数值分析大作业

许竞帆 2019010406 环 01

Riemann - Zeta 函数：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1/1^s+1/2^s+1/3^s+\cdots,x\in\mathbb{C},x>1$$

考虑$x\in R,x>1$。

一、级数求和：求解巴塞尔问题

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}$$

设计算法累加级数项，至某一项 N 时，剩余所有项之和小于误差，则停止，截断误差为：

$$\Delta=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^x}<\int_{\mathrm{N}}^{\infty}\frac{1}{n^x}dn=\frac{1}{(x-1)\mathrm{N}^{x-1}},\forall x>2$$

每一项保留 p 位小数，舍入误差之和为：

$$\delta=N\times0.5\times10^{-p}$$

设精度为0.5×10^{-m}，均分舍入误差和阶段误差，则可求得

$$N=\sqrt[\text{x-1}]{\frac{1}{(x-1)\Delta}}$$

$$p=-log_{10}(\delta\times2\div N)$$

计算 N，p，将 N 和 p 分别向上、向下取整，即可使误差满足要求。

由于令 x = 2 时，满足误差要求的迭代次数过多，使用 x = 8 求解π精确到 20 位的结果：

$$\pi=\sqrt[8]{9450\times\zeta(8)}$$

要使π精确至 20 位，则$\zeta(8)$精度应为：

$$(0.5\times10^{-20})^{8\div7}\div9450\div8^{8\div7}\approx0.5\times10^{-28}$$

计算得到，N = 9231.67015…, p = 33, π = 3.14159265358979323846

二、牛顿法方程求根

在$x\in(1,+\infty)$的定义域内，给定任意$a>1$，基于方程求根设计算法以任意精度求解$\zeta(x)$，即：

$$\zeta(x)-a=0$$

$\zeta(x)$在$x \in \left(1, +\infty\right)$单调递减，$\zeta(2) > 1.5, \zeta(4) < 1.1$

牛顿法迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\zeta(x_k) - \mathrm{a}}{\zeta'(x_k)}$$

方法误差：

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

舍入误差：

$$\delta = \frac{\zeta(x_k) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p} \ + \zeta'(x_k) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p}}{[\zeta'(x_k)]^2}$$

未能完成这一题误差分析，实际计算中未限制每一步保留位数 p，通过求得横坐标加减精度相乘小于 0 控制结果精度，得到$\zeta(x) = 1.5$精确到 4 位小数结果为 2.1852

三、数值积分

在$x \in (3, +\infty)$的定义域内，以任意精度求解积分：

$$I \ = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

又：

$$I(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t} dt$$

则只需求 Γ 函数的积分值。

使用复化梯形方法求$\Gamma(x)$，令

$$f(x) = \frac{t^{x-1}}{e^t}$$

复化梯形公式为：

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right]$$

其中 a = 0，b 为根据误差截断的上限。

积分方法误差：

$$\Delta \ \le \frac{\mathrm{b}h^2}{12} f''(\eta) + \int_b^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t}$$

积分舍入误差：

$$\delta = \frac{h}{2}\left(2\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{h}} - 1\right) + 2\right) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p} = \frac{b}{2} \times 10^{-p}$$

总误差：

$$\left(\Delta \ + \delta\right)\Delta_{\ \zeta}$$

δ_ζ由第一问的算法控制。

计算方法误差第一项，由

$$f'(\mathrm{t}) = \frac{t^{x-2}(x-1-t)}{e^t}$$

$$f''(\mathrm{t}) = \frac{t^{x-3}(t^2-2t(x-1)+x^2-3x+2)}{e^t}$$

$$f''(t) = \frac{t^{x-3}\left([t-(x-1)]^2-(x-1)\right)}{e^t} < \frac{t^{x-3}[t-(x-1)]^2}{e^t} < \frac{t^{x-1}}{e^t} = f(\mathrm{t})$$

又 f(t)在$t \in (0, x-1)$增， $t \in \left(x-1, +\infty\right)$减，则

$$\left|f''(\eta)\right| \le \frac{(\mathrm{x\text{-}1})^{x-1}}{e^{\mathrm{x\text{-}1}}}$$

方法误差第二项：

$$\int_b^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t} < \int_b^\infty t^{1-x} dt = \frac{\mathrm{b}^{2-\mathrm{x}}}{\mathrm{x}-2}$$

令$\Delta = \delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \times 10^{-m}}, \delta_\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \times 10^{-m}}$

$$h = \sqrt{6\,\Delta \div b \div f''(\eta)}$$

$$b = \sqrt[2\text{-x}]{\frac{2-x}{2}\,\Delta}$$

在算法实现中，由于 gmpy2 库计算以小数为根指数的根时报错，将根指数 2-x 进一步放为不超过 2-x 的整数。

设精度为 4 位小数，得到数值积分结果为 3.7445

四、微分方程求解

任意给定$x > 2$，根据初始条件$y(2) = 2$，利用常微分方程的数值解法，以任意精度求解微分方程$y'(x) = \zeta(y)$。

使用四阶龙格库塔公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(x_{n+1}, y_n + hK_3)$$

设每一步均舍入至小数点后 p 位，每步求$\zeta(y)$值至 N 项，则每步误差为

使用改进的欧拉法：

$$\overline{y}_{n+1} = y_\mathrm{n} + h\zeta(y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\zeta(y_n) + \zeta(\overline{y}_{n+1})\right]$$

方法误差为：

$$h\Delta_{\zeta}^{N_{\zeta}}$$

$$\overline{\Delta}_{n+1} \le (1 + hM)\Delta_n + \frac{L}{2}h^2 + h\Delta_{\zeta}$$

$$\Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}M\Delta_n + \frac{h}{2}M\overline{\Delta}_{n+1} + \frac{T}{12}h^3 + h\Delta_{\zeta}$$

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3 + (h + \frac{h^2}{2}\mathrm{M})\Delta_{\zeta}$$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right| \le \mathrm{M}, |\mathrm{y}''(\mathrm{x})| \le \mathrm{L}, \left|\mathrm{y}^{(3)}(\mathrm{x})\right| \le \mathrm{T}$$

$\forall x > 2,$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}\, ln(n)$$

$$|\mathrm{y}''(\mathrm{x})| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}\, ln^2(n)$$

$$\left|\mathrm{y}^{(3)}(\mathrm{x})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}\, ln^3(n)$$

均单调减，则令

$$M = \int_1^{\infty} \frac{ln(n)}{n^2} = 1 > \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\, ln(n)$$

$$\mathrm{L} = \int_1^{\infty} \frac{ln^2(n)}{n^2} = 2 > \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\, ln^2(n)$$

$$\mathrm{T} = \int_1^{\infty} \frac{ln^3(n)}{n^2} = 6 > \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\, ln^3(n)$$

得到每一步方法误差：

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)\Delta_n + h^3 + \left(h + \frac{h^2}{2}\right)\Delta_{\zeta}$$

将计算$\zeta(y_n)$的误差Δ_{ζ}全部算在舍入误差里，则累计误差：

$$\Delta = h^3 \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^i = O(h^3) < h^2$$

同理得舍入误差为：

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{h^2}{2}M^2\right)\delta_n + \left(1 + \frac{h}{2}M\right) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p} + (h + \frac{h^2}{2}\mathrm{M})\delta_\zeta$$

$$\delta_\zeta = \frac{1}{2} \times 10^{-p}$$

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)\delta_n + \left(1 + \frac{h}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p} + (h + \frac{h^2}{2}) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p}$$

累计舍入误差：

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times 10^{-p} \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)^i \le 1 \times 10^{-p}$$

设结果精度为$\frac{1}{2} \times 10^{-m}$，在方法误差和舍入误差中均分，则有：

$$h \;= \frac{1}{2} \times 10^{-\frac{m}{2}}$$

$$p = log_{10}2 + m \,+\, 1$$

代入 m=4，计算得，h = 0.001, p =6, y(4)=4.4051

运行代码 main.py，输出结果为：

```
PS E:\数值分析大作业> python main.py
zeta(2) = 1.6449102200000000000000000000002
pi = 3.14159265358979323846
solution of the zeta(x) = a is 2.1853
the result of integral is 3.7445
y' = zeta(y), y(2) = 2, then y(4) = 4.4051
```