Solución parcial 3

1. Modelamos el sistema masa - resorte y amortiguador a partir de la conservación de fuerzas.

donde: $F_S(t) = ky(t)$ -> fuerza inducida por el resorte

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_e(t)$$

$F_F(t) = c\frac{\partial y}{\partial t}(t)$ -> fuerza de fricción

$F_I(t) = m\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}$ -> fuerza inercial.

Entonces: $m\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial y(t)}{\partial t} + ky(t) = x(t)$

Aplicando Laplace: $ms^2 y(s) + csy(s) + kY(s) = X(s)$

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Hallamos la función de transferencia para el circuito solicitado:

LVK m_1

$$-v_i(t) + L\frac{\partial i_1(t)}{\partial t} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t) - i_2(t)\,dt = 0$$

Usando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$v_i(s) = sLi_1(s) + (i_1(s) - i_2(s))\frac{1}{Cs} \quad (1)$$

LVK para m_2

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_{L0}^t i_2(t) - i_1(t)\,dt = 0$$

$$v_0(t) = i_2(t)R$$

Usando impedancias transformadas

$$i_2(s) R + (i_2(s) - i_1(s)) \frac{1}{Cs} = 0$$

Despejamos $i_1(s)$ $\frac{i_1(s)}{Cs} = i_2(s) R + \frac{i_2(s)}{Cs}$

$$i_1(s) = \left(\frac{i_2(s)}{Cs} + i_2(s) R \right) Cs$$

$$i_1(s) = i_1(s) + CRs\, i_2(s)$$

$$i_1(s) = i_2(s)\,(1 + CRs) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$V_i(s) = sL\,(i_2(s)(1 + CRs)) + (i_2(s)(1 + CRs) - i_2(s)) \frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = sL i_2(s) + LCRs^2 i_2(s) + (\cancel{i_2(s)} + CRs\, i_2(s) - \cancel{i_2(s)}) \frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = sL i_2(s) + LCRs^2 i_2(s) + R i_2(s)$$

$$V_i(s) = i_2(s)\,(LCRs^2 + Ls + R)$$

$$\frac{i_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCRs + Ls + R}$$

Reemplazamos $i_2(s) = \frac{V_o(s)}{R}$

$$\frac{R i_2(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{LCRs^2 + Ls + R}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{LCRs^2 + Ls + R} \cdot \frac{(\frac{1}{R})}{(\frac{1}{R})}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$ / Función de transferencia del circuito eléctrico

Equivalencia circuito eléctrico | Péndulo elástico

Circuito eléctrico	Péndulo elástico
CL	m
L/R	c
1	k

Entonces $H(s) = \dfrac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$ y su equivalente en péndulo elástico:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{sc}{m} + \frac{k}{m}\right)}$$

Hallamos la formula canonica de segundo orden

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}$$

Igualando coeficientes

$1 = 1 \rightarrow$ Coef s^2

$2\xi w_n \rightarrow$ coef s

$w_n^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow$ coef independiente

- $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{m}$$

Despejando ξ =

$$\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- La ganancia:

$$K w_n^2 = \frac{1}{m}$$

$$K = \frac{1}{m w_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\left(\frac{k}{m}\right)}$$

$$K = \frac{1}{k}$$

Por lo tanto la forma canonica de segundo orden sera:

$$H(s) = K \frac{wn^2}{s^2 + 2\xi wns + wn^2}$$

$$H(s) = \left(\frac{1}{K}\right) \frac{\frac{K}{m}}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{K/m}}\right)\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)s + \frac{K}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}\right)}$$

Hallamos la frecuencia natural del amortiguador

$$wd = wn\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)^2}$$

$$wd = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{4Km-c^2}}{2\sqrt{Km}}$$

Hallamos el tiempo de establecimiento

$$ts = \frac{3}{\xi wn} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}} \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}} \Rightarrow ts = \frac{6m}{c}$$

Función de transferencia masa resorte amortiguado lazo cerrado:

- La función de transferencia de un sistema lazo cerrado se representa como:

$$H_{LC} = \frac{H(s)}{1 \pm A(s)\,H(s)}$$

Entonces

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k} \quad / \text{Si lazo abierto}$$

- H_{LC}

$$H_{LC}(s) = \frac{\frac{1}{ms^2+cs+k}}{1+\left(\frac{1}{ms^2+cs+k}\right)} \quad \Rightarrow \quad HLC(s) = \frac{\cancel{ms^2+cs+k}}{\cancel{(ms^2+cs+k)}(ms^2+cs+k+1)}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k+1} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{m\left(s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}+\frac{1}{m}\right)}$$

-> Hallando la fórmula canónica de segundo orden:

- Comparamos: $s^2+2\xi w_n s+w_n^2 = s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k+1}{m}$
- Igualando coeficiente

$1=1 \rightarrow$ coef s^2

$2\xi w_n = \frac{c}{m} \rightarrow$ coef s

$w_n^2 = \frac{k+1}{m} \rightarrow$ coef independiente

Hallando frecuencia natural no amortiguada

$$w_n = \sqrt{\frac{k+1}{m}}$$

Hallando factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k+1}{m}} = \frac{c}{m} \qquad \xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}$$

$$kw_n^2 = 1/m$$
$$k = 1/mw_n^2$$
$$k = 1/m\left(\frac{k+1}{m}\right) \qquad K = \frac{1}{k+1}$$

2a forma canonica de segundo orden:

$$H_{LC}(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_{LC}(s) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \frac{\frac{k+1}{m}}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\left(\sqrt{\frac{k+1}{m}}\right)}\right)\left(\sqrt{\frac{k+1}{m}}\right)s + \frac{k+1}{m}}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k+1}{m}\right)}$$

Hallando frecuencia natural amortiguada.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\right)^2}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{4km + 4m - c^2}}{2\sqrt{m(k+1)}}$$

hallando el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi\,\omega_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\left(\cancel{\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\right)}\left(\cancel{\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\right)}$$

$$t_s = \frac{6m}{c}$$