval. Co lze říci o existencí a spojitostí případné inverzní funkce k funkci f? Aby byla inverzní funkce vůbec definována, je nutné, aby f byla prostá. Z Věty o nabývání mezihodnot (Věta 6.4) lze snadno rozmyslet (rozmyslete si to!), že funkce f spojitá na intervalu I je prostá právě tehdy, když je ryze monotónní (tedy buď rostoucí nebo klesající). Následující věta ukazuje, že v takovém případě je její inverzní funkce $f^{<-1>}$ opět spojitá.

Věta 6.9 (Spojitost inverzní funkce)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce spojitá na I. Potom její inverzní funkce $f^{<-1>}$ je rovněž spojitá a rostoucí. Obdobně pokud f je spojitá a klesající, tak $f^{<-1>}$ je také spojitá a klesající.*



Obrázek 6.2: Ilustrace důkazu Věty 6.9.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí, případ klesající f je obdobný. Označme $g = f^{<-1>}$. Všimněme si, že pokud f je rostoucí, je g také rostoucí. Označme $J = f(I)$. Z Důsledku 6.6 víme, že J je interval, funkce g je tedy definována na intervalu J a jejím oborem hodnot je interval I.

Naším cílem je dokázat, že pro každý bod $x_0 \in J$, který není levý krajní bod J, je funkce g spojitá v x_0 zleva, a podobně v každém bodě intervalu J kromě případného pravého krajního bodu je g spojitá zprava. Vyšetřeme spojitost zleva, případ spojitosti zprava je analogický. Argument je ilustrován na Obrázku 6.2.

Volme tedy bod $x_0 \in J$, který není levým krajním bodem J, a označme $y_0 = g(x_0)$. Abychom dokázali, že g je v x_0 spojitá zleva, musíme ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $g(\mathcal{P}^-(x_0, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(y_0, \varepsilon)$. Nechť tedy máme dáno nějaké $\varepsilon > 0$ a hledejme příslušné $\delta > 0$.

Nejprve nahlédněme, že y_0 není levý krajní bod I: jelikož x_0 není levý krajní bod J, tak existuje bod $x_1 \in J$, který je menší než x_0. Označme $y_1 = g(x_1)$. Nutně y_1 patří do I a díky monotonii g platí $y_1 < y_0$, tedy y_0 není levý krajní bod I.

Nyní zvolme bod $y_2 \in I$ splňující $y_0 - \varepsilon < y_2 < y_0$. Nějaký takový bod existuje, protože y_0 není levý krajní bod I. Označme $x_2 = f(y_2)$. Jelikož je f rostoucí, máme $x_2 < x_0$. Definujme $\delta = x_0 - x_2$. Potom pro každé $x \in \mathcal{P}^-(x_0, \delta)$ platí $x_2 < x < x_0$, a tedy $y_2 < g(x) < y_0$. Platí tedy $g(\mathcal{P}^-(x_0, \delta)) \subseteq (y_2, y_0) \subseteq \mathcal{U}(y_0, \varepsilon)$, což ukazuje, že g je v x_0 spojitá zleva. Obdobně se odvodí spojitost g zprava. □

Funkce x, $|x|$, $\exp(x)$, $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité na celém svém definičním oboru, tedy na $\mathbb{R}$. Pro x a $|x|$ to lze snadno ověřit z definice, pro exp, sin a cos to přijměme bez důkazu. Z Věty 6.9 tudíž plyne například spojitost logaritmu na $(0, +\infty)$.

Z Věty 5.3 o aritmetice limit funkcí plyne, že funkce definovaná jako součet, rozdíl, součin a podíl spojitých funkcí je opět spojitá (pokud je definována). Podobně z Věty 5.8 o limitě složené funkce plyne, že pokud je funkce f spojitá v bodě A a funkce g je spojitá v bodě $f(A)$, pak je funkce $h = g \circ f$ (tj. $h(x) = g(f(x))$) spojitá v bodě A.

Vedle nabývání mezihodnot, jehož se týkaly Věty 6.3 a 6.4 a Důsledek 6.6, je další klíčovou vlastností spojitých funkcí nabývání extrémů na kompaktních množinách. Příslušnou větu uvidíme až na další přednášce, prozatím si zaveďme potřebnou terminologii.

Definice 6.10 (Extrémy funkce)**.** Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $f\colon M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f v bodě $A \in M$ nabývá (na množině M) svého

- *maxima*, když $\forall x \in M\colon f(x) \leq f(A)$;
- *ostrého maxima*, když $\forall x \in M \setminus \{A\}\colon f(x) < f(A)$;
- *lokálního maxima*, když $\exists \delta > 0\ \forall x \in M \cap \mathcal{U}(A, \delta)\colon f(x) \leq f(A)$;
- *ostrého lokálního maxima*, když $\exists \delta > 0\ \forall x \in M \cap \mathcal{P}(A, \delta)\colon f(x) < f(A)$.

Obdobně definujeme minimum, ostré minimum, lokální minimum a ostré lokální minimum. Slovem *extrém* funkce f označujeme minimum nebo maximum, a podobně *lokální extrém* označuje lokální minimum nebo lokální maximum.

7 | Princip maxima, derivace

Pojmem *kompaktní interval* budeme označovat každý interval tvaru $[A, B]$, pro $A, B \in \mathbb{R}$. Následující věta ukazuje jednu z klíčových vlastností spojitých funkcí.

Věta 7.1 (Princip maxima pro spojité funkce)**.** *Nechť I je kompaktní interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom f nabývá na intervalu I svého maxima i minima.*

Důkaz. Dokážeme nabývání maxima, případ minima je obdobný. Označme

$$S = \sup(f(I)).$$

Naším cílem bude dokázat, že S je reálné, a navíc existuje bod $M \in I$, v němž nabývá f hodnotu S, a tím pádem v M nabývá f svého maxima.

Podle definice suprema pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in I$ takové, že $f(x) \in \mathcal{U}(S, \varepsilon)$. Explicitněji řečeno, pokud S je reálné, tak platí $S - \varepsilon < f(x) \leq S$, a pokud $S = +\infty$, tak platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažme v předchozích nerovnostech $\varepsilon = \frac{1}{n}$ a volme x_n tak, aby platilo $f(x_n) \in \mathcal{U}(S, \frac{1}{n})$. Z této volby posloupnosti (x_n) pak plyne, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$.

Jak ale najít konkrétní bod M, ve kterém má f hodnotu přesně S? Nejprve využijeme Bolzano-Weierstrassovu větu (Věta 3.10), která pro připomenutí říká, že každá omezená posloupnost reálných čísel obsahuje konvergentní podposloupnost. Posloupnost (x_n) je zjevně omezená (protože I je omezený interval), nechť tedy (z_n) je nějaká její konvergentní podposloupnost a označme $M = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Všimněte si, že M nutně patří do I (zde využíváme, že I je kompaktní, tedy obsahuje oba své krajní body). Všimněte si také, že platí $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = S$, protože platilo $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$ a $(f(z_n))$ je podposloupnost $(f(x_n))$. Zbývá dokázat, že $f(M) = S$, neboli jinými slovy, že platí

$$f(M) = f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = S.$$

Toto lze dokázat například odkazem na Heineho větu o limitě funkce, ale pro větší názornost předvedeme přímý argument. Pokud by platilo $f(M) > S$ dostali bychom ihned spor s tím, že S je supremum $f(I)$. Předpokládejme nyní, že $f(M) < S$. Zvolme si $\varepsilon > 0$ tak malé, aby okolí $\mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$ bylo disjunktní s okolím $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$.

Víme, že $\lim_{x\to M} f(x) = f(M)$, protože f je na I spojitá[1]. To znamená, že pro námi zvolené $\varepsilon > 0$ existuje okolí $\mathcal{P}(M, \delta)$, na němž má f hodnoty náležící

[1]Přesněji řečeno, rovnost $\lim_{x\to M} f(x) = f(M)$ platí, pokud je M vnitřní bod I. Pro krajní bod se zde místo limity musí uvažovat jen příslušná jednostranná limita, a podobně i ve zbytku důkazu příslušná jednostranná okolí. Pro jednoduchost odteď předpokládejme, že M je vnitřní bod I.

do $\mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$, neboli $f(\mathcal{P}(M, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$. Protože v bodě M samotném má funkce f hodnotu $f(M)$, můžeme předchozí inkluzi zesílit na $f(\mathcal{U}(M, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$. Protože má posloupnost (z_n) limitu M, tak pro každé dost velké n platí, že z_n patří do $\mathcal{U}(M, \delta)$, a tedy $f(z_n)$ patří do $\mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$. Zároveň ale víme, že posloupnost $f(z_n)$ má limitu S, tedy pro každé dost velké n patří $f(z_n)$ do $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$. To je ovšem spor, protože díky naší volbě ε jsou okolí $\mathcal{U}(f(M), \varepsilon)$ a $\mathcal{U}(S, \varepsilon)$ disjunktní.

Tento spor ukazuje, že $f(M)$ nemůže být menší než S, tudíž $f(M) = S$ a v bodě M nabývá funkce f svého maxima. □

Všimněte si, že z Věty 7.1 mimo jiné plyne, že každá spojitá funkce na kompaktním intervalu je omezená.

Ve Větě 7.1 jsou klíčové dva předpoklady: že f je spojitá funkce a že I je kompaktní interval. Ani jeden z těchto předpokladů nelze opomenout, jak ukazují následující příklady.

Příklad 7.2. Uvažme funkci $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou rovností $f_1(x) = x$. Ta je zjevně spojitá na $\mathbb{R}$, ale nenabývá v žádném bodě maxima ani minima. Větu 7.1 zde nelze použít, protože $\mathbb{R}$ není kompaktní interval.

Uvažme nyní funkci $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Ta opět nenabývá maxima ani minima a Věta 7.1 se na ni nevztahuje, neboť f_2 není spojitá v nule a $\mathbb{R}$ není kompaktní interval. Navíc pokud definiční obor f_2 omezíme na $[-1, 1]$ (nebo na jakýkoliv jiný netriviální interval obsahující nulu) získáme funkci, která stále nenabývá maxima nebo minima, a dokonce ani není omezená. Větu 7.1 stále nelze využít, neboť f_2 není spojitá v nule. Pokud naproti tomu definiční obor f_2 omezíme např. na $[1, +\infty)$, tak získáme spojitou funkci, která sice nabývá maxima v $x = 1$, ale nenabývá minima. Větu 7.1 opět nelze využít, tentokrát proto, že $[1, +\infty)$ není kompaktní.

Poznamenejme, že může existovat i omezená funkce na kompaktním intervalu, která nenabývá extrémů. Taková funkce je nutně nespojitá. Příkladem může být funkce $f_3\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f_3 = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = -1 \text{ a } x = 1, \\ x & \text{pro } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Princip maxima je důležitá vlastnost spojitých funkcí (a kompaktních intervalů), která má aplikace například v optimalizaci, kde zaručuje existenci optimálních řešení některých úloh. Tento princip lze zformulovat i obecněji pro spojité reálné funkce definované na metrických prostorech, k tomu je ovšem potřeba vhodným způsobem zobecnit pojem kompaktního intervalu.

Zaveďme si některé pojmy týkající se množin v metrických prostorech. Mějme metrický prostor (M, d) a množinu $X \subseteq M$. Řekneme, že množina X je

- *otevřená*, pokud pro každý bod $A \in X$ existuje okolí A, které je podmnožinou X (neboli existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\mathcal{U}(A, \varepsilon) \subseteq X$),
- *uzavřená*, pokud její doplněk $M \setminus X$ je otevřená množina,
- *omezená*, pokud existuje bod $A \in M$ a poloměr r takové, že $X \subseteq \mathcal{U}(A, r)$,
- *kompaktní*, pokud každá posloupnost prvků množiny X má konvergentní podposloupnost, jejíž limita je opět prvek X.

Všimněte si, že množina může být zároveň otevřená i uzavřená: triviálním příkladem takových množin jsou třeba prázdná množina nebo celý prostor M, ale mohou být i další takové množiny. Například v metrických protorech s diskrétní metrikou (viz zápisky z první přednášky) je každá množina otevřená i uzavřená zároveň.

Slíbené zobecnění Věty 7.1 pak zní takto:

Věta 7.3 (Princip maxima - obecná verze)**.** *Nechť X je neprázdná kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d) a nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na X. Potom f nabývá na X svého maxima i minima.*

Pro nás asi nejdůležitějším příkladem metrických prostorů jsou prostory $\mathbb{R}^n$ s metrikou definovanou pomocí běžné euklidovské vzdálenosti. V těchto prostorech platí, že množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená. Dají se ovšem najít i metrické prostory, v nichž některé uzavřené a omezené množiny nejsou kompaktní, například jakýkoliv nekonečný metrický prostor s diskrétní metrikou.

Jak už bylo zmíněno v zápiscích ke druhé přednášce, metrické prostory lze ještě dále zobecnit na tzv. topologické prostory. Pojem otevřené či uzavřené množiny má smysl i v topologických prostorech, ovšem definice kompaktní množiny se obvykle v topologických prostorech formuluje jinak a výše uvedená definice kompaktnosti se v topologických prostorech označuje jako *sekvenciální kompaktnost*. Zájemci si o tom mohou přečíst na wikipedii.

Nyní si definujeme jeden z klíčových pojmů matematické analýzy: pojem derivace.

Definice 7.4. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je množina, nechť A je bod množiny M, nechť $f : M \to \mathbb{R}$. *Derivace funkce f v bodě A* je limita

$$f'(A) := \lim_{h \to 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h}$$

nebo ekvivalentně (přeznačením $x = A + h$)

$$f'(A) := \lim_{x \to A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A}.$$

Derivace funkce f v bodě A zprava je příslušná jednostranná limita pro $h \to 0+$ nebo ekvivalentně $x \to A+$. Obdobně se definuje derivace zleva. Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(A)$ a $f'_-(A)$.

Pokud $f'(A)$ existuje a je reálná, řekneme, že f má v A *vlastní derivaci*. Pokud $f'(A) \in \{-\infty, +\infty\}$, řekneme, že f má *nevlastní derivaci*. Mimo to může nastat i případ, kdy $f'(A)$ vůbec neexistuje. Jestliže má f v bodě A vlastní derivaci, říkáme také, že f je *diferencovatelná v A*.

Stejně jako v případě limity, derivace existuje právě tehdy, když obě jednostranné derivace existují a jsou si rovny.

Všimněte si, že aby mohla existovat (vlastní či nevlastní) derivace f v nějakém bodě A, musí být f definovaná nejen v bodě A samotném, ale i na nějakém okolí tohoto bodu.

Derivaci funkce f v bodě A můžeme kromě $f'(A)$ značit i poněkud obšírnějším zápisem $(f(x))'|_{x=A}$ a podobně pro jednostrannou derivaci, např. $(f(x))'|_{x=A+}$. To je praktické zejména u derivování složitějších výrazů, jako např. $(x^2 \cos(x^2 - x))'|_{x=0}$.

Abychom si přiblížili geometrický význam derivace, uvažme následující situaci: máme dánu funkci f definovanou na okolí bodu $A \in \mathbb{R}$ a chceme tuto funkci na okolí A co nejpřesněji aproximovat pomocí vhodné lineární funkce $\ell(x) = \alpha x + \beta$. Jinými slovy, hledáme konstanty α a β takové, aby se rozdíl $f(x) - \ell(x)$ co nejrychleji blížil k nule když se x blíží k A. Speciálně tedy chceme, aby $f(A) = \ell(A)$, z čehož plyne $\beta = f(A) - \alpha \cdot A$, a tedy $\ell(x) = \alpha(x - A) + f(A)$.

Zbýva ještě zvolit koeficient α, který se v geometrii označuje jako *směrnice* přímky určené rovnicí $y = \alpha x + \beta$. Protože aproximujeme f pomocí lineární funkce, je přirozené chtít, aby chyba této aproximace byla menší než jakákoliv lineární funkce. Chceme tedy, aby platilo

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x) - \ell(x)}{x - A} = 0.$$

Tento vztah je po úpravě ekvivalentní rovnosti $\alpha = \lim_{x \to A} \frac{f(x)-f(A)}{x-A}$, tj. $\alpha = f'(A)$. Přímka, která nejlépe aproximuje graf f v okolí A, má tedy za směrnici právě derivaci funkce f v A, pokud tato derivace existuje a je konečná. Tato přímka se označuje jako *tečna* ke grafu f v bodě $(A, f(A))$.

Pokud platí $f'(A) \in \{-\infty, +\infty\}$, je tečnou ke grafu f v bodě $(A, f(A))$ svislá přímka procházející tímto bodem, a pokud $f'(A)$ neexistuje, pak graf f v bodě $(A, f(A))$ tečnu nemá.

Všimněte si, že výraz $\frac{f(x)-f(A)}{x-A}$ v definici derivace je roven směrnici přímky procházející dvojicí bodů $(x, f(x))$ a $(A, f(A))$. Je tedy přirozené, že když se x blíží k A, tak se tato směrnice blíží ke směrnici tečny v bodě $(A, f(A))$.

Pro funkce více proměnných existuje zobecnění pojmu derivace s analogickým geometrickým významem. Rychlosti růstu funkce ve směru určené souřadnicové osy odpovídají *parciální derivace*.

Hlavním obsahem této kapitoly budou různé metody výpočtu derivací. Někdy můžeme spočítat derivaci přímo z definice:

Příklad 7.5. Funkce $f(x) = x$ má derivaci rovnou 1 v každém bodě, protože

$$f'(A) = \lim_{x \to A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} = \lim_{x \to A} \frac{x - A}{x - A} = 1.$$

Příklad 7.6. Pro pevně dané $n \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = x^n$. Ta má v libovolném bodě B derivaci rovnou nB^{n-1}, protože

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(B+h)^n - B^n}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^{n-j} h^j\right) - B^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B^{n-j} h^j}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} B^{n-j} h^{j-1} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{1} B^{n-1} + \binom{n}{2} B^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right) \\
&= nB^{n-1}.
\end{aligned}$$

Příklad 7.7. Uvažujme funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, která pro připomenutí je definována jako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Snadno nahlédneme, že pro libovolné $A \neq 0$ platí $f'(A) = 0$. V nule má tato funkce jednostranné derivace

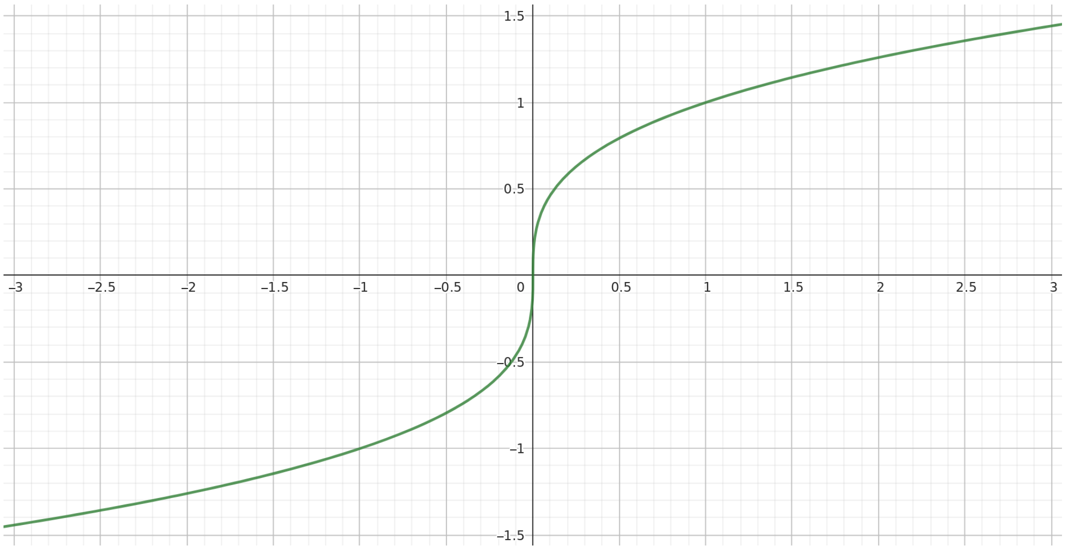
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

a

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

takže má v nule nevlastní derivaci $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$.

Příklad 7.8. Funkce absolutní hodnoty, $f(x) = |x|$, v nule nemá vůbec derivaci, protože $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$.



Obrázek 7.1: Část grafu funkce $f(x) = |x|^{1/3} \cdot \operatorname{sgn}(x)$ z Příkladu 7.9

Příklad 7.9. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná vzorcem $f(x) = |x|^{1/3} \cdot \operatorname{sgn}(x)$. Všimněte si, že tato funkce je inverzní funkcí k funkci $g(y) = y^3$. Funkce f je spojitá a v nule (jak se snadno spočte) má nevlastní derivaci $+\infty$. Viz Obrázek 7.1.

Předchozí příklady ukazují, že pokud je funkce v nějakém bodě spojitá, tak v tomto bodě může mít vlastní i nevlastní derivaci nebo nemusí mít žádnou derivaci, zatímco nespojitá funkce může mít nevlastní derivaci, nebo nemít žádnou derivaci. Nemůže se ale stát, že by funkce měla vlastní derivaci v bodě, kde není spojitá:

Věta 7.10 (Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost)**.** *Má-li funkce f v bodě A vlastní derivaci, je f v A spojitá.*

Důkaz. Chceme dokázat, že $\lim_{x\to A} f(x) = f(A)$. Počítejme tedy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to A} f(x) &= \lim_{x\to A} (f(x) - f(A) + f(A)) \\
&= \lim_{x\to A} \left(\frac{f(x) - f(A)}{x - A}(x - A) + f(A) \right) \\
&= f'(A) \lim_{x\to A} (x - A) + f(A) \\
&= f'(A) \cdot 0 + f(A) \\
&= f(A).
\end{aligned}$$

□

Z Věty 5.3 o aritmetice limit funkcí lze odvodit následující větu o aritmetice derivací.

Věta 7.11 (Aritmetika derivací)**.** *Nechť f a g jsou funkce, které mají v bodě A derivaci (vlastní či nevlastní). Pak*

1. *Platí, že* $(f+g)'(A) = f'(A) + g'(A)$*, je-li pravá strana definovaná.*
2. *Pro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí* $(\alpha f)'(A) = \alpha(f'(A))$*, je-li pravá strana definovaná.*
3. *Platí* Leibnizova formule: $(fg)'(A) = f'(A)g(A) + f(A)g'(A)$*, je-li pravá strana definovaná a navíc* f *nebo* g *je spojitá v* A*.*
4. *Je-li* g *spojitá v* A *a* $g(A) \neq 0$*, pak*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(A) = -\frac{g'(A)}{g^2(A)}.$$
5. *Je-li* g *spojitá v* A*,* $g(A) \neq 0$ *a je-li pravá strana následující rovnosti definovaná, pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \frac{f'(A)g(A) - f(A)g'(A)}{g(A)^2}.$$

Důkaz. První dvě tvrzení jsou okamžitým důsledkem věty o aritmetice limit. Páté tvrzení vyplývá ze třetího a čtvrtého. Důkaz čtvrtého tvrzení vynechme a dokažme jen Leibnizovu formuli. Výraz $\frac{f(x)g(x)-f(A)g(A)}{x-A}$ je symetrický v f a g, a můžeme proto předpokládat, že například g je spojitá v A. Pak máme

$$\begin{aligned}
(fg)'(A) &= \lim_{x\to A} \frac{f(x)g(x) - f(A)g(A)}{x-A} \\
&= \lim_{x\to A} \frac{f(x)g(x) - f(A)g(x) + f(A)g(x) - f(A)g(A)}{x-A} \\
&= \lim_{x\to A} \frac{(f(x) - f(A))g(x) + f(A)(g(x) - g(A))}{x-A} \\
&= \lim_{x\to A} \frac{(f(x) - f(A))}{x-A} \lim_{x\to A} g(x) + f(A) \lim_{x\to A} \frac{g(x) - g(A)}{x-A} \\
&= f'(A)g(A) + f(A)g'(A),
\end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme využili předpoklad, že g je spojitá v A. □

Tak jako u vět o aritmetice limit, i zde platí, že příslušný vzorec lze použít jen tehdy, když pravá strana má smysl. Pokud pravá strana obsahuje neurčitý výraz, nelze o existenci a hodnotě derivace na levé straně nic usuzovat. Vezměme například funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) = 0$. Při výpočtu $(fg)'(0)$ Leibnizovou formulí dostaneme $f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = (+\infty)\cdot 0 + 0 \cdot 0$, což obsahuje neurčitý výraz. Ovšem fg je identicky rovná nule, a tedy zjevně $(fg)'(0) = 0$.

Zdůrazněme také, že i když při výpočtu pomocí vzorečků pro aritmetiku derivací nevznikne neurčitý výraz, nesmíme zapomenout ověřit předpoklady na spojitost, jinak můžeme dostat chybný výsledek. Pro $f(x) = g(x) = \frac{1}{10} + \operatorname{sgn}(x)$ například Leibnizova formule zdánlivě dává

$$(fg)'(0) \stackrel{??}{=} f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = (+\infty) \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot (+\infty) = +\infty,$$

ve skutečnosti ovšem fg v nule derivaci nemá, jak se můžeme snadno přesvědčit. Není zde splněn předpoklad, že aspoň jedna z funkcí f a g je spojitá, tedy Leibnizovu formuli nelze použít.

Poznamenejme, že předpoklad spojitosti v Leibnizově formuli je automaticky splněn např. tehdy, když aspoň jedna z derivací $f'(A)$ a $g'(A)$ je vlastní, díky Větě 7.10.

Podívejme se nyní na derivace funkcí $\exp(x)$, $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Připomeňme, že jsme si tyto funkce definovali pomocí součtů řad:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Nabízí se myšlenka derivovat nekonečný součet ‘člen po členu’, podobně jako v části 1 Věty 7.11. Pro obecné nekonečné řady funkcí takový postup ovšem nemusí být vždy korektní. Naštěstí výše uvedené řady jsou speciálního typu: jsou to takzvané *mocninné řady*, tj. řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde (a_n) je nějaká posloupnost reálných čísel. Bez důkazu si uveďme, že pro mocninné řady je derivování člen po členu přípustné.

Věta 7.12 (Derivování mocninných řad). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada. Předpokládejme, že existuje otevřený interval I takový, že pro každé $x \in I$ tato řada konverguje, a označme její součet $f(x)$. Potom pro každé $x \in I$ má funkce f v bodě x vlastní derivaci, a ta splňuje*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

S využitím Věty 7.12 snadno určíme derivace elementárních funkcí:

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' \\
&= 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \exp(x),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin'(x) &= \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&= \cos(x),
\end{aligned}
$$

a podobně $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Platí tedy $\exp'(x) = \exp(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$ a $\cos'(x) = -\sin(x)$.

8 Aplikace derivací

Nyní si ukážeme další obecné vzorečky užitečné při výpočtu derivací. Začněme derivováním složené funkce.

Věta 8.1 (Derivace složené funkce)**.** *Nechť g je funkce, která je spojitá v bodě $A \in \mathbb{R}$ a navíc má v tomto bodě derivaci. Nechť $B = g(A)$ a nechť f je funkce, která má derivaci v B. Definujme složenou funkci $h(x) = f(g(x))$. Potom platí $h'(A) = f'(B)g'(A)$, pokud má součin na pravé straně smysl.*

Důkaz. Rozlišíme dva případy: buď platí $g'(A) \neq 0$, nebo $g'(A) = 0$. Předpokládejme nejprve, že $g'(A) \neq 0$. To znamená, že existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(A, \delta)$ bodu A, na němž je výraz $\frac{g(x)-g(A)}{x-A}$ nenulový, a speciálně tedy na tomto prstencovém okolí platí $g(x) \neq g(A)$. Pro budoucí využití si definujme pomocnou funkci $D(y) = \frac{f(y)-f(B)}{y-B}$, máme tedy dle definice $f'(B) = \lim_{y\to B} D(y)$.

Počítejme nyní $h'(A)$ podle definice:

$$
\begin{aligned}
h'(A) &= \lim_{x\to A} \frac{f(g(x)) - f(g(A))}{x - A} \\
&= \lim_{x\to A} \frac{f(g(x)) - f(g(A))}{g(x) - g(A)} \cdot \frac{g(x) - g(A)}{x - A} && (8.1) \\
&= \lim_{x\to A} \frac{f(g(x)) - f(B)}{g(x) - B} \lim_{x\to A} \frac{g(x) - g(A)}{x - A} && (8.2) \\
&= \left(\lim_{x\to A} D(g(x))\right) g'(A),
\end{aligned}
$$

kde rovnost (8.2) je platná pouze za podmínky, že součin limit na pravé straně je definován. Ukážeme nyní, že limita $\lim_{x\to A} D(g(x))$ je rovna $f'(B)$. Všimněme si, že funkce $D(y)$ není definována pro $y = B$, ale to u výpočtu limity $D(g(x))$ pro $x \to A$ nevadí, protože na $\mathcal{P}(A, \delta)$ platí $g(x) \neq B$.

Můžeme zde tedy aplikovat Větu 5.8 o limitě složené funkce, v níž je splněn předpoklad (P2), čímž dostáváme

$$
h'(A) = \left(\lim_{x\to A} D(g(x))\right) g'(A) = \left(\lim_{y\to B} D(y)\right) g'(A) = f'(B)g'(A).
$$

Tím je vyřešen případ, kdy $g'(A) \neq 0$.

Nyní předpokládejme, že $g'(A) = 0$. Teď nelze použít předchozí úvahu, protože se může stát, že na každém prstencovém okolí bodu A funkce g nabývá hodnoty B, což znamená jednak, že neplatí předpoklad (P2) věty o limitě složené funkce, a jednak není ani dobře definován výraz $D(g(x))$, protože funkce $D(y)$ není definována pro $y = B$.

Na druhou stranu, jelikož $g'(A) = 0$, tak můžeme předpokládat, že $f'(B)$ je reálné číslo (a nikoliv $\pm\infty$), protože v opačném případě by součin $f'(B)g'(A)$ nebyl definován a dokazovaná věta nic netvrdí. Díky tomu můžeme funkci $D(y)$ spojitě dodefinovat v B, čímž obejdeme oba problémy zmíněné v předchozím odstavci. Definujme tedy funkci $\overline{D}$ takto:

$$\overline{D}(y) = \begin{cases} f'(B) & \text{pro } y = B \\ D(y) & \text{pro } y \neq B. \end{cases}$$

Všimněte si, že platí $\lim_{y\to B} \overline{D}(y) = \lim_{y\to B} D(y) = f'(B) = \overline{D}(B)$, jinými slovy, funkce $\overline{D}$ je spojitá v B.

Nyní pro x na prstencovém okolí A platí

$$\frac{f(g(x)) - f(g(A))}{x - A} = \overline{D}(g(x))\frac{g(x) - g(A)}{x - A},$$

protože pokud $g(x) = B$, jsou obě strany nulové, a pokud $g(x) \neq B$, je rovnost obdobou (8.1). Nyní podobně jako v (8.2) máme

$$\begin{aligned} h'(A) &= \lim_{x\to A} \frac{f(g(x)) - f(g(A))}{x - A} \\ &= \left(\lim_{x\to A} \overline{D}(g(x))\right) g'(A). \end{aligned}$$

Pro výpočet $\lim_{x\to A} \overline{D}(g(x))$ opět použijeme Větu 5.8 o limitě složené funkce, v níž je tentokrát splněn předpoklad (P1), protože $\overline{D}$ je spojitá v B, tedy máme

$$h'(A) = \left(\lim_{x\to A} \overline{D}(g(x))\right) g'(A) = \left(\lim_{y\to B} \overline{D}(y)\right) g'(A) = f'(B)g'(A). \qquad \square$$

Ukažme si několik příkladů, kdy lze předchozí větu použít, a kdy naopak ne.

Příklad 8.2. Hledejme derivaci funkce $f(x) = \sin(x^2)$ v obecném bodě $A \in \mathbb{R}$. Jak víme, $(x^2)'|_{x=A} = 2A$ a $\sin'(B) = \cos(B)$. Funkce x^2 je zajisté spojitá, lze tedy rovnou použít Větu 8.1 a získat $f'(A) = \cos(A^2)2A$.

Příklad 8.3. Když máme složenou funkci, v níž jedna z dílčích funkcí nemá derivaci, ještě to neznamená, že neexistuje derivace složené funkce. Uvažme například $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, $h_1(x) = f(g(x)) = |x^2|$ a $h_2(x) = g(f(x)) = |x|^2$. Hledejme derivace h_1 a h_2 v nule. V ani jednom případě nelze přímočaře dosadit do vzorečku z Věty 8.1, protože f nemá derivaci v nule. Snadno ale nahlédneme, že pro každé x platí $h_1(x) = h_2(x) = x^2$, tedy $h_1'(0) = h_2'(0) = 0$.

Příklad 8.4. Podobně jako u dalších vět o aritmetice limit a derivací, když vzoreček z Věty 8.1 vede k neurčitému výrazu, neznamená to, že hledaná derivace neexistuje, znamená to jen, že ji musíme hledat jinak. Uvažme například funkci $f(x) = |x|^{1/3} \cdot \operatorname{sgn}(x)$, známou z Příkladu 7.9, a funkci $g(x) = x^3$. Platí $f'(0) = +\infty$ a $g'(0) = 0$. Nelze tedy počítat derivaci v nule funkce $f(g(x))$ ani funkce $g(f(x))$ pomocí vzorečku z Věty 8.1. Pro každé x ovšem platí $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, tudíž obě složené funkce mají v nule (i kdekoliv jinde) derivaci rovnou jedné.

Příklad 8.5. Ve Větě 8.1 je snadné zapomenout na předpoklad, že funkce g je v bodě A spojitá[1]. Bez ověření tohoto předpokladu však vzoreček z této věty může dávat chybné výsledky. Uvažme $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $f(x) = x - x^3$ a $h(x) = f(g(x)) = \operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}^3(x)$. Počítejme $h'(0)$. Platí $g'(0) = +\infty$, $g(0) = 0$ a $f'(0) = 1$. Neopatrným dosazením do vzorečku z Věty 8.1 bychom mohli dojít k mylnému závěru, že $h'(0)$ je rovna $f'(0)g'(0) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$. Ve skutečnosti je funkce h identicky rovna nule, tedy má v každém bodě derivaci rovnou nule. Větu 8.1 nelze použít, protože g není spojitá v nule. Poznamenejme, že podmínka spojitosti g v bodě A je automaticky splněna vždy, když je $g'(A)$ vlastní, díky Větě 7.10.

Věta 8.6 (Derivace inverzní funkce)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce, která je na I spojitá a ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající). Nechť $g\colon f(I) \to I$ je inverzní funkce[2] k funkci f. Nechť B je vnitřní bod I, nechť $f(B) = A$. Pokud má funkce f derivaci v bodě B, pak má funkce g derivaci v bodě A a platí*

$$g'(A) = \begin{cases} \frac{1}{f'(B)} & \text{pokud } f'(B) \neq 0, \\ +\infty & \text{pokud } f'(B) = 0 \text{ a } f \text{ je rostoucí,} \\ -\infty & \text{pokud } f'(B) = 0 \text{ a } f \text{ je klesající.} \end{cases}$$

Důkaz. Nechť je f rostoucí, pro f klesající je důkaz obdobný. Z toho plyne, že g je také rostoucí. Definujme, stejně jako v důkazu Věty 8.1, pomocnou funkci $D(y) = \frac{f(y)-f(B)}{y-B}$ pro $y \in I \setminus \{B\}$. Tato funkce splňuje $\lim_{y\to B} D(y) = f'(B)$. Všimněme si, že funkce $D(y)$ je kladná díky tomu, že f je rostoucí.

[1] Mimochodem, všimli jste si, v kterém kroku důkazu Věty 8.1 je tento předpoklad použit?

[2] Připomeňme, že dle Důsledku 6.6 každá spojitá funkce zobrazí interval na interval a že dle Věty 6.9 je inverzní funkce k ryze monotónní spojité funkci opět spojitá.

Počítejme nyní derivaci funkce g:

$$\begin{aligned} g'(A) &= \lim_{x\to A} \frac{g(x)-g(A)}{x-A} \\ &= \lim_{x\to A} \frac{g(x)-B}{f(g(x))-f(B)} \\ &= \lim_{x\to A} \frac{1}{D(g(x))}. \end{aligned}$$

Pro výpočet limity $D(g(x))$ lze využít Větu 5.8 (o limitě složené funkce) s předpokladem (P2) díky tomu, že g je rostoucí, a tedy prostá. Navíc díky spojitosti funkce g (plyne z Věty 6.9) máme $\lim_{x\to A} g(x) = g(A) = B$. Z toho plyne, že $\lim_{x\to A} D(g(x)) = \lim_{y\to B} D(y) = f'(B)$.

Nyní pokud $f'(B) \neq 0$, tak pomocí běžné aritmetiky limit dostaneme

$$g'(A) = \lim_{x\to A} \frac{1}{D(g(x))} = \frac{1}{\lim_{x\to A} D(g(x))} = \frac{1}{f'(B)}.$$

Pokud $f'(B) = 0$, tak využijeme toho, že funkce D je kladná, jak jsme si dříve všimli. Pokud se tedy $D(g(x))$ blíží k nule pro $x \to A$, tak $\frac{1}{D(g(x))}$ se blíží k $+\infty$. Tedy $g'(A) = +\infty$. □

Věta 8.6 má názorný geometrický význam, když se na derivaci díváme jako na směrnici tečny ke grafu funkce. Tečna ke grafu funkce f v bodě $(B, f(B)) = (B, A)$ je dána rovnicí $y = f(B) + f'(B)(x-B)$ (případně $x = B$, pokud je $f'(B)$ nevlastní). Graf funkce g vznikne z grafu funkce f osovou symetrií ("překlopením") podél přímky $y = x$, což odpovídá tomu, že se prohodí role obou souřadných os. Tím se překlopí i příslušná tečna, z níž se stane tečna ke grafu funkce g v bodě $(A, g(A)) = (A, B)$. Tato nová tečna bude mít rovnici, kterou dostaneme tak, že v rovnici původní tečny zaměníme x a y, tedy po úpravě $y = B + \frac{1}{f'(B)}(x - f(B))$ neboli $y = g(A) + \frac{1}{f'(B)}(x-A)$. Zároveň ale tato tečna ke grafu funkce g má směrnici $g'(A)$, což ukazuje, že $g'(A) = \frac{1}{f'(B)}$.

Příklad 8.7. Pomocí Věty 8.6 spočítejme derivaci funkce $g(x) = \ln(x)$ v obecném bodě $A \in (0, +\infty)$. Víme, že $\ln(x)$ je inverzní k funkci $\exp(x)$, volme tedy $B \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $A = \exp(B)$. Pak máme

$$\ln'(A) = \frac{1}{\exp'(B)} = \frac{1}{\exp(B)} = \frac{1}{A}.$$

Doteď jsme se zabývali tím, jak se dá spočítat derivace dané funkce. Nyní si ukažme, k čemu může být derivace užitečná. Vzhledem k tomu, že derivace je definována jako limita, můžeme si všimnout, že některé úlohy na výpočet limit lze interpretovat jako hledání derivací a díky tomu je lze vyřešit pomocí známých vzorečků pro derivace. To je obzvláště časté u úloh, kde přímočaré použití aritmetiky limit vede na neurčité výrazy tvaru $\frac{0}{0}$ případně $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Zde je několik příkladů:

Příklad 8.8.

$$\lim_{x\to0}\frac{\exp(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}=\exp'(0)=\exp(0)=1.$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\sin'(0)=\cos(0)=1.$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{\cos'(0)}{(\ln(x+1))'|_{x=0}}=\frac{-\sin(0)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)|_{x=0}}=\frac{0}{1}=0.$$

Zobecněním takovýchto příkladů lze odvodit velmi užitečný nástroj, který umožňuje podobné limity počítat pomocí derivování – takzvané l'Hospitalovo[3] pravidlo.

Věta 8.9 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $A\in\mathbb{R}^*$, nechť $\mathcal{P}(A,\delta)$ je nějaké prstencové okolí A, nechť funkce $f,g\colon\mathcal{P}(A,\delta)\to\mathbb{R}$ mají na $\mathcal{P}(A,\delta)$ vlastní derivaci a nechť $g'(x)\neq0$ na $\mathcal{P}(A,\delta)$. Předpokládejme, že existuje (ne nutně vlastní) limita $L=\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\mathbb{R}^*$. Potom*

1. *Pokud $\lim_{x\to A}f(x)=\lim_{x\to A}g(x)=0$, pak $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.*

2. *Pokud $\lim_{x\to A}|g(x)|=+\infty$, pak $\lim_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.*

Pravidlo platí obdobně i tehdy, když se všechny limity pro $x\to A$ nahradí jednostrannými limitami $x\to A+$ nebo $x\to A-$. V takovém případě se i uvažované okolí $\mathcal{P}(A,\delta)$ může nahradit příslušným jednostranným okolím, ovšem uvažované derivace f a g zůstanou oboustranné.

Tuto větu nebudeme dokazovat. Uvedeme několik příkladů správného a chybného použití l'Hospitalova pravidla.

Příklad 8.10. V následujícím výpočtu je užití l'Hospitalova pravidla správné a prospěšné, zároveň příklad ukazuje, že k dosažení výsledku je někdy potřeba l'Hospitalizovat opakovaně:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Příklad 8.11. Výpočet

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+1}{3x+1}\overset{??}{=}\lim_{x\to0}\frac{(2x+1)'}{(3x+1)'}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

podle l'Hospitalova pravidla je chybný. Není splněn předpoklad, že čitatel a jmenovatel jdou k nule nebo absolutní hodnota jmenovatele jde do nekonečna. Správná limita je 1, jak zjistíme prostým dosazením $x=0$, neboť uvažovaná funkce $\frac{2x+1}{3x+1}$ je v nule spojitá.

[3]Někdy též psáno l'Hôpitalovo, v obou případech vyslovujeme [lopitalovo]

Příklad 8.12. Počítejme
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x}.$$
Čitatel i jmenovatel uvažovaného výrazu jdou k nekonečnu, můžeme tedy zkusit použít l'Hospitalovo pravidlo:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{2}.$$
Výsledná limita ovšem neexistuje. Bylo by však chybou myslet si, že neexistuje ani původní limita. Ve skutečnosti snadno nahlédneme, že
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{2} = \frac{1}{2}.$$
Příklad 8.13. Limitu
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x}$$
nemá smysl počítat l'Hospitalovým pravidlem, alespoň ne přímo, protože derivováním čitatele a jmenovatele se situace nezjednoduší, ale zkomplikuje:
$$\frac{(\exp(-1/x))'}{(x)'} = \frac{\exp(-1/x)/x^2}{1} = \frac{\exp(-1/x)}{x^2}$$
a dalším derivováním se zlomek dále komplikuje. Lepší je výpočet pomocí věty o limitě složené funkce $f(g(x))$ kde $y := g(x) = 1/x$, a $f(y) = y\exp(-y)$. Porovnáním růstu exponenciály a polynomiální funkce nebo použitím l'Hospitalova pravidla, dostaneme, že
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{\exp(y)} = 0.$$

Kromě počítání limit se derivace také uplatní při vyšetřování průběhu funkce. U funkcí nás mohou zajímat zejména následující informace, které pak můžeme využít pro náčrt grafu funkce: definiční obor, obor hodnot, spojitost, limity v krajních bodech a limity v bodech nespojitosti, vlastnosti jako sudost, lichost nebo periodicita, intervaly monotonie a extrémy (lokální i globální), konvexita a konkávnost. Derivace (i jednostranné) jsou klíčovým nástrojem pro určování posledně jmenovaných vlastností.

Věta 8.14. *Nechť má funkce f v bodě A derivaci zprava (ne nutně vlastní). Potom*

1. *pokud $f'_+(A) > 0$, tak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}^+(A,\varepsilon)$ platí $f(A) < f(x)$,*

2. *pokud $f'_+(A) < 0$, tak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}^+(A,\varepsilon)$ platí $f(A) > f(x)$.*

Obdobně, pokud f má v A derivaci zleva, tak

3. *pokud $f'_-(A) > 0$, tak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}^-(A, \varepsilon)$ platí $f(A) > f(x)$,*

4. *pokud $f'_-(A) < 0$, tak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}^-(A, \varepsilon)$ platí $f(A) < f(x)$.*

Důkaz. Dokažme první tvrzení, ostatní jsou analogická. Předpokládejme, že $f'_+(A) > 0$. Dle definice to znamená, že $\lim_{x\to A+} \frac{f(x)-f(A)}{x-A} > 0$, což znamená, že výraz $\frac{f(x)-f(A)}{x-A}$ je kladný na nějakém $\mathcal{P}^+(A, \varepsilon)$. Jelikož na $\mathcal{P}^+(A, \varepsilon)$ platí $x > A$, plyne z toho, že platí i $f(x) > f(A)$. □

Předchozí věta nám ihned poskytuje nutnou podmínku k tomu, aby v některém bodě existoval lokální extrém.

Věta 8.15 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** *Jestliže má funkce f v bodě A lokální extrém, tak v tomto bodě derivace f buď neexistuje (ani nevlastní), nebo je derivace f v A rovna nule.*

Důkaz. Dokážeme obměnu věty, tedy pokud má f v nějakém bodě A nenulovou derivaci, tak A není lokální extrém.

Předpokládejme, že f má v A nenulovou derivaci, bez újmy na obecnosti nechť platí $f'(A) > 0$. Potom ovšem platí $f'_+(A) = f'_-(A) > 0$ a dle bodů 1. a 3. Věty 8.14 existují na každém okolí A body x_1, x_2 takové, že $f(x_1) < A < f(x_2)$. Tedy f nemá v A lokální extrém. □

Předchozí věta poskytuje nutnou podmínku pro existenci extrému, ta podmínka však není postačující: v bodě, kde je derivace nulová nebo není definována, nemusí nutně být lokální extrém, jak ukazují některé z následujících příkladů.

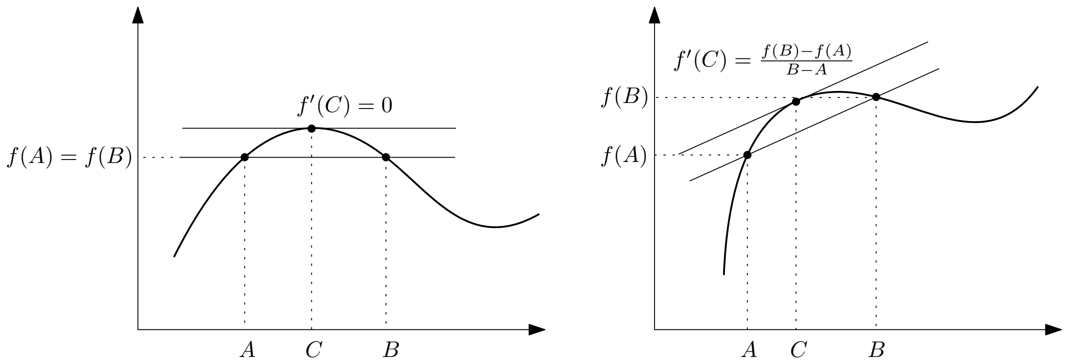
Příklad 8.16. Funkce $f(x) = |x|$ má lokální minimum v bodě 0, kde derivace neexistuje.

Příklad 8.17. Funkce $f(x) = x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, ale nemá tam lokální extrém. Tato funkce nemá žádný lokální extrém.

Příklad 8.18. Funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1,1]$ má lokální maxima v bodech 1 a -1, zatímco v bodě 0 má lokální minimum. V bodech 1 a -1 derivace není definována, v bodě 0 má f nulovou derivaci.

Věta 8.15 je užitečná také při hledání globálních extrémů, protože globální extrém musí být i lokálním extrémem. Je ovšem důležité uvědomit si, že definujeme-li funkci na uzavřeném intervalu, v jejích krajních bodech není definována derivace. Krajní body tedy mohou být lokálními extrémy.

Následující dvě věty se společně označují jako *věty o střední hodnotě.* První z nich, známá jako Rolleova věta, říká (za jistých předpokladů), že pokud funkce nabývá stejné hodnoty v bodě A a B, tak někde mezi nimi má graf



Obrázek 8.1: Dle Rolleovy (vlevo) a Lagrangeovy (vpravo) věty existuje bod C, kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou.

funkce vodorovnou tečnu. Druhá věta, označovaná jako Lagrangeova, je zobecněním té první a říká (opět za daných předpokladů), že graf funkce f má někde mezi body A a B tečnu, která je rovnoběžná s přímkou procházející body $(A, f(A))$ a $(B, f(B))$.

Věta 8.19 (Rolleova věta)**.** *Nechť $-\infty < A < B < +\infty$ a funkce $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ je na $[A, B]$ spojitá, má na intervalu (A, B) derivaci (i nevlastní) a $f(A) = f(B)$. Potom existuje $C \in (A, B)$ takové, že $f'(C) = 0$.*

Důkaz. Pokud je f na $[A, B]$ konstantní, věta pro ni zřejmě platí, protože pak $f'(C) = 0$ pro každé $C \in (A, B)$. Pokud není konstantní, existuje $D \in (A, B)$ takové, že $f(D) \neq f(A) = f(B)$. Předpokládejme, že $f(D) > f(A) = f(B)$, případ $f(D) < f(A) = f(B)$ je podobný. Nechť $C \in [A, B]$ je bod, v němž f nabývá na $[A, B]$ své maximum – ten existuje dle principu maxima pro spojité funkce (Věta 7.1). Protože $f(C) \geq f(D) > f(A) = f(B)$, maximum nemůže být v krajních bodech a tedy máme $C \in (A, B)$. Bod C je bodem lokálního maxima, a tak $f'(C) = 0$ podle Věty 8.15. □

Všimněte si, že zatímco předpoklady Rolleovy věty požadují existenci derivace pouze ve vnitřních bodech intervalu $[A, B]$, spojitost se předpokládá na celém $[A, B]$, tedy včetně jednostranné spojitosti v krajních bodech. Bez tohoto předpokladu by věta neplatila, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 8.20. Uvažme funkci $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Tato funkce je spojitá na $[0, 1)$, ovšem není spojitá zleva v bodě 1, proto nesplňuje předpoklady Rolleovy věty. Nesplňuje ani závěr Rolleovy věty, neboť má derivaci rovnou jedné v každém bodě intervalu $(0, 1)$.

Následující větu lze chápat jako zobecnění Rolleovy věty na situaci, kdy $f(A)$ není nutně rovno $f(B)$.

Věta 8.21 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* $-\infty < A < B < +\infty$ *a funkce* $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ *je na* $[A, B]$ *spojitá a má na intervalu* (A, B) *derivaci (i nevlastní). Potom existuje* $C \in (A, B)$ *takové, že*

$$f'(C) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}.$$

Důkaz. Zaveďme pomocnou funkci

$$p(x) := f(A) + (x - A)\frac{f(B) - f(A)}{B - A}.$$

Všimněte si, že graf této funkce je přímka procházející dvojicí bodů $(A, f(A))$ a $(B, f(B))$. Naším cílem je tedy najít bod $C \in (A, B)$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s touto přímkou.

Definujme ještě jednu pomocnou funkci $h(x) := f(x) - p(x)$. Náš cíl je použít na funkci h Rolleovu větu. Zkontrolujme, že h splňuje všechny předpoklady této věty. Zjevně je h na $[A, B]$ spojitá, neboť je to rozdíl dvou spojitých funkcí. Dále má h na (A, B) má derivaci

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A}.$$

Navíc platí $h(A) = h(B) = 0$, předpoklady Rolleovy věty jsou tedy splněny. Podle Rolleovy věty tudíž existuje $C \in (A, B)$, pro nějž platí $h'(C) = 0$, čili

$$f'(C) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A} = 0,$$

což je ekvivalentní dokazované rovnosti. □

Lagrangeova věta má i přirozenou fyzikální interpretaci: popišme například jízdu autem pomocí funkce f, kde $f(x)$ označuje vzdálenost, do jaké auto dojelo v čase x. Potom $f'(C)$ je okamžitá rychlost auta v čase C a podíl $\frac{f(B)-f(A)}{B-A}$ je jeho průměrná rychlost v časovém intervalu od A do B. Lagrangeova věta tedy říká, že v nějakém okamžiku $C \in (A, B)$ byla okamžitá rychlost stejná, jako průměrná rychlost za celý interval $[A, B]$.

9 Aplikace derivací II

Jedno z hlavních využití derivací při vyšetřování průběhu funkcí se týká vztahu mezi znaménkem derivace a monotonií funkce.

Věta 9.1 (Derivace a monotonie). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je netriviální interval, nechť funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci (ne nutně vlastní). Potom platí následující:*

- *Pokud pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) > 0$, je f na J rostoucí.*
- *Pokud pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) \geq 0$, je f na J neklesající.*
- *Pokud pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) < 0$, je f na J klesající.*
- *Pokud pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $f'(x) \leq 0$, je f na J nerostoucí.*

Důkaz. Probereme jen první případ ($f' > 0$), ostatní případy jsou obdobné. Zvolme tedy $A, B \in J$ takové, že $A < B$ a chtějme dokázat, že $f(A) < f(B)$. (Všimněte si, že zde nepředpokládáme, že A či B je vnitřní bod J, mohou to být i krajní body.) Nyní podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 8.21) existuje číslo C takové, že $A < C < B$ a

$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(C) > 0.$$

Z $B - A > 0$ proto plyne, že i $f(B) - f(A) > 0$, tedy f je na J rostoucí. □

Poznamenejme bez důkazu, že předpoklad na existenci derivace $f'(x)$ v každém vnitřním bodě $x \in J$ ve Větě 9.1 lze oslabit a předpokládat pouze, že existují obě jednostranné derivace $f'_-(x)$ a $f'_+(x)$. Potom v prvním bodě místo předpokladu $f'(x) > 0$ stačí předpokládat $f'_-(x) > 0$ a $f'_+(x) > 0$, a obdobně u ostatních tří bodů.

Z Věty 9.1 plyne následující okamžitý důsledek, který se nám bude hodit v příští kapitole.

Důsledek 9.2. *Má-li f nulovou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J, je na vnitřku J současně nerostoucí a neklesající, tedy konstantní.*

Je dobré mít na paměti, že Věta 9.1 dává v každé ze čtyř variant pouze jednu implikaci, nikoliv ekvivalenci. Funkce může být na nějakém intervalu rostoucí, i když na něm její derivace není všude kladná: viz třeba funkce $f(x) = x^3$, která je rostoucí na celém $\mathbb{R}$, ovšem v nule má nulovou derivaci. Ještě extrémnější případ je Minkowského “otazníková” funkce $?(x)\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, která je rostoucí, spojitá, má vlastní derivaci (mimo jiné) ve všech racionálních bodech, a navíc v každém bodě, kde vlastní derivace existuje, je tato vlastní derivace rovna nule. O této funkci existuje i populárně-naučný článek v češtině.

Rovněž tak může být funkce na nějakém intervalu monotónní, i když v některých bodech toho intervalu nemá derivaci, viz třeba funkce $f(x) = x + \frac{|x|}{2}$, která je rostoucí na $\mathbb{R}$, ale nemá derivaci v nule.

Chceme-li tedy najít např. maximální intervaly, na němž je funkce rostoucí, nestačí jen vzít intervaly, na nichž je derivace kladná, ale je potřeba i vzít v úvahu možnost, že funkce bude rostoucí i na intervalu vzniklém sjednocením více takových intervalů s kladnou derivací a případných izolovaných bodů, kde je derivace nulová nebo neexistuje. Pokud existuje jen konečně mnoho takových problematických bodů (což je obvyklý případ), tak si stačí všimnout, že pokud je nějaká funkce rostoucí na intervalu $(A, B]$ a zároveň rostoucí na intervalu $[B, C)$ pro nějaká $A < B < C \in \mathbb{R}^*$, tak je automaticky rostoucí i na (A, C). Také je účelné si všimnout, že funkce rostoucí na (A, B) a spojitá v B zleva je rostoucí na $(A, B]$.

Pomocí derivací můžeme ovšem zjistit další informace o průběhu funkce, než jen intervaly, na nichž je funkce monotónní.

Protože derivace funkce na nějakém intervalu je sama o sobě funkce (je-li všude definována a vlastní), můžeme ji samotnou zderivovat, čímž dostaneme tzv. derivace vyšších řádů:

Definice 9.3. Pokud má funkce f na nějakém okolí $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$ vlastní derivaci f' a pokud existuje limita

$$f''(A) := \lim_{x \to A} \frac{f'(x) - f'(A)}{x - A},$$

nazveme ji *druhou derivací f* v A. Analogicky definujeme derivace vyšších řádů: Má-li $f\colon \mathcal{U}(A, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ na $\mathcal{U}(A, \delta)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n - 1$, pak *derivace řádu n v A* je limita

$$f^{(n)}(A) := \lim_{x \to A} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(A)}{x - A},$$

když existuje.

Z definice plyne, že existence derivací nižšího řádu je nutná pro existenci derivací vyššího řádu, např. pokud existuje třetí derivace funkce v bodě A, musí existovat také její první a druhá derivace, a to nejen v bodě A samotném, ale i na nějakém jeho okolí, a navíc musí tyto derivace nižších řádů být na tomto okolí vlastní.

Příklad 9.4. Například pro $f(x) = x^2 - x$ máme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 1 \\ f''(x) &= 2 \\ f^{(3)}(x) &= f^{(4)}(x) = \cdots = 0 \end{aligned}$$

Definice 9.5. Nechť I je interval. Funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $A, x, B \in I$ taková, že $A < x < B$, platí
$$f(x) \leq f(A) + (x - A)\frac{f(B) - f(A)}{B - A}, \tag{9.1}$$
- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá,
- *konkávní*, pokud pro každá $A, x, B \in I$ taková, že $A < x < B$, platí
$$f(x) \geq f(A) + (x - A)\frac{f(B) - f(A)}{B - A}, \tag{9.2}$$
- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

Výraz na pravé straně nerovností (9.1) a (9.2) je rovnice přímky procházející body $(A, f(A))$ a $(B, f(B))$. Tyto nerovnosti lze tedy geometricky interpretovat tak, že pro konvexní funkci leží graf funkce f na intervalu (A, B) pod úsečkou spojující body $(A, f(A))$ a $(B, f(B))$, zatímco pro konkávní funkci naopak leží nad touto úsečkou. Intuitivně řečeno, pokud bychom se pohybovali po grafu ryze konvexní funkce zleva doprava, bude graf vypadat jako levotočivá zatáčka, tedy bude se "ohýbat nahoru", zatímco u ryze konkávní funkce to bude naopak.

Nerovnost (9.1) v definici konvexity lze přepsat i tímto způsobem:
$$\frac{f(x) - f(A)}{x - A} \leq \frac{f(B) - f(A)}{B - A}.$$
V této podobě lze nerovnost interpretovat tak, že směrnice přímky procházející body $(A, f(A))$ a $(x, f(x))$ (což je levá strana nerovnosti) je nejvýš tak velká jako směrnice přímky procházející body $(A, f(A))$ a $(B, f(B))$ (což je pravá strana nerovnosti).

Příklad 9.6. Lineární funkce $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, je konvexní a konkávní zároveň na $\mathbb{R}$ (ale ne ryze), protože pro každé $A < x < B$ platí
$$\alpha A + (x - A)\frac{\alpha B - \alpha A}{B - A} = \alpha x.$$

Příklad 9.7. Funkce $f(x) = |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$, ale ne ryze. Funkce $f(x) = x^2$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, stejně jako funkce $f(x) = \exp(x)$. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ definovaná na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ je ryze konkávní na $(-\infty, 0)$ a ryze konvexní na $(0, +\infty)$. Podobně funkce $f(x) = x^3$ je ryze konkávní na $(-\infty, 0]$ a ryze konvexní na $[0, +\infty)$. Všimněte si, že funkce konvexní na nějakém intervalu může na tomto intervalu být rostoucí, klesající, nebo nemusí být vůbec monotónní. Konvexita a monotonie jsou navzájem nezávislé vlastnosti.

Ukážeme si bez důkazu, že k vyšetření konvexity funkce lze využít monotonii její první derivace. Abychom se nemuseli zatěžovat chováním funkce v krajních bodech, omezme se na intervaly, které krajní body neobsahují. Řekneme, že I je *otevřený interval*, pokud I je netriviální interval, který neobsahuje žádný krajní bod. Jinými slovy, otevřený interval je interval tvaru (A, B), pro $A, B \in \mathbb{R}^*$ a $A < B$.

Věta 9.8 (Konvexita, konkavita a druhá derivace)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ má na I vlastní derivaci f'.*

- *Pokud f' je na I rostoucí, tak f je na I ryze konvexní.*
- *Pokud f' je na I neklesající, tak f je na I konvexní.*
- *Pokud f' je na I klesající, tak f je na I ryze konkávní.*
- *Pokud f' je na I nerostoucí, tak f je na I konkávní.*

Jako důsledek pak máme, že pokud má f na I druhou derivaci f'', tak pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní), a pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).

Větu nebudeme dokazovat. Jak vidíme na příkladu funkce $|x|$, funkce může být na intervalu I konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá ($|x|$ nemá v bodě 0 ani první derivaci).

Příklad 9.9. Funkce x^3 je na intervalu $(0, \infty)$ ryze konvexní, protože $(x^3)'' = 6x > 0$, a naopak na intervalu $(-\infty, 0)$ je ryze konkávní. Díky spojitosti funkce v nule můžeme dokonce říci, že je ryze konkávní na $(-\infty, 0]$ a ryze konvexní na $[0, +\infty)$.

Jak vidíme na předchozím příkladu, funkce x^3 se v bodě 0 mění z konkávní na konvexní. Geometricky to odpovídá tomu, že tečna ke grafu této funkce v bodě $(0, 0)$ přechází z jedné strany grafu na druhou. Takovým bodům říkáme *inflexní.*

Definice 9.10. Bod $A \in \mathbb{R}$ je *inflexním bodem* funkce f, pokud f má vlastní derivaci $f'(A)$ a existuje takové $\varepsilon > 0$, že

$$\begin{aligned} x \in (A - \varepsilon, A) \quad &\Rightarrow \quad f(x) < f(A) + f'(A)(x - A) \qquad \text{a} \\ x \in (A, A + \varepsilon) \quad &\Rightarrow \quad f(x) > f(A) + f'(A)(x - A), \end{aligned}$$

nebo jsou obě nerovnosti prohozené. Jinými slovy, funkce má v A inflexní bod, má-li její graf v bodě $(A, f(A))$ tečnu, která není svislá, a přechází-li graf f v tomto bodě z jedné strany tečny na druhou.

Ukažme si ještě jeden způsob, jak lze přeformulovat nerovnost 9.1 v definici konvexity.

Věta 9.11 (Jensenova nerovnost)**.** *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každé $A, B \in I$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f\big(\lambda A + (1 - \lambda)B\big) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B). \tag{9.3}$$

Důkaz spočívá v substituci $\lambda = \frac{B-x}{B-A}$, neboli $x = \lambda A + (1 - \lambda)B$, čímž se převede (9.1) na (9.3) a naopak. Podobně f je konkávní, právě když splní (9.3) s opačnou nerovností.

Indukcí podle k lze z Jensenovy nerovnosti odvodit následující obecnější verzi.

Věta 9.12 (obecná Jensenova nerovnost)**.** *Funkce f je konvexní na intervalu I, právě když pro každé $k \in \mathbb{N}$, pro každou k-tici bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k \in I$ a pro každou k-tici nezáporných koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ splňujících $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$ platí*

$$f\big(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k\big) \leq \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2) + \cdots + \lambda_k f(A_k).$$

Pro konkávní funkce se opět nerovnost otočí. Pro čtenáře, kteří znají pojem střední hodnoty náhodné veličiny X (zpravidla značené $\mathbb{E}[X]$) dodejme, že lze zformulovat ještě obecnější verzi Jensenovy nerovnosti: pokud je X reálná náhodná veličina a f konvexní funkce, pak platí

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)],$$

mají-li obě strany nerovnosti smysl.

Z Věty 9.12 lze odvodit pro konkrétní konvexní či konkávní f mnoho užitečných důsledků. Vezměme např. $f(x) = \ln(x)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \frac{1}{k}$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$ libovolná. Víme, že $f'(x) = \frac{1}{x}$, tedy $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, tj. f je konkávní na $(0, +\infty)$. Jensenova nerovnost (ve verzi pro konkávní funkce) pak dává

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right) \geq \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_k)}{k}.$$

Dosadíme-li obě strany do funkce exp, která je rostoucí a tedy zachovává nerovnosti, dostaneme (po několika jednoduchých úpravách) vztah

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

jehož levá strana je aritmetický průměr $a_1, \ldots, a_k$, pravá strana je tzv. geometrický průměr $a_1, \ldots, a_k$ a celý vztah je známý jako *AG nerovnost.*

Ještě než opustíme téma vyšetřování průběhu funkce, zmiňme jednu větu, která může být užitečná při počítání jednostranných derivací.

Věta 9.13 (Spojitost derivace v krajním bodě)**.** *Nechť $I = [A, B)$ je interval, nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá na I a nechť má na (A, B) vlastní derivaci, pro kterou platí $\lim_{x \to A+} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v bodě A derivaci zprava a platí*

$$f'_+(A) = L.$$

Důkaz. Dle definice platí

$$f'_+(A) = \lim_{x \to A+} \frac{f(x) - f(A)}{x - A}.$$

Tuto limitu počítejme pomocí l'Hospitalova pravidla. Ověřme ale nejprve, že jsou splněny předpoklady pro použití tohoto pravidla: jmenovatel zlomku, jehož limitu počítáme, má zjevně nulovou limitu v A a čitatel má nulovou limitu také, díky předpokladu, že f je spojitá na $[A, B)$, a tedy i spojitá zprava v A. Čitatel i jmenovatel mají v pravém okolí A vlastní derivace a platí $(f(x) - f(A))' = f'(x)$ a $(x - A)' = 1$. Podíl derivací má tedy limitu rovnou $\lim_{x \to A+} f'(x) = L$. Tedy dle l'Hospitalova pravidla máme $f'_+(A) = L$. $\square$

Všimněte si, že ve Větě 9.13 nelze opomenout předpoklad, že f je spojitá na $[A, B)$, nikoliv jen na (A, B), tedy speciálně f je v bodě A spojitá zprava. Například pro funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ máme

$$+\infty = f'_+(0) \neq \lim_{x \to 0+} f'(x) = 0.$$

Větu 9.13 zde nelze použít, protože f není spojitá zprava v 0.

Příklad 9.14. Dle Věty 9.13 například můžeme pro funkci $f(x) = |\sin(x)|$ spočítat

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} (\sin(x))' = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1,$$

protože víme, že na pravém okolí bodu 0 je $|\sin x| = \sin x$.

Jak už víme ze sedmé přednášky, pokud má funkce f v bodě A vlastní první derivaci $f'(A) \in \mathbb{R}$, má graf f v bodě A (přesněji v bodě $(A, f(A))$) tečnu s rovnicí $t(x) = f(A) + f'(A) \cdot (x - A)$. Toto $t(x)$ je pak jediný polynom stupně nejvýš 1, pro nějž platí

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x) - t(x)}{x - A} = 0$$

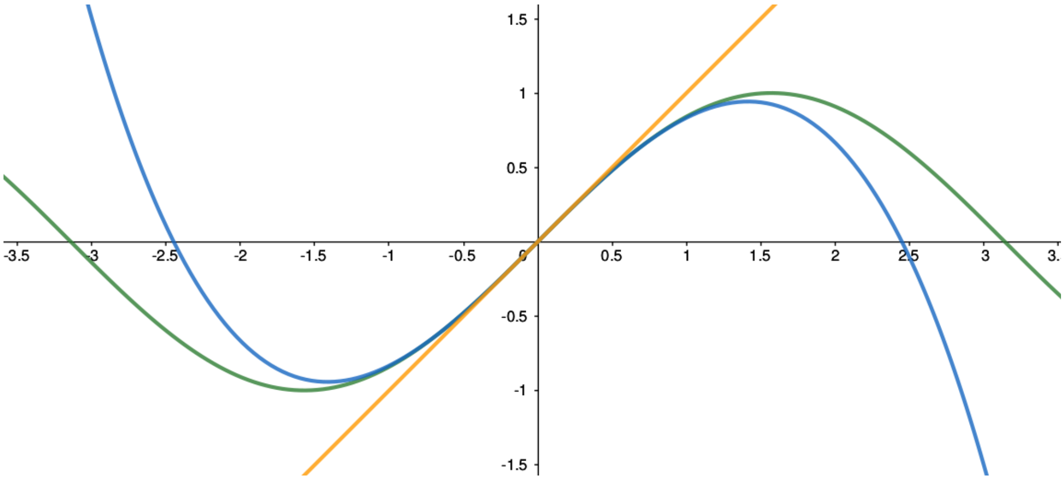
a v tomto smyslu je $t(x)$ nejlepší aproximace f pomocí lineární funkce v okolí bodu A.

Nyní budeme aproximovat funkci f pomocí polynomů vyššího stupně. Ukážeme, že pro funkci f s vlastní n-tou derivací v A existuje právě jeden polynom $P(x)$ stupně nejvýše n, pro který platí

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x) - P(x)}{(x - A)^n} = 0.$$

Definice 9.15 (Taylorův polynom)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí A, která je v A spojitá a má v A vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(A) \in \mathbb{R}$. *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě A* rozumíme polynom

$$\begin{aligned} T_n^{f,A}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(A)}{i!}(x - A)^i \\ &= f(A) + f'(A)(x - A) + \frac{f''(A)}{2!}(x - A)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(A)}{n!}(x - A)^n. \end{aligned}$$



Obrázek 9.1: Graf funkce $\sin x$ (zeleně) a jejího Taylorova polynomu prvního (žlutě) a třetího (modře) stupně.

Ačkoli 0^0 je obecně nedefinovaný výraz, v kontextu polynomů či mocninných řad budeme vždy interpretovat $(x-A)^0$ jako konstantní funkci rovnou 1 pro všechna x, tedy i $x = A$. Taylorův polynom je tedy definován i pro $x = A$. Bez této konvence bychom museli konstantní člen psát zvlášť, mimo sumu. Používáme zde také konvenci $f^{(0)} = f$, tj. f je svou vlastní 'nultou derivací'. Všimněte si, že předpoklad, že f je spojitá v A, je relevantní jen v případě $n = 0$, protože pro $n \geq 1$ spojitost f v A plyne už z toho, že f má v A vlastní derivaci.

Všimněte si, že pro Taylorův polynom $T(x) = T_n^{f,A}(x)$ platí $T(A) = f(A)$, $T'(A) = f'(A), \dots, T^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)$. Všimněte si také, že pro $n \geq 1$ platí $(T_n^{f,A})' = T_{n-1}^{f',A}$ (pro $n = 1$ je nutno navíc předpokládat spojitost f' v A).

Věta 9.16 (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** *Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $A \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,A}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností*

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x) - T(x)}{(x-A)^n} = 0. \tag{9.4}$$

Pro práci s aproximacemi nějaké funkce f se vyplatí zavést následující tzv. asymptotickou notaci. Nechť f a g jsou dvě funkce definované na okolí bodu $A \in \mathbb{R}^*$, kde g je kladná na nějakém prstencovém okolí A.

- Řekneme, že $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to A$, pokud $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Řekneme, že $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to A$, pokud je podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ na nějakém prstencovém okolí A omezený.

S využitím této notace lze pak vlastnost (9.4) též zapsat jako

$$f(x) = T(x) + o(|x - A|^n) \text{ pro } x \to A.$$

Větu 9.16 nebudeme dokazovat.

Poznamenejme, že může nastat situace, kdy pro funkci f existuje polynom $T(x)$ stupně nejvýš n, který splňuje rovnost (9.4), ale přesto $T(x)$ není Taylorův polynom řádu n funkce f, protože f Taylorův polynom řádu n nemá. Uvažme třeba funkci f definovanou vztahy $f(x) = 0$ pro x racionální a $f(x) = x^3$ pro x iracionální. Snadno nahlédneme, že platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0,$$

je tedy splněno (9.4) pro $A = 0$, $n = 2$ a $T(x) = 0$. Ovšem f nemá v nule Taylorův polynom řádu 2 (ani žádného vyššího řádu), protože f' je definovaná jen v bodě 0 a f'' tedy není definována v žádném bodě.

Zbytkem Taylorova polynomu rozumíme rozdíl $R_n^{f,A}(x)$ mezi hodnotou funkce a hodnotou Taylorova polynomu:

$$R_n^{f,A}(x) := f(x) - T_n^{f,A}(x).$$

Funkce $R_n^{f,A}(x)$ tedy říká, jak dobře aproximuje Taylorův polynom funkci f v bodě x, nebo přesněji řečeno, jak velké chyby se dopustíme, nahradíme-li funkci f jejím Taylorovým polynomem. Cílem je přirozeně najít co nejlepší horní odhad na absolutní hodnotu této chyby. Věta 9.16 dává odhad $R_n^{f,A}(x) = o(|x - A|^n)$ pro $x \to A$. Ukážeme však, že za mírných předpokladů (zejména na omezenost $f^{(n+1)}$ v okolí A) se dá získat silnější odhad $R_n^{f,A}(x) = O(|x-A|^{n+1})$, navíc s explicitním odhadem na konstanty skryté uvnitř O-notace.

Věta 9.17 (Lagrangeův odhad zbytku)**.** *Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n+1$ (a tím pádem i spojité vlastní derivace všech nižších řádů). Volme $A, B \in I$, kde $A \neq B$. Potom existuje bod C ostře mezi A a B takový, že platí*

$$R_n^{f,A}(B) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(B - A)^{n+1}. \tag{9.5}$$

Speciálně pokud existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in (A, B)$ platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, pak máme odhad

$$|R_n^{f,A}(B)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|B - A|^{n+1}. \tag{9.6}$$

Všimněte si, že pokud má funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů a pokud pro nějaké x platí $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,A}(x) = 0$, plyne z toho, že posloupnost

$(T_n^{f,A}(x))_{n=0}^{\infty}$ konverguje k $f(x)$. To ekvivalentně znamená, že $f(x)$ je součet nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!}(x-A)^n$, neboť posloupnost $(T_n^{f,A}(x))_{n=0}^{\infty}$ je právě posloupnost částečných součtů této řady. Toto pozorování motivuje následující definici.

Definice 9.18 (Taylorova řada)**.** Má-li funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, rozumíme pro $x \in \mathbb{R}$ její *Taylorovou řadou se středem v* A řadu

$$T^{f,A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(A)}{n!}(x-A)^n.$$

Taylorovu řadu $T^{f,A}(x)$ lze tedy chápat jako funkci proměnné x, která však nemusí být nutně pro každé x definovaná, protože pro nějaké x nemusí řada konvergovat. Všimněte si, že pro $x = A$ máme triviálně $T^{f,A}(A) = f(A)$, protože všechny sčítance řady $T^{f,A}(A)$ jsou nulové kromě prvního, který je roven $f(A)$.

Pro obecné $x \neq A$ ovšem nemusí být $T^{f,A}(x)$ rovno $f(x)$, i když $T^{f,A}(x)$ konverguje. Triviálním příkladem může být třeba funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a bod $A = 1$. Pak je $T^{f,A}(x)$ konstantní funkce rovná 1, a tedy se liší od $f(x)$ pro $x \leq 0$. Zajímavější příklad je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

O této funkci lze dokázat (zkuste si to spočítat!), že má v nule derivace všech řádů rovné nule, tedy její Taylorova řada se středem $A = 0$ je konstantní funkce rovna 0. Funkce $f(x)$ se tedy nerovná své Taylorově řadě $T^{f,0}(x)$ v žádném bodě kromě $x = 0$.

Pro několik elementárních funkcí teď odvodíme jejich rozvoje do Taylorovy řady. Pro jednoduchost budeme pracovat jen s Taylorovými řadami se středem v nule, to jest s $A = 0$. Těmto řadám se někdy říká *Maclaurinovy řady.*

Příklad 9.19 (Taylorův rozvoj mocniny)*.* Pro $m \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = (1+x)^m$. Její n-tá derivace je rovna $m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$, tj. speciálně pro $n \geq m$ je n-tá derivace identicky nulová. Maclaurinova řada funkce f má tedy jen konečně mnoho nenulových členů, konkrétně

$$T^{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n.$$

Jak víme z binomické věty, je tato řada rovna funkci $(1+x)^m$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. I bez znalosti binomické věty můžeme snadno nahlédnout, že tato řada má součet $f(x)$, neboť z Věty 9.17 plyne, že $R_n^{f,0}(x) = 0$ pro každé $n \geq m$ a $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 9.20 (Taylorův rozvoj exponenciály)*.* Opakovaným derivováním exponenciály dostaneme, že

$$T^{\exp,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots.$$

To je řada, pomocí které jsme exponenciálu definovali. V tomto případě tedy přímo z definice plyne, že $\exp(x) = T^{\exp,0}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pomocí Věty 9.17 nyní odhadněme příslušné Taylorovy zbytky $R_n^{\exp,0}(x)$. Omezme se na $x > 0$ (ostatní případy jsou ještě jednodušší). Máme odhad $|R_n^{\exp,0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}x^{n+1}$ pro $M := \sup_{y \leq x} |\exp(y)| = \exp(x)$. Snadno ověříme, např. pomocí odhadu $(n+1)! \geq n^{n/2}$, že $|R_n^{\exp,0}(x)| \to 0$ pro $n \to \infty$ a x pevné.

Podobně i pro funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ lze snadno ověřit, že jejich Maclaurinova řada odpovídá mocninné řadě, pomocí níž jsme je definovali.

Příklad 9.21 (Taylorův rozvoj logaritmu). Funkce $\ln(x)$ nemá Maclaurinovu řadu, protože není definovaná v nule, je však možné uvažovat Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \ln(1+x)$. Snadno ověříme, že pro $n \geq 1$ a $x \in (-1, +\infty)$ platí

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

z čehož plyne

$$T^{f,0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Pro $x \in [0,1]$ můžeme využít odhad $|f^{(n)}(x)| \leq (n-1)!$ a pomocí Věty 9.17 získat $|R_n^{f,0}(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$, řada tam tedy konverguje k $\ln(1+x)$. Tím například pro $x = 1$ dostaneme $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

Pro $x > 1$ není těžké nahlédnout, že řada nekonverguje, absolutní hodnoty jejích sčítanců se totiž blíží $+\infty$.

Pro $x \in (-1, 0)$ je situace zajímavější: Věta 9.17 umožňuje dokázat, že $|R_n^{f,0}(x)| \to 0$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, 0)$, ale pro $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ je její odhad příliš slabý. Nicméně i pro $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ řada $T^{f,0}(x)$ konverguje k $\ln(1+x)$, což lze dokázat použitím sofistikovanějších metod.

Taylorův polynom lze někdy využít při výpočtu limit tvaru $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $A \in \mathbb{R}$, kde f i g mají limitu 0 pro $x \to A$. Postup spočívá v tom, že se čitatel i jmenovatel aproximují Taylorovými polynomy v bodě A dostatečně vysokého řádu, aby v čitateli i jmenovateli byl aspoň jeden nenulový monom. Takové využití Taylorova polynomu ukazuje následující příklad.

Příklad 9.22. Chtějme spočítat $\lim_{x \to 0} h(x)$, kde

$$h(x) = \frac{\sin(x) - x}{(\cos(x) - 1)(\exp(x) - 1)}.$$

Pomocí aproximací $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(|x|^2)$ a $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + o(|x|)$ dostaneme

$$h(x) = \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(|x|^3)}{(-\frac{x^2}{2} + o(|x|^2))(x + o(|x|))} = \frac{-\frac{1}{3!}x^3(1 + o(1))}{-\frac{1}{2}x^3(1 + o(1))(1 + o(1))},$$

z čehož plyne $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{3}$.

Každý příklad řešitelný touto metodou lze v principu také vyřešit opakovanou aplikací l'Hospitalova pravidla, protože koeficienty Taylorova polynomu odpovídají derivacím příslušných řádů. Často je ovšem použití Taylorových polynomů méně pracné než opakovaná l'Hospitalizace.

10 Primitivní funkce

V předchozích kapitolách jsme se naučili spočítat derivaci dané funkce a vysvětlili, že derivace udává lokální rychlost růstu funkce. Nyní se budeme zabývat opačným problémem, a sice jak ze zadané derivace zrekonstruovat původní funkci.

Kupříkladu si představme těleso padající volným pádem. Víme, že jeho rychlost se (při dostatečném zjednodušení) neustále zvětšuje konstantním tempem - je to tedy lineární funkce v závislosti na čase. Jak na základě toho určit funkci jeho polohy v závislosti na čase? *Primitivní funkce* nebo také *neurčitý integrál* je funkce, která řeší tento problém.

Připomeňme, že pojmem *otevřený interval* označujeme netriviální interval, který nemá žádné krajní body.

Definice 10.1. Nechť I je otevřený interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ funkce definovaná na tomto intervalu. Řekneme, že funkce $F\colon I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I *primitivní funkcí* pro funkci f, pokud v každém bodě $x \in I$ platí, že F má v x derivaci rovnou $f(x)$.

Věta 10.2 (Primitivní funkce je jednoznačná až na konstantu)**.** *Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ na otevřeném intervalu I, je pro každé $c \in \mathbb{R}$ funkce $F(x) + c$ také primitivní k $f(x)$ na I. Naopak, jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) - G(x) = c$ pro každé $x \in I$.*

Na rozdíl od derivace tedy primitivní funkce není určena jednoznačně. Proto také nedává smysl mluvit o primitivní funkci v bodě.

Důkaz. Jestliže F je primitivní funkce k f na I, tedy $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$, pak také $(F(x) + c)' = f(x) + 0 = f(x)$ na I a $F(x) + c$ je primitivní k f. Naopak, jestliže $F'(x) = G'(x) = f(x)$ na I, pak $(F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$ na I, což podle Důsledku 9.2 znamená, že $F(x) - G(x)$ je na I konstantní funkce. □

Zdůrazněme, že ve Větě 10.2 je důležité, že uvažujeme primitivní funkci definovanou na intervalu. V praxi se někdy vyplatí uvažovat i primitivní funkce na oborech, které nejsou intervaly, například na disjunktním sjednocení několika otevřených intervalů. V tom případě ale nesmíme zapomenout, že jednoznačnost z Věty 10.2 lze zaručit pouze v rámci jednoho intervalu, jinými slovy, rozdíl dvou primitivních funkcí je konstantní na každém z intervalů, ale už ne nutně na jejich sjednocení.

Fakt, že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ zapisujeme jako

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

kde c v předchozím zápisu reprezentuje libovolnou reálnou konstantu. Například $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ na $\mathbb{R}$.

Pozorování 10.3. *Pokud je F primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, je F na I spojitá. To proto, že kdyby F nebyla spojitá v nějakém bodě $x \in I$, nemohla by mít v x vlastní derivaci, viz Věta 7.10.*

Ne každá funkce však má primitivní funkci. Nyní se budeme věnovat otázce, jaké jsou nutné a postačující podmínky pro to, aby funkce f měla primitivní funkci.

Začněme větou, kterou si dokážeme až na některé z příštích přednášek.

Věta 10.4 (Spojitá funkce má primitivní funkci)**.** *Je-li I otevřený interval a funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.*

Spojitost je postačující k existenci primitivní funkce, není však nutná, jak uvidíme později. Následující věta naopak poskytuje podmínku, která je nutná pro existenci primitivní funkce.

Věta 10.5. *Nechť f má primitivní funkci na otevřeném intervalu I. Pokud v některém bodě $A \in I$ má funkce f aspoň jednostrannou limitu $\lim_{x\to A+} f(x) = L$ (nebo $\lim_{x\to A-} f(x) = L$), tak $f(A) = L$.*

Důkaz. Nechť platí $\lim_{x\to A+} f(x) = L$, případ limity zleva je obdobný. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I. Na funkci F nyní aplikujeme Větu 9.13. Víme, že F je spojitá dle Pozorování 10.3. Z našich předpokladů plyne, že $\lim_{x\to A+} F'(x) = L$, což dle Věty 9.13 znamená, že $F'_+(A) = L$. Protože však F musí mít v A derivaci rovnou $f(A)$, máme tedy $f(A) = L$. □

Příklad 10.6. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ je definovaná na $\mathbb{R}$, ale nemá na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. To proto, že f má v nule obě jednostranné limity, ale dokonce ani jedna z nich se nerovná $f(0)$. Podle Věty 10.5 tedy primitivní funkce na $\mathbb{R}$ (ani na žádném jiném otevřeném intervalu obsahujícím nulu) nemůže existovat.

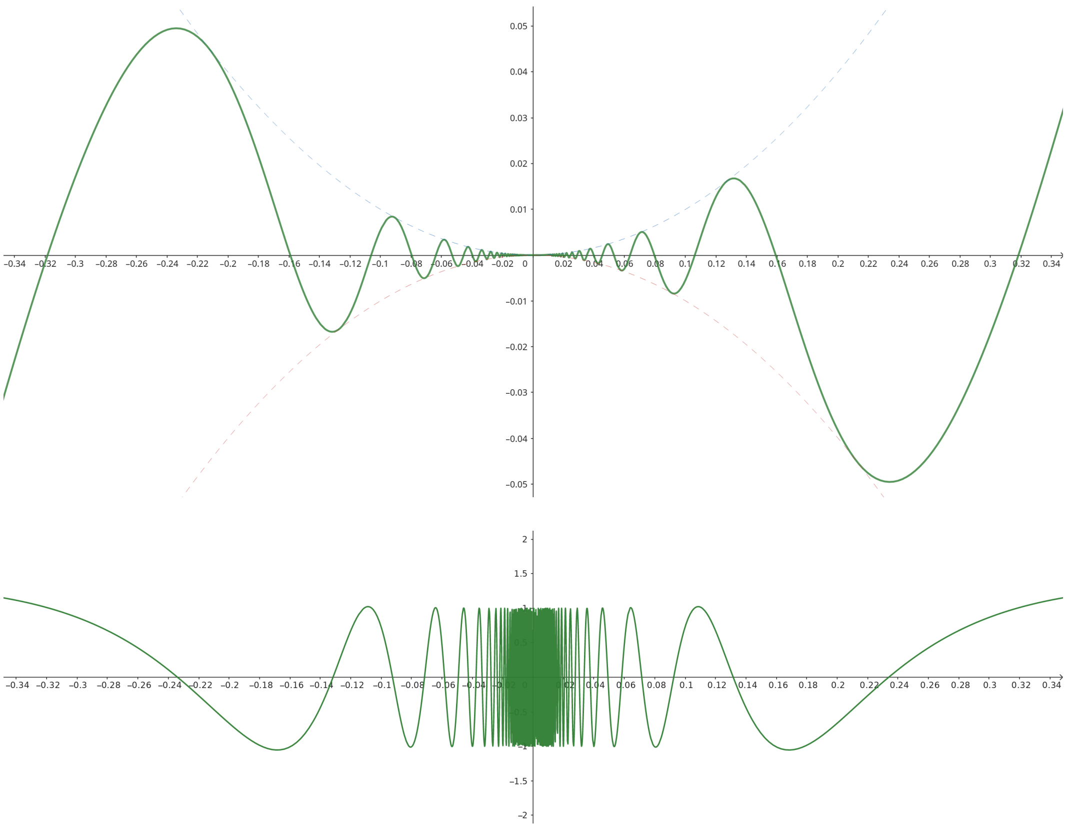
Pokud má mít funkce f primitivní funkci a zároveň být nespojitá v nějakém bodě A, musí platit, že neexistuje ani jedna jednostranná limita f v bodě A. Ukažme si teď příklad takové funkce.

Příklad 10.7. Definujme nejprve funkci F takto:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Viz Obrázek 10.1. Pro libovolné $x \neq 0$ spočítáme $F'(x)$ standardním použitím vzorců pro derivaci součinu a derivaci složené funkce:

$$F'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$



Obrázek 10.1: Nahoře: detail grafu funkce $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ (s $F(0) = 0$), která má vlastní derivaci v každém bodě, ale její derivace není spojitá v nule. Čárkovaně jsou vyznačené křivky $y = x^2$ a $y = -x^2$. Dole: graf funkce $f(x) = F'(x)$ popsané rovnicí $f(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$. Funkce f není spojitá v nule, ale má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci F. Viz Příklad 10.7.

Derivaci F v nule určíme přímo z definice derivace:

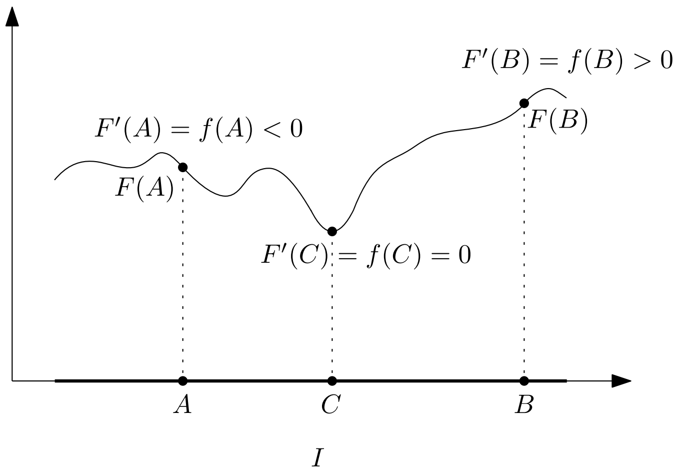
$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin(1/x^2) = 0.$$

Funkce $F(x)$ je tedy na $\mathbb{R}$ primitivní k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Přitom však $f(x)$ není spojitá v nule: jednostranné limity $\lim_{x\to 0\pm} f(x)$ neexistují.

Nyní definujeme vlastnost, která je o něco obecnější než spojitost a kterou musí mít každá funkce, která má primitivní funkci. Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ má na I *Darbouxovu vlastnost* (nebo též že f má *vlastnost nabývání mezihodnot*, nebo také že f je *darbouxovská*), pokud platí následující: pro každé dva body $A, B \in I$ kde $A < B$ a pro každou hodnotu



Obrázek 10.2: Ilustrace první části důkazu Věty 10.8: graf funkce F, která má zápornou derivaci v bodě A a kladnou derivaci v bodě B, nemůže tedy v žádném z těchto dvou bodů nabývat minima vůči intervalu $[A, B]$.

M splňující $\min\{f(A), f(B)\} < M < \max\{f(A), f(B)\}$ existuje $C \in (A, B)$ splňující $f(C) = M$. Stručněji se tato vlastnost dá popsat tak, že pro každý interval $J \subseteq I$ je $f(J)$ opět interval.

Už víme (viz Věta 6.4), že každá spojitá funkce má Darbouxovu vlastnost. Jak je ovšem vidět na Příkladu 10.7, funkce f může mít Darbouxovu vlastnost, aniž by byla spojitá. Jiný podobný příklad je funkce $f(x) = \sin(1/x)$, viz Obrázek 6.1.

Věta 10.8 (Funkce s primitivní funkcí má Darbouxovu vlastnost)**.** *Nechť I je otevřený interval. Má-li funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ na I primitivní funkci, tak má na I Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Mějme funkci f, která má na intervalu I primitivní funkci F. Volme $A, B \in I$ a pro jednoduchost předpokládejme, že $f(A) < f(B)$ (případ $f(A) > f(B)$ je obdobný, pouze v následující úvaze použijeme maximum místo minima). Volme hodnotu $M \in (f(A), f(B))$ a ukažme, že existuje bod $C \in (A, B)$ takový, že $f(C) = M$.

Předpokládejme nejprve, že $M = 0$, a pak ukážeme, jak lze obecnou situaci převést na tento případ. Máme tedy $f(A) < 0 < f(B)$. Protože funkce F je spojitá dle Pozorování 10.3, nabývá na intervalu $[A, B]$ svého minima (viz Věta 7.1). Označme tedy C bod intervalu $[A, B]$, v němž je $F(C)$ minimální, viz Obrázek 10.2. Jelikož platí $F'_+(A) = F'(A) = f(A) < 0$, nemůže se minimum F nabývat v bodě A (viz Věta 8.14), tedy $C \neq A$. Podobně, jelikož $f(B) = F'_-(B) > 0$, nemůže být C rovno B. Vidíme, že C je vnitřní bod intervalu $[A, B]$, a jelikož má F v tomto bodě derivaci a zároveň lokální extrém, musí platit $F'(C) = f(C) = 0$. V bodě C tedy f nabývá mezihodnotu $M = 0$.

Nyní předpokládejme, že $M \neq 0$. Definujme novou funkci $g(x) = f(x) - M$ a všimněme si, že g má na I primitivní funkci $G(x) = F(x) - Mx$. Pak platí $g(A) < 0 < g(B)$ a aplikováním úvahy z předchozího odstavce na funkci g místo f zjistíme, že existuje $C \in (A, B)$ takové, že $g(C) = 0$, neboli $f(C) = M$. Tím jsme opět našli bod, kde f nabývá mezihodnotu M. □

Počítání primitivních funkcí

Nyní se zabývejme otázkou, jak pro konkrétní funkci f najít explicitní vzorec pro její primitivní funkci. Začněme jedním snadným výsledkem:

Věta 10.9. *Nechť F je primitivní funkcí k f a G je primitivní ke g na intervalu I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $\alpha F + \beta G$ na intervalu I primitivní k $\alpha f + \beta g$.*

Důkaz. Tvrzení snadno ověříme zderivováním: $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$. □

Bohužel, na rozdíl od počítání derivací, neexistuje žádná univerzální technika, jak pro danou funkci f zadanou pomocí vzorečku najít vzoreček pro její primitivní funkci. Naopak, existují dokonce funkce, které sice primitivní funkci mají, ale nelze ji ani vyjádřit obvyklými prostředky.

Poznámka (Neelementární primitivní funkce). Existuje mnoho funkcí jejichž primitivní funkce existuje, ale nelze vyjádřit pomocí dosud zavedených funkcí (jako konečnou kombinaci polynomů, exponenciály, goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních). Příklady takových funkcí zahrnují například $\frac{1}{\ln x}$, $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sqrt{1-x^4}$, $\sin(x^2)$. Tyto funkce jsou spojité, takže dle Věty 10.4 jejich primitivní funkce existuje.

Uvedeme dvě základní početní techniky pro určení primitivní funkce. První z nich je odvozena ze vzorce pro derivaci složené funkce a druhá ze vzorce pro derivaci součinu.

Věta 10.10 (O substituci)**.** *Nechť I je otevřený interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ má na I primitivní funkci F. Nechť je J otevřený interval a nechť $\varphi\colon J \to I$ je funkce, která má v každém bodě $t \in J$ vlastní derivaci $\varphi'(t)$. Potom funkce $F(\varphi(t))$ je primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu J.*

Důkaz. Stačí zpětně přečíst vzorec pro derivaci složené funkce:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

□

Příklad 10.11. Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu I a α, β nechť jsou reálné konstanty, kde $\alpha \neq 0$. Uvažujme funkci $\varphi(t) = \alpha t + \beta$. Pak s využitím Věty 10.9 a Věty 10.10 máme

$$\begin{aligned} \int f(\alpha t + \beta)\, dt &= \frac{1}{\alpha} \int f(\alpha t + \beta) \cdot \alpha\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int f(\alpha t + \beta) \cdot (\alpha t + \beta)'\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta) + c. \end{aligned}$$

Výše uvedený vztah platí na intervalu J splňujícím $\varphi(J) = I$, nebo explicitněji řečeno, $J = \{\frac{x-\beta}{\alpha};\ x \in I\}$.

Vzorec pro derivaci složené funkce lze pro výpočet primitivní funkce použít i v opačném směru, tedy ze znalosti primitivní funkce pro $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ odvodit primitivní funkci pro f. Je zde ale potřeba jednak předpokládat, že φ zobrazí interval J na celý interval I, a jednak dodatečný předpoklad na nenulovost derivace φ, což zajistí, že φ je prostá, a tedy má inverzní funkci $\varphi^{<-1>}\colon I \to J$.

Věta 10.12. *Nechť J je otevřený interval, nechť je funkce $G\colon J \to \mathbb{R}$ na intervalu J primitivní k funkci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, nechť navíc platí, že $\varphi(J) = I$ a φ má na J nenulovou vlastní derivaci. Pak funkce $G(\varphi^{<-1>}(x))$ je primitivní funkce k funkci f na intervalu I.*

Důkaz. Volme $A \in I$ a dokažme, že funkce $G(\varphi^{<-1>}(x))$ má v bodě A derivaci rovnou $f(A)$. Označme $B := \varphi^{<-1>}(A) \in J$, a tedy $\varphi(B) = A$. Dle Věty 8.6 platí, že $\varphi^{<-1>}$ má v bodě A derivaci rovnou $\frac{1}{\varphi'(B)}$. Počítejme derivaci $G(\varphi^{<-1>}(x))$ v bodě A podle vzorce pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}\big(G(\varphi^{<-1>}(x))\big)'|_{x=A} &= \big(G'(t)|_{t=\varphi^{<-1>}(A)}\big) \cdot \big(\varphi^{<-1>}(x)'|_{x=A}\big)\\ &= G'(t)|_{t=B} \cdot \frac{1}{\varphi'(B)}\\ &= f(\varphi(B))\varphi'(B) \cdot \frac{1}{\varphi'(B)}\\ &= f(A).\end{aligned}$$ □

Typickým příkladem využití tohoto typu substituce je substituce $x = \sin t$ pro $J = (-\pi/2, \pi/2)$ a $I = (-1, 1)$ při výpočtu $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Z Věty 10.12 plyne, že stačí spočíst primitivní funkci

$$G(t) = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt.$$

Nyní například můžeme využít vzoreček $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$ a díky němu určit $G(t) = \int \cos^2(t)\,dx = \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2} + c$. Pak stačí dosadit $t = \arcsin x$, kde $\arcsin\colon (-1{,}1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ je inverzní funkce k funkci $\sin t$ na uvedených intervalech. Výsledek je pak

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = G(\arcsin x) = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{\arcsin x}{2} + c.$$

Vedle substituce druhým častým postupem při hledání primitivní funkce je takzvané integrování *po částech*, neboli *per partes*.

Věta 10.13 (Integrace per partes)**.** *Nechť jsou funkce f a g spojité na otevřeném intervalu I a funkce F a G jsou k nim na I primitivní. Potom i funkce fG a Fg mají na I primitivní funkce a na I platí*

$$\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) + c,$$

nebo ekvivalentně

$$\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx + c.$$

Důkaz. Funkce fG a Fg jsou na I spojité a existence funkcí k nim primitivních plyne z Věty 10.4. Identita vyplývá z Leibnizovy formule pro derivaci součinu: ze vztahu $(FG)' = fG + Fg$ plyne, že FG je na I primitivní k $fG + Fg$, takže

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx &= \int (f(x)G(x) + F(x)g(x))\,dx \\ &= F(x)G(x) + c.\end{aligned}$$

□

Ukažme si několik příkladů použití integrace per partes.

Příklad 10.14. Hledejme primitivní funkci pro funkci $\ln(x)$ na $I = (0, +\infty)$. Pomůžeme si trikem, kdy $\ln(x)$ budeme psát jako součin $1 \cdot \ln(x)$ a použijeme Větu 10.13 pro $f(x) = 1$ a $G(x) = \ln(x)$, čemuž odpovídá $F(x) = x$ a $g(x) = \frac{1}{x}$. Pak máme

$$\int \ln(x)\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x + c.$$

Příklad 10.15. Abychom spočetli

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx,$$

opakovaně píšeme e^x jako $(\mathrm{e}^x)'$. Tedy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\,dx \\ &= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x(-\sin x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Odtud dostáváme rovnici

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + c,$$

takže

$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} + c'.$$

Příklad 10.16. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Protože $\frac{1}{1+x^2}$ je derivace funkce $\arctan x$, máme $I_1 = \arctan x + c$. Odvodíme rekurentní vzorec pro primitivní funkce I_n. Funkci $(1+x^2)^{-n}$ napíšeme jako $x' \cdot (1+x^2)^{-n}$. Takže

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x \cdot \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

Dostáváme rekurenci

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + (1 - 1/2n)I_n.$$

Odtud máme $I_1 = \arctan x + c$, $I_2 = \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + c$ atd.

Širokou třídou funkcí, pro které umíme vždy spočíst primitivní funkci jsou *racionální funkce.*

Definice 10.17 (Racionální funkce)**.** *Racionální funkce* je funkce, kterou lze vyjádřit jako podíl dvou polynomů (přičemž polynom ve jmenovateli není identicky nulový).

Věta 10.18. *Primitivní funkci každé racionální funkce lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, konkrétně racionálních funkcí, logaritmu a arkustangens.*

Lze ukázat, že primitivní funkci lze vždy rozložit na takzvané *parciální zlomky*, a tím hledání primitivní funkce racionální funkce víceméně zredukovat na výpočet primitivních funkcí racionálních funkcí v následujícím tvaru:

$$\frac{1}{(x-c)^k} \qquad k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R} \qquad \text{a}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^k} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Primitivní funkce druhého typu jsme odvodili v Příkladě 10.16. Primitivní funkcí prvního typu je logaritmus (pro $k = 1$), nebo racionální funkce.

Metodu rozkladu na parciální zlomky nebudeme dokazovat a uvádět ve vší obecnosti, její jednoduché aplikace budou tématem cvičení.

11 | Určitý integrál

Nejpodstatnějším využitím primitivních funkcí je výpočet *určitého integrálu*. Ten slouží k počítání ploch, objemů, energie a práce a dalších fyzikálních veličin, pro odhadování konečných i nekonečných součtů atd.

My si představíme dvě metody výpočtu určitého integrálu: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Začneme s Newtonovým integrálem, jehož výpočet je založen na nám už známém pojmu primitivní funkce.

Definice 11.1. Mějme dáno $A, B \in \mathbb{R}$, kde $A < B$. Funkce $f\colon (A, B) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (A, B) *Newtonův integrál*, když má na (A, B) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity

$$F(A+) = \lim_{x \to A+} F(x) \text{ a } F(B-) = \lim_{x \to B-} F(x).$$

Symbolem $[F]_A^B$ označme rozdíl $F(B-) - F(A+)$. *Newtonův integrál* funkce f na intervalu (A, B) pak definujeme jako

$$(N) \int_A^B f(x)\,dx := [F]_A^B = F(B-) - F(A+) = \lim_{x \to B-} F(x) - \lim_{x \to A+} F(x).$$

Protože každé dvě funkce primitivní k f na (A, B) se liší jen o aditivní konstantu, rozdíl limit $F(B-) - F(A+)$ na volbě F nezávisí a definice Newtonova integrálu je korektní.

Třídu newtonovsky integrovatelných funkcí značíme

$$\mathcal{N}(A, B) = \{f\colon f \text{ má na } (A, B) \text{ Newtonův integrál}\}.$$

Pokud je integrační proměnná jasná z kontextu, často místo $(N) \int_A^B f(x)\,dx$ píšeme jen $(N) \int_A^B f$.

Někdy je vhodné uvažovat i hodnoty $(N) \int_A^B f(x)\,dx$ pro $A = -\infty$ nebo $B = +\infty$. Výše uvedená definice se dá na tyto případy aplikovat beze změny, ovšem my se pro jednoduchost v tomto textu omezíme na případy, kdy (A, B) je omezený interval. Také je možné uvažovat nevlastní hodnoty integrálu, kdy připustíme možnost, že $F(B-)$ nebo $F(A+)$ mají hodnoty $\pm\infty$, za předpokladu, že rozdíl $F(B-) - F(A+)$ je definován. Ani této situaci se zde ovšem nebudeme podrobněji věnovat.

Tvrzení 11.2. *Je-li funkce $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $(N) \int_A^B f(x)\,dx$ existuje.*

Důkaz. Připomeňme (stále ještě nedokázanou) Větu 10.4 z minulé přednášky, která říká, že pokud je funkce spojitá na otevřeném intervalu I, tak tam má primitivní funkci. Funkci f, která je zatím definovaná pouze na intervalu $[A, B]$, můžeme spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$, například tak, že pro každé $x < A$ položíme $f(x) := f(A)$ a pro každé $x > B$ položíme $f(x) := f(B)$. Takto rozšířená funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a dle výše uvedené věty má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci F. Tato funkce F je nutně spojitá (viz Věta 7.10), platí tedy pro ni $F(A+) = F(A)$ a $F(B-) = F(B)$, a tudíž $(N) \int_A^B f(x)\,dx = F(B) - F(A)$. $\square$

V předchozím tvrzení je potřeba předpokládat spojitost f na uzavřeném intervalu $[A, B]$. Pouhá spojitost f na (A, B) nezaručuje existenci určitého integrálu, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 11.3. Nechť $f(x) = 1/x$ a uvažujme $(N) \int_0^1 f(x)\,dx$. Funkce f má primitivní funkci $F(x) = \ln(x)$, která má v nule zprava limitu $-\infty$, neexistuje tedy (vlastní) určitý integrál $(N) \int_0^1 f(x)\,dx$.

Spojitost f na $[A, B]$ je postačující k existenci $(N) \int_A^B f$, není však nutná. Dokonce ani omezenost f na (A, B) není pro existenci Newtonova integrálu nutná, jak ukazuje další příklad.

Příklad 11.4. Funkce $f(x) = 1/x^{0,9}$ má na $(0, 1)$ primitivní funkci $F(x) = \frac{x^{0,1}}{0,1} = 10x^{0,1}$. Máme tedy $(N) \int_0^1 f(x)\,dx = [10x^{0,1}]_0^1 = 10$.

Protože výpočet Newtonova integrálu je založen na znalosti primitivní funkce, můžeme metody pro výpočet primitivních funkcí, jako např. per partes nebo substituce, upravit na metody pro výpočet Newtonova integrálu. Pro konkrétnost si zformulujeme, jak se pomocí těchto metod dá Newtonův integrál spočítat.

Věta 11.5 (Per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť f a g jsou dvě funkce spojité na $[A, B]$. Nechť mají f a g na (A, B) primitivní funkce F a G, které lze spojitě rozšířit na $[A, B]$. Potom existují oba určité integrály $(N) \int_A^B fG$ a $(N) \int_A^B Fg$ a platí*

$$(N) \int_A^B fG = [FG]_A^B - (N) \int_A^B Fg.$$

Důkaz. Existence $(N) \int_A^B fG$ a $(N) \int_A^B Fg$ plyne z Tvrzení 11.2. Označme $L(x)$ primitivní funkci k fG a $P(x)$ primitivní funkci k Fg na intervalu (A, B). Pravidlo per partes pro neurčitý integrál (Věta 10.13) dává vztah $L(x) = F(x)G(x) - P(x) + c$ na (A, B). Z něj ihned plyne

$$(N) \int_A^B fG = [L]_A^B = [FG - P + c]_A^B = [FG]_A^B - [P]_A^B = [FG]_A^B - (N) \int_A^B Fg.$$

$\square$

Pro formulaci následující věty je dobré zavést následující konvenci: pokud $A < B$, tak výraz $(N) \int_B^A f$ definujeme jako $-(N) \int_A^B f$ a podobně $[F]_B^A$ položíme rovno $-[F]_A^B$. Dále definujeme $(N) \int_B^B f := 0$ pro libovolné B a f. Pro interval $J \subseteq \mathbb{R}$ označujeme pojmem *vnitřek* J množinu vnitřních bodů J, tj. otevřený interval vzniklý odstraněním případných krajních bodů J.

Věta 11.6 (Substituce pro určitý integrál). *Nechť $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu (α,β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi((\alpha,\beta)) = \{\varphi(t);\ t \in (\alpha,\beta)\}$. Ze spojitosti φ na $[\alpha,\beta]$ plyne, že J je omezený interval*[1]*. Nechť f je funkce spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J. Potom*

$$(N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (N)\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx, \tag{11.1}$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

Všimněte si, že na pravé straně rovnosti (11.1) nemusí integrační meze splňovat nerovnost $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ – může se stát, že dolní mez bude větší než horní, případně že se meze budou rovnat. V takových případech uplatníme konvenci zmíněnou před zněním věty.

Interval J ve Větě 11.6 může být otevřený, uzavřený, nebo polootevřený. Například funkce $\sin(t)$ zobrazí otevřený interval $(0,\pi)$ na polootevřený interval $(0,1]$.

Zdůrazněme, že ve Větě 11.6 je nutno ověřit předpoklady pro f na celém intervalu J, který může být větší než interval ohraničený hodnotami $\varphi(\alpha)$ a $\varphi(\beta)$. Nestačí tedy kontrolovat předpoklady pro f jen na intervalu ohraničeném integračními mezemi na pravé straně (11.1).

Pro výpočet integrálu pomocí Věty 11.6 není vždy nutné přesně spočítat krajní body J, stačí předpoklady f ověřit na nějakém intervalu, který obsahuje J: například pokud je f spojitá na celém $\mathbb{R}$, tak je automaticky spojitá na J a dle Tvrzení 11.2 je i integrovatelná na vnitřku J.

Všimněte si, že Věta 11.6 připouští i možnost, že $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$ nepatří do J, větu lze tedy využít např. i v situaci, kdy f není definovaná v bodě $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$. Například pomocí substituce $x = \varphi(t) := \sin(t)$ lze odvodit rovnost

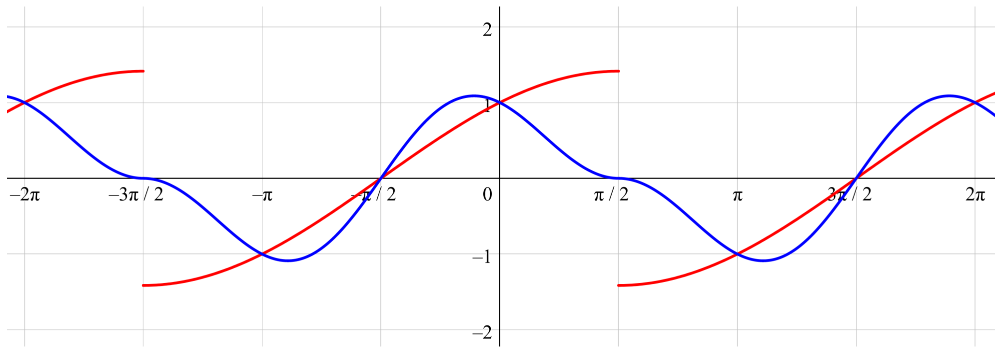
$$(N)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}\,dt = (N)\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

přestože integrované funkce nejsou definované v bodě $t = \pi/2$ resp. $x = 1$. Pro ověření předpokladů stačí nahlédnout, že $\varphi(t) = \sin(t)$ je spojitá na $[\alpha,\beta] = [-\pi/2,\pi/2]$ a diferencovatelná na $(-\pi/2,\pi/2)$, a pak zkontrolovat, že $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ je spojitá a integrovatelná na $J = \sin((-\pi/2,\pi/2)) = (-1,1)$ (zkontrolujte sami!).

Na druhou stranu, pokud $\varphi(\alpha)$ nebo $\varphi(\beta)$ patří do J, nebo obecněji pokud J obsahuje krajní body, nesmíme při použití Věty 11.6 zapomenout ověřit (jednostrannou) spojitost f v krajních bodech J. Předchozí příklad nelze např. modifikovat takto:

$$(N)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}\,dt \overset{??}{=} (N)\int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 0, \tag{11.2}$$

[1] Pro připomenutí: spojitá funkce zobrazí interval na interval podle Důsledku 6.6 a spojitá funkce je na kompaktním intervalu omezená podle Věty 7.1.



Obrázek 11.1: Grafy funkcí $\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin(t)}}$ (červeně) a $\cos(t)\sqrt{1-\sin(t)}$ (modře).

protože $\sin(t)$ zobrazí interval $(-\pi, \pi)$ na $J = [-1, 1]$ a funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ není spojitá (ani definovaná) v bodě $x = 1$. Ve skutečnosti integrál na levé straně (11.2) není definován: dá se ukázat, že integrovaná funkce není na $(-\pi, \pi)$ darbouxovská a nemá tam tedy primitivní funkci (viz Obrázek 11.1).

Naopak zcela korektní je následující výpočet, založený na stejné substituci $x = \sin(t)$:

$$(N)\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\sqrt{1-\sin(t)}\,dt = (N)\int_{0}^{0} \sqrt{1-x}\,dx = 0. \tag{11.3}$$

Tentokrát, na rozdíl od předchozího příkladu, uvažujeme funkci $f(x) = \sqrt{1-x}$, která je spojitá na celém intervalu $J = [-1, 1]$ včetně krajních bodů (a tudíž je i integrovatelná na $(-1, 1)$, viz. Tvrzení 11.2), všechny předpoklady Věty 11.6 jsou tedy splněny.

Předchozí příklad lze zobecnit: pokud je f libovolná funkce spojitá na intervalu $[-1, 1]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta, pak platí

$$(N)\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(\sin t)\cos t\,dt = (N)\int_{\sin\alpha}^{\sin(2\pi+\alpha)} f(x)\,dx = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $\sin\alpha = \sin(2\pi + \alpha)$.

Důkaz Věty 11.6. Poznamenejme, že kdybychom ve znění Věty 11.6 předpoklad, že f je spojitá na intervalu $J = \varphi((\alpha, \beta))$, nahradili trochu silnějším předpokladem, že f je spojitá a integrovatelná na nějakém otevřeném intervalu K, který obsahuje $J \cup \{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\}$ jako podinterval, byl by důkaz věty okamžitý: ze silnějšího předpokladu ihned plyne, že f má primitivní funkci F na K dle Věty 10.4. Pak podle věty o derivaci složené funkce (Věta 8.1) pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, tedy funkce $F(\varphi(t))$ je primitivní k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Tedy obě strany rovnosti (11.1) jsou rovny $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. Hlavní komplikace v následujícím důkazu tak plynou z nutnosti ošetřit chování funkce f v blízkosti krajních bodů intervalu J.

Označme (A, B) vnitřek intervalu J. Dle předpokladů je funkce f newtonovsky integrovatelná na (A, B), tj. f má na (A, B) primitivní funkci F, která má navíc v A i v B vlastní jednostranné limity. Dodefinujme F v bodech A a B pomocí těchto limit tak, že F bude spojitá na $[A, B]$, tj. $F(A) := \lim_{x\to A+} F(x)$ a $F(B) := \lim_{x\to B-} F(x)$.

Ze spojitosti F na $[A, B]$ plyne, že pravá strana (11.1) je rovna

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Ukážeme nyní, že stejnou hodnotu má i levá strana. Nejprve ukažme, že funkce $F(\varphi(t))$ je na intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, tj. že pro $t \in (\alpha, \beta)$ platí $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Pokud $\varphi(t) \in (A, B)$, plyne tento vztah z toho, že F je primitivní funkce k f na (A, B), a z věty o derivaci složené funkce.

Složitější je situace, když $\varphi(t)$ nepatří do (A, B). V tom případě je $\varphi(t)$ krajní bod J, tj. buď $\varphi(t) = A$, nebo $\varphi(t) = B$. Předpokládejme například, že $\varphi(t) = A$, druhý případ je obdobný. J je tedy rovno buď $[A, B)$, nebo $[A, B]$.

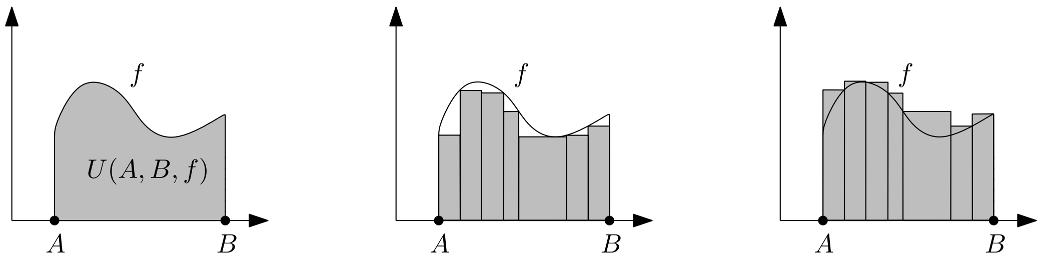
Protože $A \in J$, předpoklady věty zaručují, že f je spojitá zprava v A. Rozmysleme nejprve, že F má v bodě A derivaci zprava rovnou $f(A)$: to plyne ze spojitosti F na $[A, B]$ a ze spojitosti f na J, použitím Věty 9.13:

$$F'_+(A) = \lim_{x\to A+} F'(x) = \lim_{x\to A+} f(x) = f(A).$$

Kdyby F měla v bodě $A = \varphi(t)$ derivaci rovnou $f(A) = f(\varphi(t))$, mohli bychom ihned odvodit, že $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ podle věty o limitě složené funkce. Derivace F je ovšem jen jednostranná (zprava), na což naše věta o limitě složené funkce nepamatuje. Neformálně řečeno, jednostrannost derivace F tu nemůže nijak vadit, protože φ má na okolí t jen hodnoty z pravého okolí bodu A (protože A je levý krajní bod J), takže chování F na levém okolí A nemůže hodnotu $F(\varphi(t))'$ nijak ovlivnit. Abychom formálně obešli technický problém s jednostranností derivace F, dodefinujme tedy funkci F na levém okolí bodu A libovolně tak, aby i derivace F v bodě A zleva byla rovna $f(A)$. Po tomto dodefinování, které nemá žádný vliv na hodnotu $F(\varphi(t))'$, už můžeme použít větu o derivaci složené funkce a dostaneme očekávaný výsledek $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Dokázali jsme tedy, že $F(\varphi(t))$ je na intervalu (α, β) primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Levá strana (11.1) je tedy rovna $[F(\varphi(t))]_\alpha^\beta$. Ze spojitosti F na $[A, B]$ a ze spojitosti φ na $[\alpha, \beta]$ plyne, že $[F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$, což jsme chtěli dokázat. □

Nyní zavedeme jiný druh integrálu, takzvaný Riemannův integrál, jehož definice je motivována snahou formálně zadefinovat plošný obsah oblasti ohraničené grafem funkce f a osou x. Pro nezápornou spojitou funkci $f\colon [A, B] \to$



Obrázek 11.2: Oblast $U(A, B, f)$ pod grafem funkce f (vlevo), a Riemannova metoda odhadu jejího plošného obsahu zdola (uprostřed) a shora (vpravo).

$[0, +\infty)$ definujme následující rovinný útvar (viz Obrázek 11.2):

$$U(A, B, f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon A \le x \le B, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Riemannova definice plošného obsahu $U(A, B, f)$ je založena na následující úvaze: kdyby funkce f byla po částech konstantní, tj. kdyby $[A, B]$ bylo možné rozdělit na konečně mnoho intervalů tak, aby f byla na každém z nich konstantní, tak $U(A, B, f)$ bude vypadat jako sjednocení konečně mnoha obdélníků přiléhajících stranami. Pro takovou oblast lze obsah snadno spočítat jako součet obsahů jejích obdélníků.

Co když f není po částech konstantní? Pak můžeme uvážit libovolnou dvojici po částech konstantních funkcí $g^-, g^+ \colon [A, B] \to \mathbb{R}$ splňujících $g^- \le f \le g^+$ na $[A, B]$. Protože $U(A, B, g^-) \subseteq U(A, B, f) \subseteq U(A, B, g^+)$, je obsah $U(A, B, f)$ aspoň tak velký jako obsah $U(A, B, g^-)$ a zároveň nejvýš tak velký jako obsah $U(A, B, g^+)$, viz Obrázek 11.2.

Nyní můžeme vzít supremum obsahů $U(A, B, g^-)$ přes možné volby g^-, čímž získáme dolní odhad na obsah $U(A, B, f)$, a podobně vezmeme-li infimum přes možné volby g^+, získáme horní odhad. Pokud se horní a dolní odhad rovnají, můžeme jejich společnou hodnotu definovat jako obsah $U(A, B, f)$.

Popišme si nyní celý tento postup přesněji. Pro účely následující definice uvažujme f jako libovolnou (tedy ne nutně nezápornou) funkci definovanou na intervalu $[A, B]$. Tam, kde graf funkce f leží pod osou x, budeme na oblast mezi grafem a osou x pohlížet, jako by měla záporný obsah.

Definice 11.7 (Riemannův integrál)**.** Nechť $-\infty < A < B < +\infty$ jsou dvě reálná čísla. Konečná $(k+1)$-tice bodů $D = (A_0, A_1, \ldots, A_k)$ z intervalu $[A, B]$ je jeho *dělením*, pokud

$$A = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_k = B.$$

Tyto body dělí interval $[A, B]$ na intervaly $I_i = [A_i, A_{i+1}]$. Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty: $|I_i| = A_{i+1} - A_i$ a $|[A, B]| = B - A$.

Pro funkci $f \colon [A, B] \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (A_0, A_1, \ldots, A_k)$ intervalu $[A, B]$

definujeme *dolní*, respektive *horní, Riemannovu sumu* jako

$$s(f,D)=\sum_{i=0}^{k-1}|I_i|m_i,\ \text{ respektive }\ S(f,D)=\sum_{i=0}^{k-1}|I_i|M_i,$$

kde $m_i=\inf\{f(x);\ x\in I_i\}$ a $M_i=\sup\{f(x);\ x\in I_i\}$.

Tyto součty jsou vždy definované, $s(f,D)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ a $S(f,D)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. *Dolní*, respektive *horní, Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[A,B]$ definujeme jako

$$(R)\underline{\int_A^B} f=(R)\underline{\int_A^B} f(x)\,dx=\sup\{s(f,D)\colon D \text{ je dělení } [A,B]\},$$

respektive

$$(R)\overline{\int_A^B} f=\overline{\int_A^B} f(x)\,dx=\inf\{S(f,D)\colon D \text{ je dělení } [A,B]\}.$$

Tyto výrazy jsou opět vždy definované a mají hodnoty v oboru $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Řekneme, že funkce $f\colon[A,B]\to\mathbb{R}$ má na intervalu $[A,B]$ *Riemannův integrál*, případně že je *riemannovsky integrovatelná*, pokud

$$(R)\underline{\int_A^B} f(x)\,dx=(R)\overline{\int_A^B} f(x)\,dx\in\mathbb{R}.$$

Tuto společnou konečnou hodnotu, když existuje, značíme

$$(R)\int_A^B f(x)\,dx=(R)\int_A^B f$$

a nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce f na intervalu $[A,B]$. Třídu všech riemannovsky integrovatelných funkcí označujeme

$$\mathcal{R}[A,B]:=\{f\colon f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [A,B]\}.$$

12 | Vlastnosti Newtonova a Riemannova integrálu

V této kapitole se nejprve podrobněji podíváme na vlastnosti Riemannova integrálu a poté na jeho souvislost s Newtonovým integrálem.

Když funkce $f\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ není omezená, potom nemá na $[A,B]$ Riemannův integrál, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 12.1. Uvažme funkci $f(x) = 1/x$, pro kterou dodefinujeme $f(0) = 0$, a zkoumejme její Riemannův integrál na intervalu $[0,1]$. Protože f není shora omezená, tak v každém dělení D intervalu $[0,1]$ bude aspoň jeden interval I_i na němž je $\sup\{f(x);\ x \in I_i\} = +\infty$ (konkrétně v našem případě tam bude právě jeden takový interval, a to ten nejlevější). To znamená, že horní Riemannova suma $S(f,D)$ je rovna $+\infty$ pro každé dělení D, a tedy $(R)\overline{\int_0^1} 1/x\,dx = +\infty$. Z toho plyne, že Riemannův integrál neexistuje.

Pro zajímavost najděme ještě dolní Riemannův integrál funkce $1/x$. Definujme dělení $D_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$, které dělí interval $[0,1]$ na podintervaly

$$I_0 = [0, \frac{1}{2^n}], I_1 = [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}], \dots, I_i = [\frac{1}{2^{n-i+1}}, \frac{1}{2^{n-i}}], \dots, I_n = [\frac{1}{2}, 1].$$

Platí $|I_0| = \frac{1}{2^n}$ a pro $i \geq 1$ máme $|I_i| = \frac{1}{2^{n-i+1}}$. Protože funkce $f(x) = 1/x$ je klesající, nabývá na intervalu I_i svého minima v pravém krajním bodě, v němž má hodnotu $m_i = 2^{n-i}$. Příslušná dolní Riemannova suma je tedy

$$s(f, D_n) = \sum_{i=0}^{n} |I_i| m_i = \frac{1}{2^n} 2^n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+1}} 2^{n-i} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Máme tedy $\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = +\infty$, a tedy dolní Riemannovy sumy jsou shora neomezené. Tudíž $(R)\underline{\int_0^1} 1/x\,dx = +\infty$.

Argument z předchozího příkladu ukazuje, že pokud je funkce f na nějakém intervalu $[A,B]$ neomezená, nemůže tam být riemannovsky integrovatelná. Tím se liší Riemannův integrál od Newtonova: jak už jsme viděli v Příkladu 11.4, existují neomezené funkce, které mají Newtonův integrál.

Existují ovšem i funkce, které jsou omezené a přitom nejsou riemannovsky integrovatelné, jak ukazuje další příklad.

Příklad 12.2. Dirichletova funkce $f\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ definovaná vztahy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

je zjevně omezená. Nemá ale na žádném netriviálním intervalu Riemannův integrál, protože každý takový interval obsahuje jak racionální, tak iracionální číslo. Pro libovolné dělení D libovolného netriviálního intervalu $[A, B]$ tedy máme $s(f, D) = 0$ a $S(f, D) = B - A$. Tudíž

$$(R)\underline{\int_A^B} f = 0 < (R)\overline{\int_A^B} f = B - A.$$

Tato funkce nemá ani Newtonův integrál, protože není na (A, B) darbouxovská a nemá tedy primitivní funkci.

Pro úvahy o Riemannových sumách se vyplatí zavést pojem zjemnění dělení. Pro dvě dělení $D = (A_0 < A_1 < \cdots < A_k)$ a $D' = (B_0 < B_1 < \cdots < B_\ell)$ téhož intervalu I řekneme, že D' je *zjemnění* D, pokud platí, že $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ je podmnožina $\{B_0, B_1, \ldots, B_\ell\}$. Snadno pak nahlédneme, že pokud D' je zjemnění D, tak pro libovolnou funkci f platí

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

Věta 12.3. *Nechť $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ je funkce a nechť D_1 a D_2 jsou dvě dělení intervalu $[A, B]$. Pak platí*

$$s(f, D_1) \leq (R)\underline{\int_A^B} f \leq (R)\overline{\int_A^B} f \leq S(f, D_2).$$

Důkaz. Pro dvě dělení D_1 a D_2 uvažme jejich společné zjemnění D', například volme jako D' dělení, jehož množina dělicích bodů je sjednocení množin dělicích bodů D_1 a D_2. Pak platí

$$s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D_2).$$

Z toho plyne, že libovolná horní Riemannova suma je horní mez pro všechny dolní Riemannovy sumy (a naopak). Tedy i $(R)\overline{\int_A^B} f$ je horní mez pro všechny dolní Riemannovy sumy, z čehož plyne

$$s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq (R)\underline{\int_A^B} f \leq (R)\overline{\int_A^B} f \leq S(f, D') \leq S(f, D_2). \qquad \square$$

Příklad 12.4. Z definice Riemannova integrálu spočteme, že

$$(R)\int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

Pro $n = 1, 2, \ldots$ uvažujme dělení $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$. Pak

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right) = n^{-2}(0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

a podobně

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right) = n^{-2}(1 + 2 + \cdots + n).$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 1/2$$

a zároveň

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 1/2,$$

z nerovnosti v předchozí větě dostáváme, že $(R)\underline{\int_0^1} f = (R)\overline{\int_0^1} f = 1/2$, a tedy $(R)\int_0^1 x\,dx = 1/2$.

Následující charakterizaci riemannovsky integrovatelných funkcí budeme často využívat ve zbytku této kapitoly.

Věta 12.5 (Kritérium riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$. Potom f je riemannovsky integrovatelná na $[A, B]$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[A, B]$ takové, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.*

Důkaz. Pokud $f \in \mathcal{R}[A, B]$, tak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_1 splňující $s(f, D_1) > \int_A^B f - \varepsilon/2$ a také dělení D_2 splňující $S(f, D_2) < \int_A^B f + \varepsilon/2$. Každé jejich společné zjemnění D' pak splní $0 \leq S(f, D') - s(f, D') < \varepsilon$.

Naopak, pokud $f \notin \mathcal{R}[A, B]$, tak nastává jedna z následujících možností:

1. Dolní integrál f se od horního integrálu f liší o nějakou kladnou konstantu ε.

2. Dolní i horní integrál f jsou shodné a rovnají se $+\infty$.

3. Dolní i horní integrál f jsou shodné a rovnají se $-\infty$.

Nastává-li první možnost, pak pro každé dělení D platí $S(f, D) - s(f, D) \geq \varepsilon$. Nastává-li druhá možnost, pak pro libovolné dělení D máme $S(f, D) = +\infty$ a $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Třetí možnost je obdobná té druhé. Ve všech případech je pravá strana ekvivalence ze znění věty nepravdivá. □

Pomocí Věty 12.5 lze odvodit následující jednoduchou ale užitečnou vlastnost Riemannova integrálu.

Tvrzení 12.6. *Pro libovolné tři reálné hodnoty $A < B < C$ a libovolnou funkci $f\colon [A, C] \to \mathbb{R}$ platí*

$$f \in \mathcal{R}[A, C] \iff f \in \mathcal{R}[A, B] \;\&\; f \in \mathcal{R}[B, C].$$

Navíc pro $f \in \mathcal{R}[A, C]$ platí

$$(R)\int_A^C f = (R)\int_A^B f + (R)\int_B^C f.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f \in \mathcal{R}[A, C]$. Dokažme, že $f \in \mathcal{R}[A, B] \cap \mathcal{R}[B, C]$ pomocí Věty 12.5. Nechť máme dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje dělení D_{AC} intervalu $[A, C]$ takové, že $S(f, D_{AC}) - s(f, D_{AC}) < \varepsilon$. Můžeme navíc předpokládat bez újmy na obecnosti, že B je jeden z dělicích bodů D_{AC}, jinak vezmeme jakékoliv zjemnění D_{AC} obsahující B.

Z toho plyne, že D_{AC} lze rozdělit na dělení D_{AB} intervalu $[A, B]$ a dělení D_{BC} intervalu $[B, C]$ tak, že platí $S(f, D_{AC}) = S(f, D_{AB}) + S(f, D_{BC})$ a podobně $s(f, D_{AC}) = s(f, D_{AB}) + s(f, D_{BC})$. Z nerovnosti $S(f, D_{AC}) - s(f, D_{AC}) < \varepsilon$ tudíž plyne

$$(S(f, D_{AB}) - s(f, D_{AB})) + (S(f, D_{BC}) - s(f, D_{BC})) < \varepsilon,$$

a protože oba sčítance na levé straně předchozí nerovnosti jsou nezáporné, musí být oba sčítance menší než ε. Dle Věty 12.5 pak máme $f \in \mathcal{R}[A, B] \cap \mathcal{R}[B, C]$.

Obdobně se dokáže implikace $f \in \mathcal{R}[A, B] \cap \mathcal{R}[B, C] \implies f \in \mathcal{R}[A, C]$ a rovnost $(R) \int_A^C f = (R) \int_A^B f + (R) \int_B^C f$. □

Poznamenejme, že Tvrzení 12.6 nelze přímočaře aplikovat na newtonovskou integrovatelnost. Například funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 0)$ i na intervalu $(0, 1)$, nikoliv však na intervalu $(-1, 1)$. Je však pravda (a snadno se ověří z definice), že pro libovolné $A < B < C$ platí, že každá funkce newtonovsky integrovatelná na (A, C) je newtonovsky integrovatelná na (A, B) i na (B, C), a pak platí

$$(N) \int_A^C f = (N) \int_A^B f + (N) \int_B^C f.$$

Z Věty 12.5 lze odvodit riemannovskou integrovatelnost dvou důležitých tříd funkcí — spojitých a monotónních.

Věta 12.7 (Monotonie ⇒ integrovatelnost)**.** *Je-li funkce $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[A, B]$ monotónní, potom má na $[A, B]$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f neklesá (pro nerostoucí f se argumentuje podobně). Předpokládejme, že f není na $[A, B]$ konstantní (konstantní funkce jsou riemannovsky integrovatelné přímo z definice), a tedy $f(B) > f(A)$.

Pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subseteq [A, B]$ pak máme

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(\alpha) \text{ a } \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) = f(\beta).$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezměme libovolné dělení $D = (A_0, A_1, \ldots, A_k)$ intervalu $[A, B]$ splňující $A_i - A_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)}$ pro každé $i = 1, \ldots, k$. Pro $i = 1, \ldots, k$

označme $I_i = [A_{i-1}, A_i]$. Pak máme

$$\begin{aligned}
S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1})(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1})(f(A_i) - f(A_{i-1})) \\
&< \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)} \sum_{i=1}^{k} (f(A_i) - f(A_{i-1})) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(B) - f(A)} (f(A_k) - f(A_0)) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle Věty 12.5 tedy $f \in \mathcal{R}[A, B]$. □

Zdůrazněme, že ve Větě 12.7 je důležité, že f je monotónní na celém kompaktním intervalu $[A, B]$. Nestačí předpokládat pouze monotonii na otevřeném intervalu (A, B), jak ukazuje Příklad 12.1.

Náš další cíl bude dokázat, že každá spojitá funkce na kompaktním intervalu je riemannovsky integrovatelná. Než se však k tomu dostaneme, potřebujeme zavést zesílení pojmu spojitosti, takzvanou stejnoměrnou spojitost.

Pro připomenutí, funkce f je spojitá na intervalu I, pokud je spojitá v každém bodě $x \in I$ (případně jednostranně v krajním bodě). To lze formálně zapsat takto:

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ f\,(I \cap \mathcal{U}(x, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(x), \varepsilon).$$

Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá na intervalu* I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ f\,(I \cap \mathcal{U}(x, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(x), \varepsilon).$$

U stejnoměrné spojitosti se tedy požaduje, aby pro dané $\varepsilon > 0$ jediné $\delta > 0$ fungovalo pro všechny volby x z I, zatímco u obyčejné spojitosti může δ záviset nejen na ε ale i na x.

Stejnoměrná spojitost implikuje triviálně spojitost, ale naopak to neplatí. Například funkce $f(x) = 1/x$ je na intervalu $I = (0, 1)$ spojitá, ale není stejnoměrně spojitá: máme-li dáno například $\varepsilon = 1$, tak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme uvážit $x := \delta$ a vidíme, že f není na $\mathcal{U}(x, \delta) = (0, 2\delta)$ omezená, tedy rozhodně neplatí $f\,(I \cap \mathcal{U}(x, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(f(x), \varepsilon)$. Podobně lze rozmyslet, že například funkce $f(x) = x^2$ nebo $f(x) = \exp(x)$ jsou sice spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ale nejsou stejnoměrně spojité na $\mathbb{R}$.

Na kompaktním intervalu I (tj. intervalu typu $[A, B]$ s $-\infty < A \leq B < +\infty$) však naštěstí oba typy spojitosti splývají.

Věta 12.8 (Na kompaktu: spojitost ⇒ stejnoměrná spojitost)**.** *Je-li funkce f na kompaktním intervalu $I = [A, B]$ spojitá, je na něm stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá na I, ale že není na I stejnoměrně spojitá. Negace stejnoměrné spojitosti znamená, že platí

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in I\ \exists x' \in I \cap \mathcal{U}(x, \delta)\colon |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Fixujme $\varepsilon > 0$, pro nějž platí tento výrok. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze volit $\delta_n = 1/n$ a najít body $x_n, x'_n \in I$ takové, že $x'_n \in \mathcal{U}(x_n, \delta_n)$, ale zároveň $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě (Věta 3.10) víme, že posloupnost (x_n) má konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$, jejíž limitu označme L. Protože je I kompaktní, patří L do I. Pro usnadnění zápisu bez újmy na obecnosti předpokládejme, že už původní posloupnost (x_n) byla zvolena tak, aby měla limitu L.

Protože zároveň platí

$$x_n - \frac{1}{n} < x'_n < x_n + \frac{1}{n},$$

tak z Věty o dvou policajtech (Věta 3.3) plyne, že i (x'_n) má limitu L. Ze spojitosti f v bodě $L \in I$ (případně jednostranné, pokud je L krajní bod I) plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(L),$$

a speciálně tedy $|f(x_n) - f(x'_n)| \to 0$ pro $n \to \infty$. To je ale spor s tím, že $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ pro každé n. □

Nyní jsme konečně připraveni dokázat, že spojité funkce na kompaktním intervalu jsou riemannovsky integrovatelné.

Věta 12.9 (Spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost)**.** *Je-li funkce $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[A, B]$ spojitá, potom má na $[A, B]$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Díky Větě 12.8 je důkaz Věty 12.9 velmi podobný důkazu Věty 12.7. Opět použijeme Větu 12.5. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a chtějme najít dělení D splňující $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Nechť je f na $[A, B]$ spojitá, a tedy podle Věty 12.8 i stejnoměrně spojitá. Aplikujme definici stejnoměrné spojitosti, v níž roli ε bude hrát libovolné ε' menší než $\frac{\varepsilon}{B-A}$. Ze stejnoměrné spojitosti pak plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že jakmile jsou $x, x' \in [A, B]$ blíže než δ, tak platí $|f(x) - f(x')| < \varepsilon'$. Jinými slovy, pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subseteq [A, B]$ délky menší než δ platí

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \leq \varepsilon'.$$

Volme nyní libovolné dělení $D = (A_0, A_1, \ldots, A_k)$ intervalu $[A, B]$ splňující

$A_i - A_{i-1} < \delta$ pro každé $i = 1, \dots, k$. Označme $I_i = [A_{i-1}, A_i]$. Pak platí

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1})(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1})\varepsilon' \\ &= \varepsilon'(B - A) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Nyní si ukážeme dvě věty, známé někdy jako "základní věty analýzy", které dávají Riemannův integrál do souvislosti s primitivní funkcí a Newtonovým integrálem. Neformálně řečeno, první základní věta analýzy říká, že primitivní funkci lze (za určitých podmínek) spočítat pomocí Riemannova integrálu.

Věta 12.10 (1. základní věta analýzy)**.** *Nechť $f\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ je funkce riemannovsky integrovatelná na $[A,B]$ a funkce $F\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ nechť je definována předpisem*

$$F(x) = (R)\int_A^x f(t)\,dt.$$

Potom

1. *F je na $[A,B]$ spojitá a*
2. *v každém bodě $C \in [A,B]$, v němž je funkce f spojitá, existuje vlastní derivace $F'(C)$, která je rovna $f(C)$ (platí to jednostranně, pokud $C = A$ nebo $C = B$).*

Důkaz. Ve skutečnosti dokážeme o trochu silnější "jednostrannou" verzi věty, konkrétně ukážeme následující dvě tvrzení:

1. Pro libovolné $C \in [A,B)$ platí, že F je v C spojitá zprava.
2. Pro libovolné $C \in [A,B)$ platí, že pokud f je v C spojitá zprava, pak existuje vlastní jednostranná derivace $F'_+(C)$ a je rovna $f(C)$.

Obdobná tvrzení pak platí pro každé $C \in (A,B]$ a spojitost a derivaci zleva. Z těchto tvrzení pak plynou příslušné oboustranné verze ve znění věty.

Zvolme nyní libovolné $C \in [A,B)$ a dokazujme spojitost F zprava. Protože je f riemannovsky integrovatelná na $[A,B]$, je na tomto intervalu omezená. Označme tedy

$$M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [A,B]\}.$$

Díky omezenosti f je $M < +\infty$.

Pro libovolné $x \in [C, B)$ platí

$$|F(x) - F(C)| = \left|(R)\int_A^x f - (R)\int_A^C f\right| = \left|(R)\int_C^x f\right| \leq (x - C)M,$$

kde druhá rovnost plyne z Tvrzení 12.6 a závěrečná nerovnost plyne z odhadu $(R)\int_C^x f$ horní a dolní Riemannovou sumou pro triviální dělení (C, x) intervalu $[C, x]$. Pro $x \to C+$ tedy máme $F(x) \to F(C)$ a F je v C spojitá zprava. Tím je dokázáno první tvrzení.

Pro důkaz druhého tvrzení zvolme bod $C \in [A, B]$, v němž je f spojitá zprava. Chceme ukázat, že potom $F'_+(C) = f(C)$, neboli dle definice jednostranné derivace chceme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in (C, C + \delta) \colon f(C) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(C)}{x - C} < f(C) + \varepsilon. \tag{12.1}$$

Nechť tedy máme dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož je f spojitá v C zprava, existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné $t \in (C, C + \delta)$ platí $f(C) - \varepsilon < f(t) < f(C) + \varepsilon$. Ukážeme, že pro stejnou hodnotu δ platí i vlastnost (12.1).

Volme tedy libovolné $x \in (C, C+\delta)$ a upravme prostřední člen (12.1):

$$\frac{F(x) - F(C)}{x - C} = \frac{(R)\int_C^x f(t)\,dt}{x - C}. \tag{12.2}$$

Nyní integrál na pravé straně (12.2) odhadněme pomocí Riemannových sum. Zvolíme-li na intervalu $[C, x]$ opět triviální dělení jehož jediné dva dělicí body jsou C a x, dostaneme

$$(x - C) \inf_{t \in (C,x)} f(t) \leq (R)\int_C^x f(t)\,dt \leq (x - C) \sup_{t \in (C,x)} f(t).$$

Dosazení do (12.2) dává

$$\inf_{t \in (C,x)} f(t) \leq \frac{F(x) - F(C)}{x - C} = \frac{(R)\int_C^x f(t)\,dt}{x - C} \leq \sup_{t \in (C,x)} f(t).$$

Díky volbě δ a x máme

$$f(C) - \varepsilon \leq \inf_{t \in (C,x)} f(t) \leq \sup_{t \in (C,x)} f(t) \leq f(C) + \varepsilon,$$

a tedy

$$f(C) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(C)}{x - C} \leq f(C) + \varepsilon,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Pozorování 12.11. *Vlastnosti, které Věta 12.10 ukazuje pro funkci* $F(x) = (R)\int_A^x f(t)\,dt$*, platí i pro funkci* $G(x) := -(R)\int_x^B f(t)\,dt$*. To je vidět například z toho, že rozdíl* $F(x)-G(x)$ *je roven konstantě* $(R)\int_A^B f(t)\,dt$*, obě funkce jsou tedy spojité ve stejných bodech a mají i stejnou derivaci.*

Věta 12.10 nám umožňuje konečně splatit dluh z desáté přednášky a dokázat Větu 10.4, která říká, že spojitá funkce f na otevřeném intervalu I má na I primitivní funkci. Tím se dokáže i Tvrzení 11.2 z minulé přednášky, jehož důkaz se odvolával na Větu 10.4.

Důkaz Věty 10.4. Zvolme libovolné $C \in I$ a definujme funkci $F\colon I \to \mathbb{R}$ následovně:

$$F(x) = \begin{cases} (R)\int_C^x f(t)\,dt & \text{pro } x \geq C \\ -(R)\int_x^C f(t)\,dt & \text{pro } x < C. \end{cases}$$

Všimněte si, že $F(x)$ je pro každé x dobře definována, protože f je spojitá a tedy riemannovsky integrovatelná na každém kompaktním podintervalu I. Z Věty 12.10 a Pozorování 12.11 pak plyne, že F je primitivní funkce k f na I. □

První základní věta analýzy nám ukázala, jak lze Riemannův integrál využít ke zkonstruování primitivní funkce k libovolné spojité funkci. Druhá základní věta analýzy naopak ukazuje, že hodnota Newtonova integrálu, pokud existuje, omezuje možné hodnoty dolního a horního Riemannova integrálu.

Věta 12.12 (2. základní věta analýzy)**.** *Nechť je funkce* $f\colon [A,B] \to \mathbb{R}$ *newtonovsky integrovatelná na* (A,B)*. Potom platí*

$$(R)\underline{\int_A^B} f \leq (N)\int_A^B f \leq (R)\overline{\int_A^B} f.$$

Speciálně tedy pokud je f *newtonovsky integrovatelná na* (A,B) *a zároveň riemannovsky integrovatelná na* $[A,B]$*, pak*

$$(R)\int_A^B f = (N)\int_A^B f.$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (A,B) a dodefinujme F spojitě v bodech A a B, tj., $F(A) = F(A+)$ a $F(B) = F(B-)$. Existence takové F včetně vlastních limit $F(A+)$ a $F(B-)$ plyne z toho, že f je newtonovsky integrovatelná na (A,B). Navíc $(N)\int_A^B f = F(B) - F(A)$.

Nechť $D = (A_0, A_1, \ldots, A_k)$ je libovolné dělení intervalu $[A,B]$. Na každý interval $I_i = [A_{i-1}, A_i]$ a funkci F použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (Věta 8.21), která říká, že existuje $B_i \in (A_{i-1}, A_i)$ splňující

$$f(B_i) = F'(B_i) = \frac{F(A_i) - F(A_{i-1})}{A_i - A_{i-1}}. \tag{12.3}$$

Zjevně platí

$$\inf_{x\in I_i} f(x) \leq f(B_i) = \frac{F(A_i) - F(A_{i-1})}{A_i - A_{i-1}} \leq \sup_{x\in I_i} f(x).$$

Vynásobíme-li tyto nerovnosti kladnou hodnotou $A_i - A_{i-1}$ a sečteme přes všechna $i = 1, \dots, k$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{k}(A_i - A_{i-1}) \inf_{x\in I_i} f(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \big(F(A_i) - F(A_{i-1})\big) \leq \sum_{i=1}^{k}(A_i - A_{i-1}) \sup_{x\in I_i} f(x),$$

kde nejlevější součet je přesně $s(f, D)$, prostřední součet se zjednoduší na $F(B) - F(A) = (N)\int_A^B f$ a pravý součet je $S(f, D)$. Máme tedy

$$s(f, D) \leq (N)\int_A^B f \leq S(f, D)$$

pro libovolné dělení D intervalu $[A, B]$, z čehož plyne

$$(R)\underline{\int_A^B} f \leq (N)\int_A^B f \leq (R)\overline{\int_A^B} f.$$

Tím jsme dokázali první část věty a druhá část plyne z toho, že pro riemannovsky integrovatelné funkce jsou si dolní a horní Riemannův integrál rovny. □

Shrňme si hlavní poznatky o vztahu Newtonova a Riemannova integrálu.

- Každá funkce spojitá na $[A, B]$ patří do $\mathcal{N}(A, B)$ (Tvrzení 11.2) i do $\mathcal{R}[A, B]$ (Věta 12.9).
- Pokud funkce f patří do $\mathcal{N}(A, B)$ i do $\mathcal{R}[A, B]$, potom dle Věty 12.12

$$(N)\int_A^B f = (R)\int_A^B f.$$

- Existují funkce, které mají Newtonův integrál na (A, B), ale nemají Riemannův integrál na $[A, B]$. Příkladem může být jakákoliv neomezená funkce na (A, B), která má na (A, B) primitivní funkci mající vlastní limity v $A+$ a $B-$. Konkrétně např. $f(x) = \frac{1}{x^{0,9}}$ na intervalu $(0, 1)$, viz Příklad 11.4.
- Naopak existují i funkce, které mají Riemannův integrál na $[A, B]$, ale nemají Newtonův integrál na (A, B). Příkladem může být jakákoliv monotónní funkce na $[A, B]$, která na (A, B) není spojitá: taková funkce má Riemannův integrál dle Věty 12.7, ale není darbouxovská dle Věty 6.8, a tedy nemá primitivní funkci na (A, B) dle Věty 10.8.

13 | Aplikace integrálů

Díky 2. základní větě analýzy (Věta 12.12) už víme, že pokud pro funkci f existují oba integrály $(N) \int_A^B f$ i $(R) \int_A^B f$, tak jsou jejich hodnoty stejné. Odteď budeme tedy psát jen $\int_A^B f$ pro označení hodnoty příslušného Riemannova nebo Newtonova integrálu, pokud aspoň jeden z nich existuje.

Vztah mezi integrálem a Riemannovými sumami dává návod, jak pomocí integrálu odhadovat konečné součty. Ukažme si tento přístup nejprve na následujícím jednoduchém tvrzení.

Věta 13.1. *Nechť n je přirozené číslo a nechť f je neklesající funkce na intervalu $[1, n]$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Podobně pro nerostoucí funkci f platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f \geq \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

Důkaz. Dokažme verzi tvrzení pro neklesající funkci. Jelikož je f neklesající, je riemannovsky integrovatelná dle Věty 12.7. Plyne z toho také, že na libovolném intervalu $[\alpha, \beta] \subseteq [1, n]$ nabývá f minima v bodě α a maxima v bodě β.

Nyní stačí na intervalu $[1, n]$ uvážit dělení $D = (1, 2, \dots, n)$ a všimnout si, že jeho dolní Riemannova suma $s(f, D)$ je přesně $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$, zatímco jeho horní Riemannova suma $S(f, D)$ je $\sum_{k=2}^{n} f(k)$. Dokazované nerovnosti pak plynou z toho, že dolní a horní Riemannova suma odhadují zdola a shora příslušný integrál. □

Příklad 13.2 (Odhad harmonických čísel). Odhadněme tzv. *harmonická čísla* H_n, definovaná jako

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

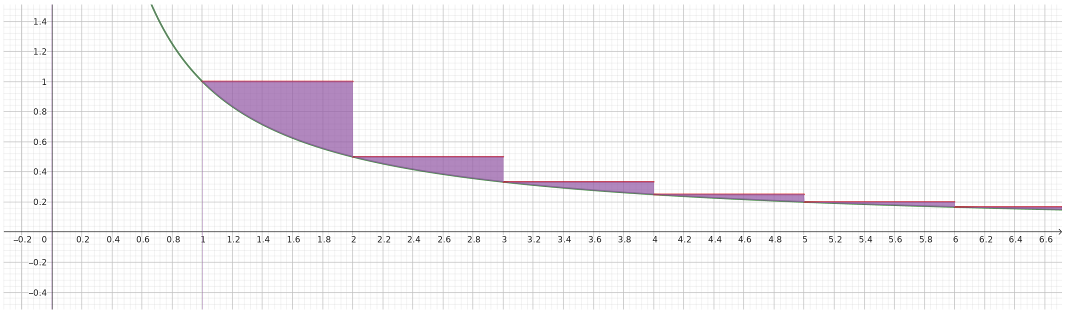
Pro funkci $f(x) = 1/x \colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ Věta 13.1 dává

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_n - \frac{1}{n}.$$

Jak víme, má $f(x)$ na $(0, +\infty)$ primitivní funkci $\ln x$, a tedy $\in_1^n (1/x)\, dx = \ln n$. Tím se předchozí nerovnosti převedou do podoby

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

Protože $\ln x$ má limitu $+\infty$ pro $x \to +\infty$, plyne z těchto odhadů, že i posloupnost H_n má limitu $+\infty$.



Obrázek 13.1: Rozdíl mezi harmonickým číslem H_n a plochou pod grafem funkce $\frac{1}{x}$ na intervalu $[1, n]$ odpovídá, pro $n \to +\infty$, celkové ploše fialově vyznačené oblasti.

Příklad 13.2 ukazuje, že rozdíl $H_n - \ln n$ leží v intervalu $[\frac{1}{n}, 1]$. Ve skutečnosti se dá ukázat, že tento rozdíl má pro $n \to +\infty$ limitu, která je známá jako Eulerova-Mascheroniho konstanta (nezaměňujte s Eulerovým číslem e). Eulerova-Mascheroniho konstanta má číselnou hodnotu přibližně 0,5772....

Geometrický význam této konstanty přibližuje Obrázek 13.1: konstanta odpovídá plošnému obsahu fialově vyznačené plochy, která je zespodu ohraničená grafem funkce $\frac{1}{x}$ na intervalu $[1, +\infty)$ a shora ohraničená grafem "schodovité" funkce, která je na každém intervalu tvaru $[n, n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) identicky rovna $\frac{1}{n}$. Plochu pod grafem této schodovité funkce si lze představit jako posloupnost obdélníků, které mají všechny šířku 1 a výšky $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, tedy celkový obsah prvních n takových obdélníků je právě harmonické číslo H_n.

Už z obrázku je patrné, že fialová oblast je sjednocení nekonečně mnoha "vypouklých trojúhelníků", z nichž každý má šířku 1 a jejichž celková výška je 1, tedy zjevně plocha fialové oblasti je větší než $\frac{1}{2}$ a menší než 1.

Odhady konečných sum se nám mohou hodit i při vyšetřování konvergence nekonečných řad, neboť součet řady je definován jako limita posloupnosti jejích částečných součtů. V mnoha případech tak lze vyšetřování konvergence převést na výpočet integrálu, jak ukazuje následující věta.

Věta 13.3 (Integrální kritérium konvergence)**.** *Nechť $f\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když platí*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f < +\infty.$$

Důkaz. Všimněme si nejprve, že jelikož je f monotónní, tak podle Věty 12.7 integrál $\int_1^n f$ existuje pro libovolné $n \geq 1$. Všimněme si také, že jelikož je f nezáporná, je $\int_1^n f$ neklesající funkce proměnné n, tedy musí mít v $+\infty$ limitu náležící do $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Označme tuto limitu L.

Označme $s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$ n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Protože má tato řada jen nezáporné sčítance, je posloupnost (s_n) neklesající, a tedy má pro $n \to \infty$ limitu $L' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L' je tedy součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Dokazovaná věta říká, že L je konečná právě tehdy, když L' je konečná. To lze snadno odvodit z Věty 13.1: pokud $L < +\infty$, tak použijeme odhad

$$s_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f \leq L,$$

z něhož plyne, že (s_n) je shora omezená a má tedy konečnou limitu. Naopak, pokud $L' < +\infty$, tak platí

$$\int_1^n f \leq s_{n-1} \leq L',$$

tedy hodnoty $\int_1^n f$ jsou shora omezené a jejich limita L je konečná. □

Všimněte si, že z předchozího důkazu plyne (platí-li předpoklady Věty 13.3) explicitní odhad

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \lim_{n\to\infty} \int_1^n f.$$

To nám umožňuje aproximovat i nekonečné součty pomocí integrálů.

Příkladem využití integrálního kritéria je následující užitečný výsledek o konvergenci řad, jejichž sčítance jsou mocniny přirozených čísel.

Věta 13.4. *Nechť $s \in \mathbb{R}$ je reálná konstanta. Řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

konverguje, právě když $s > 1$.

Důkaz. Mezní případ $s = 1$ odpovídá řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, jejíž částečné součty jsou právě harmonická čísla H_n. Z příkladu 13.2 už víme, že harmonická čísla mají limitu $+\infty$, tedy tato řada není konvergentní.

Z toho ihned plyne, že pro $s < 1$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ taktéž není konvergentní, neboť platí $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$. Tudíž n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ je větší nebo roven n-tému harmonickému číslu H_n, z čehož plyne, že posloupnost částečných součtu má limitu $+\infty$.

Zbývá tedy případ $s > 1$, kdy je potřeba dokázat, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konverguje. Použijeme k tomu opět Větu 13.3. Funkce $f(x) = 1/x^s = x^{-s}$ je nerostoucí a nezáporná na $(0, +\infty)$ a má primitivní funkci $F(x) = \frac{x^{1-s}}{1-s}$. Odtud snadno spočítáme, že

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{-s}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right) = \frac{1}{s-1} < +\infty.$$

Z Věty 13.3 plyne, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ je konvergentní pro každé $s > 1$. □

Příklad 13.5 (Odhad faktoriálu). Integrál lze využít i pro odhad *faktoriálu* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, i když jde o součin a nikoli o součet. Místo $n!$ budeme odhadovat $\ln(n!)$, který lze zapsat jako součet $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Použitím Věty 13.1 na funkci $f(x) = \ln x$ dostaneme

$$\ln(n!) - \ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k = \ln(n!).$$

Funkce $f(x)$ má na $(0, +\infty)$ primitivní funkci $x \ln x - x$, tedy máme $\int_1^n f = n \ln n - n + 1$ a z předchozích nerovností plyne

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n + 1 + \ln n.$$

Dosadíme-li tyto tři výrazy do funkce exp, která je rostoucí, dostaneme

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Věta 13.1 nám poskytuje způsob, jak odhadnout součet $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ pomocí integrálu $\int_1^n f$ v případě, že f je monotónní, ale neříká nic o situaci, kdy f monotónní není, a navíc odhady plynoucí z této metody mohou být pro některá použití příliš hrubé. Existují však sofistikovanější postupy, jak odhadovat rozdíly mezi sumami a integrály bez nutnosti předpokládat monotonii.

V následující úvaze nepředpokládáme, že f je monotónní, ale zato předpokládáme, že má spojitou první derivaci na $[1, n]$. Bude se nám hodit značení $\lfloor x \rfloor$ pro dolní celou část čísla x a $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ pro zlomkovou část x.

Rozdíl mezi sumou a integrálem můžeme odhadnout takto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\, dx. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Nyní použijeme trik: integrovanou funkci $f(k) - f(x)$ zapíšeme jako součin $1 \cdot (f(k) - f(x))$ a zintegrujeme ji pomocí per partes, kdy ke konstantní funkci 1 zvolíme primitivní funkci $x - k - 1/2$. Proč zrovna tuto primitivní funkci? Protože má mezi všemi primitivními funkcemi tu specifickou vlastnost, že integrál z ní je na intervalu $(k, k+1)$ nulový, což se posléze ukáže jako výhodné.

Počítejme dále integrál z pravé strany (13.1). Použitím per partes a využitím toho, že pro $x \in (k, k+1)$ máme $x - k = \{x\}$, dostáváme:

$$\begin{aligned}
&\int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\, dx = \\
&\quad = \left[(x - k - 1/2) \cdot (f(k) - f(x))\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} (x - k - 1/2)(-f'(x))\, dx \\
&\quad = \frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) + \int_k^{k+1} (\{x\} - 1/2) f'(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Sečteme-li předchozí rovnost pro $k = 1, \ldots, n-1$ a dosadíme do (13.1), získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f = \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) + \int_1^n (\{x\} - 1/2) f'(x)\, dx. \qquad (13.2)$$

Vzorec (13.2) je speciální případ takzvaného *Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce* (obecnou verzi najdete například na Wikipedii). Všimněte si, že integrál na pravé straně (13.2) by byl nulový, pokud by $f'(x)$ byla konstantní – to proto, že funkce $(\{x\} - 1/2)$ má nulový integrál na každém intervalu celočíselné délky. Můžeme tedy doufat, že když $f'(x)$ nebude „příliš oscilovat“, bude integrál na pravé straně blízký nule, a náš odhad sumy pomocí integrálu bude poměrně přesný.

Vzorec (13.2) skrývá i určitou geometrickou intuici, která vynikne, když se člen $\frac{1}{2}(f(1) - f(n))$ převede na levou stranu a přidá do sumy. Vzniklá suma pak jde upravit takto:

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} f(k)\right) - \frac{1}{2}(f(1) - f(n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k) + f(k+1)}{2}.$$

Tato suma je přesně integrál od 1 do n z funkce, která v bodech $1, 2, \ldots, n$ má stejné hodnoty jako f, a mezi dvěma sousedními celočíselnými body je její graf úsečka. Oblast pod grafem této funkce je tedy sjednocení lichoběžníků. Integrál na pravé straně (13.2) tedy říká, jak moc se obsah této lichoběžníkovité oblasti liší od obsahu oblasti pod grafem f.

Důležitou aplikací integrálů jsou výpočty obsahů ploch, délek křivek a objemů a povrchů těles.

Pro nezápornou funkci f definovanou na intervalu $[A, B]$ uvažujme rovinný útvar

$$U(A, B, f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ A \leq x \leq B \wedge 0 \leq y \leq f(x)\},$$

který odpovídá oblasti mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[A, B]$. Jak už víme, výpočet obsahu této oblasti byl jednou z motivací pro zavedení Riemannova integrálu. Je tedy přirozené *obsah* $U(A, B, f)$ definovat jako $\int_A^B f(x)\, dx$, pokud integrál existuje.

Další přirozenou geometrickou úlohou je výpočet délky křivky. Než se podíváme na obecné křivky, uvažujme nejprve křivku odpovídající grafu vhodné funkce f na nějakém intervalu $[A, B]$.

Definice 13.6. Mějme funkci f spojitou na intervalu $[A, B]$. *Grafem* funkce f na intervalu $[A, B]$ rozumíme množinu $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ A \leq x \leq B\}$. Jestliže má f na (A, B) vlastní derivaci, pak *délku* grafu funkce f na intervalu $[A, B]$ definujeme jako

$$\int_A^B \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx, \tag{13.3}$$

pokud tento integrál existuje.

Zatímco definice obsahu $U(A, B, f)$ pomocí Riemannových sum je geometricky celkem názorná, u vzorce (13.3) nemusí být geometrický význam jasný. Popišme si geometrickou úvahu, která k tomuto vzorci vede. Zvolme si na intervalu $[A, B]$ nějaké dělení $D = (A_0 < A_1 < \cdots < A_k)$, označme I_i interval $[A_{i-1}, A_i]$. Označme dále P_i bod $(A_i, f(A_i)) \in \mathbb{R}^2$, ležící na grafu funkce f, a označme $|P_{i-1}P_i|$ délku úsečky spojující body P_{i-1} a P_i. Podle elementárního vzorečku pro délku úsečky máme

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(A_i - A_{i-1})^2 + (f(A_i) - f(A_{i-1}))^2} \\ &= (A_i - A_{i-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(A_i) - f(A_{i-1})}{A_i - A_{i-1}}\right)^2}.\end{aligned}$$

Nyní využijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci f na intervalu $[A_{i-1}, A_i]$ (Věta 8.21), z níž plyne, že existuje bod $B_i \in (A_{i-1}, A_i)$, pro nějž platí

$$f'(B_i) = \frac{f(A_i) - f(A_{i-1})}{A_i - A_{i-1}},$$

a tedy

$$|P_{i-1}P_i| = (A_i - A_{i-1})\sqrt{1 + (f'(B_i))^2}.$$

Abychom odhadli délku grafu f, nahraďme tento graf lomenou čárou tvořenou sjednocením všech úseček $P_{i-1}P_i$ pro $i = 1, \ldots, k$. Označme $A(f, D)$ délku této lomené čáry. Z předchozího výpočtu plyne

$$\begin{aligned}A(f, D) &= \sum_{i=1}^{k} |P_{i-1}P_i| \\ &= \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1})\sqrt{1 + (f'(B_i))^2}.\end{aligned}$$

Definujme-li nyní na $[A, B]$ funkci $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, tak z předchozího vzorečku, plyne, že pro libovolné dělení D platí

$$s(g, D) \leq A(f, D) \leq S(g, D),$$

kde $s(g, D)$ a $S(g, D)$ jsou dolní a horní Riemannovy sumy funkce g. Definice 13.6 tedy zaručuje, že pro dostatečně 'jemné' dělení D se námi definovaná délka grafu funkce f bude blížit délce aproximující lomené čáry.

Někdy se hodí uvažovat i obecnější křivky než ty, které vzniknou jako grafy funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Obecně se křivky definují jako spojité obrazy intervalů, tedy jako obrazy spojité funkce $\phi\colon I \to \mathbb{R}^d$, kde I je kompaktní interval. Funkci ϕ, jejíž hodnoty patří do $\mathbb{R}^d$ můžeme formálně reprezentovat jako d-tici funkcí $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_d(x))$. Potom ϕ je spojitá, právě když je spojitá každá její složka ϕ_j. Jako *derivaci* ϕ pak označíme příslušnou d-tici derivací $(\phi_1'(x), \phi_2'(x), \dots, \phi_d'(x))$. Jinými slovy, křivka je množina bodů

$$K = \{(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_d(x));\ x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Funkce ϕ se pak nazývá *parametrizace* křivky K. Daná křivka K může mít více různých parametrizací.

Jako *hladkou křivku* označme množinu $K = \phi(I)$, kde $\phi\colon I \to \mathbb{R}^d$ je spojitá funkce, která má v každém bodě spojitou derivaci, a $I \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktní interval.

> Pojem hladké křivky nemá ustálenou definici: někteří autoři vyžadují například, aby parametrizace hladké křivky měla derivaci, která není v žádném bodě nulová, někteří dokonce vyžadují existenci derivací všech řádů. Tyto technické detaily závisí vždy na konkrétním zamýšleném použití. My se spokojíme s výše uvedenou jednoduchou verzí předpokladů.

Nechť K je hladká křivka s parametrizací $\phi\colon I \to \mathbb{R}$, kde $I = [A, B]$. Jako *délku křivky* K označíme hodnotu

$$\int_A^B \sqrt{(\phi_1'(x))^2 + (\phi_2'(x))^2 + \cdots + (\phi_d'(x))^2}\, dx, \tag{13.4}$$

pokud integrál existuje. Dá se ukázat (za vhodných předpokladů), že délka křivky K nezávisí na tom, kterou parametrizaci K zvolíme. Všimněte si, že pokud je K graf funkce $f\colon [A, B] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[A, B]$, tak K lze také chápat jako křivku s parametrizací $\phi\colon [A, B] \to \mathbb{R}^2$, kde $\phi_1(x) = x$ a $\phi_2(x) = f(x)$. Potom vzorec (13.4) dává stejný výsledek jako (13.3).

Všimněte si, že ve vzorci (13.4) je integrovaná funkce přesně euklidovská norma vektoru $(\phi_1'(x), \dots, \phi_d'(x))$. Vzorec má názornou fyzikální intuici: pokud by funkce $\phi(x)$ popisovala polohu nějakého objektu v $\mathbb{R}^d$ v čase x, pak vektor $(\phi_1'(x), \dots, \phi_d'(x))$ odpovídá okamžité rychlosti tohoto objektu v čase x. Křivka parametrizovaná pomocí ϕ je pak trajektorie zkoumaného objektu za nějaký časový interval a délka trajektorie se pak spočítá jako integrál z velikosti jeho rychlosti.

Příklad 13.7. Spočítejme délku půlkružnice o poloměru $r > 0$, tedy křivky $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2 \wedge y \geq 0\}$. Na K se můžeme dívat jako na graf funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[-r, r]$. Jelikož platí $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, podle vzorce (13.3) je délka K rovna

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx &= \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{1}{1 - (x/r)^2}}\, dx \\ &= r \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1 - y^2}}\, dy,\end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme využili substituci $y = x/r$. Poslední integrál se dá řešit buď substitucí $y \to \sin t$ podobně jako v příkladu pod důkazem Věty 10.12, případně znalec primitivních funkcí může vědět, že integrovaná funkce má primitivní funkci $\arcsin(y)$, což je inverzní funkce k $\sin(y)$ na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$. Délka půlkružnice každopádně vyjde rovna πr, v souladu s očekáváním.

Délka K se dá ovšem spočítat i jinak: můžeme si všimnout, že platí

$$K = \{(r \cos x, r \sin x);\ x \in [0, \pi]\}.$$

Můžeme tedy pro K volit i jinou parametrizaci $\phi\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, konkrétně $\phi(x) = (r \cos(x), r \sin(x))$, a potom délka K vyjde

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(-r \sin x)^2 + (r \cos x)^2}\, dx = \int_0^{\pi} r\, dx = \pi r.$$

Nyní se zaměřme na výpočty objemů a povrchů prostorových těles. V obecnosti se pro takovéto výpočty zavádí vícerozměrný integrál, to však my dělat nebudeme. Budeme tedy uvažovat jen velmi omezený typ těles, takzvaná rotační tělesa.

Nechť $f\colon [A, B] \to [0, +\infty)$ je nezáporná funkce na $[A, B]$. *Rotační těleso* vzniklé otáčením plochy $U(A, B, f)$ kolem osy x je těleso

$$T(A, B, f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ A \leq x \leq B \wedge \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Objem tělesa $T(A, B, f)$ pak definujeme jako

$$\pi \int_A^B f(t)^2\, dt,$$

pokud integrál existuje.

Jako *plášť* tělesa $T(A, B, f)$ označujeme plochu vzniklou otáčením grafu funkce f kolem osy x, tedy množinu

$$P(A,B,f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ A \leq x \leq B \wedge \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}.$$

Povrch $P(A,B,f)$ pak definujeme jako

$$2\pi \int_A^B f(t)\sqrt{(1+(f'(t))^2}\,dt,$$

pokud má f derivaci na $[A,B]$ a integrál existuje.

Příklad 13.8. Co má větší povrch: sféra (tedy plášť koule) v $\mathbb{R}^3$ o poloměru $r > 0$, nebo plášť válce se stejnou výškou a poloměrem? Spočítejme oba povrchy. Sféra vznikne rotací grafu funkce $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ na intervalu $[-r,r]$, zatímco plášť válce vznikne rotací konstantní funkce $g(x) = r$ na stejném intervalu. Pro sféru dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx\\
=&\int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx\\
=&\int_{-r}^{r} 2\pi r\,dx\\
=&4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Pro válec pak máme

$$\begin{aligned}
&\int_{-r}^{r} 2\pi r\sqrt{1+0}\,dx\\
=&\int_{-r}^{r} 2\pi r\,dx\\
=&4\pi r^2.
\end{aligned}$$

V obou případech tedy vyšel stejný výsledek. Poznamenejme, že k obdobnému závěru bychom dospěli, i kdybychom místo celé sféry a celého válce uvažovali jen jejich úseče dané libovolným intervalem $[A,B] \subseteq [-r,r]$ na ose x.