Tercer Tarea

Juan David Garcia Zapata
Juan Diego Espinosa Hernandez
Katerin Gomez Castrillon
Andrés Camilo Úsuga Montoya

Estadística No Paramétrica

Mayo de 2024

Pregunta 1

En un laboratorio de ambiente controlado, fueron examinados 10 hombres y 10 mujeres para determinar la temperatura mas confortable del cuarto, los resultados fueron los siguientes:

Hombres	74	72	77	76	73	75	73	74	75	76
Mujeres	75	77	78	79	77	73	78	79	78	80

Asumiendo que estas temperaturas se asemejan a una muestra aleatoria de sus respectivas poblaciones, es la temperatura confortable promedio la misma para los hombres y las mujeres?

Para responder a este cuestionamiento tenemos varias formas de realizarlo entre las cuales esta el T-test para comparacion de medias poblacionales independientes (metodo parametrico) y la prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, asi que teniendo esto en cuenta, ¿cual deberiamos usar?

Usaremos shapiro-wilk para determinar la normalidad de ambos vectores de datos ya que en caso de normalidad se usa el test de Wilcoxon y cuando esto no ocurra el t-test.

```
hombres = c(74, 72, 77, 76, 73, 75, 73, 74, 75, 76)
mujeres = c(75, 77, 78, 79, 77, 73, 78, 79, 78, 80)

shapiro.test(hombres)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  hombres
## W = 0.96572, p-value = 0.8486
```

```
shapiro.test(mujeres)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  mujeres
## W = 0.90141, p-value = 0.227
```

Para ambos casos con un $\alpha = 0.05$ se determina que se distribuyen normal, por lo tanto usaremos el test de wilcoxon en este caso.

Por lo tanto el juego de hipotesis que usaremos sera el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : E[D] = 0 \\ H_1 : E[D] \neq 0 \end{cases}$$

o escribiendolo de otra forma:

$$\begin{cases} H_0 : E[Hombres] = E[Mujeres] \\ H_1 : E[Hombres] \neq E[Mujeres] \end{cases}$$

Para utilizar este test en R necesitamos de la funcion: **wilcox.test**, que quedaria de la siguiente forma:

```r
wilcox.test(mujeres, hombres, alternative = "two.sided", paired = T)
```

```
## Warning in wilcox.test.default(mujeres, hombres, alternative = "two.sided", :
## cannot compute exact p-value with ties
```

```
##
##  Wilcoxon signed rank test with continuity correction
##
## data:  mujeres and hombres
## V = 52, p-value = 0.01399
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Con un $alpha = 0.05$ tenemos suficiente evidencia estadistica para rechazar la hipotesis nula, por lo tanto la temperatura confortable promedio es diferente para ambos generos.

Pregunta 2

Un investigador piensa que los individuos de diversas profesiones tendran distintos grados de susceptibilidad a ser hipnotizados. Para el experimento se eligen al azar a 6 abogados, 6 medicos, y 6 bailarines profesionales. A cada uno se le aplica un examen de susceptibilidad hipnotica.

Los resultados aparecen aqui. Mientras mayor sea la calificacion, mayor sera la susceptibilidad a ser hipnotizados. Suponga que los datos violan los supuestos necesarios para el uso de la prueba F, pero al menos presentan una escala ordinal.

Abogados	Medicos	Bailarines
26	14	30
17	19	21
27	28	35
32	22	29
20	25	37
25	15	34

¿Los individuos de diversas profesiones tienen distintos grados de susceptibilidad a ser hipnotizados?

Para responder a esta pregunta utilizaremos el test de Kruskal-Wallis el cual es un test diseñado para mas de 2 muestras, ademas de esto, las muestras aleatorias son independientes y la escala de media es al menos ordinal, por lo tanto con estas caracteristicas lo hace perfecto para darle una solucion a nuestro cuestionamiento.

Por lo tanto el juego de hipotesis es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : Los\ individuos\ de\ diversas\ profesiones\ tienen\ grados\ similares\ de\ susceptibilidad\ a\ ser\ hipnotizados \\ H_1 : Algunos\ individuos\ de\ diversas\ profesiones\ tienen\ grados\ mayores\ de\ susceptibilidad\ a\ ser\ hipnotizados \end{cases}$$

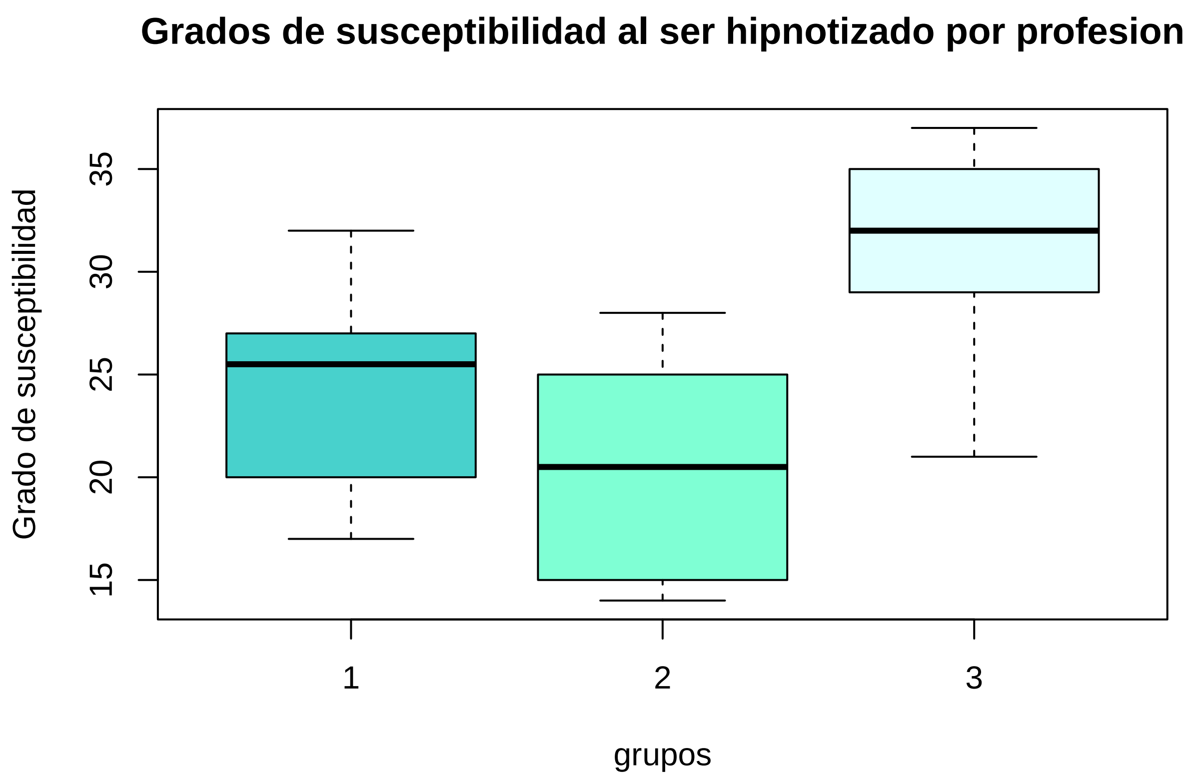
```r
abogados = c(26, 17, 27, 32, 20, 25)
medicos = c(14, 19, 28, 22, 25, 15)
bailarines = c(30, 21, 35, 29, 37, 34)

y = c(abogados, medicos, bailarines)
grupos = c(rep(1,6),rep(2,6),rep(3,6))
```

```r
kruskal.test(y, grupos)
```

```
##
##  Kruskal-Wallis rank sum test
##
## data:  y and grupos
## Kruskal-Wallis chi-squared = 7.3497, df = 2, p-value = 0.02535
```

Tomando un $\alpha = 0.05$ tenemos suficiente evidencia estadistica para concluir que algunos individuos de diversas profesiones tienen grados mayores de susceptibilidad a ser hipnotizados.

Este mismo se puede confirmar con el siguiente grafico:



Con este grafico podemos concluir que el grupo 3 (el cual corresponde a los bailarines) tiene un grado de susceptibilidad mayor a ser hipnotizado ya que tiene una diferencia significativa con respecto a los otros 2 grupos.

Pregunta 3

Se seleccionan doce estudiantes aleatoriamente y a cada uno se les da cuatro listas de palabras, cada lista contiene 20 pares de palabras, pero se usaron diferentes métodos de apareamiento en las cuatro listas. A cada estudiante se le entrega una lista, se le dan 5 minutos para estudiar y luego se examina su capacidad para recordar las palabras. Este procedimiento se repite para las 4 listas para cada estudiante, el orden de la lista está rotando de un alumno a otro, los resultados se encuentran a continuación, donde el puntaje de 20 es perfecto:

	Estudiante											
Lista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	18	7	13	15	12	11	15	10	14	9	8	10
2	14	6	14	10	11	9	16	8	12	9	6	11
3	16	5	16	12	12	9	10	11	13	9	9	13
4	20	10	17	14	18	16	14	16	15	10	14	16

¿Son algunas listas más fáciles de aprender que otras?

Se utilizará el test de Friedman, en donde las hipótesis de interés están dadas por:

$$H_0\text{:Todas las listas de palabras tienen el mismo nivel de dificultad.}$$
$$H_1\text{:Algunas listas de palabras son más fáciles de aprender que otras.}$$

En primera instancia, es necesario asignar el rango $R(X_{ij})$ a todos y cada uno de los bloques. En este caso, los rangos 1 y 4 son asignados a las observaciones asociadas a las listas en las que cada estudiante obtuvo la menor y mayor puntuación, respectivamente:

	Estudiante												
Lista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	R_j
1	18 (3)	7 (3)	13 (1)	15 (4)	12 (2.5)	11 (3)	15 (3)	10 (2)	14 (3)	9 (2)	8 (2)	10 (1)	29.5
2	14 (1)	6 (2)	14 (2)	10 (1)	11 (1)	9 (1.5)	16 (4)	8 (1)	12 (1)	9 (2)	6 (1)	11 (2)	19.5
3	16 (2)	5 (1)	16 (3)	12 (2)	12 (2.5)	9 (1.5)	10 (1)	11 (3)	13 (2)	9 (2)	9 (3)	13 (3)	26
4	20 (4)	10 (4)	17 (4)	14 (3)	18 (4)	16 (4)	14 (2)	16 (4)	15 (4)	10 (4)	14 (4)	16 (4)	45

Luego, se tiene que:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=i}^{k} R^2(X_{ij}) = 357 \qquad \text{y} \qquad C_1 = \frac{bk(k+1)^2}{4} = \frac{(12)(4)(5^2)}{4} = 300$$

Por lo tanto,

$$T_1 = \frac{(k-1)\left[\sum_{j=1}^{k} R_j^2 - b\,C_1\right]}{A_1 - C_1} = \frac{3[(29.5)^2 + (19.5)^2 + (26)^2 + (45)^2 - (12)(300)]}{342 - 300} = 18.5$$

Asimismo, y debido a que la distribución aproximada del estadístico T_1 no es muy buena, se recomienda utilizar el estadístico T_2:

$$T_2 = \frac{(b-1)T_1}{b(k-1)-T_1} = \frac{(11)(18.5)}{(12)(3)-18.5} = 11.629$$

Ahora bien, si se asume un valor de significancia $\alpha = 0.05$, para llegar a una expresión que nos permita especificar la región de rechazo se recomienda utilizar el estadístico $T_2 \sim F(k_1, k_2)$, donde $k_1 = k - 1 = 3$ y $k_2 = (b-1)(k-1) = (11)(3) = 33$. Por lo que región de rechazo está dada por $\{T_2 / T_2 > f_{0.95}(3{,}33)\}$, y en donde, en la página 564 del texto "Practical Nonparametrics Statistics", de William Jay Conover, el cuantil de interés es aproximadamente 2.92. De manera que $T_2 > 2.92$, por lo que se rechaza la hipótesis nula y es posible concluir que hay evidencia muestral suficiente para sugerir que algunas listas de palabras son más fáciles de aprender que otras.

Con relación al Valor-P, se sabe que:

$$\text{Valor-P} = P\,(T_2 > 11.629) = 1 - P(T_2 \leq 11.629)$$

$$0.95 < P(T_2 \leq 11.629) < 0.975$$

$$0.025 < \text{Valor-P} < 0.05$$

Como el $\text{Valor-P} < 0.05$, se rechaza H_0 y es posible comparar las diferentes listas de palabras. En este caso, la teoría establece que las listas de palabras i y j son diferentes, es decir, tienen un efecto distinto en el puntaje de los estudiantes, si se satisface la siguiente desigualdad:

$$|R_j - R_i| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{2\left(bA_1 - \sum_{j=1}^{k} R_j^2\right)}{(b-1)(k-1)}\right]^{\frac{1}{2}} \approx t_{0.975} \left[\frac{2(12*357 - 3977.75)}{(11)(3)}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 8.797$$

En donde, $t_{0.975}$ corresponde al cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución t, el cual aparece en la página 559 del texto anteriormente mencionado, y en donde el nivel de significancia α se mantiene en 0.05.

Lista	$\lvert R_j - R_i \rvert$		$t_{0.975} \left[\frac{2\left(bA_1 - \sum_{j=1}^{k} R_j^2\right)}{(b-1)(k-1)}\right]^{\frac{1}{2}}$
1, 2	$\lvert 29.5 - 19.5 \rvert = 10$	$>$	8.797
1,3	$\lvert 29.5 - 26 \rvert = 3.5$	$<$	8.797
1,4	$\lvert 29.5 - 45 \rvert = 15.5$	$>$	8.797
2,3	$\lvert 19.5 - 26 \rvert = 6.5$	$<$	8.797
2,4	$\lvert 19.5 - 45 \rvert = 25.5$	$>$	8.797
3,4	$\lvert 26 - 45 \rvert = 19$	$>$	8.797

Con base en la tabla anterior, las listas de palabras 1, 2 ; 1,4 ; 2,4; y 3, 4 son significativamente diferentes. Las demás comparaciones no son significativas. Por lo que se podría concluir que, en el contexto particular de los datos:

a) Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que la lista de palabras 1 es más fácil que la lista de palabras 2.

b) Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que la lista de palabras 4 es más fácil que la lista de palabras 1.

c) Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que la lista de palabras 4 es más fácil que la lista de palabras 2.

d) Hay evidencia muestral suficiente para sugerir que la lista de palabras 4 es más fácil que la lista de palabras 3.

Ejecución en R

~~~
y = c(3, 3, 1, 4, 2.5, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 1,
      1, 2, 2, 1, 1, 1.5, 4, 1, 1, 2, 1, 2,
      2, 1, 3, 2, 2.5, 1.5, 1, 3, 2, 2, 3, 3,
      4, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 4, 4, 4, 4,4)

bloques=c(rep(1:12,4))
grupos=c(rep(1,12),rep(2,12),rep(3,12),rep(4,12))

friedman.test(y, grupos, bloques)
```
~~~

```
        Friedman rank sum test

data:  y, grupos and bloques
Friedman chi-squared = 18.5, df = 3, p-value = 0.0003468
```

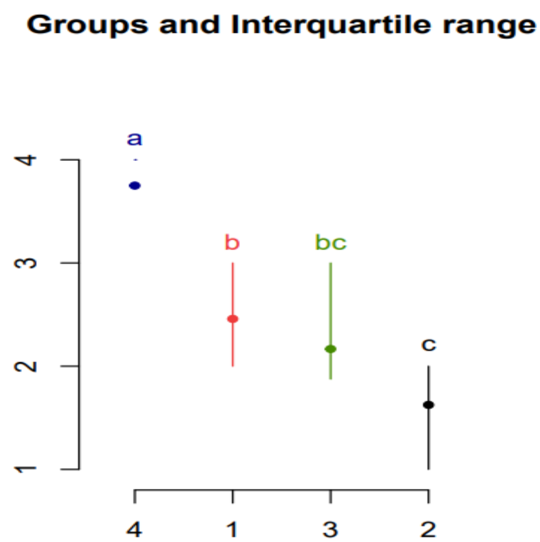
En este caso, el Valor-P es menor al valor de significancia $\alpha = 0.05$, por lo que, de nuevo, se rechaza H_0 y se procede con las comparaciones múltiples.

```
require(agricolae)
df<-data.frame(bloques,grupos,y)

out<-with(df,friedman(bloques,grupos,y,alpha=0.05,group=FALSE,
main=NULL,console=TRUE))
```

```
Study: y ~ bloques + grupos

grupos,  Sum of the ranks

     y  r
1 29.5 12
2 19.5 12
3 26.0 12
4 45.0 12

Friedman's Test
===============
Adjusted for ties
Critical Value: 18.5
P.Value Chisq: 0.0003468294
F Value: 11.62857
P.Value F: 2.337504e-05
```

```
Post Hoc Analysis

Comparison between treatments
Sum of the ranks

        difference pvalue signif.    LCL    UCL
1 - 2         10.0 0.0328       *   0.87  19.13
1 - 3          3.5 0.4411          -5.63  12.63
1 - 4        -15.5 0.0015      ** -24.63  -6.37
2 - 3         -6.5 0.1571         -15.63   2.63
2 - 4        -25.5 0.0000     *** -34.63 -16.37
3 - 4        -19.0 0.0002     *** -28.13  -9.87
```

```
out1<-with(df,friedman(bloques,grupos,y,alpha=0.05,group=TRUE,
main=NULL,console=FALSE))

plot(out1,variation="IQR")
```



De la gráfica anterior, es posible observar que la prueba 4, con la letra a, la cual no se repite en los demás tratamientos, es significativamente diferente a todas las otras pruebas. Y aunque visualmente se observa un mínimo traslape, las letras sugieren la misma conclusión para las pruebas 1 y 2, lo cual coincide con los resultados previamente expuestos.

Pregunta 4

Se seleccionó una muestra de 5 niños de grado sexto de un colegio de la ciudad y se les realizó una prueba de alfabetización con los siguientes resultados: 82, 74, 87, 86, 75. En otra muestra de 8 niños de sexto grado de un colegio de otro sector de la ciudad se realizó la prueba con los siguientes resultados: 88, 77, 91, 88, 94, 93, 83, 94. Use los tests de Smirnov, y de Cramér Von Mises para ver si hay diferencias en las dos poblaciones de sexto grado.

Respuesta:

- Colegio A: 5 niños del grado sexto. n = 5

  Resultados: 82, 74, 87, 86, 75

- Colegio B: 8 niños del grado sexto. m = 8

  Resultados: 88, 77, 91, 88, 94, 93, 83, 94

Sea F(x) el que representa la función de distribución acumulada del colegio A y G(x) el que representa la función de distribución acumulada del colegio B.

Sea $S_1(x)$ la función de distribución empírica basada en la muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ y $S_2(x)$ la función de distribución empírica de la muestra aleatoria $Y_1, Y_2, ..., Y_m$

Test de Smirnov

Hipótesis:

$H_0 : F(x) = G(x) \forall x \in R$ vs. $H_1 : F(x) \neq G(x)$ $p.a\ x$

Luego se tiene que:

X_i	Y_i	$S_1(x) - S_2(x)$
74		$\frac{1}{5} - 0 = 0{,}2$
75		$\frac{2}{5} - 0 = 0{,}4$
	77	$\frac{2}{5} - \frac{1}{8} = 0{,}275$
82		$\frac{3}{5} - \frac{1}{8} = 0{,}475$
	83	$\frac{3}{5} - \frac{2}{8} = 0{,}35$
86		$\frac{4}{5} - \frac{2}{8} = 0{,}55$
87		$\frac{5}{5} - \frac{2}{8} = 0{,}75$
	88	$\frac{5}{5} - \frac{3}{8} = 0{,}625$
	88	$\frac{5}{5} - \frac{4}{8} = 0{,}5$
	91	$\frac{5}{5} - \frac{5}{8} = 0{,}375$
	93	$\frac{5}{5} - \frac{6}{8} = 0{,}25$
	94	$\frac{5}{5} - \frac{7}{8} = 0{,}125$
	94	$\frac{5}{5} - \frac{8}{8} = 0$

Cuadro 1: Test de Smirnov

$$S_1(x) = \frac{\#\ de\ valores\ en\ x \leq x_i\ en\ el\ orden\ de\ la\ lista}{n} \quad S_2(x) = \frac{\#\ de\ valores\ en\ y \leq y_j\ en\ el\ orden\ de\ la\ lista}{m}$$

Un ejemplo con la muestra X = {82, 74, 87, 86, 75} que ordenada seria X= {74, 75, 82, 86, 87}.

Y para calcular $S_1(86) = \frac{\#\ de\ valores\ en\ x \leq 86\ en\ el\ orden\ de\ la\ lista}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$, los valores serian (74, 75, 82, 86).

Un ejemplo con la muestra Y = {88, 77, 91, 88, 94, 93, 83, 94} que ordenada quedaria Y = {77, 83, 88, 88, 91, 93, 94, 94}.

Y para calcular el primer 88 seria: $S_1(88) = \frac{\# \ de \ valores \ en \ y \leq 88 \ en \ el \ orden \ de \ la \ lista}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}625$, los valores serian (77, 83, 88).

De igual forma se hace con cada valor.

Estadístico de prueba

Rc $= \{T_1 | T_1 > W_1 - \alpha\}$

$T_1 = sup(|S_1(x) - S_2(x)|) = 0{,}75$. ocurre cuando x = 87

$T_{obs} = 0{,}75$

Como n = 5 y m = 8, se usa la tabla A20 del libro "Practical nonparametric statistics"de W.J.Conover. $W_{0,95} = \frac{27}{40} \approx 0{,}675$ con $N_1 = \text{mín}\ \{\text{n,m}\}$ y $N_2 = \text{máx}\{\text{n,m}\}$, como $T_{obs} > W_{0,95}$ se rechaza H_0, es decir, hay evidencia muestral suficiente para sugerir que los datos son consistentes con que las dos muestras aleatorias provienen de diferente población. El valor p exacto, no se puede calcular. Por otro lado, usando el programa R confirmamos lo anterior ya que con un nivel de significancia del 5 % y obteniendo un valor p igual a 0.042 se rechaza la hipótesis nula y se dice que son diferentes.

```r
## con el test de Smirnov

x = c(82, 74, 87, 86, 75)
y = c(88, 77, 91, 88, 94, 93, 83, 94)

suppressWarnings( ks.test(x,y, alternative="two.sided") )
```

```
##
##  Exact two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  x and y
## D = 0.75, p-value = 0.04196
## alternative hypothesis: two-sided
```

Test de Cramer Von Mises

Hipótesis:

$H_0 : F(x) = G(x) \forall x$ vs. $H_1 : F(x) \neq G(x)\ p.a\ x \in R$

Luego se tiene que:

X_i	Y_i	$(S_1(x) - S_2(x))^2$
74		$(\frac{1}{5} - 0)^2 = 0{,}04$
75		$(\frac{2}{5} - 0)^2 = 0{,}16$
	77	$(\frac{2}{5} - \frac{1}{8})^2 = 0{,}075$
82		$(\frac{3}{5} - \frac{1}{8})^2 = 0{,}226$
	83	$(\frac{3}{5} - \frac{2}{8})^2 = 0{,}123$
86		$(\frac{4}{5} - \frac{2}{8})^2 = 0{,}303$
87		$(\frac{5}{5} - \frac{2}{8})^2 = 0{,}563$
	88	$(\frac{5}{5} - \frac{3}{8})^2 = 0{,}391$
	88	$(\frac{5}{5} - \frac{4}{8})^2 = 0{,}25$
	91	$(\frac{5}{5} - \frac{5}{8})^2 = 0{,}141$
	93	$(\frac{5}{5} - \frac{6}{8})^2 = 0{,}063$
	94	$(\frac{5}{5} - \frac{7}{8})^2 = 0{,}016$
	94	$(\frac{5}{5} - \frac{8}{8})^2 = 0$

Cuadro 2: Test de Cramer Von Mises

Estadístico de prueba

Sean $S_1(x)$ y $S_2(x)$ las funciones de distribución empíricas de las dos muestras.

Rc $= \{T_2 | T_2 > W_{1-\alpha}\}$

Donde:

$W_{0,10} = 0{,}046$	$W_{0,50} = 0{,}119$	$W_{0,90} = 0{,}347$
$W_{0,20} = 0{,}062$	$W_{0,60} = 0{,}147$	$W_{0,95} = 0{,}461$
$W_{0,30} = 0{,}079$	$W_{0,70} = 0{,}184$	$W_{0,99} = 0{,}743$
$W_{0,40} = 0{,}097$	$W_{0,80} = 0{,}241$	$W_{0,999} = 1{,}168$

Cuadro 3: Valores para W

$T_2 = \frac{mn}{(m+n)^2}(\sum_{i=1}^{n}(S_1(x_i) - S_2(x_i))^2 + \sum_{j=1}^{m}(S_1(y_j) - S_2(y_j))^2)$

$\sum_{i=1}^{5}(S_1(x_i) - S_2(x_i))^2 = 1{,}292$ $\sum_{j=1}^{8}(S_1(y_j) - S_2(y_j))^2 = 1{,}059$

$T_2 = \frac{8*5}{(8+5)^2}(1{,}292 + 1{,}059) = 0{,}55645$

Como $W_{0,95} = 0{,}461$ y $T_2 = 0{,}55645$, como $T_2 > W_{0,95}$ se rechaza H_0, es decir, hay evidencia muestral suficiente para sugerir que las dos muestras son diferentes, es decir provienen de diferentes distribuciones. Esto se confirma con el programa R donde se obtiene un valor p igual a 0.0485 por lo cual con una significancia del 5 % se rechaza H_0 y se dice que son diferentes.

```r
## Con el test de Cramer Von Mises

library(boot)
library(cramer)

x = c(82, 74, 87, 86, 75)
y = c(88, 77, 91, 88, 94, 93, 83, 94)

cramer.test(x,y)
```

```
##
##  1 -dimensional  nonparametric Cramer-Test with kernel phiCramer
## (on equality of two distributions)
##
##  x-sample:  5  values        y-sample:  8  values
##
## critical value for confidence level  95 % :  10.01923
## observed statistic  10.12308 , so that
##   hypothesis ("x is distributed as y") is  REJECTED .
## estimated p-value =  0.04845155
##
##  [result based on  1000   ordinary  bootstrap-replicates]
```

Pregunta 5

Quince estudiantes de primer año obtuvieron los siguientes puntajes: 481, 562, 525, 620, 395, 584, 642, 615, 540, 515, 516, 580, 740, 618, 598. Pruebe si estos puntajes siguen una distribución normal usando el test de Shapiro-wilk.

Para probar normalidad univariada el test de Shapiro-Wilk, el cual no pertenece a la familia de tests de Kolmogorov. se recomienda su uso cuando el tamño muetsral es menor o igual a 50 y en caso la muestra es inferior a 50 cumple la condición.

Suponemos que la muetra es aleatoria, el estadistico de prueba esta definido como.

Estadistico de prueba:

$$T_3 = \frac{1}{D}[\sum_{i=1}^{k} a_i(X^{(n-i+1)} - X^{(i)})]^2$$

Donde:

$$D = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2$$

$X^{(1)} \leq X^{(2)}X \leq ..... \leq X^{(n)}$ son los estadisticos de orden.

Este estadistico de prueba se denota frecuentemente como W, y el test algunas veces se denomina W de Shapiro-Wilk

Distribución Nula

$H_0 : F(x)$ es una función de distribución normal, con media y varianza no especificadas. $H_1 : F(x)$ no es normal.

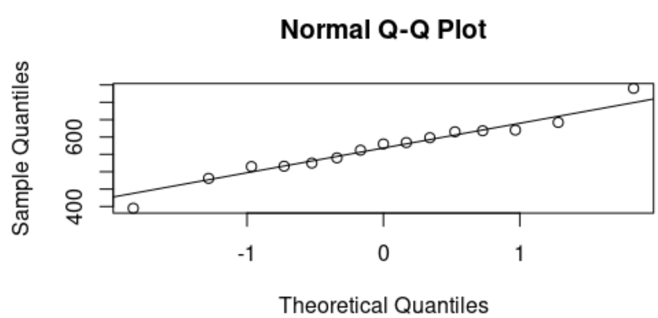
Otra forma de escribirlo es: H_0 : Los datos se distribuyen normalmente. H_1 : Los datos no se distribuyen normalmente.

Región de rechazo.

$$R_c = W/W < W_\alpha$$

Analisis exploratorio

Antes de aplicar el método de Shapiro-Wilk, graficaremos los datos para observar su posible distribución. Esto nos permitirá tener una visión preliminar de lo que podría indicar el test.



Los datos muestran una alineación considerable con la línea diagonal, indicando que se ajustan de manera aproximada a una distribución normal. Este ajuste sugiere que la suposición de normalidad requerida para aplicar el test de Shapiro-Wilk podría ser razonable en este caso. Sin embargo, se observa una pequeña desviación en los extremos de la distribución, especialmente en el extremo superior, lo que podría indicar presencia de valores atípicos o una ligera asimetría.

A continuación, fundamentaremos teóricamente las observaciones realizadas en la gráfica de normalidad, empleando el test de Shapiro-Wilk para validar las mismas.

Manualmente:

Para esto primero debemos de ordenar los datos de menor a mayor:

395	481	515	516	525	540	562	580	584	598	615	618	620	642	740

En la siguiente tabla se calacularan los a_i y $X^{(n-i+1)} - X^{(i)})$ y su producto de ambos

a_i	$X^{(n-i+1)} - X^{(i)})$	$a_i * (X^{(n-i+1)} - X^{(i)}))$
0.5150	740-395=345	117.675
0.3306	642-481=161	53.2266
0.2495	620-515=105	26.1975
0.1878	618-516=102	19.1556
0.1353	615-525=90	12.177
0.0880	598-540=58	5.104
0.0433	584-562=22	0.9526
0.0000	580-580=0	0
Total	NA	294.4833

$a_1, ...a_8$ y $n = 15$

i \ n	11	12	13	14	15
1	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150
2	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306
3	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495
4	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878
5	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353
6	0.0000	0.0303	0.0539	0.0727	0.0880
7	—	—	0.0000	0.0240	0.0433
8	—	—	—	—	0.0000
9	—	—	—	—	—

Estadistica de prueba:

$$T_3 = \frac{1}{D}[\sum_{i=1}^{15} a_i(X^{(n-i+1)} - X^{(i)})]^2$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i(X^{(n-i+1)} - X^{(i)}) = 294{,}4833^2 = 86723{,}3588$$

Para D debemos primero calcular la media de los datos:

$$\frac{395 + 481 + 515 + 516 + 525 + 540 + 562 + 580 + 584 + 598 + 615 + 618 + 620 + 642 + 740}{15} = \frac{8532}{15} = 568{,}7333$$

$$D = \sum_{i=1}^{15}(X_i - \bar{X})^2$$

$$(395-568{,}7333)^2+(481-568{,}7333)^2+(515-568{,}7333)^2+(516-568{,}7333)^2+(525-568{,}7333)^2+(540-568{,}7333)^2+(562-568{,}7333)^2...$$

$$+(580-568{,}7333)^2+(584-568{,}7333)^2+(598-568{,}7333)^2+(615-568{,}7333)^2+(618-568{,}7333)^2+(620-568{,}7333)^2+(642-568{,}7333)^2..$$

$$+(740 - 568{,}7333)^2$$

$$= 89444{,}93$$

Asi:

$$T_3 = \frac{86723{,}3588}{89444{,}93} = 0{,}9695727$$

De la tabla de los cuartiles de la prueba de Shapiro-Wilk y con n=15 se tiene que $W_{0,05} = 0{,}881$

Dado que $T_{obs} = 0{,}96413$ no pertece a la region de rechazo, se acepta H_0 con un nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05$, con esto podemos indicar que no hay suficiente evidencia para rechazar H_1 es decir que se acepta que los datos se distribuyen normal.

Tambien podemos obtener una valor-p mas preciso, se utiliza la tabla de Shapiro-wilk a una aproximamación de normalidad, con $n = 15$, con la siguiente formula:

$$G = b_n + c_n log\{\frac{T_3 - d_n}{1 - T_3}\}$$

$$G = b_{15} + c_{15} log\{\frac{T_3 - d_{15}}{1 - T_3}\}$$

donde:

- b_{15}=-4.373
- c_{15}=1.695
- d_{15}=0.2842

$$G = -4{,}373 + 1{,}695 log\{\frac{0{,}0{,}9695727 - 0{,}2842}{1 - 0{,}9695727}\}$$
$$G = 0{,}9062852157206942$$

Valor-p:

$$P(Z \leq 0{,}9062852157206942)$$
$$valor - p \approx 0{,}8176075$$

```
pnorm(0.9062852157206942)
[1] 0.8176075
```

Computador Anteriormente se realizo el test de Shapiro-Wilk de forma manualmente pero gracias a las herramientas computacionales con ayuda de R podemos desarrollar este test, los cuales nos arrojan los siguientes resultados:

```
shapiro.test(x)

        Shapiro-Wilk normality test

data:  x
W = 0.96973, p-value = 0.854
```

El valor-P obtenido es 0.854 ¿$\alpha = 0{,}05$, por lo cual se obtiene la misma conclusión dicha en el procedimineto manual, por lo cual la conclusión final es que los datos se distribuyen normal.