# Коллоквиум 1 модуль

## Версия от 12.10.15

## Мигалин Сергей

1. **Дать определение действительного числа. Объяснить, как устанавливается взаимно-однозначное соответствие между действительными числами и точками числовой оси.**

Действительным числом называется бесконечная десятичная дробь: $\pm\alpha_0$ , ... ... $\alpha_1\alpha_2$ $\alpha_n$ , где $\alpha_0 = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ – целое неотрицательное число, $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$, $i = 1, 2, \ldots$ .

Обозначим через $R$ множество всех действительных чисел.

Между точками прямой и действительными числами можно установить взаимно однозначное соответствие. Числу нуль соответствует точка 0, единице – точка $E$. Вектор $\overrightarrow{0E}$ – координатный орт.


Каждому числу поставлена в соответствие точка с координатой, равной этому числу, и наоборот. Далее мы не будем различать понятие «точка» и «число».

Множество действительных чисел = числовая прямая = числовая ось.

2. **Дать определение различных видов промежутков на оси (отрезок, интервал, полуинтервал и т.п.). Дать определения окрестностей точки на оси (ε-окрестности, проколотой ε-окрестности, полуокрестностей). Дать определение окрестностей +∞ и –∞.**

Отрезок — часть прямой, ограниченная двумя точками.
Интервал – множество точек, расположенных между двумя точками.
Полуинтервал – множество точек, расположенных между двумя точками, причем одна из конечных точек включена в это множество.

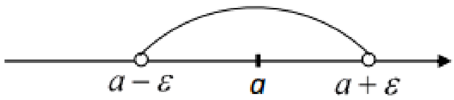
$O(a)=$ окрестность точки $a$ – любой интервал, содержащий эту точку.

$O(a)=(\alpha;\beta)\ni a$


<u>Определение</u>. Пусть $\varepsilon>0$ – некоторое число. Множество $O_\varepsilon(a)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $a$.

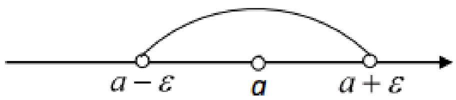
<u>*Геометрически*</u>: $|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$

$O_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$




Если из этого интервала удалить точку $a$, то получится множество, которое называется проколотой окрестностью точки $a$. Обозначение: $\dot{O}_\varepsilon(a)$.

$\dot{O}_\varepsilon(a)=\{x:0<|x-a|<\varepsilon\}$




Правая полуокрестность точки $a$

$O_\varepsilon^+(a)=\{x:a\le x<a+\varepsilon\}$


Левая полуокрестность точки $a$

$O_\varepsilon^-(a)=\{x:a-\varepsilon<x\le a\}$


Правая проколотая полуокрестность точки $a$

$\dot{O}_\varepsilon^+(a)=\{x:a<x<a+\varepsilon\}$


Левая проколотая полуокрестность точки $a$

$\dot{O}_{\varepsilon}^{-}(a)=\{x : a-\varepsilon<x<a\}$


Аналогично определяются окрестности +∞ и -∞:

$O_{\varepsilon}(+\infty)=\{x : x>\varepsilon\}$


$O_{\varepsilon}(-\infty)=\{x : x<-\varepsilon\}$


3. **Дать определения множества, ограниченного сверху (снизу), ограниченного множества. Доказать эквивалентность двух определений ограниченного множества.**

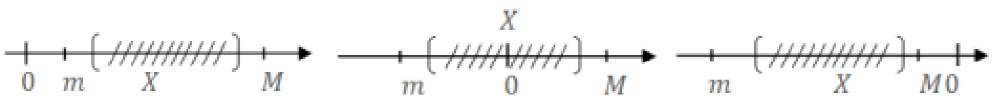
Множество X ограничено **сверху**, если $\exists M\ \forall x \in X\ x \leq M$
Множество ограничено **снизу**, если $\exists M\ \forall x \in X\ x \geq M$

I. Множество X **ограничено**, если $\exists C$: $\forall x \in X\ |x| \leq C$
II. Множество X называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

Теорема: Определения I и II равносильны (I⇔II).

o I⇔II: ∃ m, M: $\forall x \in X\ m \leq x \leq M$.

Возможны различные варианты расположения множества $\mathbb{X}$ на числовой прямой



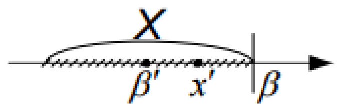

Возьмем $C=\max\{|m|;|M|\}$, тогда $\forall x \in X\ |x| \leq C$.

II⇔I: $\exists\ C: \forall x \in X\ |x| \leq C\ -C \leq x \leq C$, положим $m=-C, M=C$ ⇒ I выполнено. •

4. **Дать определения верхней и нижней граней множества. Привести примеры ограниченных сверху (снизу) множеств, содержащих и не содержащих свою верхнюю (нижнюю) грань.**

Пусть $X \subset \mathbb{R}$.

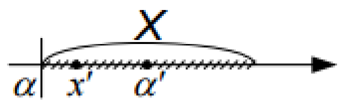
<u>Определение</u>. $\beta$ – *верхняя грань* множества $X$, если:




1) $\forall x \in X \quad x \le \beta$;

2) $\forall \beta' < \beta \ \exists x' \in X : x' > \beta'$.

<u>Определение</u>: $\alpha$ – *нижняя грань* множества $X$, если:




1) $\forall x \in X \quad x \ge \alpha$;

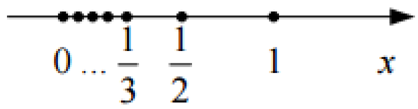
2) $\forall \alpha' > \alpha \ \exists x' \in X : x' < \alpha'$.

Примеры:

1) $X = (0;2)$, $\sup X = 2$, $\inf X = 0$.

2) $X = [0;2]$, $\sup X = 2$, $\inf X = 0$.

3) $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, $\sup X = 1$, $\inf X = 0$.




**5. Сформулировать теорему о существовании верхней (нижней) грани у множества.**

Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань

**6. Объяснить понятие отображения. Дать определение функции. Дать определение числовой последовательности, привести примеры.**

Пусть $X$, $Y$ – произвольные множества. Закон, по которому $\forall$ элементу $x \in X$ сопоставляется однозначно определенный элемент $y \in Y$, называют *отображением*. Обозначают $f : X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$.

Пример: $X$ – плоскость $(x_1, x_2)$, $Y = R$, $(x_1, x_2) \xrightarrow{f} x_1 + x_2$, $f : X \to Y$.

В случае, когда $X \subset R$, а $Y = R$, отображение называют, как правило, *функцией* - $y = f(x)$.

$X$ – множество ОФ (мн-во определения функции), $f(X)$ – множество всех значений, которые принимает функция.

Пусть $X = N$ (или $X = Z_0 = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$), $y = f(n)$, $n \in N$ ($n \in Z_0$). В этом случае функция называется *последовательностью* $f(n) = a_n$ ($a_n$ - точки множества $Y$). Обозначение последовательности: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$).

Примеры: 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$

2) $\left\{(-1)^n\right\}_{n=0}^{\infty}=\left\{1,-1,1,\dots,(-1)^n,\dots\right\}$

7. Дать определения (в различных формах) пределов $\lim_{n\to\infty}a_n=b$, $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=b$

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists n_\varepsilon\;\forall n>n_\varepsilon\;|a_n-b|<\varepsilon$$

$$\text{или }\;a_n\in O_\varepsilon(b)$$

2. $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

$$\forall\,b>0\;\exists n_b\;\forall n>n_b\;a_n>b$$
$$\text{или }a_n\in O_b(+\infty)$$

3. $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

$$\forall\,b>0\;\exists n_b\;\forall n>n_b\;a_n<-b$$
$$\text{или }a_n\in O_b(-\infty)$$

**8. Доказать ограниченность последовательности, имеющей конечный предел. Показать на примерах, что обратное утверждение неверно.**

Теорема (об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел). Если $\exists\lim_{n\to\infty}a_n=a$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

$\circ$ $\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\;\;\exists\,n_\varepsilon\;\;\forall n>n_\varepsilon\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$.

По свойству модуля

$|a_n|-|a|\le|a_n-a|<\varepsilon,\Rightarrow|a_n|-|a|<\varepsilon,\Rightarrow|a_n|<|a|+\varepsilon$. То есть:

$|a_{n_\varepsilon+1}|<|a|+\varepsilon$;

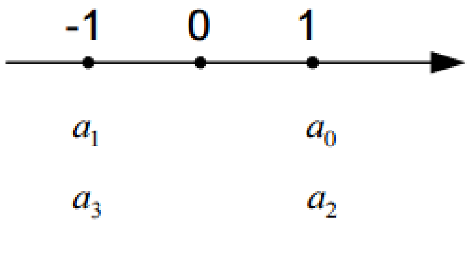
$|a_{n_\varepsilon+2}|<|a|+\varepsilon$;

………………

Возьмем $C=\max\{|a|+\varepsilon,|a_1|,\dots,|a_{n_\varepsilon}|\}$. Тогда $\forall n=1,2,\dots\;|a_n|\le C$. ●

Теорема, обратная доказанной, не имеет места, т.е. не всякая ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}=\{1,-1,\ 1,\ \dots,(-1)^n,\ \dots\}$. Имеем: $|a_n|=1\le C(=1)$, то есть последовательность ограничена. Интуитивно ясно, что не существует $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$.

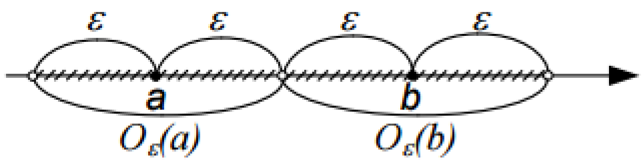



**9. Доказать теорему о единственности предела последовательности.**

Теорема. Последовательность не может иметь более одного предела.

○ От противного. Дана $\{a_n\}$.

Пусть $\left.\begin{array}{l}\lim a_n=a\\ \lim a_n=b\end{array}\right|$ $b>a$. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$. Тогда $O_\varepsilon(a)\bigcap O_\varepsilon(b)=\varnothing$.




$$\exists n'_\varepsilon\ \ \forall n>n'_\varepsilon\Rightarrow\underbrace{|a_n-a|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}}_{a_n\in O_\varepsilon(a)},$$

$$\exists n''_\varepsilon\ \ \forall n>n''_\varepsilon\Rightarrow\underbrace{|a_n-b|<\varepsilon=\frac{b-a}{2}}_{a_n\in O_\varepsilon(b)}.$$

Выберем $n_\varepsilon=\max(n'_\varepsilon,n''_\varepsilon)$, $\forall n>n_\varepsilon$ одновременно $\left|\begin{array}{l}a_n\in O_\varepsilon(a)\\ a_n\in O_\varepsilon(b)\end{array}\right.$, но

$O_\varepsilon(a)\bigcap O_\varepsilon(b)=\varnothing$ –и $a_n$ не может одновременно принадлежать двум непересекающимся окрестностям. Противоречие. ●

**10. Сформулировать теоремы о пределах суммы, произведения и частного двух последовательностей.**

Теорема (о пределе суммы): Существует предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равный сумме их пределов.

$$\{\exists\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists\lim_{n\to\infty} b_n = b\}\Rightarrow\{\exists\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b\}.$$

Теорема (о пределе произведения):

$$\{\exists\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists\lim_{n\to\infty} b_n = b\}\Rightarrow\{\exists\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b\}.$$

Теорема (о пределе частного):

$$\{\exists\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \exists\lim_{n\to\infty} b_n = b,\ b\neq 0\}\Rightarrow\{\exists\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a / b\}.$$

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}) = 0$.

**11. Дать определение подпоследовательности. Доказать, что подпоследовательность последовательности, имеющей предел, имеет тот же предел.**

Дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Возьмем последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in N$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ .

Пусть $b_k = a_{n_k}$, $k = 1,2,\ldots$ . Тогда $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – подпоследовательность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Если у последовательности вычеркнуть какие-то члены, оставшиеся члены образуют подпоследовательность.

Теорема (о пределе подпоследовательности): Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $a$ т.т.т., когда каждая ее подпоследовательность сходится к $a$. ($\{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\}\Leftrightarrow\forall\{n_k\}\{\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a\}$).

$\circ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\ \ \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - a| < \varepsilon. \Rightarrow$

$\forall k > n_\varepsilon\ \ n_k \geq k > n_\varepsilon \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

$\Leftarrow$ очевидно. Дано: каждая подпоследовательность сходится к $a$. Саму $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно считать подпоследовательностью $\Rightarrow$ она сходится и имеет предел $a$. $\bullet$

**12. Дать определения бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей. Привести примеры.**

1. Последовательность бесконечно малая, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Последовательность бесконечно большая, если

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

Примеры : 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

2) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ – бесконечно малые

$\{n^2\}$ – бесконечно больш

**13. Доказать теорему Вейерштрасса о существовании предела у неубывающей ограниченной сверху последовательности. Сформулировать варианты этой теоремы.**

Теорема 1. Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится.

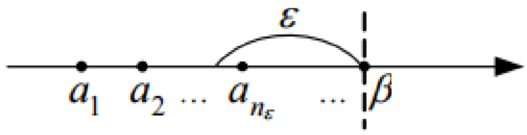
○ 1) $\{a_n\}$ – неубывающая, т.е. $a_n \le a_{n+1}$

2) $\{a_n\}$ ограничена сверху, т.е. $\exists B \ \forall n: \ a_n \le B$.

Из условия 2) $\Rightarrow$, что $\exists \sup\{a_n\} = \beta$.

а) $\forall n \ a_n \le \beta$;

б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon: \ a_{n_\varepsilon} > \beta - \varepsilon$.




$\forall n > n_\varepsilon$ из а) $\Rightarrow a_n \le \beta < \beta + \varepsilon$.

из б) и 1) $\Rightarrow$, что $\beta - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \Rightarrow \beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - \beta| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \ \ \forall n > n_\varepsilon: |a_n - \beta| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ ●

Варианты теоремы:

Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она сходится.

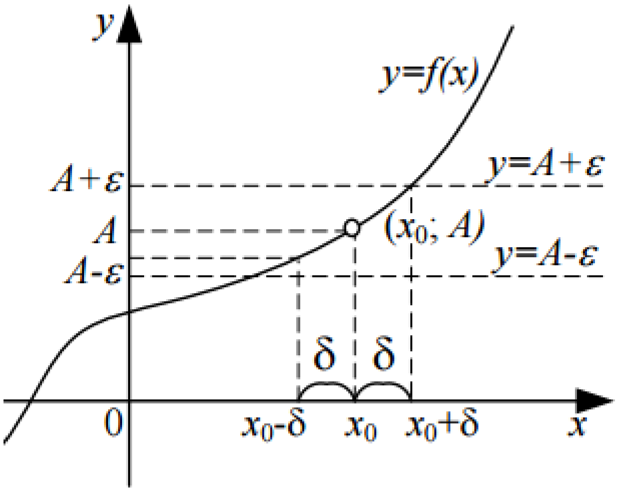
Монотонная ограниченная последовательность сходится

**14. Нет вопроса в вопроснике**

**15. Сформулировать следующие определения пределов (при помощи неравенств и при помощи окрестностей)**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x\in \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A).$$

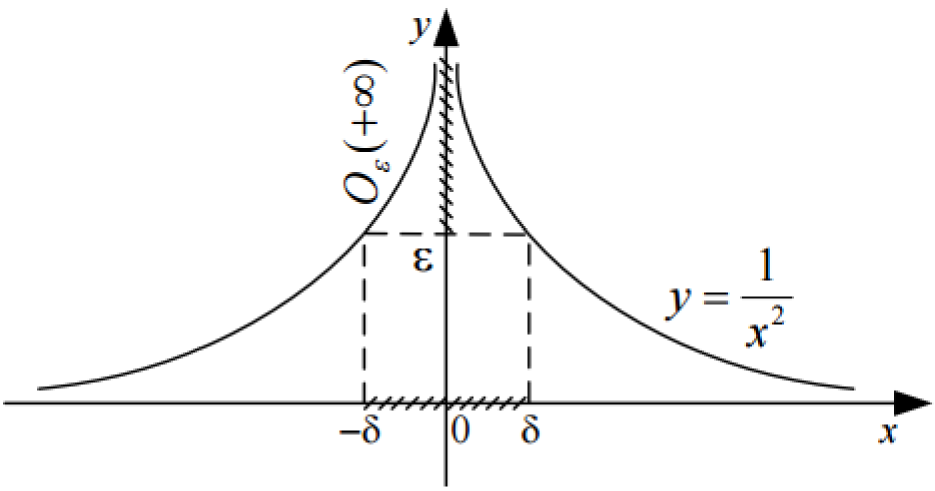
Геометрически это можно проиллюстрировать следующим образом.




Пусть функция $y=f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $x_0$: $x\in\dot{O}_\delta(x_0)$.

<u>Определение 1</u>. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$.

<u>Определение 2</u>. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(+\infty)$

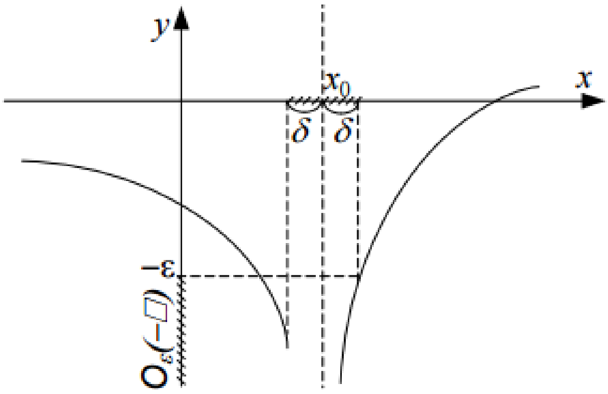


Определение 3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

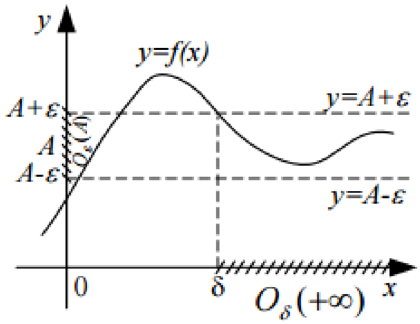
$(\forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(-\infty))$.




Определение. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad x > \delta \quad \Rightarrow$ $|f(x) - A| < \varepsilon$.

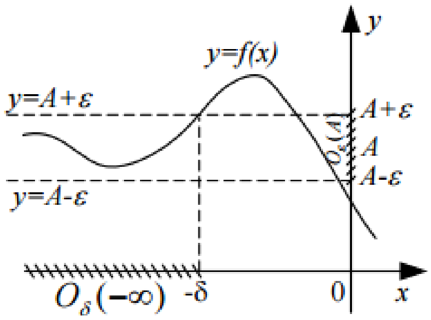
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in O_\delta(+\infty) \quad \Rightarrow$ $f(x) \in O_\varepsilon(A)$.



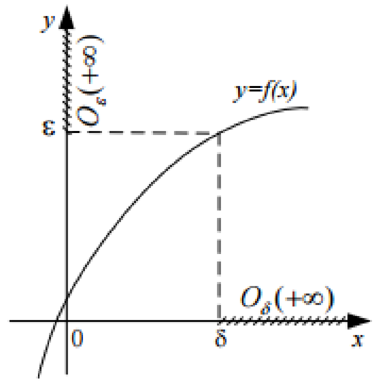

Определение. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad x < -\delta \quad \Rightarrow$ $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in O_\delta(-\infty) \quad \Rightarrow$ $f(x) \in O_\varepsilon(A)$.



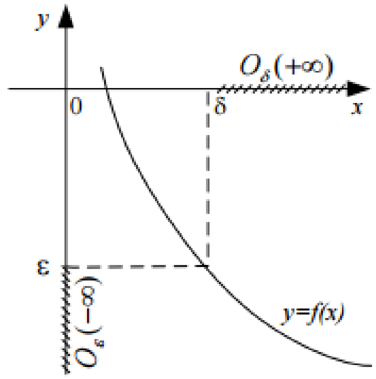
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.




$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ или

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in O_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



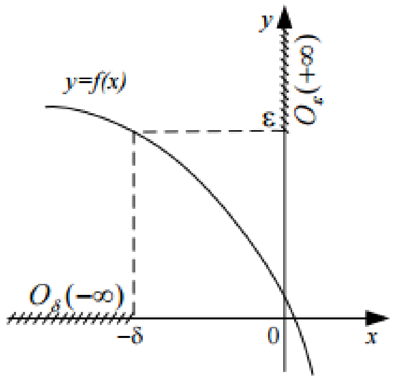

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$ или

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in O_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x<-\delta \Rightarrow f(x)>\varepsilon$ или

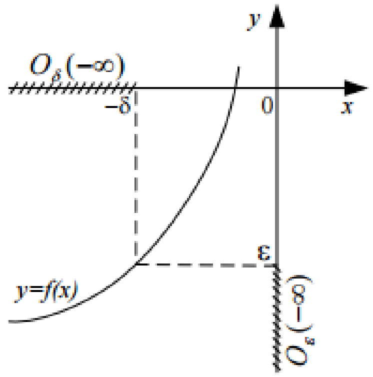
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in O_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(+\infty)$.




d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x<-\delta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon$ или

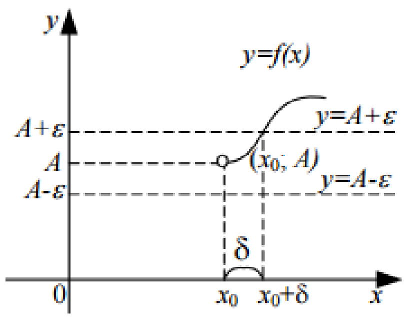
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in O_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(-\infty)$.




<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$ определена в правой проколотой полуокрестности точки $x_0$. Число $A$ называется*пределомфункциисправа* в точке $x_0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для $\forall x$ : $x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in \dot{O}^{+}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A))$.

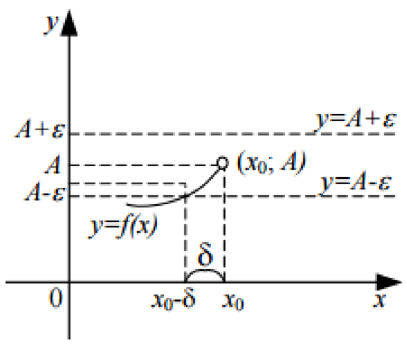
Обозначение $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.



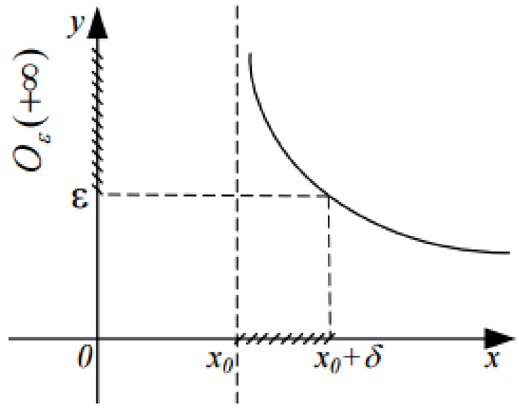

<u>Определение</u>. Пусть $f(x)$ определена в левой проколотой полуокрестности точки $x_0$. Число $A$ называется*пределомфункциислева* в точке $x_0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для $\forall x$ : $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

$(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in \dot{O}^{-}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A))$.

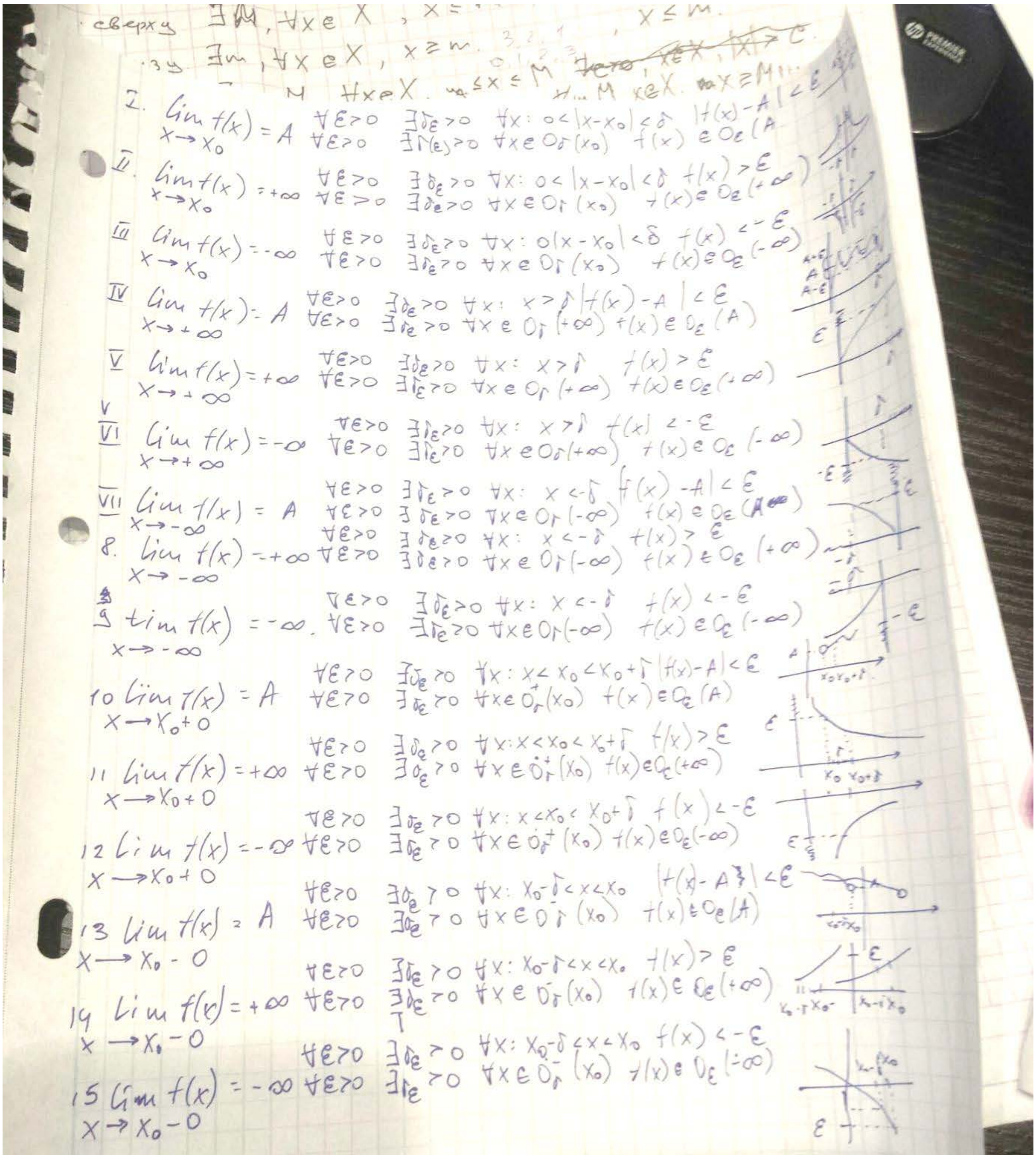
Обозначение $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$.



Определение: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \dot{O}_{\delta}^{+}(x_0) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.




Аналогично определяются $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = -\infty$.


сверху $\exists M, \forall x \in X, x \le M$.

зу $\exists m, \forall x \in X, x \ge m$.

$M \ \forall x \in X. \ m \le x \le M$

I. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in O_\delta(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$

II. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \ f(x) > \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$

III. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \ f(x) < -\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$

IV. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x > \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(+\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$

V. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x > \delta \ f(x) > \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(+\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$

VI. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x > \delta \ f(x) < -\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(+\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$

VII. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x < -\delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(-\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x < -\delta \ f(x) > \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(-\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x < -\delta \ f(x) < -\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta(-\infty) \ f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$

10. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^+(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$

11. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta \ f(x) > \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^+(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$

12. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta \ f(x) < -\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^+(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$

13. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 \ |f(x) - A| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^-(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(A)$

14. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 \ f(x) > \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^-(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(+\infty)$

15. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 \ f(x) < -\varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in O_\delta^-(x_0) \ f(x) \in O_\varepsilon(-\infty)$

**16. Дать определение бесконечно малой функции при x->x0. Доказать теорему: функция f(x) имеет предел b тогда и только тогда, когда величина f(x) – b – бесконечно малая.**

Определение. $\alpha(x)$ – бесконечно малая **при** $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ т.т.т., когда ($\Leftrightarrow$) $\big(f(x) - A\big)$ бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

○ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0 \;\; \forall x\in\dot{O}_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; |f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $(f(x)-A)$– бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

$\Leftarrow$ Пусть $(f(x)-A)$– бесконечно малая функция при $x\to x_0$, $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \;\exists\delta>0$ $\forall x\in\dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. ●

**17. Доказать теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.**

Теорема. Если $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то найдется проколотая окрестность точки $x_0$, в которой $f(x)$ ограничена.

○ $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \;\exists\delta>0 \;\; \forall x\in\dot{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(A)$.

$f(x)\in O_\varepsilon(A) \Leftrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-A<\varepsilon \Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, т.е. $f(x)$ ограничена. ●

Примечания: 1) Речь идет лишь о локальной ограниченности, т.к. мы доказали ограниченность $f(x)$ в $\dot{O}_\delta(x_0)$.

2) Теорема, обратная к доказанной, неверна.

Пример. $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

$|\operatorname{sgn}x|\le 1$ – функция ограниченная, но предел в точке $x_0=0$ не существует.

**18. Доказать теорему о пределе суммы двух функций при x->x0**

Теорема 1 (о пределе суммы). Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то

существует $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=a+b$.

○ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \alpha(x)=f(x)-a$ бесконечно малая функция при $x\to x_0 \Rightarrow$

$f(x)=\alpha(x)+a$.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b \Leftrightarrow \beta(x)=g(x)-b$ бесконечно малая функция при $x\to x_0 \Rightarrow$

$g(x)=\beta(x)+b$.

Тогда $f(x)+g(x)=\alpha(x)+a+\beta(x)+b$ и $(f(x)+g(x))-(a+b)=\underbrace{\alpha(x)+\beta(x)}$

$\Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)=a+b$. ●

**19.Доказать теорему о пределе произведения двух функций при x->x0**

Теорема 2 (о пределе произведения). Пусть существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, тогда существует $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$.

○ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \alpha(x)=f(x)-a$ бесконечно малая функция при $x\to x_0 \Rightarrow$

$f(x)=\alpha(x)+a$

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b \Leftrightarrow \beta(x)=g(x)-b$ бесконечно малая функция при $x\to x_0 \Rightarrow$

$g(x)=\beta(x)+b$

Тогда $f(x)\cdot g(x)=(\alpha(x)+a)\cdot(\beta(x)+b)=\underbrace{\alpha(x)\cdot\beta(x)+a\cdot\beta(x)+b\cdot\alpha(x)}_{\gamma(x)}+a\cdot b$,

где $\gamma(x)$ бесконечно малая функция при $x\to x_0$.

$f(x)\cdot g(x)-a\cdot b=\gamma(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to x_0$,

т.е. $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$. ●

**20. Дать определение непрерывности функции в точке 1) при помощи понятия предела, 2) при помощи неравенств, 3) при помощи окрестностей, 4) при помощи приращений Δx и Δy.**

Определение 1.Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

3. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in O_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(f(a))$.

Определение 4.Пусть $x\in O(a)$. Обозначим приращение аргумента $\Delta x=x-a$, а приращение функции $\Delta y=f(x)-f(a)$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.