

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**DEPARTAMENTO ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

ANNA CAROLINE ARALDI

***Desenvolvimento de código computacional para análise  
termo-elástica em estruturas de casca***

**SÃO CARLOS**

**2016**

ANNA CAROLINE ARALDI

***Desenvolvimento de código computacional para análise  
termo-elástica em estruturas de casca***

Projeto de pesquisa apresentado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche  
Sanches

SÃO CARLOS

2016

## ***Resumo***

ARALDI, Anna Caroline. **Desenvolvimento de código computacional para análise termo-elástica de estruturas de casca**. 39 f. Projeto de pesquisa, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2015.

O presente projeto propõe o desenvolvimento de formulação do método dos elementos finitos para análise termo-elástica de estruturas de casca, considerando interação com escoamentos de fluido compressíveis visando futuras aplicações em modelagem de estruturas em situação de incêndio. Para isso serão estudados quatro diferentes aspectos: a mecânica das estruturas computacional, a dinâmica dos fluidos computacional, a transferência de calor na estrutura e o problema acoplado. No caso de dinâmica das estruturas, adota-se a uma formulação totalmente Lagrangeana, baseada em posições, com cinemática de Reissner que contempla cascas espessas e evita problemas de aproximação de rotações finitas, e admite grandes deslocamentos. No caso da dinâmica dos fluidos computacional, busca-se uma formulação estável e que ao mesmo seja sensível à movimentação da estrutura, sendo empregada a descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária com integrador temporal implícito. A solução da transferência de calor no sólido é modelada por elementos finitos prismáticos de base triangular, os quais são acoplados aos elementos de casca. No que se refere ao acoplamento, busca-se modularidade e versatilidade, adotando-se o modelo particionado.

**Palavras-chave:** Interação fluido-estrutura. Termo-elasticidade. MEF. Cascas.

## ***Abstract***

ARALDI, Anna Caroline. **Development of computer code for thermo-elastic analysis in shell structures**. 39 f. Research Project, University of São Paulo at São Carlos School of Engineering. São Carlos, 2015.

The current project proposes the development of finite element method formulations applied to thermoelasticity analysis in shell structures, considering the interaction on compressible fluids flows, aiming future applications in modeling structures for emergency fire situations. Thus, there will be studied four different aspects: the computational structural mechanics, the computational fluid dynamics, the structure heat transfer and also the related problem. In the structural dynamics case, it will be adopted a totally Lagrangian formulation, based in positions, avoiding finite rotation approximation problems, with Reissner kinematics, covering thick shells, which admits large displacements. In the fluid dynamics computational case, the aim is to get a stable formulation which is also sensible to the structure movements, being used the Arbitrary Lagrangian-Eulerian description, with implicit time integration. The solution for the heat transfer in the solid is modeled for prismatic finite elements with triangular base, which are linked to the shell elements. In the matter of the linkage, it seeks to reach modularity and versatility, adopting the partitioned model

**Keywords:** Fluid-structure interaction. Thermoelasticity. FEM. Shells.

## ***Lista de Ilustrações***

<b>Figura 1 - Mudança de configuração .....</b>	<b>18</b>
<b>Figura 2 - Forças de superfície .....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 3 - Volume de controle infinitesimal e balanço de fluxo de massa .....</b>	<b>26</b>
<b>Figura 4 - Cinemática da descrição ALE .....</b>	<b>30</b>
<b>Figura 5 - Volume de controle infinitesimal e fluxo de calor .....</b>	<b>34</b>
<b>Figura 6 - Mapeamento posicional .....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 7 - Mapeamento da superfície média.....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 8 - Vetores de posição generalizados.....</b>	<b>42</b>

# ***Sumário***

<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>8</b>
1.1	Estado da arte .....	9
1.1.1	Dinâmica das estruturas computacional.....	9
1.1.2	Dinâmica dos fluidos computacional.....	11
1.1.3	Termodinâmica computacional .....	12
1.1.4	Problema de acoplamento .....	13
1.2	Justificativa .....	14
1.3	Objetivos .....	15
1.4	Cronograma.....	16
<b>2</b>	<b>Fundamentos da mecânica dos sólidos .....</b>	<b>17</b>
2.1	Cinemática dos corpos deformáveis – Deformações.....	17
2.1.1	Deformação de engenharia multiaxial .....	17
2.1.2	Deformação de Green-Lagrange .....	20
2.2	Tensões.....	21
2.3	Princípio dos trabalhos virtuais .....	22
2.4	Lei constitutiva .....	24
<b>3</b>	<b>Fundamentos da mecânica dos fluidos .....</b>	<b>25</b>
3.1	Equações governantes da mecânica dos fluidos.....	25
3.1.1	Conservação da massa .....	25

3.1.2	Quantidade de movimento .....	27
3.1.3	Conservação da energia .....	28
3.2	Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) .....	30
<b>4</b>	<b>Fundamentos da transferência de calor .....</b>	<b>33</b>
4.1	Equação da condução de calor .....	33
4.2	Análise transiente da condução de calor .....	35
4.2.1	Equações governantes do problema .....	35
4.2.2	Método de Galerkin .....	36
<b>5</b>	<b>Análise numérica de dinâmica não linear geométrica .....</b>	<b>38</b>
5.1	Método dos Elementos Finitos Posicional .....	38
5.2	Aplicação no EF de casca .....	40
5.3	Equilíbrio dinâmico do elemento .....	43
5.4	Integração temporal .....	45
<b>6</b>	<b>Resultados esperados .....</b>	<b>48</b>
6.1	Proposta de sumário estruturado .....	48
	<b>Referências .....</b>	<b>51</b>

# ***1 Introdução***

A construção civil busca constantemente atualizar-se tanto no campo tecnológico quando no científico, inclusive no que diz respeito a preocupação com a segurança do usuário da estrutura. Uma das grandes discussões acerca desse assunto, são os danos que podem ser ocasionados em uma situação de incêndio, onde a estrutura é exposta a deslocamento de gases em alta temperatura, podendo inclusive passar por situações de explosão.

Diante disso torna-se necessária uma análise criteriosa durante a etapa de projeto, considerando a possibilidade de a estrutura passar por situações como esta. Uma análise experimental pode produzir resultados muito confiáveis que permitam um projeto seguro, no entanto, tais análises nessa área são muito dispendiosas e complexas. Isso implica em grande interesse em códigos computacionais que possam simular de maneira adequada o comportamento de estruturas em tais situações.

Dessa forma, um código computacional ideal para tais simulações deve ser capaz de considerar o comportamento dinâmico da estrutura frente às solicitações decorrentes de forças, deslocamentos, variação da temperatura e de pressão nos ambientes. Nota-se a necessidade de uma análise não linear geométrica para a representação adequada do comportamento estrutural frente a grandes deslocamentos, não linear física, levando em consideração tanto o efeito da temperatura quanto do nível de tensão na lei constitutiva do material, e ainda a correta previsão das distribuições de forças e temperatura advindas da propagação de gases em altas temperaturas sobre a superfície da estrutura, bem como a condução de temperatura no elemento estrutural.

Para se obter uma previsão adequada da interação dos gases em alta temperatura com a estrutura, observa-se a necessidade de se analisar o problema sob o ponto de vista da interação fluido-estrutura (IFE), bem como a necessidade de uma análise de transferência de calor no sólido acoplado ao comportamento termo mecânico do material.

Embora as pesquisas nesse assunto já tenham atingido certa maturidade, ainda existem desafios a serem superados sendo que a análise numérica de alguns tipos de problemas ainda é inviável, e a maioria dos problemas demandam muito tempo de processamento. O desenvolvimento dos equipamentos de informática tem feito com que problemas cada vez maiores possam ser simulados em computadores pessoais (PC's), no



entanto, simulações realísticas para a maioria dos problemas multi-físicos só é possível em clusters com muitos processadores e com bastante tempo de processamento. Assim, o presente trabalho prevê o desenvolvimento de um algoritmo para o estudo de problemas de interação fluido compressível vs. estruturas de casca considerando transferência de calor e termo-elasticidade. Este torna-se viável com o aproveitamento de códigos computacionais desenvolvidos em trabalhos anteriores (Sanches e Coda 2013 e 2014) e com o emprego de técnicas de processamento paralelo em memória distribuída, utilizando para tal o cluster do departamento de engenharia de estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET-EESC-USP). Nota-se que este trabalho deve ater-se aos problemas termo-elásticos, ficando o emprego da plasticidade para trabalhos futuros.

## **1.1 Estado da arte**

### ***1.1.1 Dinâmica das estruturas computacional***

Apesar de existirem técnicas alternativas, o MEF é o método mais difundido na mecânica dos sólidos hoje, devido ao alto grau de desenvolvimento que se deu acerca de sua utilização nos últimos anos. Os trabalhos de Belytschko et al. (1977), Argyris et al. (1978), Argyris et al. (1979), Bathe et al. (1975) e Crisfield (1991) destacam-se como um dos grandes exemplos do que vem sendo produzido acerca do MEF para a análise de estruturas em regime de grandes deslocamentos, ressaltando o desenvolvimento da formulação corrotacional, uma das mais difundidas até os dias de hoje para a solução deste tipo de problema. Trabalhos de Simo e colaboradores (SIMO et al., 1984, 1986; SIMO; LAURSEN, 1992) não podem deixar de ser mencionados pelo grande impulso ao estudo da dinâmica não linear de estruturas via MEF em descrição Lagrangeana.

Os Elementos Finitos estruturais de maior interesse para o presente trabalho são os elementos de cascas, uma vez que com os mesmos é possível simular a maioria dos problemas estruturais bi ou tridimensionais a custos menores do que com o emprego de elementos de sólidos.

Casos de estruturas com grandes deslocamentos ou em que os efeitos de membrana sejam relevantes ou ainda em situações de “snap-through” ou “snap-back” são comuns em problemas de incêncio. Para que tais situações sejam corretamente analisadas é necessária uma análise não linear geométrica. Várias formulações Lagrangeanas foram e vêm sendo propostas para tal análise através do MEF. Como exemplo tem-se os trabalhos de Simo et al. (1984, 1986), Simo e Laursen (1992) e Schulz e Filippou (2001). No que diz respeito ao método dos elementos finitos na análise não linear geométrica de elementos de casca, os trabalhos de Hughes e Carnoy (1983), Hughes e Liu (1981b) e Hughes e Liu (1981a), Brendel e Ramm (1980), Shenglin Di, Ekkehard Ram (1993), Hanand Wriggers (2000) também merecem ser destacados.

Muitos trabalhos sobre análise não linear geométrica de cascas, placas ou pórticos, consideram a rotação em torno de cada eixo dentre os parâmetros nodais interpolados sobre os elementos, a exemplo de Teixeira e Awruch (2005), Battini e Pacoste (2006), Battini (2008). Tal procedimento é muito eficiente para pequenos deslocamentos, no entanto, em muitas destas formulações não se pode aplicar a comutatividade de rotações em grandes deslocamentos. Desta forma, nas formulações corrotacionais aplicam-se, por exemplo, as fórmulas de Euler-Rodrigues linearizadas para giro finito, mostrado em maiores detalhes por Coda e Paccola (2010)

Como alternativa Cirak et al. (2000) e Cirak e Ortiz (2001) apresentam uma formulação baseada em subdivisão para casca fina, de acordo com a teoria de Kirchhoff-Love, onde os elementos finitos utilizados são triangulares com 3 nós. Nesse caso, a rotação não é interpolada como parâmetro nodal e o campo de deslocamentos da casca é interpolado dos valores relativos às translações nodais, sendo que a base gerada pelo processo de subdivisão é uma base não local, ou seja, o campo de deslocamentos sobre um dado elemento depende, além dos valores nodais dos nós do elemento, dos valores dos nós de elementos imediatamente vizinhos a eles, definindo uma superfície limite conforme.

Bonet et al. (2000) e Coda (2003) introduzem a formulação posicional baseada no MEF para a análise não linear geométrica de sólidos e estruturas. Essa formulação utiliza posições atuais e componentes atuais de vetores inicialmente normais à superfície média como parâmetros nodais ao invés de deslocamentos e rotações, sendo bastante robusta e de simples implementação.

A formulação posicional vem se desenvolvendo de maneira bastante satisfatória como atestam os trabalhos de, Coda e Paccolla (2007), Coda (2009b), Coda (2009a) Sanches (2011) e Sanches e Coda (2013), que desenvolvem e descrevem melhorias

no elemento de casca em formulação posicional e aplicam esse elemento para problemas de interação fluido-estrutura com grandes deslocamentos.

A formulação posicional é didaticamente simples e apresenta solução independente do caminho de rotação, condição imprescindível para este tipo de aplicação (SANCHES e CODA; 2013), devendo essa formulação ser aplicada neste trabalho.

### ***1.1.2 Dinâmica dos fluidos computacional***

Trabalhos recentes dedicaram esforços significantes para desenvolver métodos estáveis para a dinâmica dos fluidos computacional, sendo que neste campo os métodos numéricos das Diferenças Finitas e dos Volumes Finitos são largamente utilizados, como pode ser visto em Anderson (1995) e Chung (2002) e trabalhos por eles citados. O Método dos Elementos Finitos (MEF), vem sendo bastante estudado no contexto da mecânica dos fluidos por pesquisadores renomados, resultando um número crescente de trabalhos de alto nível e ganhando espaço por diversos aspectos tal como a facilidade para a representação e imposição de condições de contorno em fronteiras de alta ordem.

O MEF começou a ser aplicado na mecânica dos fluidos há cerca de 40 anos, sendo aplicado pela primeira vez à análise de escoamentos viscosos incompressíveis na década de 1970 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Algumas características das equações governantes da mecânica dos fluidos, no entanto, fizeram com que a aceitação do MEF nesse contexto não fosse imediata.

Ao contrário dos problemas de elasticidade, com funcional com princípio de mínimo, onde qualquer método variacional (ex.: resíduos ponderados, PTV ou Método de Ritz com minimização do funcional de energia) pode produzir uma matriz de rigidez simétrica apresentando a propriedade da melhor aproximação, muitos problemas de dinâmica dos fluidos apresentam convecção dominante, o que gera matrizes assimétricas e oscilações espúrias nos resultados quando da aplicação do esquema clássico de Galerkin sobre uma descrição Euleriana (BROOKS HUGHES, 1982; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; TEIXEIRA; AWRUCH, 2005, CHUNG, 2002; STRANG; FIX, 2008).

Esse problema diminui com o refinamento da malha, no entanto, um método eficiente deve ser capaz de tratar o problema de forma estável mesmo em uma malha pouco

refinada. Nesse sentido foram sugeridas algumas alterações no processo de Galerkin, que em suma consistem em adicionar ao problema uma difusividade artificial capaz de suprimir as variações espúrias. Uma forma tradicional (métodos “upwind”) consiste em utilizar funções de peso de ordem maior que as funções de interpolação (processo de Petrov-Galerkin). Brooks e Hughes (1982) introduziram um processo desenvolvido totalmente a partir de um princípio variacional chamado StreamlineUpwindPetrov-Galerkin - SUPG, que consiste no emprego do processo de Petrov-Galerkin, escolhendo funções ponderadoras que adicionem difusividade na direção das linhas de corrente. Tezduyar e Senga (2006), Akin e Tezduyar (2004), Catabriga e Coutinho (2002) também apresentam estudos relevantes nesse tema, consolidando SUPG como uma técnica muito eficiente.

Quando se trata de problemas incompressíveis não é possível interpolação de mesma ordem para pressão e velocidades sem que hajam problemas de estabilidade, o que é denominado restrição de Babuska-Brezzi (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c; CHUNG, 2002; STRANG; FIX, 2008). Isso deve ser levado em consideração no momento da escolha do elemento finito e do algoritmo a ser empregado.

### ***1.1.3 Termodinâmica computacional***

A análise térmica de um elemento estrutural em situação de incêndio consiste em determinar a variação de temperatura ou a variação do campo de temperatura interno do elemento de interesse, a partir das condições de contorno provenientes do modelo de incêndio adotado.

Para determinação adequada da transferência de calor no interior dos elementos estruturais é necessário considerar a variação das propriedades térmicas dos materiais em situação de incêndio (RIGOBELLO; 2011). Isso implica na necessidade de uma análise não linear.

Ao contrário dos fluidos, onde a transferência de calor pode ocorrer predominantemente por convecção com o escoamento, no caso dos sólidos temos apenas os processos de condução e radiação, sendo o de condução o mais importante no caso em análise, como pode ser observado no trabalho de Rigobello (2011). Assim, a transferência de

calor em meios sólidos pode ser adequadamente modelada através da Lei de Fourier (ver LIENHARDT IV e LIENHARDT V (2005) e LEWIS et al. (2004) para maiores detalhes.)

Na maioria dos problemas de engenharia estrutural em situação de incêndio a análise térmica é transiente com condições de contorno dependentes do tempo e com propriedades dos materiais dependentes da temperatura, o que confere a tal análise um caráter consideravelmente não linear (RIGOBELLO, 2011). Isso implica na necessidade de se resolver a equação de condução no espaço e no tempo, configurando um problema de valor inicial com condições de contorno sobre toda a fronteira. Consequentemente, a maioria dos modelos avançados é desenvolvida com base no Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando um integrador temporal implícito ou explícito baseado em diferenças finitas.

#### ***1.1.4 Problema de acoplamento***

Os problemas de dinâmica das estruturas apresentam deformações finitas, de forma que a estrutura é adequadamente descrita na forma Lagrangeana, tendo como incógnitas principais os deslocamentos ou posições. Por outro lado, os fluidos em geral não resistem às tensões tangenciais, podendo se deformar indefinidamente, de modo que a formulação Euleriana, com velocidades como variáveis principais, torna-se mais adequada para a maior parte dos problemas. Isso implica na necessidade de se acoplar duas descrições matemáticas diferentes.

Uma estratégia bastante difundida é resolver o fluido empregando a descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) onde o domínio físico (computacional) pode se mover arbitrariamente independente do movimento da partícula do fluido (KANJI; MASUD, 2007, DONEA et al., 1982, HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1984, KHURRAM; MASUD, 2006).

A interação fluido-estrutura e o problema termo-mecânico, assim como outros problemas multi-físicos, podem ser tratados por uma abordagem monolítica, como nos trabalhos de Blom (1998) e Hron; Madlik (2007) ou particionada, como nos trabalhos de Felippa et al. (2001), Teixeira e Awruch (2005), Wall, Genkinger e Ramm (2007), Sanches e Coda (2013; 2014) e Sanches (2011). Nos métodos particionados, as equações governantes do fluido e da estrutura são integradas no tempo separadamente e as condições de contorno são

transferidas de um meio para o outro, sendo geralmente as condições de Dirichlet do fluido, obtidas a partir dos deslocamentos do sólido, e as condições de Neumann para a estrutura, obtidas a partir da pressão e tensões desviadoras no fluido. Já nos métodos monolíticos, ambos os domínios sólido e fluido são tratados como uma única entidade, sendo integrados simultaneamente no tempo.

O esquema particionado apresenta aspectos que justificam a sua implementação, como pode ser visto em Felippa et al. (2001), sendo que cada subdomínio pode ser tratado pela técnica de discretização e pelo algoritmo de solução mais eficiente de forma individual, o que garante a modularidade do código computacional. Além disso, fica facilitada a construção de malhas sem necessidade de coincidência nas interfaces.

Como desvantagem desse esquema, cita-se a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando da atualização explícita das condições na interface fluido-estrutura, bem como o problema de efeito de adição de massa (ver Brummelen (2009)), o que não ocorre nos esquemas monolíticos (BLUM; 1998). Isso no entanto pode ser resolvido com o emprego de técnicas adequadas de acoplamento (FELIPPA et al., 2001).

## **1.2 Justificativa**

Dada a importância dos problemas em estudo para a engenharia, aliada ao fato de que a tendência é projetar estruturas de forma cada vez mais racional, com materiais mais leves, ou seja, mais sensíveis a qualquer tipo de catástrofe, e ainda com geometria cada vez mais ousada, torna-se necessária uma análise bastante criteriosa de interação durante o projeto, considerando inclusive a possibilidade de ocorrência de incêndio. Sendo a análise experimental de problemas tais como incêndio bastante dispendiosa, e sendo o emprego de métodos numéricos para mecânica estrutural e dos fluidos um tema bastante atual, todo estudo ou avanço no referido objeto de estudo é de grande importância.

O presente projeto busca desenvolver ferramentas computacionais estáveis e realísticas baseadas no Método dos Elementos Finitos, sendo este um tema, embora não muito recente, ainda bastante atual.

Ao se dar sequência aos trabalhos de Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014), parte-se de um ponto bastante atual, com uma boa base de códigos computacionais já formada. A viabilidade deste trabalho pode ser assegurada devido à estrutura do laboratório de informática e mecânica computacional (LIMC), do Departamento de Engenharia de Estruturas, que possui um bom cluster para processamento paralelo em memória distribuída, com o qual será possível simular problemas bastante complexos.

### 1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma ferramenta computacional, baseada nos códigos já disponíveis, que permita a simulação de problemas de interação fluido-estrutura considerando tanto o comportamento termo-elástico como o efeito não linear de condução de calor nos elementos estruturais. Para tanto é possível listar alguns objetivos específicos a serem alcançados ao longo do desenvolvimento deste trabalho:

- i.* Elaboração de revisão bibliográfica visando estudo aprofundado da dinâmica não linear geométrica das estruturas, com enfoque em formulações com elementos de alta ordem livres da aproximação de grandes rotações;
- ii.* Estudo aprofundado da dinâmica dos fluidos compressível com ênfase em problemas com fronteiras móveis;
- iii.* Estudo dos problemas de condução de temperatura em sólidos;
- iv.* Implementação do programa para análise térmica transiente sobre a estrutura;
- v.* Implementação de modelos de acoplamento particionado do programa de análise térmica com os programas de mecânica dos fluidos e de dinâmica não linear de cascas;
- vi.* Estudo da eficiência dos modelos implementados por comparação com dados da literatura;
- vii.* Redação da dissertação e de artigos.

## 1.4 Cronograma

Com base nos objetivos estabelecidos no item anterior, compõe-se o seguinte cronograma:

Item/Bim	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
	2015	2015	2015	2015	2015	2015	2016	2016	2016	2016	2016	2016
<i>i</i>												
<i>ii</i>												
<i>iii</i>												
<i>iv</i>												
<i>v</i>												
<i>vi</i>												
<i>vii</i>												

	Atividade executada
	Atividade por executar



## ***2 Fundamentos da mecânica dos sólidos***

É conhecido que ao analisar o equilíbrio dos corpos podemos realizar basicamente dois tipos de observação, a linear ou a não-linear. Quando trata-se da linearidade, é estudado o equilíbrio na posição indeformada da estrutura, o que por sua vez, permite uma análise limitada de deslocamentos e deformações. Enquanto na análise não-linear geométrica (NGL), estuda-se o equilíbrio na posição atual da estrutura, ou seja, considerando as deformação e deslocamentos, sendo estes de qualquer proporção (CODA, 2003).

A NGL permite uma descrição mais ampla do que pode ser observado nas estruturas, descrevendo completamente sua trajetória de equilíbrio quando está submetida a níveis de carregamento aplicado, é possível ainda analisar a condição de estabilidade para cada aspecto do equilíbrio. As equações para a realização da NGL, podem ser obtidas aplicando as leis da mecânica clássica sobre um corpo deformável. Para tanto será feita a hipótese de que o sólido consiste em meio contínuo.

### **2.1 Cinemática dos corpos deformáveis – Deformações**

#### ***2.1.1 Deformação de engenharia multiaxial***

Sabe-se que todo sólido deformável pode passar por uma mudança de configuração ao sofrer uma ação externa, conforme pode-se ver na Figura 1.

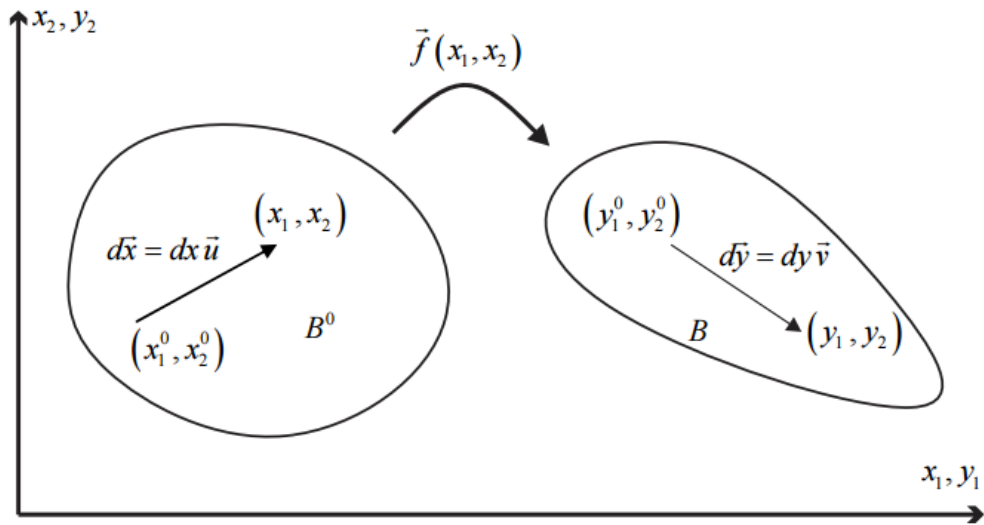


Figura 1 - Mudança de configuração  
Fonte: Coda, 2015

Seja  $\vec{f}$  uma função mudança de configuração,  $B_0$  o volume inicial do corpo e  $B$  sua configuração atual. Os vetores representados por  $\overrightarrow{dx}$  e  $\overrightarrow{dy}$  são dados respectivamente pelos seus comprimentos infinitesimais  $dx$  e  $dy$ , na direção dos vetores unitários  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . A função mudança de configuração é dada pela equação (3.1).

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \text{Grad}(\vec{f}) \cdot dx \quad (2.1)$$

Ou ainda como:

$$\overrightarrow{df} = \text{Grad}(\vec{f}) \cdot \overrightarrow{dx} \quad (2.2)$$

Chamamos de  $\mathbf{A}$  a matriz gradiente função mudança de configuração, e suas componentes são dadas como visto na Eq. (3.3).

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

Desta maneira, sabendo que  $\overrightarrow{df}$  é equivalente a  $\overrightarrow{dy}$  e reescrevendo a equação (3.2) em notação indicial:

$$\overrightarrow{dy} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{dx} \quad (2.4)$$

Se o comprimento  $dy$  é dado pela norma do vetor  $\overrightarrow{dy}$ , então:

$$dy^2 = (\vec{u}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \vec{u}) \cdot dx^2 \quad (2.5)$$

O alongamento relativo lagrangeano,  $\lambda$ , é definido como a razão entre o comprimento infinitesimal atual e inicial da fibra de estudo na direção do vetor  $\vec{u}$ , desta forma:

$$\lambda_{\vec{u}}^2 = (\vec{u}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \vec{u}) \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  é chamado de tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Sendo a deformação uniaxial de engenharia dada pela Eq. (3.7).

$$\varepsilon_{\vec{u}} = \frac{dy-dx}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \quad (2.7)$$

Define-se a deformação não linear de engenharia como:

$$\varepsilon_{\vec{u}} = \lambda_{\vec{u}} - 1 \quad (2.8)$$

Para definir a distorção de engenharia, marcam-se duas linhas quaisquer ortogonais no corpo deformado, seja o novo ângulo  $\theta$ , formado entre elas, a distorção é dada através da Eq. (3.9).

$$\gamma_{uv} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (2.9)$$

A deformação e distorção de engenharia podem ser escritas em função do alongamento relativo, o que resulta no pseudo tensor de engenharia.

$$\varepsilon_{eng} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_2 & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Sendo:

$$\gamma_{12} = \arccos\left(\frac{\vec{u} A^t A \vec{v}}{\lambda_{\vec{u}} \lambda_{\vec{v}}}\right) \quad (2.11)$$

A matriz da equação (3.10) não é um tensor, pois não respeita as leis de giro dos tensores, por isso é chamada de pseudo-tensor.

### 2.1.2 Deformação de Green-Lagrange

Fazendo a diferença entre os quadrados dos módulos dos vetores  $\vec{dx}$  e  $\vec{dy}$ , apresentados na Figura 1, tem-se:

$$|\vec{dy}|^2 - |\vec{dx}|^2 = \vec{dx}^t C \vec{dx} - \vec{dx}^t \vec{dx} = \vec{dx}^t (C - I) \vec{dx} = \vec{dx}^t 2E \vec{dx} \quad (2.12)$$

onde, I é o tensor identidade e E é a deformação de Green-Lagrange, que é escrita conforme a equação (3.13), sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker e  $i$  e  $j$  as componentes do tensor E.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.13)$$

A deformação de Green-Lagrange será utilizada neste trabalho.

## 2.2 Tensões

Seja o corpo da Figura 2, seccionado em duas partes, surgem forças internas distribuídas a fim de garantir o equilíbrio.

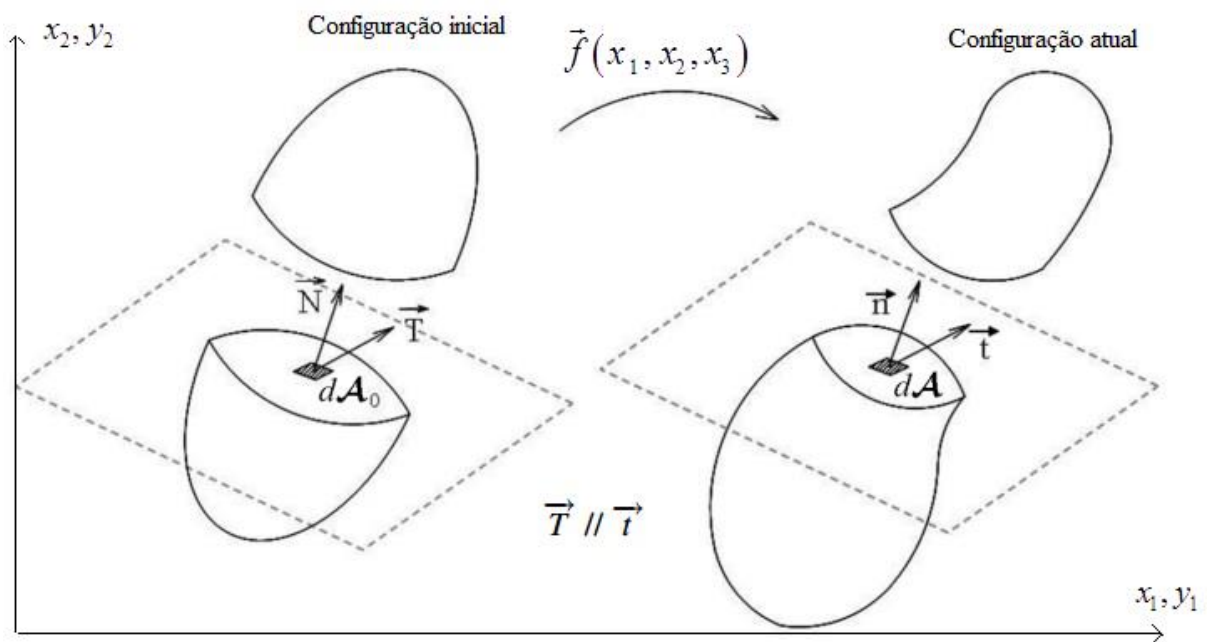


Figura 2 - Forças de superfície  
Fonte: Sanches, 2010

Seja  $\overline{df}$  o vetor resultante de forças que atua numa superfície infinitesimal, calculado pela Eq. (3.14).

$$\overline{df} = \vec{t} dA = \vec{T} dA_0 \quad (2.14)$$

onde  $\vec{T}$  é chamado vetor de forças de superfície de Piolla-Kirchhoff de primeira espécie e  $\vec{t}$  de vetor de forças de Cauchy.

Sendo assim, podemos obter os tensores das tensões reais de Cauchy e de Piolla-Kirchhoff, através das equações:

$$\vec{t}(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2, x_3) \vec{n} \rightarrow t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.15)$$

$$\vec{T}(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2, x_3)\vec{N} \rightarrow T_i = P_{ij}N_j \quad (2.16)$$

Pode-se obter a relação entre o tensor de tensões real e o tensor de Piolla-Kirchhoff de primeira espécie através da fórmula de Nanson:

$$P^T = J\sigma A^{-T} \rightarrow P_{ki} = J\sigma_{ij}B_{jk} \quad (2.17)$$

## 2.3 Princípio dos trabalhos virtuais

Quando um carregamento é aplicado a certo ponto da estrutura ele provoca um deslocamento, que será chamado aqui de  $\delta\vec{x}$ , desconsiderando neste momento a transferência de calor no corpo, sabe-se que o trabalho realizado pelas forças externas deve ser igual à energia de deformação das forças internas. Se este deslocamento  $\delta\vec{x}$  atender as condições de contorno essenciais inicialmente impostas à estrutura, e for compatível com a continuidade da função que o descreve, pode-se dizer, pela equação da quantidade de movimento Euleriana:

$$\sigma_{ij}\delta x_i + g_i\delta x_i = p_0\ddot{x}_i\delta x_i \quad (2.18)$$

Se a Eq. (2.18) é a equação local, integrando-se na configuração atual e aplicando o teorema da divergência, têm-se:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}\delta x_i n_j dA + \int_{\Omega} g_i\delta x_i dV = \int_{\Omega} \rho \ddot{x}_i\delta x_i dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta x_{i,j} dV \quad (2.19)$$

Ainda é possível escrever a Eq. (2.19) de forma vetorial

$$\int_{\Gamma} \vec{t} \cdot \overrightarrow{\delta x} dA + \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \overrightarrow{\delta x} dV = \int_{\Omega} \rho \ddot{\vec{x}} \cdot \overrightarrow{\delta x} dV + \int_{\Omega} t_r(\sigma^T \nabla(\overrightarrow{\delta x})) dV \quad (2.20)$$

Sendo o último termo da Eq. (2.20) conhecido como variação da energia de deformação.

A fim de se obter de forma Lagrangeana, toma-se a equação da quantidade de movimento em descrição Lagrangeana, expressa localmente por:

$$P_{ki,k} + G_i = \rho_0 \ddot{x}_i \quad (2.21)$$

Ponderando a Eq. (2.21) por  $\delta \vec{x}$ , integrando em relação à configuração inicial e aplicando o teorema da divergência, assumindo que  $\delta x_{i,k} = \delta A_{ik}$ , têm-se:

$$\int_{\Gamma_0} \vec{T} \cdot \overrightarrow{\delta x} dA_0 + \int_{\Omega_0} \vec{G} \cdot \overrightarrow{\delta x} dV_0 = \int_{\Omega_0} \rho \vec{\ddot{X}} \overrightarrow{\delta x} dV_0 + \int_{\Omega_0} P^T : \delta A dV_0 \quad (2.22)$$

Onde  $P^T$  é a tensão conjugada de  $A$ .

Seja o tensor de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie  $S$  dado por:

$$P^T = A S \quad (2.23)$$

Para obter a relação entre a tensão de Cauchy e a tensão de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie, substitui-se (2.23) em (2.18).

$$\sigma = \frac{1}{J} A S A^T \quad (2.24)$$

Substituindo a Eq. (2.23) em (2.22), levando em consideração as propriedades tensoriais e lembrando que  $S$  é conjugado energético de  $E$ :

$$\int_{\Gamma_0} \vec{T} \cdot \overrightarrow{\delta x} dA_0 + \int_{\Omega_0} \vec{G} \cdot \overrightarrow{\delta x} dV_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{\ddot{X}} \overrightarrow{\delta x} dV_0 + \int_{\Omega_0} S : \delta E dV_0 \quad (2.25)$$

Pode-se reescrever a Eq. (2.25) pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, como:

$$\delta \Pi = \delta \left[ \int_{\Gamma_0} \vec{T} \cdot \vec{x} dA_0 + \int_{\Omega_0} \vec{G} \cdot \vec{x} dV_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{\dot{x}} \cdot \vec{\dot{x}} dV_0 - \int_{\Omega_0} w dV_0 \right] = 0 \quad (2.26)$$

$$\Pi = \int_{\Gamma_0} \vec{T} \cdot \vec{x} dA_0 + \int_{\Omega_0} \vec{G} \cdot \vec{x} dV_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \vec{\dot{x}} \cdot \vec{\dot{x}} dV_0 - \int_{\Omega_0} w dV_0 \quad (2.27)$$

Onde a Eq. (2.26) representa a condição de estacionariedade da energia potencial total do sistema, e a Equação (2.27) representa a energia mecânica total do sistema, para forças conservativas.

## 2.4 Lei constitutiva

Neste trabalho será empregada a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, que é considerada uma generalização da Lei de Hooke que tem por objetivo contemplar materiais hiperelásticos (SANCHES, 2010).

Utilizando a deformação de Green-Lagrange, têm-se a seguinte equação para energia de deformação:

$$w = \frac{1}{2} E_{ij} D_{ijkl} E_{kl} = \frac{1}{2} E : D : E \quad (2.28)$$

Derivando (3.28) em relação ao tensor de deformações de Green-Lagrange, têm-se:

$$S = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} [tr(E)]I + 2GE \quad (2.29)$$

Onde  $S$  é o tensor de tensões de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie,  $E$  é o tensor de deformação de Green,  $E$  o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

Vale ressaltar que apesar da Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff ser particularizada para casos hiperelásticos a mesma só pode ser utilizada com segurança para pequenas deformações (SANCHES, 2010).



### ***3 Fundamentos da mecânica dos fluidos***

De acordo com Brunetti (2008), a “Mecânica dos Fluidos é a ciência que estuda o comportamento físico dos fluidos, assim como as leis que regem esse comportamento”, o fluido por sua vez pode ser definido como um material que quando sofre a ação de uma força tangencial qualquer se deforma continuamente, ou seja, não atinge uma nova posição de equilíbrio.

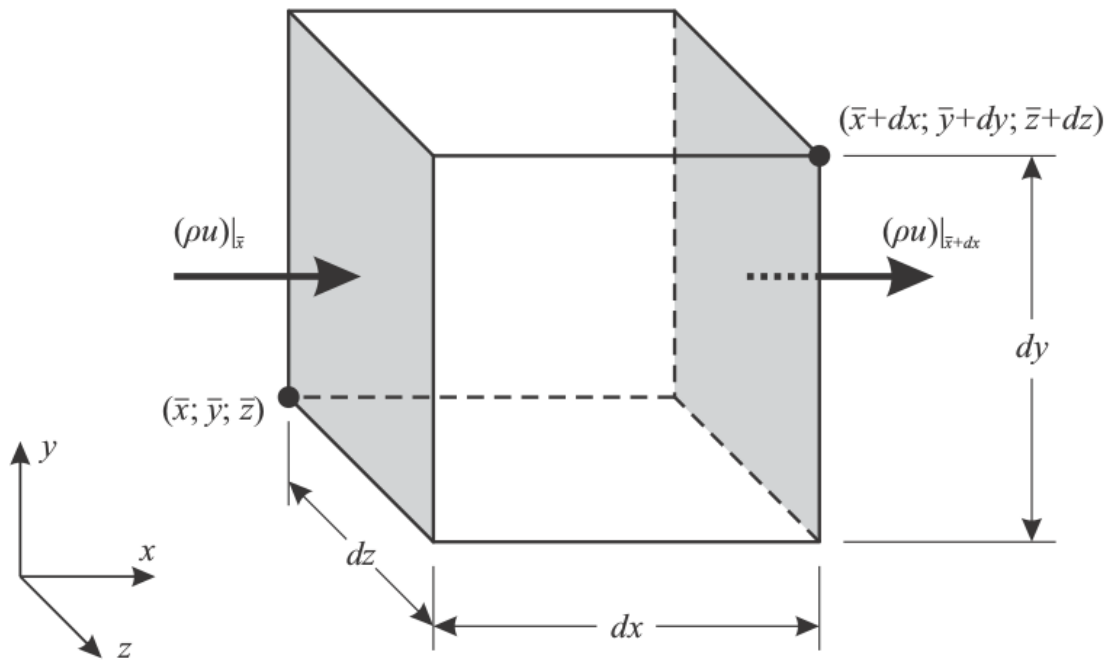
#### **3.1 Equações governantes da mecânica dos fluidos**

As equações que governam a Mecânica dos Fluidos podem ser descritas de acordo com as grandezas que desejam ser encontradas, elas podem ser escritas de acordo com as leis básicas da física, como a segunda Lei de Newton, a conservação da massa e a primeira Lei da Termodinâmica, considerando-se a hipótese de que o fluido encontra-se em um meio contínuo e que o fluido está limitado por um volume de controle.

As equações serão descritas na forma Euleriana, a qual é mais simples para descrever escoamentos.

##### ***3.1.1 Conservação da massa***

Admitindo-se um volume de controle infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , como visto na Figura 3, de dimensões iguais, submetido à um escoamento de velocidade  $\vec{V}(x, y, z)$ , de componentes  $u$  em  $x$ ,  $v$  em  $y$  e  $w$  em  $z$ , faz-se o balanço de massa, admitindo que a massa que entra é positiva e que sai é negativa, têm-se:



**Figura 3 - Volume de controle infinitesimal e balanço de fluxo de massa**  
**Fonte: Fernandes, 2016**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left( (\rho \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{x1}} + (\rho \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{y1}} + (\rho \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{z1}} + \left( \rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial x} dx \right) \cdot \overrightarrow{dA_{x2}} + \left( \rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial y} dy \right) \cdot \overrightarrow{dA_{y2}} + \left( \rho \vec{V} + \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial z} dz \right) \cdot \overrightarrow{dA_{z2}} \right) \quad (3.1)$$

Sendo  $\rho$  a densidade do material,  $\overrightarrow{dA_{x1}}, \overrightarrow{dA_{y1}}, \overrightarrow{dA_{z1}}, \overrightarrow{dA_{x2}}, \overrightarrow{dA_{y2}}, \overrightarrow{dA_{z2}}$ , os vetores área de entrada e saída ortogonais aos eixos  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente.

Resolvendo a Eq. (4.1) e considerando que a única componente não nula do vetor área é a componente normal à sua face, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = (\rho u + \rho v + \rho w)(-dA) + \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx + \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy + \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dA \quad (3.2)$$

Resolvendo a equação anterior e dividindo pelo volume têm-se a Equação da Conservação da Massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Quantidade de movimento

Seja a segunda Lei de Newton, escrita apenas na direção  $x$ , dada por:

$$\vec{F} = m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (3.4)$$

Sabendo que a massa é constante, pode-se dizer:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{u}) \quad (3.5)$$

Por definição  $m\vec{u}$  é a quantidade de movimento do sistema, e a derivada  $d/dt$  é conhecida como Derivada Substancial no tempo. De maneira geral, pode-se reescrever a segunda Lei de Newton, para o caso geral, da seguinte maneira:

$$\frac{D}{Dt} (m\vec{V}) = \sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_c \quad (3.6)$$

Sendo  $\vec{F}_s$  as forças atuantes no contorno e  $\vec{F}_c$  as forças de campo. Utilizando o mesmo volume de controle infinitesimal citado no item anterior, faz-se o balanço da quantidade de movimento em um tempo infinitesimal  $dt$ , apenas na direção  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (mu) &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dx dy dz + \left( \rho u (\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{x1}) + \rho u (\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{y1}) + \right. \\ &\left. \rho u (\vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}_{z1}) + \left( \rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial x} dx \right) \cdot \overrightarrow{dA}_{x1} + \left( \rho u \vec{V} + \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial y} dy \right) \cdot \overrightarrow{dA}_{y1} + \left( \rho u \vec{V} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{\partial(\rho u \vec{V})}{\partial z} dz \right) \cdot \overrightarrow{dA}_{z1} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Resolvendo a Eq. (4.7) e dividindo tudo pelo volume, têm-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = \frac{1}{dxdydz} (\sum F_{cx} + \sum F_{sx}) \quad (3.8)$$

A partir da terceira Lei de Newton (ação e reação), sabe-se que as forças devem estar em equilíbrio, portanto pode-se escrever:

$$g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{dx dy dz} (\sum F_{cx} + \sum F_{sx}) \quad (3.9)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.9) em (4.8), pode-se chegar a equação da quantidade de movimento na direção  $x$ . Analogamente, é possível encontrar também as equações para as direções  $y$  e  $z$ , vistas nas equações (4.11) e (4.12) respectivamente.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v \rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w \rho u)}{\partial z} = g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(u \rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(v \rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(w \rho v)}{\partial z} = g_y \rho + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(u \rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(v \rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(w \rho w)}{\partial z} = g_z \rho + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.12)$$

### 3.1.3 Conservação da energia

De acordo com a primeira Lei da Termodinâmica, o aumento da energia de um sistema é igual à diferença entre a transferência de energia por calor ao sistema, e a transferência de energia por trabalho realizado pelo o sistema, essa última também chamada de energia interna, é a soma de todas as energias dos elementos que constituem o sistema (LEWIS et al, 2004).

No âmbito da Mecânica dos Fluidos, a energia interna pode variar conforme a Eq. a seguir, sendo  $E$  a energia específica total,  $Q$  o fluxo de calor e  $W$  o trabalho.

$$\frac{D}{Dt}(mE) = Q - W \quad (3.13)$$

Fazendo o balanço de energia para o volume infinitesimal descrito anteriormente em um tempo infinitesimal  $dt$ , têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{D(mE)}{Dt} = Q - W = \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dxdydz - \left( (\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{x1}} + (\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{y1}} + \right. \\ \left. (\rho E \vec{V}) \cdot \overrightarrow{dA_{z1}} \right) - \left( \left( \rho E \vec{V} + \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial x} dx \right) \overrightarrow{dA_{x2}} + \left( \rho E \vec{V} + \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial y} dy \right) \overrightarrow{dA_{y2}} + \left( \rho E \vec{V} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial(\rho E \vec{V})}{\partial z} dz \right) \overrightarrow{dA_{z2}} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resolvendo a Eq. (4.12), dividindo-a pelo volume, têm-se:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - \frac{Q}{dxdydz} + \frac{W}{dxdydz} = 0 \quad (3.15)$$

Fazendo-se o balanço da quantidade de calor e do trabalho, no volume de controle, têm-se respectivamente as equações (4.14) e (4.15):

$$\frac{Q}{dxdydz} = k \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{W}{dxdydz} = \frac{\partial(-\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho w)}{\partial z} + \left( \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} + \right. \\ \left. \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \right) + \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalmente pode-se chegar à equação final da conservação de energia, a partir das Equações (4.15), (4.14) e (4.13).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial(-\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho v)}{\partial y} + \\ \frac{\partial(-\rho w)}{\partial z} + \left( \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \right. \\ \left. \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \right) + \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2 Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE)

Uma das maiores dificuldades quando se trata de interação fluido-estrutura se trata do acoplamento entre os dois meios, por se tratarem de duas descrições matemáticas distintas, o sólido é descrito em formulação Lagrangeana e o fluido em descrição Euleriana. Uma forma de resolver esta dificuldade é utilizando a descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE).

Esta formulação é obtida ao introduzir um domínio de referência, contínuo no tempo inicial e final:  $R$ ,  $C(t_0)$  e  $C(t)$ .

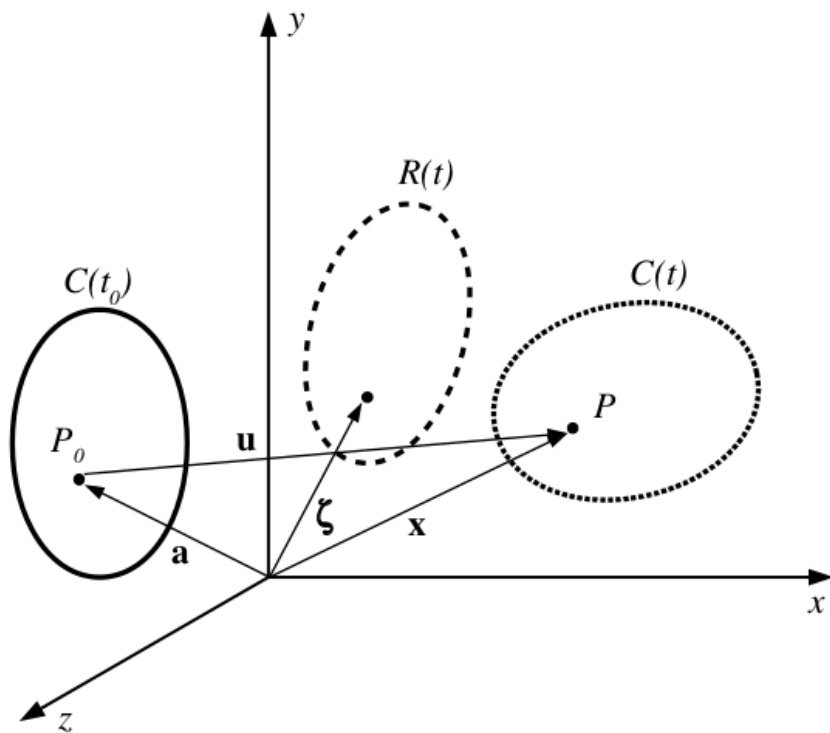


Figura 4 - Cinemática da descrição ALE  
Fonte: Fernandes, 2016

A posição inicial da partícula é representado pelo vetor  $\xi$  que está relacionado a partícula  $a$  e à variável  $t$  e pode ser definido como:

$$\xi_i = f_i(a_i, t) \quad (3.19)$$

Sendo assim, a formulação ALE propõe um mapeamento da configuração inicial para a configuração atual realizado através da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ :

$$J = \det(A) \text{ onde } A_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} \text{ com } i \text{ e } j = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad (3.20)$$

De acordo com Donea et al. (1982), pode-se obter a variação com o tempo através de:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.21)$$

sendo  $\boldsymbol{\omega}$  o vetor velocidade de movimentação do domínio de referência, dada por:

$$\omega_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \quad (3.22)$$

Tomando uma propriedade física qualquer dada por  $f(\xi_i, t)$ , expressa na configuração de referência como  $F(a_i, t)$ , tem-se através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial F(a_i, t)}{\partial t} = \left. \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial t} \right| + \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right) \quad (3.23)$$

Utilizando a regra do produto, tem-se:

$$J \nabla (f \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial J}{\partial t} f + J \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq. (4.20) em (4.22), pode-se extrair a cinemática do problema que pode ser representada por:

$$\frac{\partial (JF)}{\partial t} = J \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \boldsymbol{\omega}) \right] \quad (3.25)$$

Com o auxílio da Eq. (4.21), chamando  $f = \rho$  e escrevendo em notação indicial, pode-se chegar a equação da conservação da massa na descrição ALE:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \omega_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (3.26)$$

Analogamente podem se obter as equações da quantidade de movimento e da conservação de energia, respectivamente:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} - \rho g_i = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho E)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j} - \rho g_i u_i = \omega_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \quad (3.28)$$

É possível notar que ao supor a velocidade da malha ( $\omega$ ) igual a zero, recupera-se a descrição Euleriana, por outro lado, quando  $\omega = u$  recupera-se a descrição Lagrangeana.



## 4 Fundamentos da transferência de calor

De acordo com Incropera et al (2008), a transferência de calor ocorre sempre que há uma diferença de temperatura entre meios, e se dá por meio de energia térmica. Essa transferência pode se dar de três maneiras distintas, condução, convecção e radiação. A condução ocorre através da interação entre as partículas entre meios, a convecção ocorre quando há movimentação de fluido sobre uma superfície quando estes estiverem com diferentes temperaturas, e quando não há um meio entre duas superfícies diferentes, ocorre a radiação, que é a transferência de calor através da emissão de energia por ondas eletromagnéticas.

Cabe neste trabalho, estudar a formulação necessária para entender a transferência de calor através de condução.

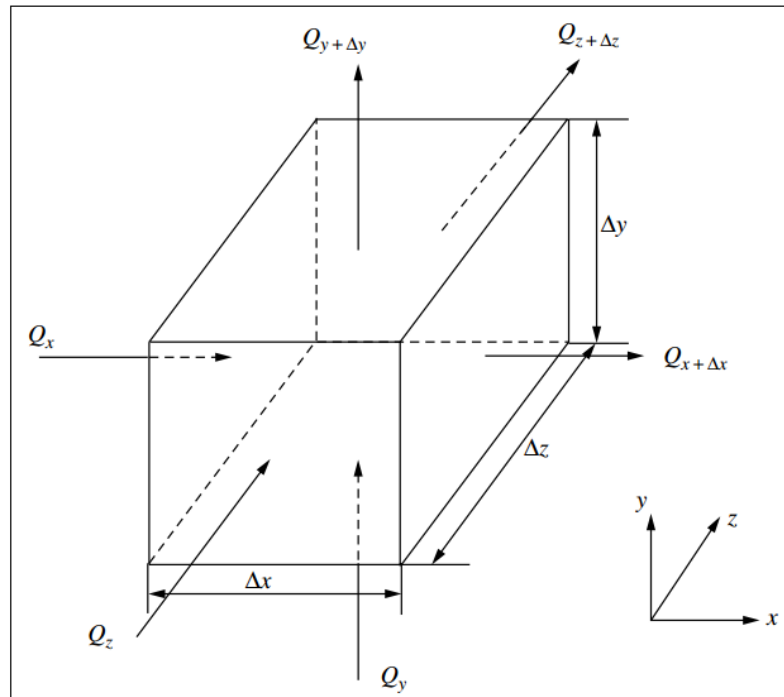
### 4.1 Equação da condução de calor

O principal objetivo ao se analisar a condução térmica é conhecer a distribuição de calor no meio, ou seja, determinar a temperatura como uma função do espaço no estado estacionário, e do tempo durante o estado transiente. Conhecendo a distribuição do calor, pode-se calcular o fluxo de calor através da Lei de Fourier, dada pela Eq. (4.1), para uma direção.

$$q_x = -k \frac{dt}{dx} \quad (4.1)$$

Onde  $q_x$  é o fluxo de calor no sentido de  $x$ ,  $k$  é a condutividade térmica,  $dt/dx$  é o gradiente de temperatura.

Derivando a equação da condução, aplicando a lei de conservação da energia para um volume de controle infinitesimal, dado pela Figura 5, encontra-se a solução da equação diferencial da distribuição de temperatura no meio.



**Figura 5 - Volume de controle infinitesimal e fluxo de calor**  
**Fonte: Lewis et al, 2006**

A expansão por Série de Taylor resulta em:

$$Q_{x+\Delta x} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \quad (4.2)$$

$$Q_{y+\Delta y} = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y \quad (4.3)$$

$$Q_{z+\Delta z} = Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z \quad (4.4)$$

Fazendo-se o balanço de energia, como sendo:

$$G\Delta x\Delta y\Delta z + Q_x + Q_y + Q_z = \rho\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial T}{\partial t} + Q_{x+\Delta x} + Q_{y+\Delta y} + Q_{z+\Delta z} \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.2), (4.3) e (4.4) em (4.5):

$$G\Delta x\Delta y\Delta z - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z \right) = \rho c_p \Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.6)$$

Assim a transferência de calor total para cada direção pode ser dada através das seguintes equações:

$$Q_x = \Delta y \Delta z q_x = -k_x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.7)$$

$$Q_y = \Delta x \Delta z q_y = -k_y \Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$Q_z = \Delta x \Delta y q_z = -k_z \Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.9)$$

Substituindo (4.7), (4.8) e (4.9) na Eq. (4.6), e dividindo tudo pelo volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , têm-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] + G = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.10)$$

A Eq. (5.10) expressa a condução de calor transiente em um sistema estacionário, nesta, a condutividade está representada por um vetor, porém, de forma geral, ela pode ser representada como um tensor, conforme segue abaixo.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

## 4.2 Análise transiente da condução de calor

### 4.2.1 Equações governantes do problema

Do ítem anterior, obteve-se a equação da condução de calor, para o problema transiente, esta pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + G = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.12)$$

Sendo,  $k_x(T)$ ,  $k_y(T)$  e  $k_z(T)$  as condutividades térmicas dependentes da temperatura nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. Seja  $\Gamma$  o contorno do corpo, têm-se as seguintes condições iniciais:

$$T = T_b \text{ em } \Gamma_b$$

$$k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} l + k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} m + k_z(T) \frac{\partial T}{\partial z} n + q + h(T - T_a) = 0 \text{ em } \Gamma_d$$

Onde,  $l$ ,  $m$  e  $n$  são os cossenos diretores,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor,  $T_a$  é a temperatura ambiente e  $q$  é o fluxo de calor no contorno. Sejam  $\Gamma_b \cup \Gamma_q = \Gamma$  e  $\Gamma_b \cap \Gamma_d = \emptyset$ .

#### 4.2.2 Método de Galerkin

A temperatura pode ser descrita no espaço como:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i(t) \quad (4.13)$$

Onde  $N_i$  são as funções de forma,  $n$  o número de nós de um elemento e  $T_i(t)$  as temperaturas nodais temporais. Reescrevendo a Eq. (4.12):

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + G - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Integrando por partes os primeiros três termos da Eq. (4.14) e substituindo o resultado em (4.13), têm-se a Eq. (4.15), onde  $i$  e  $j$  representam os nós:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[ k_x(T) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j(t) + k_y(T) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j(t) + k_z(T) \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} T_j(t) \right] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left[ N_i G - N_i \rho_c \frac{\partial N_j}{\partial t} T_j(t) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i q d\Gamma_q - \int_{\Gamma_q} N_i h(T - T_a) d\Gamma_q = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

A equação anterior ainda pode ser escrita como:

$$[C_{ij}] \left\{ \frac{\partial T_j}{\partial t} \right\} + [K_{ij}] \{T_j\} = \{f_i\} \tag{4.16}$$

Onde:

$$[C_{ij}] = \int_{\Omega} \rho c_p N_i N_j d\Omega \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
[K_{ij}] = & \int_{\Omega} \left[ k_x(T) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \{T_j\} + k_y(T) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \{T_j\} + k_z(T) \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \{T_j\} \right] d\Omega + \\
& \int_{\Gamma} h N_i N_j d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\{f_i\} = \int_{\Omega} N_i G d\Omega - \int_{\Gamma_q} q N_i d\Gamma_q + \int_{\Gamma_q} h N_i T_a d\Gamma_q \tag{4.19}$$

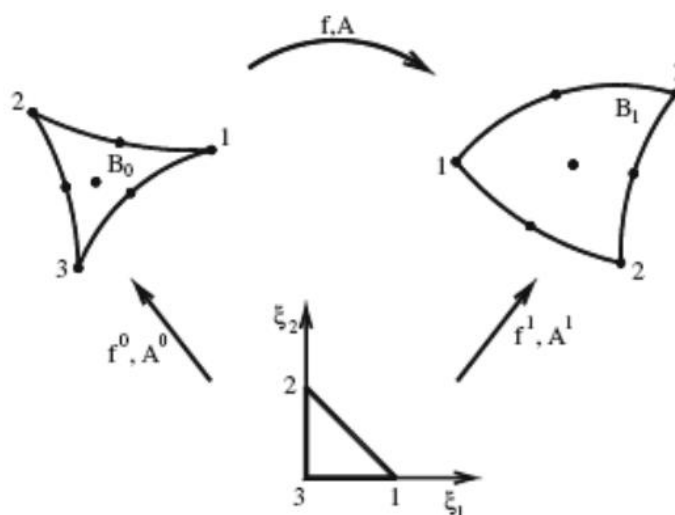
Como o tensor de condutividade é dependente da temperatura, a Eq. (4.16) é não-linear, e será necessário utilizar uma estratégia iterativa para a sua resolução.

## 5 *Análise numérica de dinâmica não linear geométrica*

Neste capítulo as definições introduzidas no Capítulo 2 serão aplicadas a elementos finitos de casca através do procedimento do Método dos Elementos Finitos baseado em posições.

### 5.1 Método dos Elementos Finitos Posicional

A formulação Lagrangeana posicional, introduzida por Bonet et al. (2000) e Coda (2003), é diferenciada da abordagem clássica ao substituir os parâmetros nodais de deslocamento por posições, ou seja, pelas próprias coordenadas atuais da estrutura. Dessa forma, as tensões e deformações podem ser calculadas em relação à configuração de referência.



**Figura 6 - Mapeamento posicional**  
Fonte: Coda; Paccola, 2007

Na Figura 6 é possível analisar o elemento finito  $B_0$  na configuração inicial e  $B_1$  após passar pela influencia de uma função mudança de configuração  $f$ . Ao trabalhar com o Método dos Elementos Finitos (MEF), é possível determinar essa função através da utilização de um espaço adimensional, mapeado por coordenadas auxiliares  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$ . (CODA;

PACCOLA, 2007). Determina-se, portanto, a aproximação para a função mudança de configuração como:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f^0} &= \overrightarrow{f^0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_i^0 &= X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_{ji}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Onde  $X_i$  é o componente  $i$  do vetor de posição inicial e  $X_{ji}$  é o valor da coordenada inicial  $i$  para o nó  $j$  e  $N_j$  é a função aproximadora associada ao nó  $j$ .

A função  $f^0$  é entendida como uma função mudança de configuração fictícia do espaço adimensional para a configuração inicial (CODA, PACCOLA, 2007), pode-se escrever também a função  $f^1$  que representa uma mudança do espaço adimensional para a configuração atual, como:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f^1} &= \overrightarrow{f^1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vec{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow f_i^1 &= x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_{ji}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Onde  $x_i$  é o componente  $i$  do vetor de posição atual e  $x_{ji}$  é o valor da coordenada atual  $i$  para o nó  $j$ .

A fim de determinar a função mudança de configuração  $f$ , cujo domínio é  $B_0$  e a imagem  $B_1$ , pode-se realizar a aplicação linear de  $f^1$  sobre a imagem de  $(f^0)^{-1}$ , ou seja:

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}) = (\overrightarrow{f^1}) \circ (\overrightarrow{f^0})^{-1}\quad (5.3)$$

Analogamente tem-se o gradiente da função mudança de configuração:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1(\mathbf{A}^0)^{-1}\quad (5.4)$$

Onde  $\mathbf{A}^1$  e  $\mathbf{A}^0$  podem ser escritos como:

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = N_{k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)X_{ki}\quad (5.5)$$

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = N_{k,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)x_{ki} \quad (5.6)$$

Assim, é possível obter também os tensores de alongamento à direita de Cauchy-Green e a deformação de Green-Lagrange:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = [(\mathbf{A}^1)(\mathbf{A}^0)^{-1}]^T [(\mathbf{A}^1)(\mathbf{A}^0)^{-1}] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}\{[(\mathbf{A}^1)(\mathbf{A}^0)^{-1}]^T [(\mathbf{A}^1)(\mathbf{A}^0)^{-1}] - \mathbf{I}\} \quad (5.8)$$

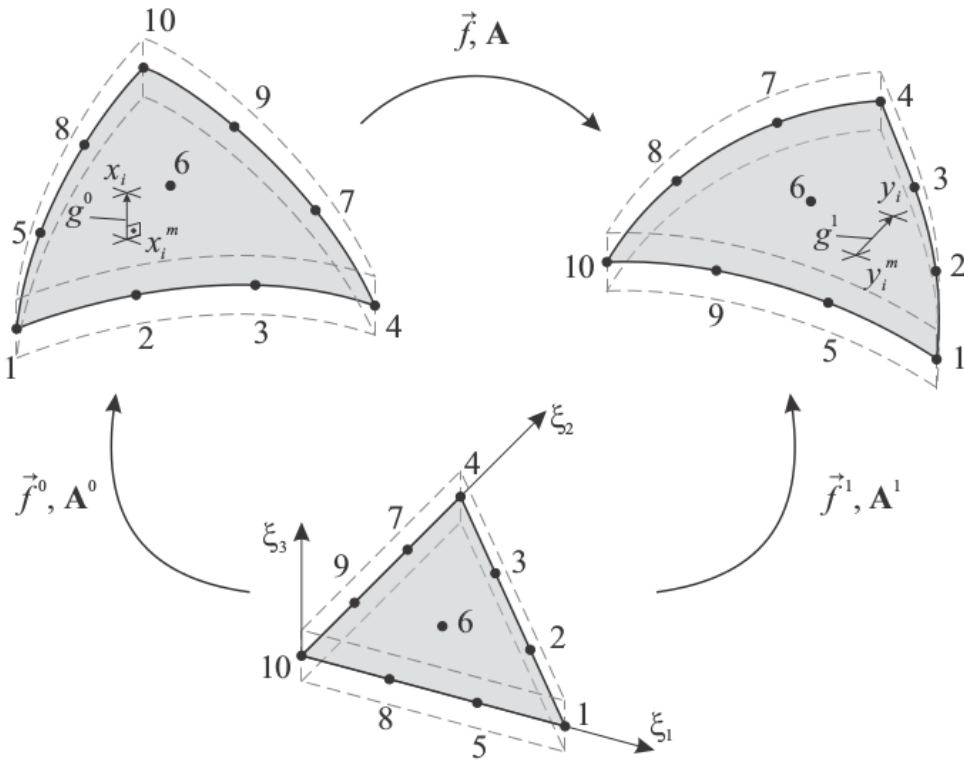
As Eq. (5.7) e (5.8) demonstram que é possível calcular as tensões e deformações apenas conhecendo a posição inicial e final do sólido. A partir deste ponto é possível calcular todos os termos do funcional de energia potencial total da Eq. (2.27).

## 5.2 Aplicação no EF de casca

Cascas são elementos estruturais tridimensionais conhecidos por possuir uma dimensão muito menor que as demais. Assim, pode-se desenvolver um modelo de movimentação descrito a partir de sua superfície média, reduzindo o número de graus de liberdade do problema, em comparação com outros elementos tridimensionais.

O elemento de casca empregado neste trabalho é isoparamétrico, triangular de 10 nós com aproximação por polinômios de Lagrange de ordem cúbica, cuja cinemática é apresentada na Figura 7. Este elemento possui 7 graus de liberdade por nó: três correspondentes às coordenadas x, y e z e três graus de definindo as componentes do vetor g inicialmente normal à superfície média e não necessariamente normal na configuração atual, de acordo com a cinemática de Reissner; e, finalmente, a taxa de variação linear da deformação ao longo da espessura do elemento, adicionada à formulação para se evitar o travamento pelo efeito de Poisson (CODA; PACCOLA, 2008).





**Figura 7 - Mapeamento da superfície média**

Fonte: Fernandes, 2016

De acordo com Coda e Paccola (2009) é necessário que cada ponto da casca seja mapeado, para isso, tem-se que a diferença entre um ponto fora da superfície média e um ponto correspondente pertencente à superfície média é responsável por gerar um vetor posição na configuração inicial e outro na configuração atual, assim é possível definir qualquer ponto na casca adicionando-se o vetor posição ao ponto correspondente na superfície média:

$$X_i = X_i^m + g_i^0 \quad (5.9)$$

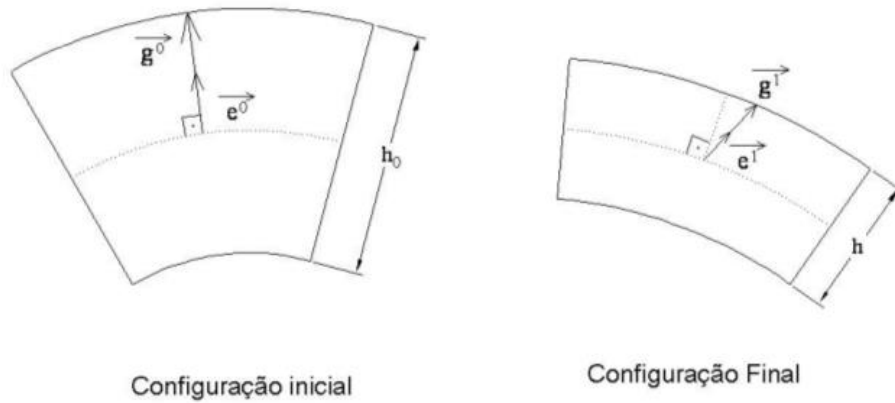
$$x_i = x_i^m + g_i^1 \quad (5.10)$$

Onde  $g_i^0$  é o vetor posição generalizado na configuração inicial, e  $g_i^1$  é o vetor posição na configuração atual. Estes devem ser escritos em função das coordenadas adimensionais, podem ser escritos como:

$$g_i^0 = \frac{h_0(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^0(\xi_1, \xi_2) \xi_3 \quad (5.11)$$

$$g_i^1 = \frac{h(\xi_1, \xi_2)}{2} e_i^1(\xi_1, \xi_2) \xi_3 \quad (5.12)$$

Onde  $h_0$  e  $h$  são as espessuras na configuração inicial e atual, respectivamente e  $e_i^0$  e  $e_i^1$  são as componentes  $i$  dos vetores unitários normais às superfícies média inicial, e não necessariamente normais as superfícies médias atual, como visto na Figura 8.



**Figura 8 - Vetores de posição generalizados**  
Fonte: Sanches, 2011

O vetor  $e_i^0$  pode ser aproximado pelas funções de forma até adquirir o seguinte aspecto:

$$e_i^0(\xi_1, \xi_2) = N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0 \quad (5.13)$$

Onde  $e_{ij}^0$  é o valor nodal do vetor unitário normal a superfície média no nó  $j$  da configuração inicial. Coda e Paccola (2007), propõe a seguinte aproximação para a configuração final, onde  $\bar{g}_i$  é também um vetor generalizado, porém não unitário:

$$h(\xi_1, \xi_2) e_i^1(\xi_1, \xi_2) = h_0 \bar{g}_i(\xi_1, \xi_2) \quad (5.14)$$

A espessura atual, varia de acordo com:

$$h(\xi_1, \xi_1) = h_0 \sqrt{\bar{g}_i(\xi_1, \xi_1) \bar{g}_i(\xi_1, \xi_1)} \quad (5.15)$$

e o vetor unitário  $e_i^1$  é dado por:

$$e_i^1 = \frac{\overline{g}_i(\xi_1, \xi_1)}{\sqrt{g_i(\xi_1, \xi_1) \overline{g}_i(\xi_1, \xi_1)}} \quad (5.16)$$

A partir disso, é possível finalmente escrever os vetores generalizados como:

$$g_i^0 = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0 \quad (5.17)$$

$$g_i^1 = \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) \overline{G}_{ij} \quad (5.18)$$

Até esta etapa não foi considerada a deformação ao longo da espessura da casca, fato que pode ser responsável por aumentar a rigidez desta em casos que o coeficiente de Poisson não é nulo. A fim de considerar essa variação, introduz-se uma taxa de variação linear da deformação,  $a$ , dada por:

$$a(\xi_1, \xi_2) = N_j(\xi_1, \xi_2) a_j \quad (5.19)$$

Assim, pode-se, finalmente, reescrever as Eq. (5.9) e (5.10), como:

$$f_i^0 = X_i = N_j(\xi_1, \xi_2) X_{ji} + \frac{h_0}{2} \xi_3 N_j(\xi_1, \xi_2) e_{ij}^0 \quad (5.20)$$

$$f_i^1 = x_i = N_j(\xi_1, \xi_2) x_{ji} + \frac{h_0}{2} [\xi_3 + N_j(\xi_1, \xi_2) a_j \xi_3^2] N_j(\xi_1, \xi_2) \overline{G}_{ij} \quad (5.21)$$

### 5.3 Equilíbrio dinâmico do elemento

Tomando-se como base a Eq. (2.26) é possível equacionar o equilíbrio dinâmico de um sólido qualquer, na forma fraca:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left[ \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial(\dot{y} \cdot \dot{y})}{\partial y} \cdot \delta y \right] d\Omega_0 - F \cdot \delta y \\ & - \int_{\Omega_0} (b_0 \cdot \delta y) d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} (p \cdot \delta y) d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial u_e}{\partial y} \delta y \right] d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Separando a derivada parcial presente na primeira parte da Eq. (5.22), tem-se em notação indicial:

$$\frac{\partial(y_i \dot{y}_i)}{\partial y_j} = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} \dot{y}_i + \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \dot{y}_i = 2 \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} \dot{y}_i \quad (5.23)$$

Conhecendo a velocidade e a aceleração como sendo, respectivamente, e que a derivada em relação ao tempo é unidimensional:

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial t} \text{ e } \dot{y}_j = \frac{\partial y_j}{\partial t} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_j} = \frac{\dot{y}_i}{\dot{y}_j} \quad (5.25)$$

Substituindo a Eq. (5.25) em (2.23), pode-se finalmente reescrever a primeira parcela da Eq. (5.22), como sendo:

$$\int_{\Omega_0} \left[ \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial(\dot{y} \cdot \dot{y})}{\partial y} \cdot \delta y \right] d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{Y} \delta y d\Omega_0 \quad (5.26)$$

Onde  $\ddot{Y}$  contem os valores nodais de aceleração.

Sabendo que a energia de deformação para a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff pode ser escrita conforme na Eq. (5.8), como função da deformação de Green, e é dependente da posição do sólido, pode-se aplicar a regra da cadeia sobre a Eq. (5.22) e reescrevê-la como:

$$\int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial u_e}{\partial y} \delta y \right] d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E} : \frac{E}{\partial Y} \cdot \delta y \right] d\Omega_0 \quad (5.27)$$

Finalmente, pode-se reescrever a Eq. (5.22), como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{Y} \delta y \, d\Omega_0 - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y} \\ & - \int_{\Omega_0} (b_0 \cdot \delta \mathbf{y}) \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} (p \cdot \delta \mathbf{y}) \, d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] \, d\Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como  $\delta \mathbf{y}$  é arbitrário, pode-se concluir que a equação do equilíbrio dinâmico pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{Y} \, d\Omega_0 - \mathbf{F} - \int_{\Omega_0} b_0 \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} p \, d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \left[ \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} \right] \, d\Omega_0 = 0 \quad (5.29)$$

Ou ainda de forma matricial, onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa do elemento,  $\mathbf{F}^{ext}$  corresponde ao somatório de forças externas aplicadas no elemento,  $\mathbf{F}^{int}$  representa as forças elásticas e  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} = 0 \quad (5.30)$$

## 5.4 Integração temporal

Para este trabalho será adotado o integrador temporal de Newmark  $\beta$ , apesar deste apresentar problemas se aplicado a problemas com não-linearidade, Coda e Paccola (2009) mostram que ele pode ser utilizado para a maioria dos problemas de casca quando aplicado com uma formulação Lagrangeana total. Assim, para a formulação posicional Coda e Paccola (2009) descrevem a seguinte formulação para este integrador:

$$x_{s+1} = x_s + \Delta t \dot{x}_s + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_s + \beta \ddot{x}_{s+1} \right] \quad (5.31)$$

e

$$\dot{x}_{s+1} = \dot{x}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{x}_s + \gamma\Delta t\ddot{x}_{s+1} \quad (5.32)$$

Como visto nas Eq. (5.31) e (5.32) este método é caracterizado por encontrar as velocidades e acelerações nos instantes de tempo  $t + \Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o incremento de tempo e  $\beta$

e  $\gamma$  são parâmetros que dependem do comportamento da aceleração, quando se admite aceleração constante tem-se  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$ .

Sabendo que a minimização do funcional de energia é dada por:

$$\frac{\partial U_e}{\partial x} - \mathbf{F} + \mathbf{M}\ddot{x} + \mathbf{C}\dot{x} = 0 \quad (5.33)$$

O equilíbrio no instante  $t_{s+1}$  pode ser dado por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial U_e}{\partial x} - \mathbf{F}_{s+1} + \mathbf{M}\ddot{x}_{s+1} + \mathbf{C}\dot{x}_{s+1} = 0 \quad (5.34)$$

Substituindo as Eq. (5.31) e (5.32) em (5.34), é possível obter:

$$\frac{\partial U_e}{\partial x} - \mathbf{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \ddot{x}_{s+1} - \mathbf{M}Q_s + \mathbf{C}R_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \dot{x}_{s+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C}Q_s = 0 \quad (5.35)$$

Onde os vetores  $Q_s$  e  $R_s$  são as contribuições dinâmicas do passado e são dados respectivamente por:

$$Q_s = \frac{x_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{x}_s}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_s \quad (5.36)$$

$$R_s = \dot{x}_s + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{x}_s \quad (5.37)$$

Para solucionar o problema de não-linearidade do problema, opta-se por utilizar uma estratégia numérica para a solução, sendo esta dada pelo processo de Newton-Raphson. Este processo pode ser realizado igualando a segunda variação do funcional de energia a um vetor de desbalanceamento mecânico:

$$\nabla \mathcal{F}(x_{s+1}) = \frac{\partial^2 U_e}{\partial x^2} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (5.38)$$

Aproximando os termos de primeira ordem por série de Taylor, tem-se:

$$0 = \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x^0) \cong \nabla \mathcal{F}(x^0) \Delta x \quad (5.39)$$

Para solucionar o problema através do processo de Newton-Raphson deve-se estimar, para cada passo no tempo, um valor para  $x_{s+1}^0$  para a posição final  $x_{s+1}$ , normalmente estimada como sendo a posição inicial  $x_s$ , e então:

$$\nabla \mathcal{F}(x_s^l) \Delta x = -\mathcal{F}(x_s^l) \quad (5.40)$$

$$x_{s+1}^{l+1} = x^l + \Delta x \quad (5.41)$$

Sendo este o processo iterativo de solução, onde  $l$  é o número de iterações.

## **6 Resultados esperados**

Quatro diferentes problemas serão abordados simultaneamente: A dinâmica das estruturas computacional, a dinâmica dos fluidos computacional, a análise térmica de sólidos e o problema de interação. Para se cumprir tais objetivos de maneira eficiente, uma metodologia de aproveitamento dos códigos desenvolvidos anteriormente no grupo de pesquisa é imprescindível.

Destaca-se, portanto, que há uma plataforma computacional disponível para o desenvolvimento da pesquisa, a qual conta com um programa para análise transiente de dinâmica dos fluidos compressível com fronteiras móveis, acoplado a um programa de dinâmica não linear geométrica de cascas escrito em Fortran 77, empregando processamento paralelo com protocolo MPI. Nesta pesquisa deve ser mantido o protocolo MPI bem como a linguagem Fortran, sendo utilizado o ambiente Linux devido à disponibilidade de várias ferramentas livres para compilação, edição de código e visualização científica.

A interpretação dos resultados (pósprocessamento) será feita através de programa de visualização científica livres, como KitwareParaview, ou outros visualizadores disponíveis no Departamento de Estruturas.

### **6.1 Proposta de sumário estruturado**

Espera-se, ao final do desenvolvimento deste trabalho, obter os seguintes itens:

#### **1 Introdução**

##### **1.1 Estado da arte**

- 1.1.1 Dinâmica das estruturas computacional
- 1.1.2 Dinâmica dos fluidos computacional
- 1.1.3 Termodinâmica computacional
- 1.1.4 Problema de acoplamento

##### **1.2 Justificativa**



### 1.3 Objetivos

## **2 Fundamentos da mecânica dos sólidos**

### 2.1 Cinemática dos corpos deformáveis – Deformações

#### 2.1.1 Deformação de engenharia multiaxial

#### 2.1.2 Deformação de Green-Lagrange

### 2.2 Tensões

### 2.3 Princípio dos trabalhos virtuais

### 2.4 Lei constitutiva

## **3 Fundamentos da mecânica dos fluidos**

### 3.1 Equações governantes da mecânica dos fluidos

#### 3.1.1 Conservação da massa

#### 3.1.2 Quantidade de movimento

#### 3.1.3 Conservação da energia

### 3.2 Descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE)

## **4 Fundamentos da transferência de calor**

### 4.1 Equação da condução de calor

### 4.2 Análise transiente da condução de calor

#### 4.2.1 Equações governantes do problema

#### 4.2.2 Método de Galerkin

## **5 Análise numérica de dinâmica não linear geométrica**

### 5.1 Método dos Elementos Finitos Posicional

### 5.2 Aplicação no EF de casca

### 5.3 Equilíbrio dinâmico do elemento

### 5.4 Integração temporal

### 5.5 Exemplos do programa de casca

## **6 Análise numérica de dinâmica dos fluidos**

### 6.1 Discretização no tempo

#### 6.1.1 Aspectos matemáticos do problema

#### 6.1.2 Solução numérica

#### 6.1.3 Estabilidade da formulação

### 6.2 Discretização espacial

### 6.3 Condições de contorno

### 6.4 Elemento utilizado

### 6.5 Exemplos

## **7    Análise numérica de transferência de calor**

- 7.1    Discretização do problema
- 7.2    Condições de contorno
- 7.3    Elemento utilizado
- 7.4    Exemplos

## **8 Acolpamento em descrição Lagrangeana-Euleriana-Arbitrária (ALE)**

- 8.1    Transferência de forças e velocidades
- 8.2    Movimentação dinâmica da malha do domínio do fluido
- 8.3    Processo de acoplamento
- 8.4    Verificações

## **9    Conclusão**

## **Referências**

## *Referências*

ANDERSON, J. D. **Computational fluid dynamics - the basics with applications**. 1st. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.

AKIN, J. E.; TEZDUYAR, T. E. Calculation of the advective limit of the supg stabilization parameter for linear and higher-order elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 21-22, p. 1909 – 1922, 2004.

ARGYRIS, J. et al. Finite element method – the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, n. Part 1, p. 1 – 106, 1979.

ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; SCHARPF, D. W. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 14, n. 3, p. 401 – 451, 1978.

BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deromation dynamic analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, 9, p. 353–386, 1975.

BATTINI, J. M. A non-linear corotational 4-node plane element. **Mechanics Research Communications**, v. 35, n. 6, p. 408 – 413, 2008. ISSN 0093-6413.

BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 44-47, p. 6362 – 6377, 2006. ISSN 0045-7825

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 11, n. 1, p. 65–84, 1977. ISSN 0029-5981.

BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, n. 3-4, p. 369 – 391, 1998. ISSN 0045-7825.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579 – 595, 2000. ISSN 0045-7825.

BRENDEL, B.; RAMM, E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells, **Computers & Structures**, Volume 12, Issue 4, October 1980, Pages 549-558

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes

equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 199 – 259, 1982.

BRUMMELEN, E. H. VAN. Added Mass Effects of Compressible and Incompressible Flows in Fluid-Structure Interaction **Journal of Applied mechanics**, 76: 021206, 2009.

BRUNETTI, F. (2008). **Mecânica dos Fluidos**. São Paulo: Pearson Education.

CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. A Implicit supg solution of Euler equations using edge-based data structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 32, p. 3477 – 3490, 2002. ISSN 0045-7825.

CHUNG, T. J. **Computational fluid dynamics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

CHUNG, S. H.; WRIGGERS, P. An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Volume 189, Issue 2, 1 September 2000, Pages 651-671.

CIRAK; ORTIZ, M. Fully c1-conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, p. 813–833, 2001.

CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A lagrangian-eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. **Computers & Structures**, v. 83, n. 6-7, p. 491 – 498, 2005. ISSN 0045-7949. Frontier of Multi-Phase Flow Analysis and Fluid-Structure.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; SCHROEDER, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, p. 2039–2072, 2000.

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 198, n. 47-48, p. 3712–3722, 2009.

CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 6, n. 3, p. 187–212, Sep 2009. ISSN 1679-7817.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107 – 1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, 40, n. 1, p. 185–200, Jun 2007.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 168 p. Tese (Tese para concurso de professor titular) — Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES. **ÁREA ENGENHARIA I - Documento de Área 2013**, disponível em: <http://www.capes.gov.br/component/content/article/44-avaliacao/4668-engenharias-i>, Acessado em 16/10/2013.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES. **ÁREA ENGENHARIA I - Considerações sobre multidisciplinariedade e interdisciplinariedade na área**, disponível em: <http://www.capes.gov.br/component/content/article/44-avaliacao/4668-engenharias-i>, Acessado em 16/10/2013.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. England: John Wiley & Sons, 1991.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 33, n. 1-3, p. 689 – 723, 1982.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 24-25, p. 3247 – 3270, 2001.

FERZIGER, J. Simulation of complex turbulent flows: recent advances and prospects in wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 46-47, p. 195 – 212, 1993.

HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 8, n. 5, p. 1431 – 1458, 2007

HUGHES, T. J. R.; CARNOY, E. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 39, n. 1, p. 69 – 82, 1983.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 26, n. 3, p. 331 – 362, 1981. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells- part ii. two-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 27, n. 2, p. 167 – 181, 1981. ISSN 0045-7825.

INCROPERA, F. P. (2007). **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. Chichester: John Wiley & Sons.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. Lectures in mathematical models of turbulence. New York: Academic Press, 1972.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, p. 269–289, 1974.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. (2004). **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow**. Chichester: John Wiley & Sons.

LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H. (2005). **A heat transfer textbook**. Massachusetts: Phlogiston Press.

MASUD, A. **A space–time finite element method for fluid–structure interaction**. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1993.

MASUD, A.; HUGHES T. J. R. A space–time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier–Stokes equations for moving domain problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 1997; 146:91–126.

RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio**. Tese de Doutorado — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2011.

SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos**. Tese de Doutorado — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2011.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-Structure Interaction Using an Arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid Solver Coupled to a Positional Lagrangian Shell Solver. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 1627-1647, 2010.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An Embedded Domain Technique Based on Level-Sets for Finite Element Method (FEM) Fluid-Shell Coupling. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 4801-4818, 2010.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 177-196, 2013.

SANCHES, R. A.K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary Lagrangian–Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, p. 3401-3418, 2014.

SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 50, n. 4, p. 761–785, Feb 10 2001. ISSN 0029-5981.

SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 42, n. 3, p. 301–330, 1984. ISSN 0045-7825.

SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. **Computers & Structures**, 42, n. 1, p. 97–116, Jan 1992.

SIMO, J. C. et al. Finite deformations post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 23, n. 5, p. 779–800, May 1986. ISSN 0029-5981.

STRANG, G.; FIX, G. **An analysis of the Finite Element Method**. 2nd. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.

TEIXEIRA, P. R. F. E.; AWRUCH, A. M. Numerical Simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. **Computers and Fluids**, 34, p. 249–273, 2005.

TEZDUYAR, T. E.; SENGU, M. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 13-16, p. 1621 – 1632, 2006.

TEZDUYAR, T.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space–time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 1992; 94:353–371.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. Search for a general fluid mechanics algorithm. **Frontiers of computational fluid dynamics**, John Wiley & Sons Inc., p. 101–113, 1994.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, v3: Fluid