UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Sede-Medellin

Facultad de Ciencias

Actuaría de riesgos de contingencias de vida

Estadistica

Trabajo 3
Anualidades de vida, con tasas aleatorias

Juan David Garcia Zapata
Juan Diego Espinosa

2024

Nos correspondio el siguiente problema:

Grupo	Modelo	Problema No
13	Perk1	3

Los parametro del Modelo Perk1 son:

Parametros	a_1	a_2	a_3
Perk1	0.00025748	0.00002553	0.10128397

Enunciado

Este problema es sobre la anualidad de vida con reversión, para dos vidas (x), (y), que paga a (y) una anualidad si (x) fallece primero, definida en (6.22), pag. 259, y Suponga dos vidas $x = 45$ y $y = 15$. La fuerza de mortalidad estándar $\mu_x + t$ dada por la ley de mortalidad y sus parámetros asignados en el Trabajo No 1. Utilice una tasa de $i = 0.06$, defina $v = \frac{1}{(1+i)}$, asuma pagos mensuales anticipados, con valor $C = 2.5$, $m = 12$.

Puntos:

(a) (40/40) Considere la variable $T_{x,y} = \text{mín}(T(x), T(y))$, donde $T(x)$, $T(y)$ se asumen independientes, definida en (2.5.2), pag. 40. Utilice la función de supervivencia $tp_{xy} = tp_x tp_y$, para $0 < t < x \vee y = \text{máx}(x, y)$, para evaluar la prima neta, definida en 6.23, pag. 259.

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m(\omega - x\vee y)-1} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_{x,y}.$$

Y el costo: $C \times m \times \ddot{a}_{xy}^{(m)}$.

(b) (20/20) La anualidad de vida con reversión de (x) sobre (y), o pensión de sobreviviente, tiene prima neta

$$\ddot{a}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{y}^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)}.$$

Calcule $\ddot{a}_{y}^{(m)}$ y $\ddot{a}_{x|y}^{(m)}$. Y el costo: $C \times m \times \ddot{a}_{x|y}^{(m)}$. Interprete este resultado.

(c) (40/40) Simule una muestra de tamaño $N = 5000$ de la variable valor presente de Z

$$Z = C \sum_{k=0}^{\lfloor mT_y \rfloor} (1 + i_m)^{-\frac{k}{m}} - C \sum_{k=0}^{\lfloor mT_{x,y} \rfloor} (1 + i_m)^{-\frac{k}{m}},$$

donde $i_m = \frac{i}{m}$, como en (6.92). Reporte el histograma de Z con el valor de su media y de $C \times m \times \ddot{a}_{x|y}^{(m)}$ en el eje X.

Como se menciona el problema es sobre la anualidad de vida con reversion, para dos vidas (x),(y) que paga (y) una anualidad si (y) fallece primera definida:

La prima neta es el valor esperado de Z, denotada

$$\ddot{a}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{y}^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)},$$

donde la prima de la anualidad $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ se define como

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = E\left(\frac{1}{m}\left[\sum_{k=0}^{\lfloor mT_{x,y}\rfloor}(1+i_m)^{-\frac{k}{m}}\right]\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x\vee y)-1} v^{\frac{k}{m}}\, {}_kp_{x,y},$$

con $tpxy = tp_x \times tp_y$ para $0 < t < x \vee y = \text{máx}(x, y)$.

Nótese que

$$\ddot{a}_{x}^{(m)} + \ddot{a}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{y}^{(m)} + \ddot{a}_{x}^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)} = \ddot{a}_{xy}^{(m)}.$$

1. Literal a)

Considerando la variable $T_{x,y} = \text{mín}(T(x), T(y))$, donde $T(x)$, $T(y)$ se asumen independientes, definida como:

$$T_{x_1,x_2} = \text{mín}\{T(x_1), T(x_2)\} \tag{2.50}$$

Entonces, por la independencia de las variables

$$P(T_{x_1,x_2} > t) = P(T(x_1) > t, T(x_2) > t) = P(T(x_1) > t)P(T(x_2) > t).$$

Se puede comprobar también que la función de densidad de T_{x_1,x_2} es:

$$f_{T_{x_1,x_2}}(t) = tp_{x_1} tp_{x_2}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t}). \tag{2.51}$$

Ahora pra evaluar la prima neta definida:

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m(\omega-x\vee y)-1} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_{x,y}.$$

Donde:

- m es el número de pagos por año.
- v es el factor de descuento $v = \frac{1}{1+i}$.
- $tpxy = tp_x tp_y$ es la probabilidad de supervivencia conjunta hasta el tiempo t.
- i_m es la tasa de interés equivalente a la frecuencia de pagos $i_m = \frac{i}{m}$.

Comenzaremos definiendo los parametros que tenemos:

```
pars <- c(0.00016509, 0.00004720, 0.09048066)
x1 <- 45  # Edad de la persona 1
x2 <- 15  # Edad de la persona 2
i <- 0.06  # Tasa de interés
m <- 12  # Pagos mensuales
v <- 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
w <- 110
```

Función de supervivencia para cada persona (funciones t_{px})

Para la persona x_1 y x_2

```
# Función de supervivencia para una vida
tpx.pe11 <- function(t, x1, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x1) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x1 + t)) + 1))^g
  return(v)
}
```

Función para calcular la prima neta de $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$

```
a_xy_m1 <- function(x1, x2, m, i, pars) {
  v = 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
  k = seq(0, m * (w - max(x1, x2)) - 1, 1)  # Secuencia de pagos desde 0 hasta el límite
  sum_v <- 0  # Inicializa la suma

  # Iterar sobre los periodos de tiempo
  for (k_val in k) {
    t <- k_val / m  # Tiempo en unidades de años
    surv_x1 <- tpx.pe11(t, x1, pars)  # Probabilidad de supervivencia de x1
    surv_x2 <- tpx.pe11(t, x2, pars)  # Probabilidad de supervivencia de x2
    sum_v <- sum_v + (v^t) * (surv_x1 * surv_x2)  # Agregar al sumatorio
  }

  # Calcula la anualidad conjunta
  a <- sum_v / m
  return(a)
}
```

Calcular la prima neta de $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$

```
(a_xy_m_value = a_xy_m1(x1,x2,m,i,pars))
```

la prima neta de $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ da como resultado:

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = 13.91084$$

La **prima neta conjunta de 13.91084** significa que el valor presente esperado de todos los pagos mensuales que se realizarán mientras **ambas personas** x y y estén vivas, es **13.91084 unidades monetarias**. Este valor es el resultado de descontar esos pagos futuros a su valor presente, utilizando las probabilidades de supervivencia conjunta basadas en el **modelo Perks** y la tasa de interés dadaa.

Ahora calculamos el costo:

```
cost_xy <- C * m * prima_neta_xy
```

$$C \times m \times \ddot{a}_{xy}^{(m)} = 417.3252$$

Con $C = 2.5$, el valor "**Costo total: 417.3252**"significa que se requiere un pago inicial de **417.3252 unidades monetarias** para cubrir completamente la anualidad conjunta. Esto representa el valor presente esperado de todos los pagos mensuales, considerando que C es el monto de cada pago mensual, y que los pagos continúan hasta que fallezca la primera de las dos personas, x o y, con base en las probabilidades de supervivencia conjunta y el descuento por una tasa de interés del 6 %.

2. Literal b)

Fórmula de la anualidad con reversión:

$$\ddot{a}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{y}^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)}$$

Donde:

- $\ddot{a}_{y}^{(m)}$ es la **prima neta de la anualidad de vida de** y, es decir, el valor presente esperado de los pagos que se harían mientras y esté vivo.
- $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ es la **prima conjunta** que ya calculada en el primer punto, es decir, el valor presente de los pagos hasta que fallezca la primera de las dos personas, x o y.

Pasos a seguir:

1. **Calcular** $\ddot{a}_{y}^{(m)}$. Esta es la prima de la anualidad de vida de y, que puedes calcular de manera similar a cómo calculaste la prima conjunta $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$.
2. **Restar** $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ para obtener $\ddot{a}_{x|y}^{(m)}$. Una vez tengas $\ddot{a}_{y}^{(m)}$, puedes restar la prima conjunta que ya se calculo en el primer punto para obtener la prima neta con reversión $\ddot{a}_{x|y}^{(m)}$.
3. **Calcular el costo:** Finalmente, calcular el costo total como $C \times m \times \ddot{a}_{x|y}^{(m)}$.

Para ese punto y utilizaremos los parametros ya definididos y el valor de $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$ calculada anteriormente por lo que nos enfocamos en calcular $\ddot{a}_{y}^{(m)}$

función de supervivencia para la persona y

```
# Función de supervivencia para una vida
tpx.pe11 <- function(t, x1, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x1) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x1 + t)) + 1))^g
  return(v)
}
```

Calculo la prima neta de la anualidad de vida de a persona **y**

```
aaxm <- function(x, m, i, pars) {
  v = 1 / (1 + i)
  k = seq(0, m * (w - x) - 1, 1)
  vkm = v^(k / m)
  kmpx = tpx.pe11(k/m, x, pars)
  a = sum(vkm * kmpx)/m
  return(a)
}
```

Calculo la prima neta de **y**

```
a_y_m <- aaxm(x2, m, i, pars)
```

Nos da como resultado:

$$\ddot{a}_{y}^{(m)} = 16.4752$$

La prima neta de la anualidad de vida pura para $y = 15$ con pagos mensuales anticipados es $\ddot{a}_{y}^{(m)} = 16.4752$. Esto significa que el valor actual esperado de una serie de pagos mensuales hasta el fallecimiento de la persona y, descontados a una tasa de interés $i = 0.06$, es de 16.4752 unidades monetarias.

Ya que se calculada $\ddot{a}_{y}^{(m)}$, podemos calcular la prima neta con reversión $\ddot{a}_{x|y}^{(m)}$, usando la fórmula:

$$\ddot{a}_{x|y}^{(m)} = \ddot{a}_{y}^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)}$$

Donde ya tenemos : $\ddot{a}_{y}^{(m)}$ y $\ddot{a}_{xy}^{(m)}$

```
a_x_given_y_m <- a_y_m - a_xy_m_value
```

Nos da como resultado:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x|y} = 2.564364$$

El valor de **2.564364** para la **prima neta con reversión** $\ddot{a}^{(m)}_{x|y}$ indica que el valor presente esperado de los pagos que se realizarían a y si x fallece primero es **89.13 unidades monetarias**. Este monto refleja el costo actuarial de cubrir esos pagos a y bajo la condición de que x sea el primero en fallecer, descontado al valor presente utilizando las probabilidades de supervivencia y la tasa de interés aplicadas.

Ahora para el $C \times m \times \ddot{a}^{(m)}_{x|y}$.

```
C <- 2.5
cost_x_y <- C * m * prima_neta_x_y
```

Nos da como resultado:

$$C \times m \times \ddot{a}^{(m)}_{x|y}. = 76.93091$$

El valor **76.93091 unidades monetarias** representa el costo total en valor presente de la anualidad con reversión, que corresponde al valor presente esperado de los pagos que se realizarían a y en caso de que x fallezca primero. Este cálculo utiliza una tasa de interés del 6 % y las probabilidades de supervivencia según el modelo Perks. El valor refleja el costo actuarial de cubrir dichos pagos, considerando la frecuencia de pagos anual m, el beneficio asegurado C, y la prima neta con reversión $\ddot{a}^{(m)}_{x|y}$.

3. Literal c)

Para resolver este punto, el objetivo es simular la variable Z, que representa el valor presente de una anualidad con reversión para dos personas, x y y. Se utiliza el modelo de mortalidad de Perks para calcular la probabilidad de supervivencia de ambas personas y luego simular sus tiempos de muerte. Basado en esos tiempos de muerte simulados, calculé la anualidad y el valor de Z.

La fórmula de Z es la siguiente:

$$Z = C \times \left(\sum_{k=0}^{T_y} \frac{1}{(1+i)^{k/m}} - \sum_{k=0}^{T_x} \frac{1}{(1+i)^{k/m}} \right)$$

Donde:

- C es la constante dada (en este caso, $C = 2.5$),
- i es la tasa de interés anual 0.06,
- m es la frecuencia de pagos (12 pagos mensuales),
- T_x y T_y son los tiempos de muerte de x y y, respectivamente.

```
pars <- c(0.00016509, 0.00004720, 0.09048066)
x<- 45
x2 <- 15
w <- 110
```

```r
C=2.5
i <- 0.06
m <- 12
v <- 1 / (1 + i)
tpx.pe11 <- function(t, x, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x + t)) + 1))^g
  return(v)
}
require(GoFKernel)
Zy <- double(5000)
Zxy <- double(5000)
for (j in 1:5000) {
  v <- 1 / (1 + i)
  f1 <- function(t) (1- tpx.pe11(t,x1,pars))/0.9994966
  Tx = random.function(1, f1, lower = 0, upper = 110-x1,  kind = "cumulative")
  f2 <- function(t) (1- tpx.pe11(t,x2,pars))/0.9994966
  Ty = random.function(1, f2, lower = 0, upper = 110-x2,  kind = "cumulative")
  txy <- seq(0,floor(m*min(Tx,Ty)))
  ty <- seq(0,floor(m*Ty))
  Zy[j] <-  C * sum(v^{ty/m})
  Zxy[j] <- C * sum(v^{txy/m})}
hist(Zy-Zxy)

(mediaZ <- mean(Zy)-mean(Zxy))
abline(v = mediaZ, col = "red", lwd = 2)
legend("topright", legend = paste("Media =", round(mediaZ, 4)), col = "red", lwd = 2)
```

Descripción del código

Este código tiene como objetivo simular la diferencia en los valores esperados de dos tipos de anualidades de vida: una *anualidad pura* para y y una *anualidad con reversión* para $x|y$, bajo el modelo de mortalidad de **Perks**. El código utiliza simulaciones para estimar estos valores y calcular su diferencia.

El proceso consiste en:

1. Definir los parámetros del modelo de mortalidad de Perks y las edades de las personas $x = 45$ y $y = 15$.

2. Aplicar la **función de supervivencia** de Perks para calcular las probabilidades de supervivencia a lo largo del tiempo.

3. Realizar **5000 simulaciones** de los tiempos de muerte T_x y T_y para ambos individuos, y para cada simulación, calcular el valor presente de las anualidades:

   - Z_y: la anualidad pura para y.

- Z_{xy}: la anualidad con reversión, que paga si x fallece primero.

4. Finalmente, se genera un **histograma de la diferencia** entre las dos anualidades y se calcula la **media de las diferencias** entre Z_y y Z_{xy}.

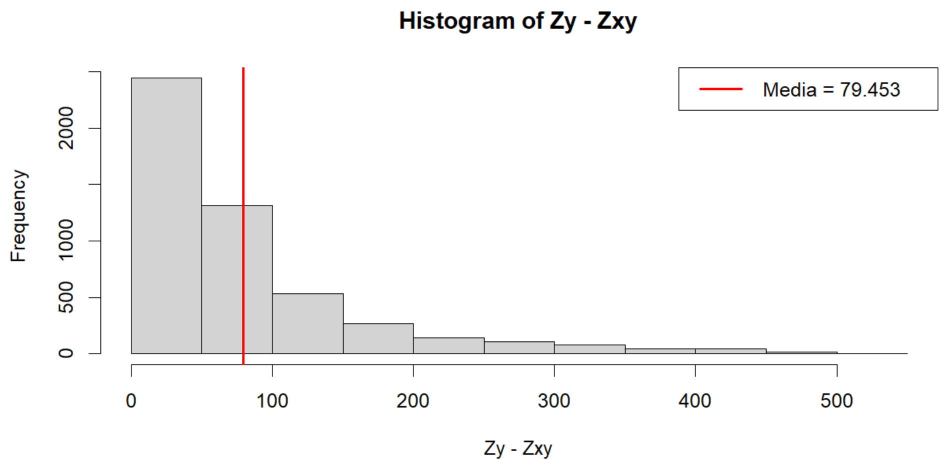

Figura 1: Valor medio de Z: 79.45304

El valor medio de Z, que es aproximadamente 79.45304, representa el valor esperado de la anualidad con reversión entre dos personas, donde los pagos mensuales continúan hasta el fallecimiento de la persona más joven. Este valor promedio, obtenido a partir de 5000 simulaciones, refleja el costo anticipado que la aseguradora debería cubrir para este tipo de contrato, teniendo en cuenta las tasas de interés, pagos mensuales y la mortalidad de las personas involucradas.

4. Codigos:

4.1. Punto 1

```r
# punt1
# Parámetros de la ley de Perks
pars <- c(0.00016509, 0.00004720, 0.09048066)
# Edades de las personas
x1 <- 45  # Persona x
x2 <- 15  # Persona y
# Parámetros del interés
i <- 0.06  # Tasa de interés
m <- 12    # Pagos mensuales
v <- 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
C <- 2.5   # Valor del costo
# Edad límite
w <- 110
# Función de supervivencia para una vida
tpx.pe11 <- function(t, x1, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x1) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x1 + t)) + 1))^g
  return(v)
}
# Función corregida a_xy_m1
a_xy_m1 <- function(x1, x2, m, i, pars) {
  v = 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
  k = seq(0, m * (w - max(x1, x2)) - 1, 1)  # Secuencia de pagos desde 0 hasta el límite
  sum_v <- 0  # Inicializa la suma
  # Iterar sobre los periodos de tiempo
  for (k_val in k) {
    t <- k_val / m  # Tiempo en unidades de años
    surv_x1 <- tpx.pe11(t, x1, pars)  # Probabilidad de supervivencia de x1
    surv_x2 <- tpx.pe11(t, x2, pars)  # Probabilidad de supervivencia de x2
    sum_v <- sum_v + (v^t) * (surv_x1 * surv_x2)  # Agregar al sumatorio
  }
  # Calcula la anualidad conjunta
  a <- sum_v / m
  return(a)
}
(a_xy_m_value = a_xy_m1(x1,x2,m,i,pars))
(costo <- C * m * a_xy_m_value)
```

4.2. Punto 2

```r
# Parámetros de la ley de Perks
pars <- c(0.00016509, 0.00004720, 0.09048066)
# Edades de las personas
x1 <- 45  # Persona x
x2 <- 15  # Persona y
# Parámetros del interés
i <- 0.06  # Tasa de interés
m <- 12    # Pagos mensuales
v <- 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
C <- 2.5   # Valor del costo
# Edad límite
w <- 110
# Función de supervivencia para una vida
tpx.pe11 <- function(t, x1, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x1) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x1 + t)) + 1))^g
  return(v)
}
# Cálculo de la anualidad de vida pura (una vida)
aaxm <- function(x, m, i, pars) {
  v = 1 / (1 + i)
  k = seq(0, m * (w - x) - 1, 1)
  vkm = v^(k / m)
  kmpx = tpx.pe11(k/m, x, pars)
  a = sum(vkm * kmpx)/m
  return(a)
}
#  Cálculo de la anualidad pura para y
(a_y_m <-  aaxm(x2, m, i, pars))
#  Cálculo de la anualidad con reversión para x|y
(a_x_given_y_m <- a_y_m - a_xy_m_value)
# 4. Cálculo del costo total
(costo <- C * m * a_x_given_y_m)
```

4.3. Punto 3

```r
# Parámetros del modelo Perks
pars <- c(0.00016509, 0.00004720, 0.09048066)  # Parámetros que diste antes
# Edades de las personas
x1 <- 45  # Edad de la persona 1
x2 <- 15  # Edad de la persona 2
w <- 110
C=2.5
# Parámetros del interés
i <- 0.06  # Tasa de interés
m <- 12  # Pagos mensuales
v <- 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
# Función de supervivencia
tpx.pe11 <- function(t, x, pars) {
  a1 <- pars[1]
  a2 <- pars[2]
  a3 <- pars[3]
  g <- (1 - a1) / a3
  v <- exp(-a1 * t) * ((a2 * exp(a3 * x) + 1) / (a2 * exp(a3 * (x + t)) + 1))^g
  return(v)
}
require(GoFKernel)
Zy <- double(5000)
Zxy <- double(5000)
# Función para calcular Z a partir de los tiempos simulados
for (j in 1:5000) {
  v <- 1 / (1 + i)  # Factor de descuento
  f1 <- function(t) (1- tpx.pe11(t,x1,pars))/0.9994966
  Tx = random.function(1, f1, lower = 0, upper = 110-x1,  kind = "cumulative")
  f2 <- function(t) (1- tpx.pe11(t,x2,pars))/0.9994966
  Ty = random.function(1, f2, lower = 0, upper = 110-x2,  kind = "cumulative")  # Simula tiempo de muerte para 
  txy <- seq(0,floor(m*min(Tx,Ty)))
  ty <- seq(0,floor(m*Ty))
  Zy[j] <-  C * sum(v^{ty/m})
  Zxy[j] <- C * sum(v^{txy/m})}


hist(Zy-Zxy)

(mediaZ <- mean(Zy)-mean(Zxy))
# Agregar una línea vertical en la posición de la media
abline(v = mediaZ, col = "red", lwd = 2)
# Agregar leyenda con el valor de la media
legend("topright", legend = paste("Media =", round(mediaZ, 4)), col = "red", lwd = 2)
```

también puedes descargar el código completo a través del enlace accediendo con la cuenta institucional:

https://drive.google.com/file/d/1pgJGPBFQ9sCnXhp7ExIarszTGs2l9RZV/view?usp=sharing