Skalarni soucin

1. **(10 bodů)** Mějme zobrazení

$$\langle x, y\rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

a vektory

$$x' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}.$$

(a) **(6 bodů)** Ukažte, že $\langle x, y\rangle$ je skalárním součinem.

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ pokud $x \neq 0$: $\langle x, x\rangle = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$

Ziskavame kvadratickou kde: $a = 5; b = 4; c = 3$

Dererminant techto koeficientu je roven:

$$b^2 - 4ac = 16 - 60 = -44$$

A tedy neexistuji nenulove hodnoty x_1, x_2 pro ktere by se vyraz rovnal nule. Prvni axiom je splnen.

2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$$\langle x + y, z\rangle = 5(x_1 + y_1)z_1 - 2(x_1 + y_1)z_2 - 2(x_2 + y_2)z_1 + 3(x_2 + y_2)z_2$$

To muzeme dale rozepsat jako:

$$5x_1z_1 + 5y_1z_1 - 2x_1z_2 - 2y_1z_2 - 2x_2z_1 - 2y_2z_1 + 3x_2z_2 + 3y_2z_2$$

Seskupime x a y:

$$5x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 3x_2z_2 + 5y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 3y_2z_2$$

A vidime ze vyraz muzeme prepsat jako:

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

Druhy axiom dokazan.

3. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$$\langle \alpha x, y \rangle = 5\alpha x_1 y_1 - 2\alpha x_1 y_2 - 2\alpha x_2 y_1 + 3\alpha x_2 y_2$$

Po vytknuti α:

$$= \alpha(5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2) = \alpha\langle x, y \rangle$$

Treti axiom dokazan.

4)$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Prohozeni x a y:

$$\langle y, x \rangle = 5y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 3y_2x_2$$

Po prepsani:

$$= 5x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_2$$

Muzeme porovnat:

$$\langle x, y \rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$
$$\langle y, x \rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

Ctrvty axiom je dokazan.

Jedna se o skalarni soucin.

(b) **(1 bod)** Spočtěte $\langle x', y' \rangle$.

$$5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 5 = 22$$

(c) **(1 bod)** Spočtěte $\|x'\|$.

Normu vektoru x' spočítáme pomocí vztahu:

$$\|x'\| = \sqrt{\langle x', x' \rangle}$$
$$\langle x', x' \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5$$

Nyní spočítáme normu:

$$\|x'\| = \sqrt{\langle x', x'\rangle} = \sqrt{5}$$

Takže norma vektoru x' je $\|x'\| = \sqrt{5}$.

(d) **(2 body)** Spočtěte vzdálenost x' od y'.

Vzdalenost spocitame pomoci normy. Vektor mezi dvema vektory se rovna jejch rozdilu.

$$||x' - y'|| = \sqrt{\langle x' - y', x' - y'\rangle} =$$

$$= \sqrt{-1 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3)} = \sqrt{10}$$

2. **(3 body)** Dokažte, nebo vyvraťte, že v prostoru matic $\mathbb{R}^{m\times n}$ je zobrazení

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

   skalární součin.

Pro skalarni soucin musi platit:
$\langle x, x\rangle \geq 0$ pokud $x \neq 0$
Vysledek je soucet vsech hodnot v matici x na druhou. To znamena, ze vsechna cisla jsou bud nula nebo kladna. Jedina mozna kombinace jak zajistit abych soucet techto cisel byl nula je, ze vsechna cisla musi byt nula. Prvni axiom plati.

$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
Muzeme dokazat pro libovolnou (obecnou) pozici i, j. Nemusime koukat na cele matice ale staci koukat na jednu pozici protoze:

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

Muzeme zapsat jako:

$$\forall i, j \in \mathbb{R} : \langle a_{ij}, b_{ij}\rangle = a_{ij}b_{ij}$$

Potom dosadime:

$$\langle x_{ij} + y_{ij}, z_{ij}\rangle = x_{ij}z_{ij} + y_{ij}z_{ij} = \langle x_{ij}, z_{ij}\rangle + \langle y_{ij}, z_{ij}\rangle$$

Druhy axiom plati.

$\alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

Jednoduse muzeme upravit:

$$\langle \alpha A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} b_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \alpha\langle A, B\rangle$$

Treti axiom plati.
$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
Staci prehodit pismena alfa a beta. Nasobeni je komutativni, takze poradi nema vliv.
Posledni axiom dokazan.
Jedna se o skalarni soucin.

4. **(3 body)** Je skalární součin lineárním zobrazením, jak ho máme zadefinované v Lineární algebře 1?

Lineární zobrazení $T : V \to W$ splňuje dvě vlastnosti:

$$1. \quad T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$2. \quad T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$$

A taky: Zobrazuje nulu na nulu. (Trivialni dukaz)

Soucet skalarnich soucinu je roven skalarnimu soucinu souctu:

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Tohle neplati, pro vsechny zobrazeni. Napr.

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Protoze leva strana se pak rovna:

$$\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\cdot\langle x, y\rangle \neq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Tedy skalarni soucin neni linearni zobrazeni, pro vsechny svoje zobrazeni.

4. **(6 bodů)** Určete úhel mezi:
   (a) **(3 body)** vektory

$$x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Skalární součin:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\|\mathbf{x}\| = 1$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Uhel se rovna:

$$\cos^{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

(b) **(3 body)** hlavní diagonálou krychle a její podstavou.
To se rovna uhlu mezi vektory hlavni diagonaly a diagnoaly dane podstavy .

Pro krychli o stranach a se vektory budou rovnat:

$$\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d_2} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skalarni soucin:

$$\langle \mathbf{d_1}, \mathbf{d_2} \rangle = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot 0 = 2a^2$$

Normy:

$$\|\mathbf{d_1}\| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a, \quad \|\mathbf{d_2}\| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

Pod dosazeni ziskavame:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35.26^\circ$$

5. **(4 body)** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Ukažte, že pro $i \neq j$ je i-tý řádek matice A kolmý na j-tý sloupec matice A^{-1}.

$A \cdot A^{-1} = I_n$

To znamená, že pouze pri souctu nasobku prvku i-teho radku matice A a i-teho sloupce matice A^{-1} je vysledek 1. Jinak je vzdy nula.

Protoze kolmost je definovana:

$x, y \text{ jsou kolme pokud } \langle x, y \rangle = 0$

Muzeme tento dusledek pouzit na sklarani soucin (kolmost),
jelikoz vzorec pro prvek soucinu matic:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Je totozny se vzorcem skalarniho soucinu. Soucet soucinu jednotlivych prvku.
Tedy pro vsechna $x_{ij} \in I_n : i \neq j; x_{ij} = 0$.

Tedy skalarni soucet i-tho řádku matice A aj-teho sloupce matice A^{-1} pro $i \neq j$ vzdycky bude 0 resp. kolme.. A naopak kdyz i=j, bude skalarni soucin roven 1.

6. **(8 bodů)** Zaveďte v prostoru $\mathbb{R}^2$ skalární součin tak, aby x' bylo kolmé na y', kde

$$x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$