Ortogonalni matice a doplnek

1.

Důkaz o opaku tvrzení provedu sporem.

Nechť matice P, Q jsou tvořeny vektory z báze B $(\mathrm{resp.}\ C)$. Jelikož matice sčítáme, musí mít stejnou velikost. Tedy báze B a báze C generují stejný prostor. Nechť v i-tém sloupci matice P je vektor $d = (1, 0, \ldots, 0)$ a v matici Q je vektor $e = (-1, 0, \ldots, 0)$. Oba dva vektory jsou ortonormální, takže jsou i ortogonální. Pokud je ale sečteme, získáme nulový vektor. Z definice vlastních vektorů ale víme, že nulový vektor nemůže být ortogonální, a proto $P + Q$ není ortogonální.
Tvrzení neplatí.

2. Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?

Hledám všechny matice $Q^{n \times n}$ pro které platí:

$$Q^T Q = I$$

Tyto matice zároveň musí být diagonální, to znamená, že všechny vektory mají pouze jeden prvek (I-tý řádek má prvek na i-té pozici). Získáváme rovnici:

$$I_{jj} = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} q_{ji}^T = q_{jj}^2$$

Toto platí, protože na všech pozicích v obou vektorech jsou nuly, kromě toho když $i = j$.

Tedy získáváme rovnici

$$1 = q^2$$
$$q = \pm 1$$

Tedy máme dvě matice, které splňují naše podmínky jsou:

$$I, -I$$

3. Ortogonální matice Q obsahuje pouze prvky $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{4}$. Jaký je rozměr matice Q?

Vektor v ortogonalní matice Q musí být z definice ortonormální. To znamená:

$$||v|| = 1$$

Z tohoto vztahu dostavame rovnici:

$$\sqrt{a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

Pro $a, b \in \mathbb{N}$. Muzeme upravit na:

$$\sqrt{c \cdot \left(\frac{1}{16}\right)} = 1$$

$$c = 16$$

Z tohoto výsledku vyplívá, že na vytvoření ortonormálního vektoru pomocí prvků $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{4}$ je potřeba vektor délky minimálně 16.
A nezalezi na pozici prvku.

Ted je otazka. Zda jsem pro libovolny vektor v, najit 15 vektoru $u_i; i \in [15]$, pro ktere plati:

$$\forall i : |\langle v, u_i \rangle| = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j u_j = 0$$

Pro každé v_j jsou možnosti u_j:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Tedy

$$v_j u_j = \pm \frac{1}{16}$$

Aby platilo $vu = 0$, musí být stejný počet $\frac{1}{16}$ a $-\frac{1}{16}$.

Pokud zacneme s vektorem $v = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$.

Pak počet validních permutací je

$$\binom{16}{8} = 12870$$

Tedy jsme schopni nalezt 15 vektoru, ktere vudou tvorit Q.

To znamena, že rozmer matice Q je 16×16.

4. Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je matice

$$\begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

Ortogonalni.

Podminky:

1. $A + B \neq A - B \neq B - A$
   To pak znamena ze $A = B = 0$, ale nulova matice neni ortognalni.
2. $\sqrt{((a+b)^2 + (a-b)^2} = 1$ a $\sqrt{(b-a)^2 + (a+b)^2} = 1$

Ale jelikoz:

$$\sqrt{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (a+b)^2}$$

Tak podminku muzeme prepsat:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2} = 1$$

$$\sqrt{2a^2 + 2b^2} = 1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$$

Toto plati kvuli podmince vektoru, ortogonalni matice, být ortonormalni
3) Dle $A^T A = I$:
Prvni řádek první sloupec.
$(a+b)(a+b) + (a-b)(a-b) = (a+b)2 + (a-b)2 = 2a2 + 2b$
Prvni řádek, druhý sloupec:
$(a+b)(b-a) + (a-b)(a+b) = (a+b)(b-a+a-b) = (a+b)(0) = 0$
Druhy radek, prvni sloupec. Stejne jako prvni radek, druhy sloupec.
Druhý řádek, druhý sloupec:

$(b-a)2 + (a+b)2 = (a-b)2 + (a+b)2 = 2a^2 + 2b^2$

Takže:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2a^2 + 2b^2 & 0 \\ 0 & 2a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}$$

To jsou všechny podmínky, které a, b musí splnit, aby zadaná matice byla ortogonální.

---

5. Najděte matici projekce do:

$(a) U = span\{(2,1,1)^T\}$

Projekční matice do směru vektoru u (do přímky) je:

$P = \frac{uu^T}{u^T u}$

Spočítáme P:

$$u^T u = 2^2 + 1 + 1 = 6$$
$$uu^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$V = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

Vyrobime matici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vidime, ze matice je regularni.
Tedy pokrývá celou dymenzi $\mathbb{R}^3$.
Tedy:

$$P = I$$

---

6. Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 14 & 35 \\ -3 & -6 & -15 \end{pmatrix}$$

Najděte její ortogonální doplněk a kernel.

Kernel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 14 & 35 \\ -3 & -6 & -15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z toho:

$$x = -5z - 2y$$

Tedy kernel je :

$$Ker(A) = span\{(-2, 1, 0)^T, (-5, 0, 1)^T\}$$

A ortogonální doplněk je roven $R(A)$.
Tedy:

$$doplnek = span\{(1, 2, 5)^T\}$$

7.

(a) $U = \{(1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T\}$

Potřebujeme najít všechny vektory, které jsou kolmé na oba vektory z množiny U.

Pro vektor $v_1 = (1, 0, 1, 1)^T$ musí platit:

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

Pro vektor $v_2 = (1, 1, 1, 0)^T$ musí platit:

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Máme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $x_1 = -x_2 - x_3$ a dosadíme do první:

$$(-x_2 - x_3) + x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_2 + x_4 = 0$$

$$x_2 = x_4$$

Tedy:

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

Můžeme zvolit x_2 a x_3 jako volné parametry a vyjádřit ostatní:

Základní vektory ortogonálního doplňku jsou tedy:

- Pro $x_2 = 1, x_3 = 0$: $v_1 = (-1, 1, 0, 1)^T$
- Pro $x_2 = 0, x_3 = 1$: $v_2 = (-1, 0, 1, 0)^T$

Ortogonální doplněk je tedy:

$$U^\perp = \text{span}\{(-1, 1, 0, 1)^T, (-1, 0, 1, 0)^T\}$$

b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$

Množina V je definována podmínkou $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, kde $x \in \mathbb{R}^3$.

Tato podmínka představuje lineární rovnici, která definuje rovinu procházející počátkem souřadnic v prostoru $\mathbb{R}^3$. Množina V je tedy dvourozměrný podprostor (rovina) v $\mathbb{R}^3$.
V je dvourozměrná, protože podprostor V je určen jednou lineární rovnicí v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Hledáme normálový vektor na tuto rovinu

Normálový vektor k rovině $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ přímo odečteme z koeficientů rovnice:

Pro rovinu $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ je normálový vektor $n = (a, b, c)^T$

V našem případě $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, tedy $n = (1, 1, 2)^T$.
Normálový vektor roviny V je tedy $n = (1, 1, 2)^T$.

Proto ortogonální doplněk V je přímka generovaná vektorem $(1, 1, 2)^T$:

$$V^\perp = \operatorname{span}\{(1, 1, 2)^T\}$$