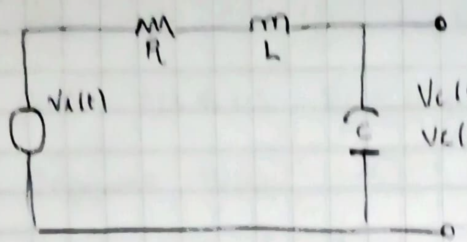
Solución
Circuito RLC en Serie



$V_i(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$

$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v_C(0^+)u(t)$

$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau + i_L(0^+)u(t)$

$i(t) = i_R(t) = i_C(t) = i_L(t)$

$\mathcal{L}\{v_C(t)\} = V_C(s) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{V_C(0^+)}{s}$ ①

$\mathcal{L}\{i_L(t)\} = I_L(s) = \frac{1}{Ls} V_L(s) + \frac{i_L(0^+)}{s}$ ②

Escribimos $V_R(s)$ y $V_L(s)$ en función de $V_o(s)$ y los puntos iniciales.

$V_i(s) = V_R(s) + V_L(s) + V_C(s)$

Despejamos I_C en ①

$I(s) = I_C(s) = CsV_C(s) - \frac{CsV_C(0^+)}{s}$

$I(s) = CsV_C(s) - CV_C(0^+)$

Despejamos $V_L(s)$ en ②

$\frac{1}{Ls} V_L(s) = I_L(s) - \frac{i_L(0^+)}{s}$

$V_L(s) = Ls\, I_L(s) - \frac{Ls\, i_L(0^+)}{s}$

Reemplazamos $I(s) = CsV_C(s) - CV_C(0^+)$

$V_L(s) = Ls\,[CsV_C(s) - CV_C(0^+)] - Li_L(0^+)$

$V_L(s) = LCs^2 V_C(s) - LCs\,V_C(0^+) - Li_L(0^+)$

Reemplazamos todo en la malla

$$V_i(s) = R\,[CsV_C(s) - CV_C(0^+)] + LCs^2V_C(s) - LCsV_C(0^+) - Li_L(0^+) + V_C(s)$$

$$V_i(s) = RCsV_C(s) - RCV_C(0^+) + LCs^2V_C(s) - LCsV_C(0^+) - Li_L(0^+) + V_C(s)$$

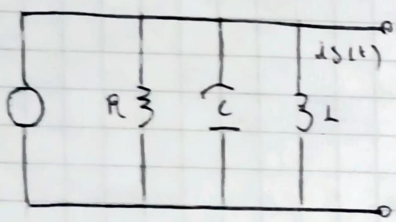
Despejando $V_C(s)$

$$V_i(s) = V_C(s)\,[LCs^2 + RCs + 1] + V_C(0^+)\,[-LCs - RC] - Li_L(0^+)$$

$$\frac{V_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} = V_C(s) + V_C(0^+)\frac{[-LCs - RC]}{LCs^2 + RCs + 1} - \frac{Li_L(0^+)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$V_C(s) = \frac{V_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1} + \frac{V_C(0^+)\,[LCs + RC]}{LCs^2 + RCs + 1} - \frac{Li_L(0^+)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Circuito RLC paralelo



$i_L(0^+)u(t)$

Se describen las corrientes del circuito por LCK

$$i_s(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

teniendo en cuenta:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau + i_L(0^+)\,u(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_L(\tau)\,d\tau + v_C(0^+)\,u(t)$$

$$V(t) = V_R(t) = V_C(t) = V_L(t)$$

representamos en el dominio de Laplace

$$\mathcal{L}\{i_L(t)\} = I_L(s) = \frac{1}{Ls}V_L(s) + \frac{i_L(0^+)}{s} \quad (1)$$

$$\mathcal{L}\{v_C(t)\} = V_C(s) = \frac{1}{Cs}I_C(s) + \frac{v_C(0^+)}{s} \quad (2)$$

Reescribimos $i_R(s)$ e $i_C(s)$ en función de $i_L(s)$ y los puntos iniciales

Aplicamos Laplace a las corrientes del circuito

$$I_s(s) = \frac{V_R(s)}{R}\;\; i_C(s) + i_L(s) \quad (3)$$

Despejamos $V_c(s)$ en (1)

$$V(s) = V_L(s) = LsI_L(s) - \frac{Ls\, i_L(0^+)}{s}$$

$$V(s) = Ls\, i_L(s) - L i_L(0^+) \quad (4)$$

Despejamos $i_c(s)$ de 2

$$i(s) = i_c(s) = CsV_c(s) - \frac{CsV_c(0^+)}{s}$$

$$i(s) = CsV_c(s) - CV_c(0^+) \quad (5)$$

Reemplazando 4 y 5 en 3:

$$i_c(s) = \frac{Ls i_L(s) - L i_L(0^+)}{R} + CsV_c(s) - CV_c(0^+) + I_c(s)$$

$$i_c(s) = \frac{Ls i_R(s) - L i_L(0^+)}{R} + Cs\left[Lsi_L(s) - Li_L(0^+)\right] - CV_c(0^+) + I_c(s)$$

$$i_c(s) = \frac{Ls i_L(s)}{R} - \frac{L i_L(0^+)}{R} + LCs^2 i_L(s) - LCs i_L(0^+) - CV_c(0^+) + i_c(s)$$

Se factoriza $i_L(s)$ e $i_R(0^+)$

$$i_c(s) = i_L(s)\left[Ls/R + LCs^2 + 1\right] + i_L(0^+)\left[-L/R - LCs\right] - CV_c(0^+)$$

Dividimos la ecuacion por $i_R(0^+)$

$$\frac{i_c(s)}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} = i_L(s) + \frac{i_L(0^+)\left[-LCs - L/R\right]}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} - \frac{CV_c(0^+)}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}$$

Despejamos $i_L(s)$

$$i_L(s) = \frac{i_c(s)}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1} + \frac{i_L(0^+)\left[LCs + L/R\right]}{LCs^2 + Ls/R + 1} + \frac{CV_c(0^+)}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}$$

Punto 2 Plantee la equivalecia de los sistemas en el punto 1, a partir de un sis. masa resorte amortiguado, asuma condiciones iniciales 0.

- Equivalencia del circuito RLC en serie (0,0)

$$V_c(s) = \underbrace{\frac{V_i(s)}{LCs^2 + RCs + 1}}_{\text{output}}$$

equivalencia a partir del sistema masa resorte amortiguado

$$y(s) = \frac{Fe(s)\,c}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1}$$

finalmente planteamos la equivalencia a partir de un sistema masa resorte

$$y(s) = \frac{Fe(s)\,C}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1}$$

Punto 3

Para los sistemas estudiados en el punto 1

circuito RLS serie

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \cdot \left(\frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{LC}} \right)$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Hallamos la forma canónica de segundo orden

Comparamos $s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 \longleftrightarrow s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$

Igualamos coeficientes

$1 = 1 \rightarrow$ coeficientes s^2

$2\xi w_n = \frac{R}{L}$ coef s

$W_n^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow$ coef independiente

Encontramos W_n

$$2\xi \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} \qquad \xi = \frac{R\sqrt{LC}}{2L}$$ factor de amortiguamiento

Igualando numeradores, hallamos la ganancia K

$$K W_n^2 = \frac{1}{LC} \quad \Bigg| \quad K = \frac{1}{LCW_n^2} = \frac{1}{\cancel{LC}\left(\frac{1}{\cancel{LC}}\right)} = 1$$

La forma canónica de segundo orden es

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + 2\left(\frac{R\sqrt{LC}}{2L}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + RS/L + 1/LC}$$

Hallamos la frecuencia natural amortiguada

$$W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$W_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\left(\frac{R\sqrt{LC}}{2L}\right)^2}$$

$$W_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2 LC}{4L^2}}$$

$$W_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{4L-R^2C}{4L}}$$

$$W_d = \frac{\sqrt{4L-R^2C}}{2\sqrt{LC}\sqrt{L}}$$

Hallamos el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\frac{R\sqrt{LC}}{2L}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} \qquad t_s = \frac{6L}{R}$$

Circuito RLC paralelo

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} \left(\frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{LC}}\right)$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}}$$

Hallamos la forma canónica de segundo orden

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 \longleftrightarrow s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{1}{LC}$$

Igualamos coef

$1 = 1$ coef s^2

$2\xi W_n = \frac{1}{CR}$ coef de s

$W_n^2 = \frac{1}{LC}$ coef independiente

Hallamos W_n

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Reemplazamos W_n, para obtener el factor de amortiguamiento

$$2\xi\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC} \qquad \xi = \frac{\sqrt{LC}}{2RC}$$

Igualamos coefs para hallar K

$$KW_n^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow K = \frac{1}{LC\left(\frac{1}{LC}\right)} = 1$$

La forma canónica de segundo orden sería:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + 2\left(\frac{\sqrt{LC}}{2RC}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Hallamos la frecuencia natural amortiguada

$$W_d = W_n\sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{LC}}{2RC}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{LC}{4R^2C^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{4R^2C-L}{4R^2C}}$$

$$W_d = \frac{\sqrt{4CR^2-L}}{2R\sqrt{LC}\sqrt{C}}$$

Tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi W_n} = \frac{3}{\frac{\sqrt{LC}}{2RC}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)} = 6RC \qquad t_s = 6RC$$

Para los sistemas estudiados en el punto 2

Equivalencia Circuito RLC serie en pendulo elastico

$$H(s) = \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1} \quad \left(\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}} \right)$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Hallamos la forma canonica de segundo orden

$$s^2 + 2\xi W_n s + W_n^2 \longleftrightarrow s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}$$

Igualamos coeficientes

$1 = 1$ coef s^2

$2\xi W_n = \frac{c}{m}$ coef s

$W_n^2 = \frac{k}{m}$ coef independiente

Hallamos W_n

$$W_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hallamos factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{m} \qquad \xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Hallamos la ganancia k

$$k\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = \frac{k}{m\left(\frac{k}{m}\right)} = 1$$

Entonces la forma canonica de segundo orden es

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Hallamos la frecuencia natural amortiguada

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{4km-c^2}}{2\sqrt{km}}$$

Tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)} \qquad t_s = \frac{6m}{c}$$

Equivalencia circuito RLC paralelo en el pendulo estatico

$$H(s) = \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{m}{c}s + 1} \quad \left(\frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m}}\right)$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{k}{c}s + \frac{k}{m}}$$

Hallamos la forma canónica de segundo orden

$$s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{k}{c}s + \frac{k}{m}$$

Igualamos coeficientes

$1 = 1$ coef s^2

$2\xi w_n = \frac{k}{c}$ coef s

$w_n^2 = \frac{k}{m}$ coef independiente

Hallamos w_n

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Hallamos factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{k}{c} \qquad \xi = \frac{k}{2c\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Hallamos K:

$$Kw_n^2 = \frac{k}{m} \qquad K = \frac{K}{mw_n^2} = \frac{k}{m\left(\frac{k}{m}\right)} = 1$$

Entonces la forma canónica de segundo orden:

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + 2\left(\frac{k}{2\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{k}{c}s + \frac{k}{m}}$$

Hallamos la frecuencia natural de amortiguamiento

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2c\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}$$

$$w_d = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{4c^2-km}}{2c}$$

Tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi w_n} = \frac{3}{\left(\frac{k}{2c\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)}$$

$$t_s = \frac{6c}{k}$$