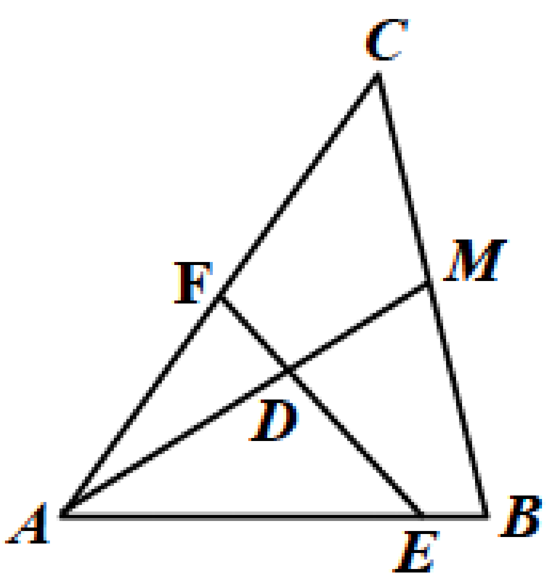
GEOMETRÍA PLANA

Sea ABC un triángulo tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{4}{3}$, M el punto medio del lado $\overline{BC}$, y sean F, E puntos en AC y AB respectivamente, tales que $\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{1}{2}$, como se muestra en la figura de abajo:

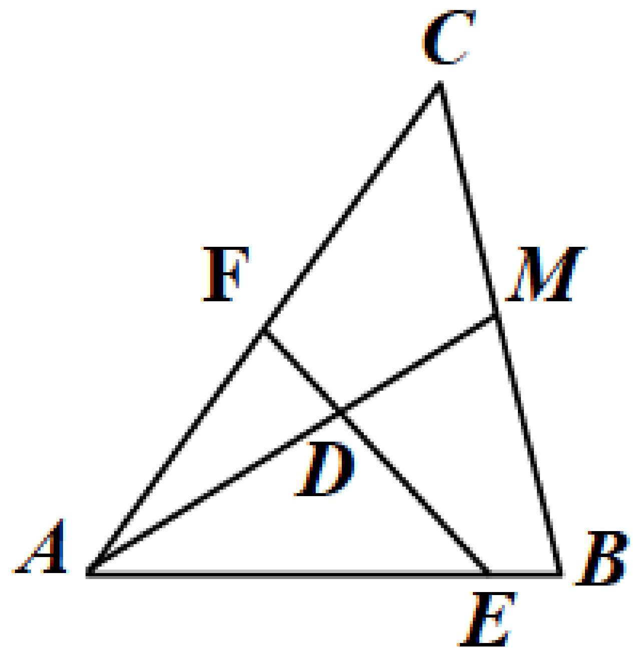


Si D es la intersección de $\overline{AM}$ con $\overline{FE}$, determinar el valor de la razón:

$$\frac{Area(\Delta ADF)}{Area(\Delta ADE)}$$

SOLUCIÓN

Como $\angle DAF = \angle MAC$ se tiene que:



$$\frac{Area(\Delta ADF)}{Area(\Delta AMC)} = \frac{\dfrac{\overline{AD} \cdot (\overline{AF} \text{ sen} \angle DAF)}{2}}{\dfrac{\overline{AM} \cdot (\overline{AC} \text{ sen} \angle MAC)}{2}}$$

$$= \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AF}}{\overline{AM} \cdot \overline{AC}}$$

y de manera similar, como $\angle DAE = \angle MAB$, entonces:

$$\frac{Area(\Delta ADE)}{Area(\Delta AMB)} = \frac{\dfrac{\overline{AD} \cdot (\overline{AE} \text{ sen} \angle DAE)}{2}}{\dfrac{\overline{AM} \cdot (\overline{AB} \text{ sen} \angle MAB)}{2}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\overline{AM} \cdot \overline{AB}}$$

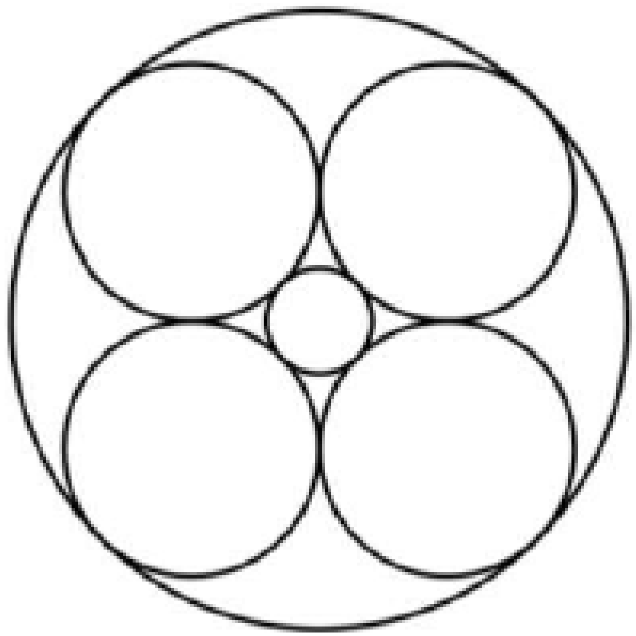
Ahora, nótese que los triángulos AMC y AMB tienen la misma área, ya que comparten la misma altura desde A y sus bases cumplen $\overline{MC} = \overline{MB}$. Así,

$$\frac{Area(\Delta ADF)}{Area(\Delta ADE)} = \frac{\dfrac{Area(\Delta ADF)}{Area(\Delta AMC)}}{\dfrac{Area(\Delta ADE)}{Area(\Delta AMB)}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AB}}{\overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AC}}$$

$$\frac{Area(\Delta ADF)}{Area(\Delta ADE)} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

GEOMETRÍA PLANA

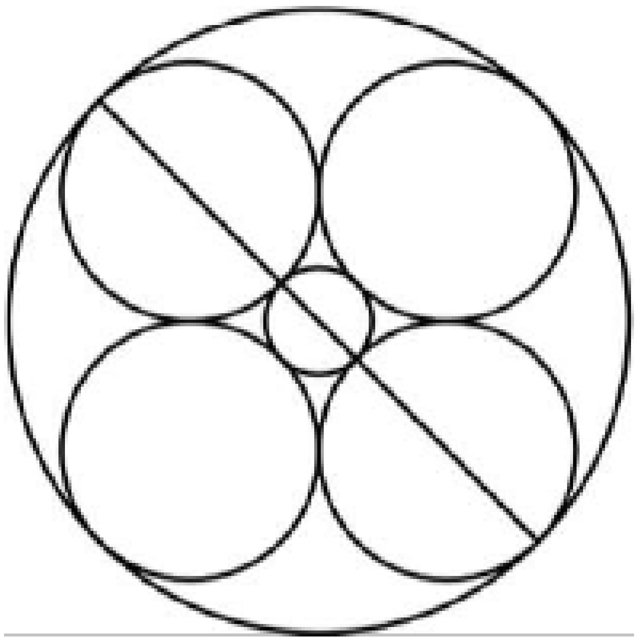
En la siguiente figura todos los círculos son tangentes entre sí y todos los círculos medianos tienen el mismo radio.



Si el radio del círculo mayor es 1, determinar el radio del círculo menor.

SOLUCIÓN

Se denota por R el radio de cada círculo mediano y por r el radio del círculo menor. Hay que recordar que cuando dos círculos son tangentes, sus centros son colineales con el punto de tangencia.



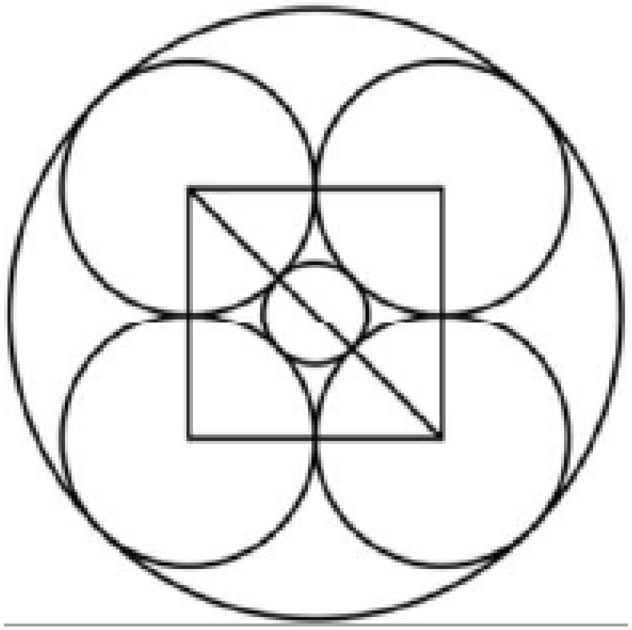
De este modo, se tiene la igualdad siguiente:

$$4R + 2r = 2$$

O bien,

$$2R + r = 1 \qquad (*)$$

Por otro lado, por la simetría de la figura, los centros de los círculos medianos forman un cuadrado de lado $2R$.



Así, por el Teorema de Pitágoras se cumple que:

$$(2R+2r)^2 = (2R)^2 + (2R)^2$$
$$= 8R^2$$

De donde,

$$2Rr + r^2 = R^2$$

Por tanto,

$$R^2 = 2Rr + r^2 = r(2R+r) = r(1) = r$$

Sustituyendo en la ecuación (*) se obtiene la ecuación cuadrática

$$\boldsymbol{R^2 + 2R - 1 = 0}$$

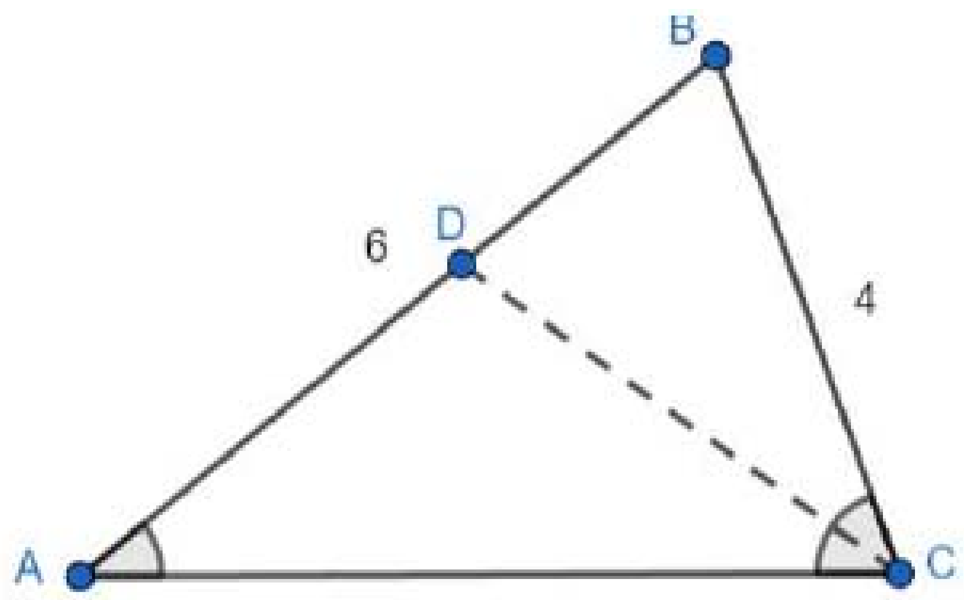
y se determina la solución positiva

$$\boldsymbol{R = \sqrt{2} - 1}$$

Finalmente, $\boldsymbol{r = R^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}}$

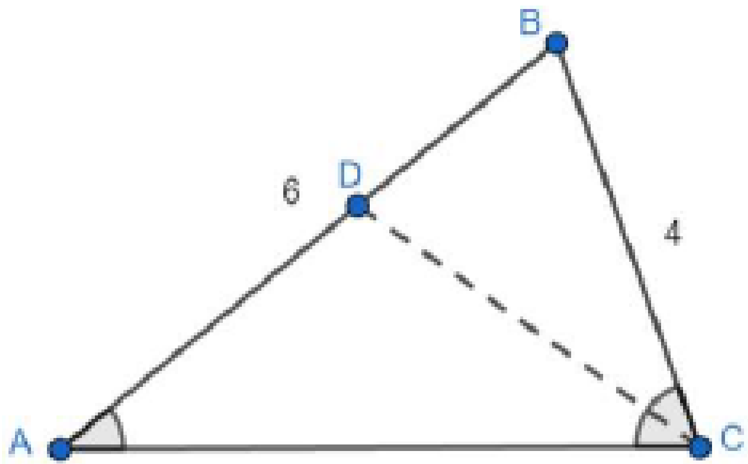
GEOMETRÍA PLANA

Considerar un triángulo ABC tal que $\angle BCA = 2\angle BAC$ y sea D el punto en el lado $\overline{AB}$ de modo que $\overline{CD}$ es bisectriz de $\angle ACB$. Si $\overline{CB} = 4$ y $\overline{AB} = 6$, calcular la longitud del segmento $\overline{BD}$.



SOLUCIÓN

Como $\overline{CD}$ es bisectriz, se tiene que:



$$\angle BCD = \frac{\angle BCA}{2} = \angle BAC$$

En consecuencia, los triángulos ABC y CBD son semejantes por el criterio AA, ya que tienen una pareja de ángulos congruentes y comparten el ángulo $\angle CBA$. Por tanto, se tiene la proporción:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

En consecuencia,

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} = \frac{4^2}{6} = \frac{8}{3}$$

PRECÁLCULO

Tres términos consecutivos de una progresión son 40, 80 y 160. Calcular la suma de los 9 primeros términos de esa progresión.

SOLUCIÓN

Nótese que el segundo número dado es el doble del primero y el tercero es el doble del segundo. Esto indica que se trata de una progresión geométrica con razón $r = 2$. Además, los tres números son múltiplos de 5.

Por lo tanto, los términos de la progresión son de la forma

$$a_n = ar^{n-1}$$

Si $a = 5$ y $r = 2$, en particular, los tres términos dados serían el cuarto, el quinto y sexto de la progresión.

Al aplicar la fórmula para calcular la suma S de los primeros n términos de una progresión geométrica, se tiene que:

$$\boldsymbol{S = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 5 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 5 \cdot \frac{512 - 1}{1} = 5(511) = 2555}$$

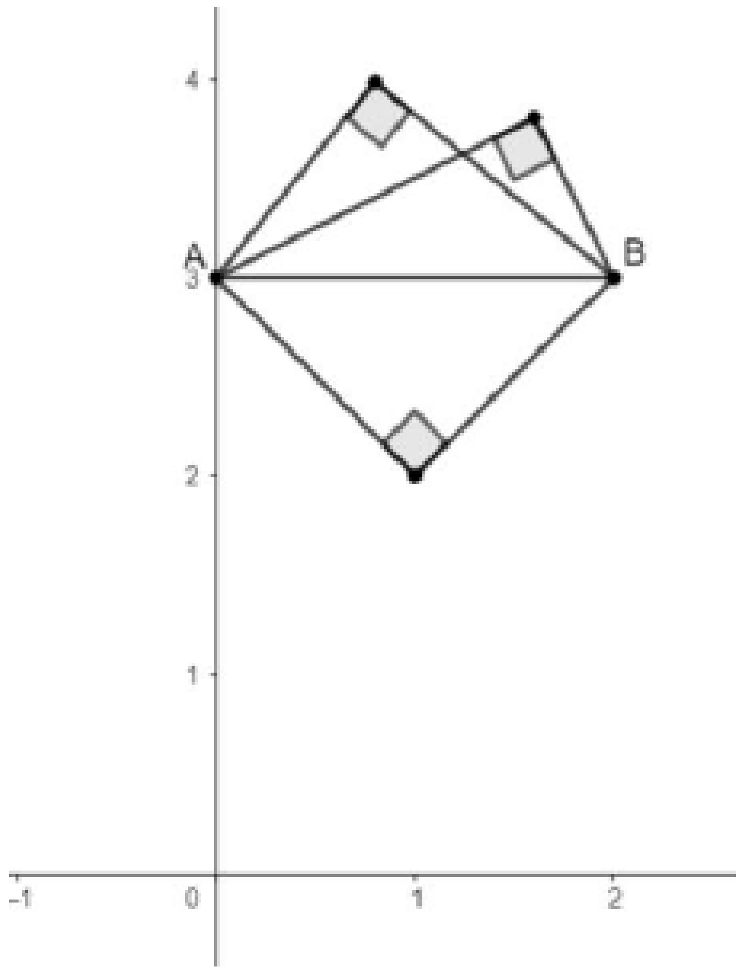
Nota: Otras soluciones alternativas se obtienen al considerar $a = 20$ o $a = 40$.

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Determinar el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuyas hipotenusas son el segmento que une los puntos $A = (0,3)$ y $B = (2,3)$.

SOLUCIÓN

Una representación gráfica del problema es la siguiente:



Sea $P(x, y)$ el vértice del ángulo recto de los triángulos con hipotenusa AB. La longitud de los catetos PA y PB se calcula con la fórmula de distancia entre dos puntos:

$PA = \sqrt{(x)^2 + (y-3)^2}$ **y** $PB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

Como la hipotenusa mide 2 unidades, por el teorema de Pitágoras se obtiene que:

$$2^2 = \left(\sqrt{(x)^2 + (y-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2$$

$$4 = x^2 + (x-2)^2 + 2(y-3)^2$$

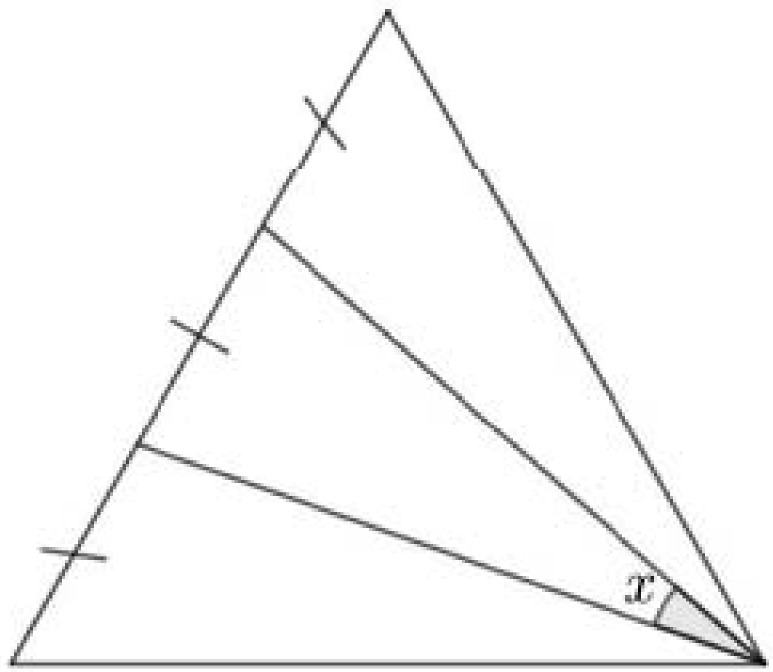
$$2 = 2(x-1)^2 + 2(y-3)^2$$

$$1 = (x-1)^2 + (y-3)^2$$

Es una circunferencia de radio 1 unidad y centro en (1,3).

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

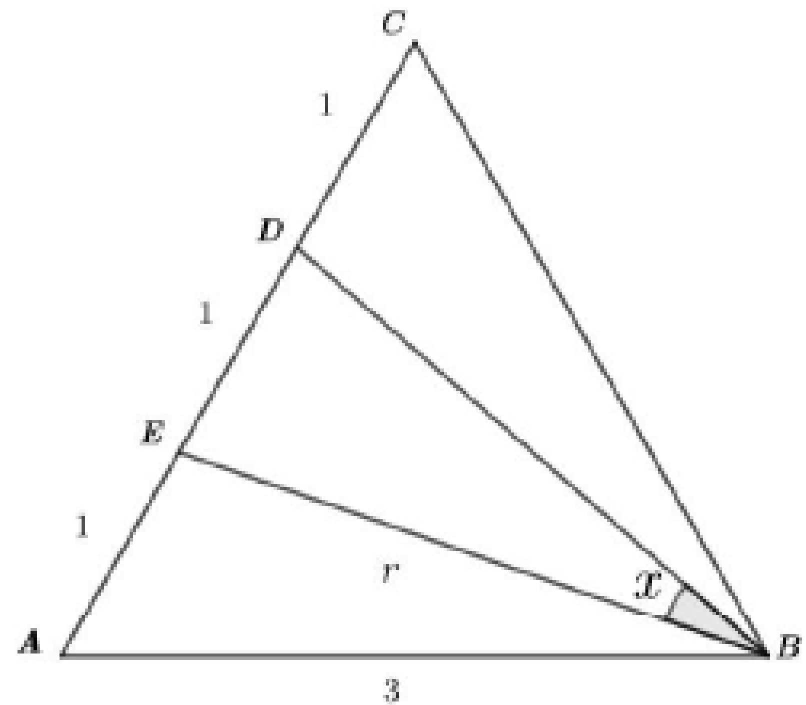
Uno de los lados de un triángulo equilátero se ha dividido en tres partes iguales por segmentos trazados desde el vértice opuesto, como se muestra en la figura de abajo.



Determinar la medida del ángulo x formado por ambos segmentos.

SOLUCIÓN

Sin pérdida de la generalidad, considérese que la medida del lado del triángulo es de 3 unidades, entonces cada segmento que lo divide mide 1 unidad de longitud.



Aplicando la ley de cosenos al triángulo ABE:

$$r^2 = (1)^2 + (3)^2 - (2)(1)(3)cos60° = 1 + 9 - 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 7$$

Además, como $BE = r$, aplicando la ley de senos al triángulo EBD se tiene:

$$\mathbf{1^2 = r^2 + r^2 - (2)r^2 cos(x) = 7 + 7 - 14cos(x)}$$

Luego,

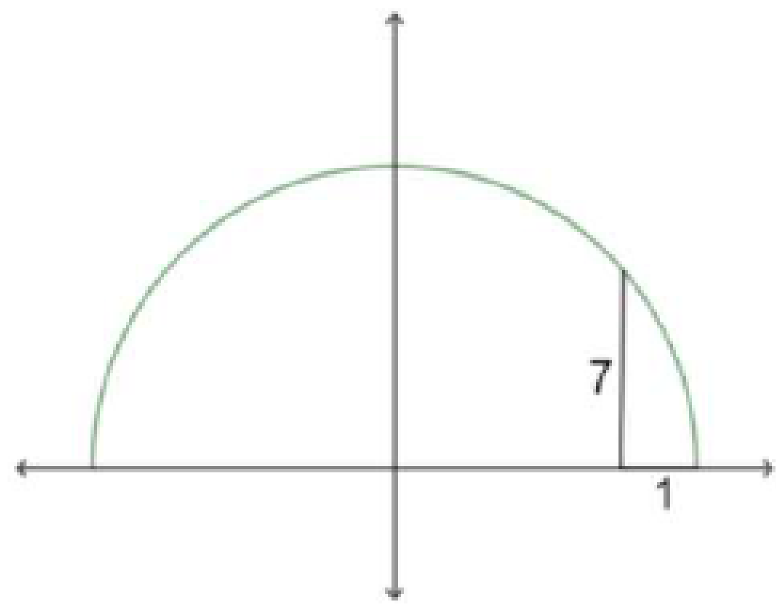
$$\mathbf{1 = 7 + 7 - 14cos(x)}$$

$$\mathbf{cos(x) = \frac{13}{14}}$$

$$\mathbf{\therefore x = arccos\left(\frac{13}{14}\right)}$$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

A 1 metro de distancia de uno de sus extremos, la altura de un monumento de forma semicircular es 7 metros (como se muestra en la figura). Calcular la longitud de la altura máxima del monumento.



SOLUCIÓN

La semicircunferencia está contenida en la circunferencia centrada en el origen y radio r, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es altura máxima del monumento.

Además, se tiene que, si el radio es r, el punto $(r-1, 7)$ satisface la ecuación de dicha circunferencia, entonces:

$$(r-1)^2 + 7^2 = r^2$$

$$r^2 - 2r + 1 + 7^2 = r^2$$

$$2r = 50$$

$$r = 25$$

Por tanto, la longitud de la altura máxima del monumento es 25 metros.

PRECÁLCULO

Sea la función f con dominio en $[0,+\infty)$ tal que $y = f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Determinar el dominio, rango y gráfica de su función inversa.

SOLUCIÓN

Nótese que el dominio de $f(x)$ está dado por las x en el intervalo $[0,+\infty)$ y su rango es el intervalo $[1,+\infty)$. Así, si se intercambia el dominio y el rango de $f(x)$, obtenemos el dominio y rango de $f^{-1}(x)$. Por tanto, el dominio de la función inversa es el intervalo $[1,+\infty)$ y su rango es el intervalo $[0,+\infty)$.

La definición de $f^{-1}(x)$ se obtiene intercambiando x y y en la definición de $f(x)$ y despejando y.

Así, se tiene que

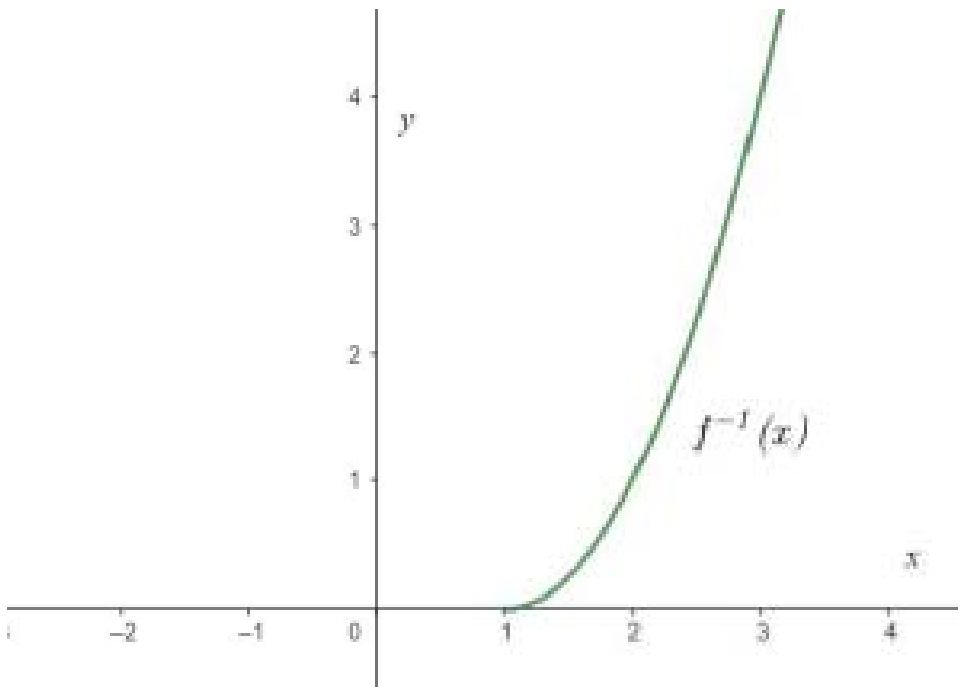
$$x = 1 + \sqrt{y}$$

$$y = (x - 1)^2$$

Por tanto,

$$y = f^{-1}(x) = (x - 1)^2$$

La gráfica de $f^{-1}(x)$ es la siguiente:



PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Cierto videojuego tiene 3 modalidades diferentes: supervivencia, atrapagemas y asedio. Cada vez que se inicia una partida se tiene la misma probabilidad de iniciar en alguna de las 3 modalidades. En supervivencia hay un 80% de ganar la partida, en atrapagemas, es de 75% y en asedio es de 50%. Calcular la probabilidad de que un jugador pierda al iniciar una partida en el juego.

SOLUCIÓN

Sean los eventos:

F: Perder una partida

A_1: La partida sea modalidad supervivencia

A_2: La partida sea modalidad atrapagemas

A_3: La partida sea modalidad asedio

Se requiere calcular P, la probabilidad de perder.

Por los datos del problema:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Además,

$$\boldsymbol{P(F|A_1) = 0.2, \qquad P(F|A_2) = 0.25,}$$

$$\boldsymbol{P(F|A_3) = 0.5}$$

Utilizando la Ley de la Probabilidad Total se tiene que:

$$\boldsymbol{P(F) = P(F|A_1)P(A_1) + P(F|A_2)P(A_2) + P(F|A_3)P(A_3)}$$

$$\boldsymbol{= (0.2)\left(\frac{1}{3}\right) + (0.25)\left(\frac{1}{3}\right) + (0.5)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{60} = 0.3166}$$

Por tanto, la probabilidad de perder una partida es: 0.3166.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

En una asignatura se ha decidido acreditar a aquellos que aprueben al menos uno de los dos parciales, con este criterio aprobó el 80% de los estudiantes. Sabiendo que el primer parcial lo reprobó el 40% y el segundo el 50%, calcular cuál hubiese sido el porcentaje de aprobados, si se hubiese exigido aprobar ambos parciales.

SOLUCIÓN

Sean los eventos:

A_1: Aprobar el primer parcial

A_2: Aprobar el segundo parcial

De la información del problema se tiene que:

$$P(A_1 \cup A_2) = 0.80 \quad P(A_1) = 0.6 \quad P(A_2) = 0.5$$

La probabilidad de aprobar ambos parciales está dada por $P(A_1 \cap A_2)$.

Como A_1 y A_2 no son eventos mutuamente excluyentes, se cumple que:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$0.8 = 0.6 + 0.5 - P(A_1 \cap A_2)$$

De donde

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.3$$

Entonces, si se hubiese exigido aprobar los dos parciales, el porcentaje de aprobados hubiese sido del 30%.

ÁLGEBRA

Juan está construyendo una pared de ladrillos. El lunes, la pared tiene 300 ladrillos y para el jueves ya tiene 425 ladrillos. Si Juan trabaja a una razón constante todos los días, calcular cuántos ladrillos espera Juan tener en la pared para el domingo.

SOLUCIÓN

Como Juan está trabajando a una razón constante, el número de ladrillos en la pared se incrementa linealmente.

La diferencia entre los días transcurridos entre jueves y lunes es de 3 días, y la diferencia entre 425 y 300 son 125 ladrillos, así la razón del incremento es 125:3. Por lo que después de otros tres días, Juan sumaría a la pared otros 125 ladrillos.

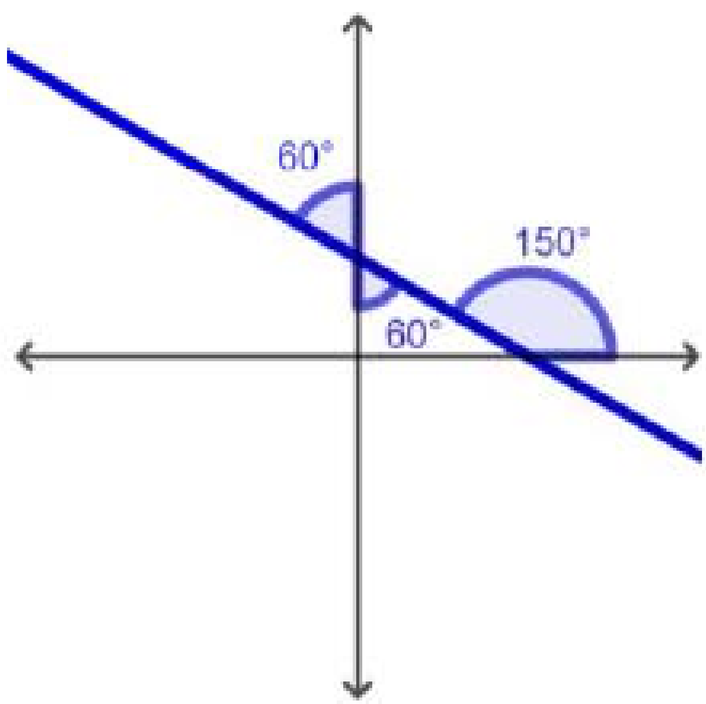
Entonces, para el domingo, la pared tendrá 550 ladrillos, es decir, 125 ladrillos más a los 425 que ya tenía.

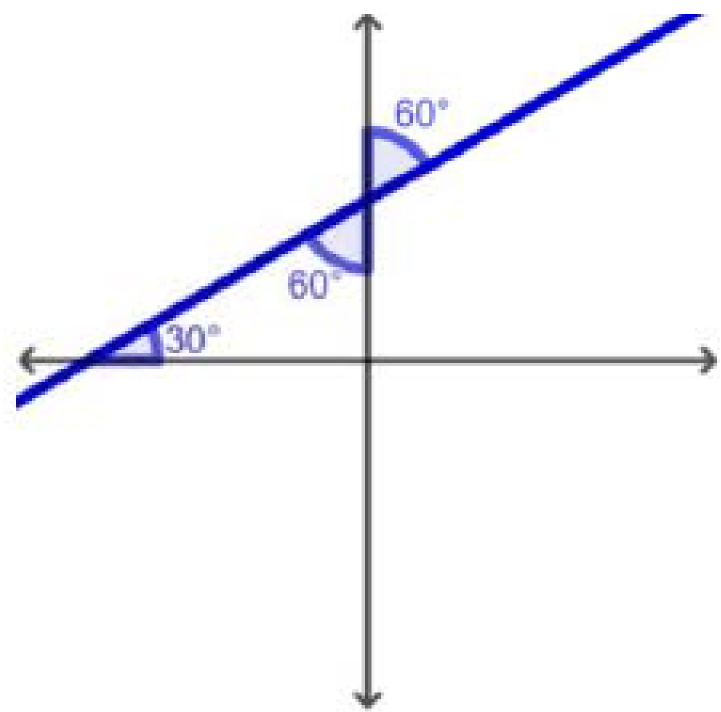
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Determinar el valor de p de tal manera que la recta $y = \frac{3x-8}{p}$ forme un ángulo de $60°$ con el eje Y.

SOLUCIÓN

Considerando el siguiente bosquejo gráfico del problema, hay dos posibles rectas que satisfacen la condición dada:





La recta $y=\frac{3x-8}{p}$ tiene pendiente $m=\frac{3}{p}$, $p\neq 0$. Si el ángulo con el eje Y es de $60°$, entonces el ángulo de inclinación de la recta con el eje X es de $30°$ o $150°$.

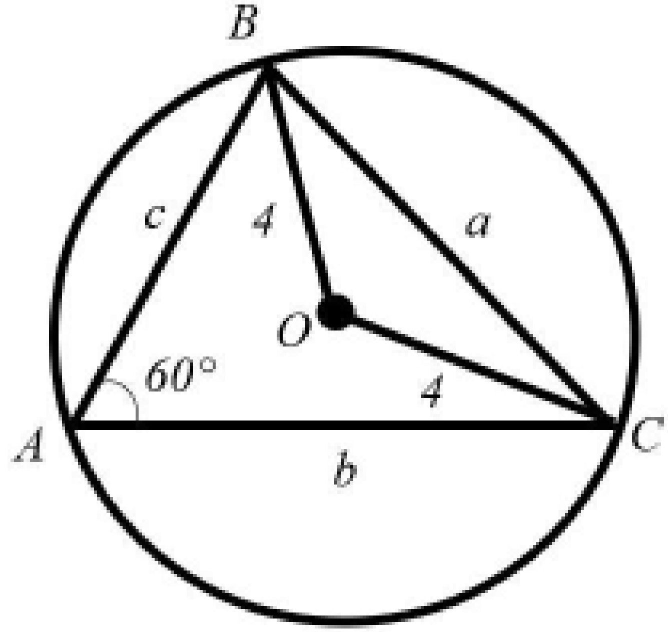
Luego,

$$m = tan\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{p} \quad \Rightarrow p = -3\sqrt{3}$$

$$m = tan\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{p} \quad \Rightarrow p = 3\sqrt{3}$$

GEOMETRÍA PLANA

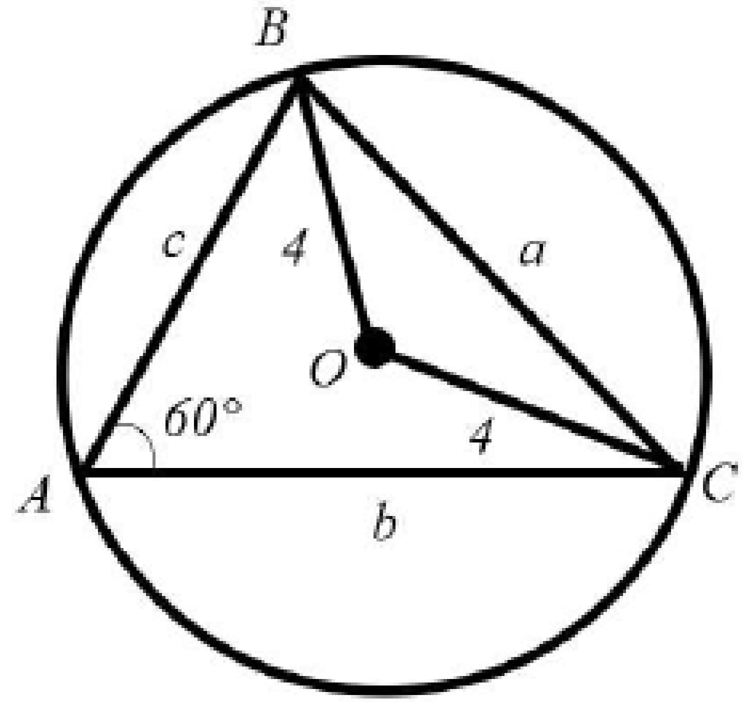
El triángulo ABC está inscrito en un círculo de radio 4, como se ilustra en la figura.



Sea $\angle BAC = 60°$ y $\overline{AC} - \overline{AB} = 4$. Determinar el valor del producto $\overline{AC} \cdot \overline{AB}$.

SOLUCIÓN

Sean a, b, c las longitudes $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, respectivamente y sea O el centro del círculo y r su radio, entonces:



$\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$ y

$\overline{OC} = \overline{OB} = r$.

Al aplicar la Ley de Cosenos al triángulo ABC se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60° = b^2 + c^2 - 2bc\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc = (b - c)^2 + bc$$

Por definición, $\overline{AC} - \overline{AB} = b - c = 4$, entonces:

$$a^2 = (b - c)^2 + bc = (4)^2 + bc = 16 + bc$$

$$\Rightarrow bc = a^2 - 16$$

Además, aplicando ahora la Ley de Cosenos al triángulo OBC:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 120° = 4^2 + 4^2 - 2(4^2)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 16 + 16 + 16 = 48$$

Por tanto,

$$\overline{AC} \cdot \ \overline{AB} = bc = a^2 - 16 = 48 - 16 = 32$$

PRECÁLCULO

Determinar todos los valores de x que satisfagan la siguiente desigualdad:

$$x^2 - 10x + 26 \leq 0$$

SOLUCIÓN

Nótese que el discriminante de la ecuación cuadrática $x^2 - 10x + 26 = 0$ es:

$$10^2 - 4(1)(26) = 100 - 104 = -4 < 0$$

Por tanto, la parábola $y = x^2 - 10x + 26$ no corta al eje x.

En consecuencia, todos los valores de y o son negativos o son positivos.

Al evaluar en $x = 0$, se obtiene que $y = 26 > 0$.

Por tanto, para todo valor de x se cumple que:

$$x^2 - 10x + 26 > 0$$

En consecuencia, la solución es el conjunto vacío $\emptyset$, es decir, ningún valor real de x satisface la desigualdad dada.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

El senado de Estados Unidos está constituido por dos senadores de cada uno de los 50 estados. Determinar la probabilidad de que un grupo de 50 senadores seleccionados aleatoriamente tenga un senador de cada estado.

SOLUCIÓN

Sea el evento

$$A\text{: Un grupo de 50 senadores que tenga solo uno de cada estado}$$

El número de grupos de 50 senadores seleccionados de los 100 es igual a:

$$\#\Omega = \binom{100}{50}$$

Hay dos opciones para el senador del primer estado, hay dos opciones para el senador del segundo estado y lo mismo para los demás estados, por lo que el número de grupos que conforman el evento A es:

$$\#\mathrm{A} = 2^{50}$$

Por tanto, la probabilidad que se busca es:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2^{50}}{\binom{100}{50}}$$