



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Agujero negro rotante en gravedad masiva dRGT

Jhon Sebastián Moreno Triana

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias, Departamento de física
Bogotá, Colombia
2022

Agujero negro rotante en gravedad masiva dRGT

Jhon Sebastián Moreno Triana

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Físico

Director:
Ph.D. en Física Eduard Alexis Larrañaga Rubio

Agujeros negros en gravedad dRGT
Astronomía, astrofísica y cosmología - Agujeros negros

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2022

Agradecimientos

Agradezco a la universidad pública por haberme permitido acceder a la educación superior de calidad, a la Universidad Nacional de Colombia por su labor de formar profesionales de alta calidad. En especial agradezco al departamento de física, de la universidad nacional de Colombia sede Bogotá, y a su planta de docentes por abrirme sus puertas y permitirme cumplir mi sueño de formarme como físico.

Agradezco a mi director de trabajo de grado, el profesor Eduard Larrañaga, por guiarme durante todo el proceso del trabajo de grado, sin su ayuda no habría sido posible escribir debidamente el contenido del presente trabajo.

Agradezco a mi familia, mi hermana Yuri Milena Moreno Triana por el papel importante que ha tenido, no sólo en mi carrera universitaria, sino en mi vida. A mis padres Sandra Patricia Triana Triana y Eduardo Moreno Rincón por todos los esfuerzos realizados para que sea posible que hoy esté redactando esto.

Agradezco también a todas las personas que directa o indirectamente han estado presentes a lo largo de estos 5 años. A Dani, a Wilson, a Luisi, a Siyei, a Krlitos 16, a Samuel, a Juan Diego, a Jeferson, a Jhonier, a Juan y a todos los que han sido un soporte emocional y académico durante este proceso, les deseo éxito durante toda su vida.

Y finalmente, agradezco especialmente a todos los profesores que con su esfuerzo por enseñar la física me han inspirado a seguir adelante. Al profesor Eduard Larrañaga (nuevamente), al profesor Robel Arenas, al profesor Jairo Roa, al profesor Diego Milanés, al profesor Fredy Ochoa, al profesor Carlos Sandoval, al profesor Herbert Vink y demás profesores que seguramente se pasaron por mencionar, muchas gracias.

Resumen

El siguiente trabajo es el resultado del estudio de la teoría de gravedad masiva propuesta por Claudia de Rham, Gregory Gabadadze y Andrew Tolley, teoría que es una alternativa a la relatividad general, y dos agujeros negros posibles dentro de la teoría. El primer agujero negro es una deducción directa de las ecuaciones de campo de la teoría, este es estático y denominado de tipo Schwarzschild debido a la forma del elemento de línea que lo describe. El segundo agujero negro, es una propuesta de agujero negro rotante para la teoría de gravedad masiva, obtenido a través del uso del algoritmo de Janis-Newman.

Para las dos soluciones se estudió el horizonte de eventos y su comportamiento, la gravedad superficial, la temperatura y la entropía; adicionalmente, se encontró la singularidad esencial del agujero negro estático, mientras que en el agujero negro rotante se estudió la ergosfera y el arrastre inercial, aspectos que no están presentes en la solución estática.

Palabras clave: Relatividad General, Gravedad Masiva, Gravedad Masiva dRGT, Agujeros negros

Abstract

The following work is a result from the study of massive gravity proposed by Claudia de Rham, Gregory Gabadadze and Andrew Tolley, a theory that is an alternative for the general relativity, and two possible types of black holes. The first black hole obtained from the theory's field equations and corresponds to a static (Schwarzschild type) line element. The second black hole, is a proposal of a rotating black hole in the massive gravity theory obtained by using the well known Janis-Newman algorithm.

For both solutions was studied the event horizon and his behavior, the surface gravity, the temperature and the entropy; for the static black hole was obtained the essential singularity, while for the rotating black hole was obtained the ergosphere and the dragging of inertial frames, aspects that are not present in the static solution.

Keywords: General relativity, Massive Gravity, Massive Gravity dRGT, Black Holes

Contenido

Agradecimientos	v
Resumen	vii
1 Introducción	2
1.1 Término de masa de Fierz-Pauli	2
1.2 Discontinuidad Van Dam-Veltman-Zakharov y fantasmas Deser-Boulware . .	3
2 Gravedad masiva de Rahm, Gabadadze y Tolley	5
2.1 Gravedad masiva dRGT	5
2.2 Acción de Einstein-Hilbert modificada	6
2.3 Ecuaciones de campo modificadas en la teoría dRGT	7
3 Solución estática	9
3.1 Deducción de la solución estática	9
3.1.1 Tensor momento energía efectivo X^μ_ν	9
3.1.2 Tensor de Einstein G^μ_ν	9
3.1.3 Ecuaciones de campo de la solución estática	10
3.2 Singularidad	11
3.3 Horizonte de eventos	11
3.3.1 Número de soluciones	12
3.3.2 Comparación de la solución estática dRGT respecto de la solución de Schwarzschild	14
3.4 Termodinámica de la solución estática	16
3.4.1 Gravedad superficial	16
3.4.1.1 Temperatura	17
3.4.2 Entropía	19
4 Solución rotante	20
4.1 Algoritmo de Janis-Newman	20
4.1.1 Janis-Newman: Formalismo de Newman-Penrose	20
4.2 Agujero negro rotante	21
4.2.1 Paso 1: Métrica semilla en coordenadas Eddington-Finkelstein	21

4.2.2	Paso 2: Formalismo de Newman-Penrose y transformación compleja de la función semilla $F(r)$	22
4.2.3	Paso 3: Reescribir la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist . . .	23
4.3	Métrica de la solución rotante	25
4.4	Horizonte de eventos	26
4.4.1	Número de soluciones en el espacio $(\alpha - \beta)$	26
4.4.2	Comportamiento del horizonte de eventos	27
4.5	Ergosfera	29
4.5.1	Ergosfera agujero negro rotante dRGT	30
4.5.2	Arrastre de sistemas inerciales	32
4.6	Termodinámica del agujero negro rotante	32
4.6.1	Gravedad superficial	32
4.6.2	Temperatura	34
4.6.3	Entropía	35
4.6.3.1	Entropía a través del área del horizonte de eventos	35
4.6.3.2	Entropía a través de las leyes de termodinámica	36
5	Conclusiones	38
	Bibliografía	40

1 Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) es la teoría de gravitación más acogida y aceptada por la comunidad científica debido a la impecable precisión en sus predicciones [1]. A pesar de la efectividad de la RG, la existencia de alternativas consistentes para describir la gravedad es esencial para probar la teoría [1]. Además, los problemas abiertos, como el problema de la constante cosmológica, invitan a considerar alternativas a la RG [1, 2].

Desde el punto de vista de la física moderna de campos y partículas la RG, con o sin constante cosmológica, es la única teoría de campos para partículas sin masa y espín-2 en cuatro dimensiones [3]. Por tanto, desde este punto de vista, una de las extensiones posibles vendría dada por la formulación de la gravedad masiva [2].

La gravedad masiva es una teoría que propaga un campo para una partícula masiva con espín 2. La forma más sencilla de construir esta teoría es añadiendo un término del campo a la acción de Einstein-Hilbert, dotando con una masa m_g al gravitón, con lo que la RG es recuperada cuando $m_g \rightarrow 0$ [2]. La idea de dotar de masa al gravitón no es una idea nueva ya que una de las primeras propuestas viene de la mano de Fierz y Pauli en 1939 [1]. Si bien la teoría de partículas con espín 2 es simple de derivar, esta se hace más compleja cuando las partículas de la teoría deben interactuar con otras, lo cual se esperaría del gravitón [1].

1.1. Término de masa de Fierz-Pauli

Inicialmente, la densidad lagrangiana para una sola partícula masiva de espín 2 vendría dada por un tensor simétrico $\Pi_{\mu\nu}$ [2]. A priori se pueden escoger dos posibles términos de masa $[\Pi^2]$ y $[\Pi]^2$ [1], donde $[A]$ simboliza la traza del tensor $A_{\mu\nu}$. De esta forma, la contribución más general puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{masa} = -\frac{1}{8}m_g^2([\Pi^2] - [\Pi]^2). \quad (1.1)$$

La expresión en la ecuación (1.1) es conocida como el término de masa de Fierz-Pauli y puede mostrarse que su presencia rompe la invarianza bajo difeomorfismos de la teoría RG [1]. Para recuperar esta invarianza es necesario incluir cuatro campos de Stückelberg, ϕ_μ ,

obteniendo un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{masa} = -\frac{1}{8}m_g^2([\Pi_{\mu\nu} + 2\partial_\mu\phi_\nu]^2 - ([\Pi] + 2\partial_\alpha\phi^\alpha)^2). \quad (1.2)$$

Cada uno de los campos ϕ^a puede ser ajustados con diferentes gauges, de tal modo que la teoría sea dinámicamente equivalente [2, 3]. La introducción de los campos escalares de Stückelberg junto con nuevos gauges permite que no altere la teoría original [2].

1.2. Discontinuidad Van Dam-Veltman-Zakharov y fantasmas Deser-Boulware

Una de las maneras de estimar el efecto del término de Fierz-Pauli es corroborar las predicciones de la relatividad general. Por ejemplo, una de ellas es la deflexión de la luz producida por la curvatura en el espacio-tiempo [2]. Usando los resultados de la relatividad general, un fotón de prueba sometido a un campo gravitacional presenta una deflexión de

$$\alpha_{Einstein-Hilbert} = \frac{4GM}{q}, \quad (1.3)$$

donde q es una constante proporcional al parámetro de impacto [4]. Por otro lado, usando el término de Fierz-Pauli de la ecuación (1.2) y haciendo $m_g \rightarrow 0$, se encuentra que la deflexión será ahora [2, 4]

$$\alpha_{Fierz-Pauli} = \frac{3GM}{q} = \frac{4}{3}\alpha_{Einstein-Hilbert}, \quad (1.4)$$

presentando una diferencia de alrededor del 25 % del término predicho por la RG. A este problema producido por el término de masa de Fierz-Pauli se le conoce como la discontinuidad de van Dam, Veltman y Zakharov (discontinuidad vDVZ) y representa un inconveniente debido a que la física debería ser continua en los parámetros de la teoría [2] (también es posible revisar [5, 6]).

Dado que la teoría consiste en un campo de espín 2 con partículas masivas, esta tienen cinco polarizaciones posibles y por lo tanto 5 grados de libertad (dos asociados a los modos de helicidad-2, dos a los modos de helicidad-1 y uno a los modos de helicidad-0) [3]. Sin embargo, al contar los modos de libertad del término de masa de Fierz-Pauli se encuentra que los potenciales de Stückelberg introducen un grado adicional de libertad, el cual es conocido como un fantasma Boulware-Deser [1, 3, 7].

Posteriormente, Veltman demostraría que la discontinuidad vDVZ puede evitarse si el término de masa de Fierz-Pauli se expande en ordenes superiores de $h_{\mu\nu}$ y ,finalmente, Claudia de

Rham, Gregory Gabadadze y Andrew Tolley podrían proponer la teoría que presenta ausencia de fantasmas de Boulware-Deser y discontinuidad vDVZ [8, 9].

El presente trabajo de grado está organizado como sigue: Inicialmente se revisarán las propiedades de la gravedad masiva dRGT en el capítulo 2. Luego, en el capítulo 3 se comprobará una solución estática a las ecuaciones de campo de la teoría y sus propiedades físicas de interés. A lo largo del capítulo 4 se aplicará el algoritmo de Janis-Newman para obtener una solución rotante para la teoría de gravedad masiva dRGT y se estudiarán, además, sus propiedades físicas. Finalmente, en el capítulo 5 se realizarán las conclusiones y consideraciones del trabajo. A lo largo de todo el trabajo se usó la convención $(-, +, +, +)$ para la signatura de la métrica junto con un sistema de unidades en el cual $G = c = \hbar = 1$, con G la constante de gravitación, c la velocidad de la luz en el vacío y \hbar la constante reducida de Planck.

2 Gravedad masiva de Rahm, Gabadadze y Tolley

El dotar de masa al gravitón fue una propuesta llamativa debido a que da una posible interpretación al problema de la constante cosmológica [10]. Sin embargo, si bien el construir una teoría de partículas masivas de espín-2 no es una tarea imposible [1, 2], cuando se realizan interacciones entre las partículas éstas producen varios inconvenientes como la discontinuidad vDVZ y los fantasmas de Boulware-Deser [1]. La propuesta de gravedad masiva de de Rham, Gabadadze y Tolley (dRGT) es una propuesta de gravedad masiva no lineal que resuelve la discontinuidad y los campos fantasmas en la teoría de gravedad masiva de Fierz-Pauli.

A lo largo del capítulo se abordará la gravedad masiva dRGT, la acción modificada y las ecuaciones de campo resultantes.

2.1. Gravedad masiva dRGT

Una teoría que busque ser una alternativa a la relatividad general debe cumplir con algunas propiedades básicas como por ejemplo que se conserve la invarianza bajo difeomorfismos. Si bien el término de Fierz-Pauli de la ecuación (1.1) no conserva esta invarianza de la teoría; se introducen los campos de Stückelberg (ecuación (1.2)) para recuperarla [10]. Adicionalmente, para el caso de las teorías de gravedad masiva, éstas deben recuperar la relatividad general en el caso de $m_g \rightarrow 0$, pero esto no sucede con el término de Fierz-Pauli, ni siquiera usando el truco de Stückelberg [1]. Sin embargo, una solución a este problema fue propuesta por Vainshtein, quién argumentó que la relatividad general puede ser recuperada a distancias pequeñas incluyendo términos no lineales en la teoría de campo. Esto debido a que los términos de orden superior terminan apantallando a los de orden lineal [11].

Finalmente, como se comentó en el capítulo anterior, una teoría de gravedad masiva consistente físicamente debe estar libre de fantasmas Boulware-Deser. En una teoría no lineal de gravedad masiva se tienen 5 grados de libertad (asociados con las helicidad de la partícula) y un grado de libertad adicional (Boulware-Deser), el cual genera términos de energía negativa que hacen la teoría inestable [10]. La solución para este problema con los grados de libertad es ajustar la teoría de tal manera que todas las derivadas de los modos de helicidad-0 sean derivadas totales. Esta imposición elimina el grado de libertad adicional reduciendo el

orden de las ecuaciones diferenciales [1].

Por tanto, la gravedad masiva dRGT, es una teoría de gravedad no lineal que no presenta la discontinuidad vDVZ y además es una teoría libre de fantasmas Boulware-Deser. Esta a su vez se puede extender a una teoría de “bi-gravedad”, lo cual implica que se tienen dos métricas $g_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ (asociada a los campos de Stückelberg) que interactúan entre ellas [12, 13].

2.2. Acción de Einstein-Hilbert modificada

Una acción para una teoría de gravedad masiva covariante genérica es obtenida sumando un potencial a la acción de Einstein-Hilbert [12],

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_{MG}) d^4x = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int \sqrt{-g} \left(R - \frac{m_g^2}{2} \mathcal{U}[g^{-1}f] \right) d^4x, \quad (2.1)$$

donde M_{Pl} es la escala de Plank, R el escalar de Ricci en la acción de Einstein-Hilbert, m_g la masa del gravitón y $\mathcal{U}[g^{-1}f]$ un funcional en término de las dos métricas. $f_{\mu\nu}$ se denomina comúnmente la métrica de referencia y puede escogerse de diferentes maneras (más información en [12]).

Se define el tensor $H_{\mu\nu}$ como la covariantización de la perturbación sobre la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + f_{ab}\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b$, donde ϕ^a son los cuatro campos de Stückelberg [8, 9]. De esta forma, se define el tensor

$$\mathcal{K}_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - \sqrt{\delta_\nu^\mu - H_\nu^\mu} = \delta_\nu^\mu - \sqrt{g^{\mu\sigma} f_{ab}\partial_\sigma\phi^a\partial_\nu\phi^b}, \quad (2.2)$$

de tal manera que $\mathcal{K}_{\mu\nu}|_{h_{\mu\nu}=0} = \Pi_{\mu\nu}$, con $\Pi_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\pi$ el campo dentro del término de masa de Fierz-Pauli y π el modo de helicidad-0 de la partícula en el campo [8, 9].

Como una extensión del término de Fierz-Pauli, se puede escribir una función general dependiente de éste, i.e.

$$\mathcal{L}_{MG} = \frac{m_g^2}{2} \mathcal{U}[\Pi_{\mu\nu}^2 - \Pi^2], \quad (2.3)$$

donde se ha utilizado la ecuación (2.1). Usando este término es posible eliminar los fantasmas de Boulware-Deser ajustando que $(\Pi_{\mu\mu})^n$ sean derivadas totales [1]. Dado que $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ es una perturbación de $\Pi_{\mu\nu}$, \mathcal{U} se puede escribir como $\mathcal{U}[\mathcal{K}_{\mu\nu}^2 - \mathcal{K}^2]$. Sin embargo, cada $\mathcal{K}_{\mu\nu}^2 - \mathcal{K}^2$ hace parte de un lagrangiano $\mathcal{L}^{(n)}$ con n el orden de la perturbación. Estos se pueden escribir como [9]

$$\mathcal{L}^{(n)} = - \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-1)!}{(n-m)!} [\mathcal{K}^m] \mathcal{L}^{(n-m)}, \quad (2.4)$$

donde $[\mathcal{K}] = \mathcal{K}^\mu_\mu$ es la traza de \mathcal{K} . Luego podemos escribir el lagrangiano total como [9, 8]

$$\frac{m_g^2}{2} \mathcal{U}[\mathcal{K}] = -\frac{m_g^2}{2} \sum_{n=2}^4 \alpha_n \mathcal{L}^{(n)}(\mathcal{K}) = -\frac{m_g^2}{2} \sum_{n=2}^4 \alpha_n \mathcal{U}_n(\mathcal{K}). \quad (2.5)$$

A continuación, con $\mathcal{L}^{(0)} = 1$, $\mathcal{L}^{(1)} = [\mathcal{K}]$ y con \mathcal{K} definido por la ecuación (2.2) [8], se obtienen

$$\mathcal{U}_2 = [\mathcal{K}]^2 - [\mathcal{K}^2], \quad (2.6)$$

$$\mathcal{U}_3 = [\mathcal{K}]^3 - 3[\mathcal{K}][\mathcal{K}^2] + 2[\mathcal{K}^3], \quad (2.7)$$

$$\mathcal{U}_4 = [\mathcal{K}]^4 - 6[\mathcal{K}]^2[\mathcal{K}^2] + 8[\mathcal{K}][\mathcal{K}^3] + 3[\mathcal{K}^2]^2 - 6[\mathcal{K}^4]. \quad (2.8)$$

Para los ordenes de $n \geq 5$ se tiene $\mathcal{U}_{n \geq 5}(\mathcal{K}) = 0$, pues introducir factores de orden superior en \mathcal{U} reintroduce fantasmas en la teoría [14].

Finalmente, la acción para la teoría de bi-gravedad masiva dRGT, ajustando $\frac{\alpha_2}{2} = 1$ en (2.5), queda escrita de la forma

$$S_{dRGT} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int \sqrt{g} [R + m_g^2 (\mathcal{U}_2 + \alpha_3 \mathcal{U}_3 + \alpha_4 \mathcal{U}_4)] d^4x. \quad (2.9)$$

Una de las características más importantes de la teoría de gravedad masiva dRGT es su conexión natural con la constante cosmológica a través de la masa del gravitón [2].

2.3. Ecuaciones de campo modificadas en la teoría dRGT

Tras obtener la forma de la nueva acción, el paso siguiente sería obtener las nuevas ecuaciones de campo. Para obtener estas es necesario minimizar la acción realizando una variación con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$,

$$\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_{m_g} = 0. \quad (2.10)$$

Dado que el primer término de la ecuación (2.10) corresponde a la variación de la acción de Einstein-Hilbert, este corresponderá al tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ en las ecuaciones de campo, mientras que para el segundo término se tendrá un nuevo tensor que se denotará como $X_{\mu\nu}$ [15]. Por tanto, las ecuaciones de campo se pueden escribir como

$$G_{\mu\nu} + m_g^2 X_{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

donde el tensor $X_{\mu\nu}$ puede ser interpretado como un tensor de momento-energía efectivo de las partículas de espín 2.

El tensor $X_{\mu\nu}$ resulta de la variación del término δS_{m_g} , por tanto, este termino puede escribirse como [16, 14]

$$X_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{U})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta\mathcal{U}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\mathcal{U}g_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

donde \mathcal{U} viene dado según la ecuación (2.5). Realizando la variación de \mathcal{U} respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ y escribiendo la expresión en términos de las trazas de \mathcal{K}^n , el tensor $X_{\mu\nu}$ queda escrito de la forma [17]

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} = & \mathcal{K}_{\mu\nu} - [\mathcal{K}]g_{\mu\nu} - \alpha \left\{ \mathcal{K}_{\mu\nu}^2 - [\mathcal{K}]\mathcal{K}_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{U}_2}{2}g_{\mu\nu} \right\} \\ & + 3\beta \left\{ \mathcal{K}_{\mu\nu}^3 - [\mathcal{K}]\mathcal{K}_{\mu\nu}^2 + \frac{\mathcal{U}_2}{2}\mathcal{K}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{U}_3}{6}g_{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde \mathcal{U}_2 y \mathcal{U}_3 están definidos en las ecuaciones (2.6) y (2.7) respectivamente. Además, se introdujeron dos parámetros nuevos α y β [18],

$$\alpha_3 = \frac{\alpha - 1}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{\beta}{4} + \frac{1 - \alpha}{12}. \quad (2.14)$$

A partir de las ecuaciones de campo es posible imponer las identidades de Bianchi, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. De esta forma, aplicando la derivada covariante en la ecuación (2.11), se impone sobre el campo la condición [18, 19]

$$\nabla^\mu X_{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

3 Solución estática

3.1. Deducción de la solución estática

Es posible encontrar una solución estática tal que esta resuelva las ecuaciones de campo de la teoría de gravedad masiva dRGT (2.11). Inicialmente, dado que se está buscando una solución estática y simétricamente esférica se propone el siguiente ansatz de la métrica

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.1)$$

La métrica de referencia será $f_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, \epsilon^2, \epsilon^2 \sin^2 \theta)$ y adicionalmente se usará el gauge unitario $\phi^\alpha = x^\alpha$, tal y como se hace en [18].

3.1.1. Tensor momento energía efectivo X_ν^μ

Para encontrar las ecuaciones de campo resultante al introducir el ansatz de la ecuación (3.1), es necesario calcular el tensor X_ν^μ . Primero, se calcula el tensor \mathcal{K}_ν^μ , usando que $\partial_\sigma \phi^\alpha = \delta_\sigma^\alpha$ y teniendo en cuenta que las métricas $g^{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ son diagonales. con ello se obtiene que

$$\mathcal{K}_\nu^\mu = 1 - \sqrt{g^{\mu\sigma} f_{\sigma\nu}} \delta_\nu^\mu. \quad (3.2)$$

Usando el tensor \mathcal{K} junto con sus potencias y sus trazas, se calcula el tensor X_ν^μ según la ecuación (2.13). Las componentes de X_ν^μ quedan escritas en la forma

$$X_t^t = X_r^r = - \left(\frac{\alpha(3r - \epsilon)(r - \epsilon)}{r^2} + \frac{3\beta(r - \epsilon)^2}{r^2} + \frac{3r - 2\epsilon}{r} \right), \quad (3.3)$$

$$X_\theta^\theta = X_\phi^\phi = \frac{\alpha(2\epsilon - 3r)}{r} + \frac{3\beta(\epsilon - r)}{r} + \frac{\epsilon - 3r}{r}. \quad (3.4)$$

3.1.2. Tensor de Einstein G_ν^μ

Para calcular la forma de la función $F(r)$ resulta conveniente calcular los términos mixtos de las ecuaciones de campo,

$$G_t^t = G_r^r = \frac{F'}{r} + \frac{F}{r^2} - \frac{1}{r^2}, \quad (3.5)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{F'}{r} + \frac{F''}{2}, \quad (3.6)$$

donde $F' = \frac{dF}{dr}$ y $F'' = \frac{d^2F}{dr^2}$.

3.1.3. Ecuaciones de campo de la solución estática

Igualando las ecuaciones (3.5) y (3.3) se obtiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{F'}{r} + \frac{F}{r^2} - \frac{1}{r^2} = m_g^2 \left(\frac{\alpha(3r - \epsilon)(r - \epsilon)}{r^2} + \frac{3\beta(r - \epsilon)^2}{r^2} + \frac{3r - 2\epsilon}{r} \right), \quad (3.7)$$

que permite encontrar F en la forma

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + m_g^2(1 + \alpha + \beta)r^2 - \epsilon m_g^2(1 + 2\alpha + 3\beta)r + \epsilon^2 m_g^2(\alpha + 3\beta), \quad (3.8)$$

donde M es una constante de integración resultante de la ecuación diferencial. Redefiniendo las constantes como sigue

$$\Lambda = -3m_g^2(1 + \alpha + \beta), \quad (3.9)$$

$$\gamma = -\epsilon m_g^2(1 + 2\alpha + 3\beta), \quad (3.10)$$

$$\zeta = \epsilon^2 m_g^2(\alpha + 3\beta), \quad (3.11)$$

se obtiene finalmente

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \gamma r + \zeta. \quad (3.12)$$

Es notable como se recupera la solución de Schwarzschild cuando $m_g \rightarrow 0$. Además, cuando $\epsilon \rightarrow 0$ la solución tiende a un agujero negro en un universo de Sitter o Anti-de Sitter.

Una vez se obtiene la solución, vale la pena comprobar si ésta efectivamente satisface las ecuaciones de campo. Los cálculos anteriores y la comprobación de la solución pueden consultarse en [20].

3.2. Singularidad

Tras comprobar y obtener la solución estática de tipo Schwarzschild que satisface las ecuaciones de campo (2.11) resulta interesante estudiar algunas propiedades físicas de interés. De la solución obtenida se pueden diferenciar entre las singularidades coordenadas y las singularidades esenciales evaluando algunos escalares de curvatura. La singularidad esencial se obtiene a través del escalar de Kretschmann [21],

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.13)$$

Para la solución dada en la ecuación (3.12) se obtiene

$$K = \frac{4(2\Lambda^2 r^6 - 6\Lambda\gamma r^5 + 6\gamma^2 r^4 + 3\zeta^2 r^2 + 36M^2 + 2(3\gamma r^3 - \Lambda r^4 - 6mr)\zeta)}{3r^6}. \quad (3.14)$$

El escalar de Kretschmann presenta una discontinuidad en $r = 0$, la cual corresponde a la singularidad esencial del espacio-tiempo. Adicionalmente, cabe resaltar que cuando $m_g \rightarrow 0$, es decir $\Lambda \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$ y $\zeta \rightarrow 0$, se recupera $K = \frac{48M}{r^6}$, correspondiente al escalar de Kretschmann para la solución de Schwarzschild [22].

3.3. Horizonte de eventos

Otra propiedad que resulta interesante de los agujeros negros es el horizonte de eventos. Éste es la frontera del agujero negro, i.e. delimita la región del espacio tiempo que no puede comunicarse con observadores lejanos. Para encontrar el horizonte de eventos, definimos el vector nulo [23]

$$n^2 = n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0. \quad (3.15)$$

Es posible tomar n^2 como una superficie de nivel de una función escalar $f(x^\alpha)$ con lo que los vectores normales a la función vendrán dados por $n^\mu = \partial^\mu f$ [21]. En el horizonte de eventos se cumple

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu f)(\partial_\nu f) = 0. \quad (3.16)$$

Para una métrica que tenga elementos no nulos en la diagonal y una función f que dependa solo de r y θ , la ecuación (3.16) resulta ser

$$g^{rr}(\partial_r f)^2 + g^{\theta\theta}(\partial_\theta f)^2 = 0. \quad (3.17)$$

Tomando la función f como $f = r - H(\theta)$, tal que, $f(H) = 0$, donde H es la ubicación del horizonte de eventos [21], se tiene

$$g^{rr} + g^{\theta\theta} \left(\frac{dH}{d\theta} \right)^2 = 0. \quad (3.18)$$

En [21] argumentan, a través de una expansión en series de potencias sobre la métrica, como la ecuación (3.18) se puede reducir a la siguiente ecuación

$$g^{rr} = 0, \quad (3.19)$$

la cual es válida para métricas esféricamente simétricas y estáticas o del tipo de la solución de Kerr (axialmente simétricas y estacionarias)[22].

Para el caso de la métrica estática estudiada aquí, se tiene que la ecuación a resolver es

$$r - 2M - \frac{\Lambda}{3}r^3 + \gamma r^2 + \zeta r = 0. \quad (3.20)$$

Debido a que la ecuación (3.20) es de orden 3, se pueden obtener máximo 3 soluciones reales positivas. Nótese que en el horizonte de eventos, no solo se cumple que $g^{rr} = 0$ sino que también $g_{tt} = 0$, aspecto que es común en agujeros negros de tipo Schwarzschild.

3.3.1. Número de soluciones

Usando la ecuación (3.20), en términos de los parámetros α y β , se obtiene la ecuación

$$r - 2M + m_g^2(1 + \alpha + \beta)r^3 - \epsilon m_g^2(1 + 2\alpha + 3\beta)r^2 + \epsilon^2 m_g^2(\alpha + 3\beta)r = 0, \quad (3.21)$$

con lo que es posible realizar un estudio del horizonte de eventos en el espacio $(\alpha-\beta)$. En la figura 3.1, ajustando los valores de $m_g = 1$ y $\epsilon = 1$, se obtiene el espacio de soluciones para diferentes valores de masa del agujero negro.

Para todas los gráficos en la figura 3.1 se obtienen regiones no vacías con al menos una solución real y positiva para el horizonte de eventos (regiones azul, verde y roja). Sin embargo, también se encuentran regiones (región negra) que no presentan horizonte de eventos y que son físicamente descartables pues son casos de una singularidad desnuda. Nótese que esta región va ocupando un mayor tamaño en el espacio $(\alpha - \beta)$ conforme el valor de M va aumentando, como se ve en las figuras 3.1a, 3.1b, 3.1c y 3.1d.

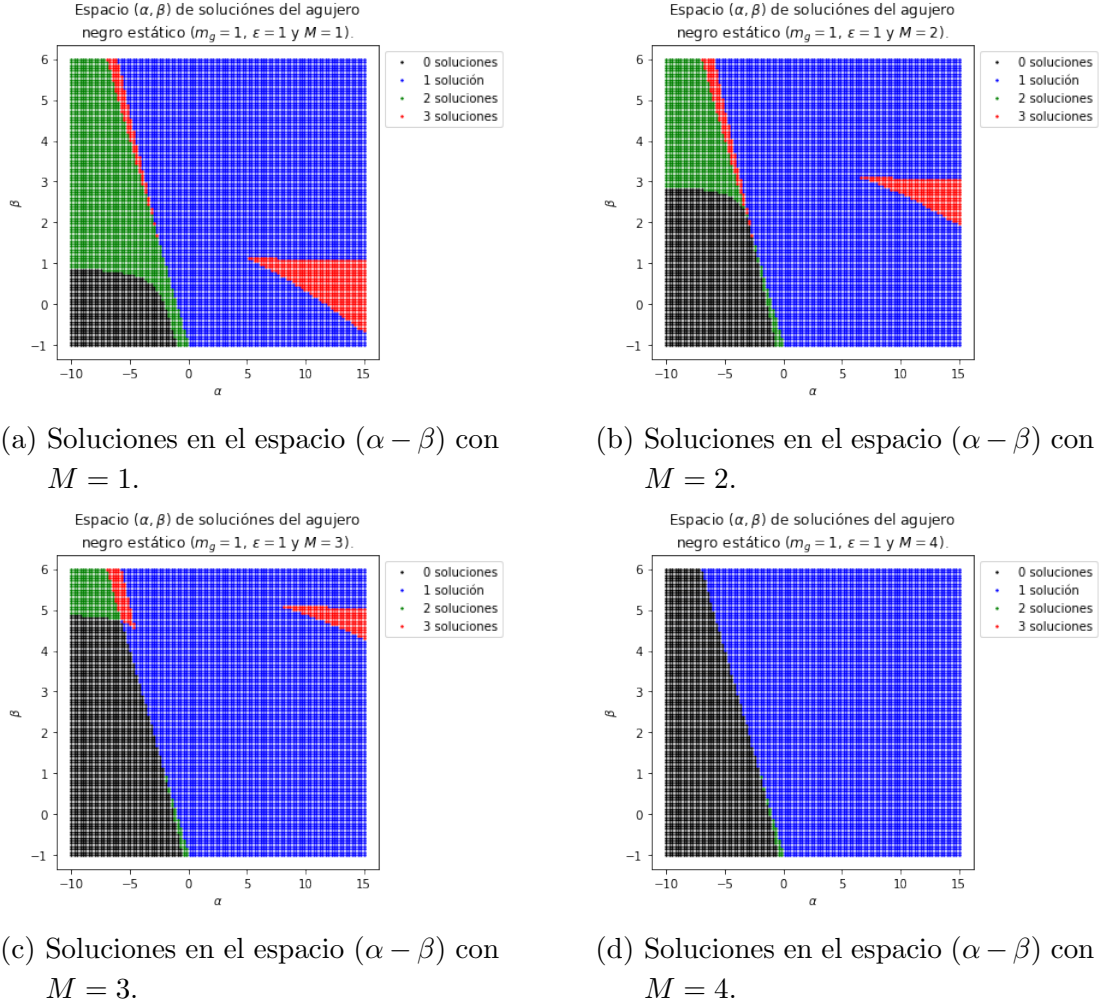


Figura 3.1: Número de soluciones a la ecuación (3.21) en el espacio $(\alpha - \beta)$ con $m_g = 1$ y $\epsilon = 1$ para distintos valores de M .

En todas las gráficas de la figura **3.1** hay una clara diferenciación entre la región de número par de soluciones y número impar de soluciones. La línea recta que divide estas regiones coincide con $\Lambda = -3m_g^2(1 + \alpha + \beta) = 0$, como era de esperar. La región donde se encuentra un número par de soluciones representa la región $\Lambda > 0$ que, para la forma de la solución (3.12), corresponde al espacio de de Sitter (dS) [18]. De forma similar, la región donde se encuentra un número impar de soluciones representa el espacio $\Lambda < 0$, que corresponde al espacio anti de Sitter (AdS) [18]. Adicionalmente, mientras los valores de la masa del agujero negro M aumentan las regiones que tienen mayor peso son las de una o cero soluciones.

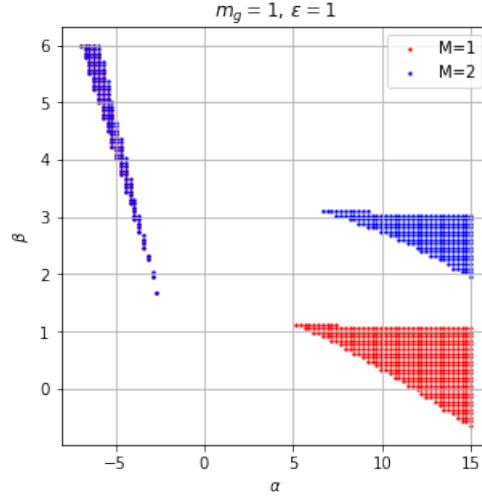


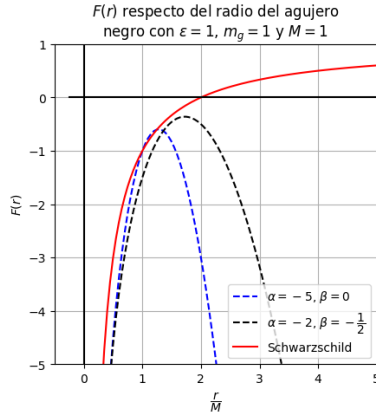
Figura 3.2: Región en el espacio $(\alpha - \beta)$ con $m_g = 1$, $\epsilon = 1$ y $M = 1$ ($M = 2$), para la región roja (azul), con tres horizontes de eventos.

Superponiendo las regiones con tres soluciones de horizontes de eventos con $M = 1$ y $M = 2$ se obtiene la figura 3.2, la cual reproduce los resultados obtenidos en [18]. En la figura 3.2, la región superior izquierda corresponde a una región compartida por los dos valores de masa, mientras que las otras regiones se distinguen fácilmente.

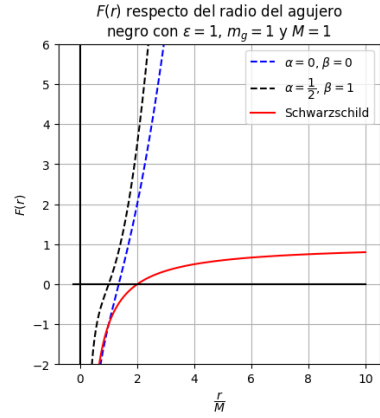
3.3.2. Comparación de la solución estática dRGT respecto de la solución de Schwarzschild

La comparativa de la forma de la función (3.12) respecto de la solución de Schwarzschild se muestra en las figuras de 3.3, donde se pueden comparar la forma para cada número posible de soluciones. La figura 3.3c presenta un horizonte cosmológico, como es de esperarse para el espacio dS, mientras que las figuras 3.3b y 3.3d presentan sólo horizonte de eventos, aspecto que nuevamente es esperable al pertenecer al espacio AdS. Cada uno de los valores de α y β fueron escogidos según las regiones de la figura 3.1), esto también permite comprobar los resultados de esta misma figura.

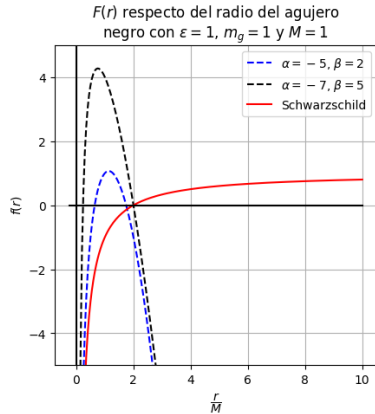
La curva roja en cada gráfica de la figura 3.3 corresponde a la ecuación (3.12) con $m_g = 0$ y $M = 1$, i.e. corresponde a la solución de Schwarzschild. Adicionalmente la figura 3.3d corresponde a los valores de α y β usados en [18], donde, nuevamente, se reproducen los resultados registrados allí; salvo un error en [18], donde los valores de α y β de cada gráfica (negra y azul) están intercambiados.



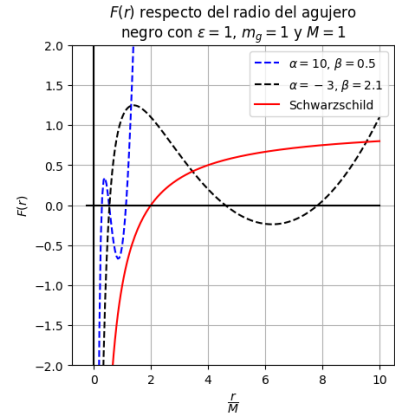
(a) Gráfica de la ecuación (3.12) con ningún horizonte de eventos.



(b) Gráfica de la ecuación (3.12) con un horizonte de eventos.



(c) Gráfica de la ecuación (3.12) con dos horizontes de eventos.



(d) Gráfica de la ecuación (3.12) con tres horizontes de eventos.

Figura 3.3: Gráfica de la ecuación (3.12) con $\epsilon = 1$, $m_g = 1$ y $M = 1$ para distintos valores de α y β .

Una de las cualidades de universos permitidos según la función $F(r)$ son las regiones donde $F(r) > 0$ fuera del horizonte de eventos. En la figura 3.3 las gráficas que cumplen con condiciones esperadas de $F(r) > 0$ son las figuras 3.3b y 3.3d, mientras que la figura 3.3a presenta singularidad desnuda y la figura 3.3c presenta problemas en la métrica debido a $F(r) < 0$.

Todas las gráficas mostradas anteriormente y su implementación pueden ser consultadas con mayor detalle en [20].

3.4. Termodinámica de la solución estática

Otra característica que resulta de interés es el estudio del comportamiento termodinámico del agujero negro. En especial, la gravedad superficial κ , la cual está relacionada con la temperatura y la entropía del agujero negro. Para la solución estática de agujero negro, se asumirá que el agujero negro es un sistema aislado, es decir, no hay ningún tipo transferencia, creación ni aniquilación de partículas [18].

3.4.1. Gravedad superficial

Usando la ecuación (3.20) del horizonte de eventos se encuentra que la masa del agujero negro en términos del horizonte de eventos r_+ viene dada por

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r_+^2 + \gamma r_+ + \zeta \right), \quad (3.22)$$

usando los valores de las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11), usando que $m_g = \epsilon = 1$ por simplicidad y reordenando los términos se obtiene que

$$M = \frac{r_+}{2} (\alpha(r_+ - 1)^2 + \beta(r_+^2 - 3r_+ + 3) + r_+^2 - r_+ + 1). \quad (3.23)$$

Las condiciones para obtener un agujero negro con masa no negativa son

$$\alpha > -\frac{\beta(r_+^2 - 3r_+ + 3) + r_+^2 - r_+ + 1}{(r_+ - 1)^2}, \text{ para } r_+ \neq 1 \quad (3.24)$$

$$\text{y } \beta > -1 \text{ para cualquier valor de } \alpha \text{ y } r_+ = 1. \quad (3.25)$$

Por otro lado, la gravedad superficial κ para un agujero negro esféricamente simétrico y estático viene dada por la expresión $\kappa = \frac{F'(r_+)}{2}$ donde $F'(r)$ corresponde a la derivada total de la función F [24]. En este caso, derivando (3.12) respecto de la coordenada r , se obtiene

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r_+^2} - \frac{2\Lambda}{3} r_+ + \gamma \right) \quad (3.26)$$

y usando la ecuación (3.23), se llega a

$$\kappa = \frac{1}{2r_+} (1 - \Lambda r_+^2 + 2\gamma r_+ + \zeta). \quad (3.27)$$

Dado que la gravedad superficial no depende de ninguna coordenada, además de r_+ , ésta es constante en todo el horizonte de eventos, es decir, se cumple la ley cero de la termodinámica de agujeros negros.

3.4.1.1. Temperatura

En general, para cualquier agujero negro se cumple que

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (3.28)$$

con κ la gravedad superficial. Utilizando la ecuación (3.27) se obtiene

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} (1 - \Lambda r_+^2 + 2\gamma r_+ + \zeta). \quad (3.29)$$

Tomando el límite $m_g \rightarrow 0$ se tiene $T = \frac{1}{4\pi r_+}$, recuperando la temperatura asociada con el agujero negro de Schwarzschild.

Debido a la forma funcional de la temperatura, se presenta un mínimo local, $T_{(min)}$, que se obtiene derivando la ecuación (3.29) e igualando a cero. El valor de r_+ para el cual se tiene $T_{(min)}$ es

$$r_{+(min)} = \sqrt{-\frac{1+\zeta}{\Lambda}} = \sqrt{\frac{1+\alpha+3\beta}{3(1+\alpha+\beta)}}. \quad (3.30)$$

Reemplazando el valor de r_+ por el valor de la ecuación (3.30), se obtiene el valor mínimo de la temperatura, la cual dependería del valor de α y β ,

$$T_{(min)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\Lambda}{1+\zeta}} \left(1 + \zeta + 2\gamma \sqrt{-\frac{1+\zeta}{\Lambda}} \right) \quad (3.31)$$

Dado que la temperatura mínima $T_{(min)}$ se escribe en términos de α y β es posible realizar un gráfico de las regiones donde $T_{(min)} > 0$ y a al mismo tiempo $r_{+(min)} > 0$. En la figura **3.4** se muestran las regiones para estos valores, para la cual existe una región donde la temperatura es mayor que cero en todo punto de $r > 0$. Además, la región está contenida en la región donde $r_{(min)} > 0$.

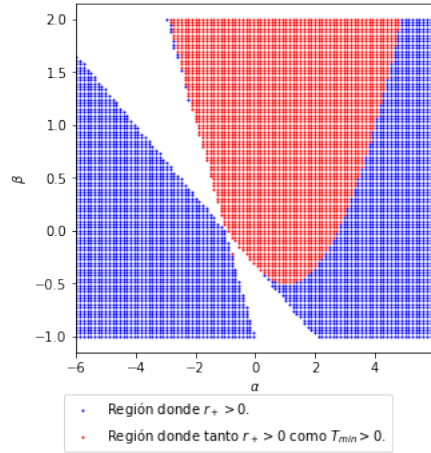
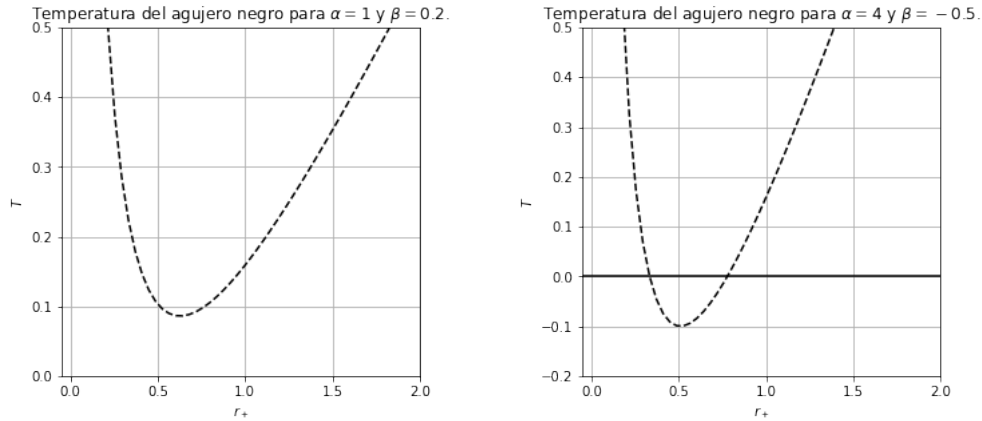


Figura 3.4: Región del espacio $(\alpha - \beta)$ en el cual $T_{(min)} > 0$, en rojo y $r_{(min)} > 0$, en azul. La gráfica fue generada usando el código disponible en [20].

Para corroborar los resultados de la figura 3.4 se graficó el comportamiento de la temperatura en función de r para valores de dos diferentes regiones. La gráfica 3.5a es la temperatura para valores de α y β donde $T > 0$ y $r_{+(min)} > 0$, mientras que en 3.5b es la gráfica de la temperatura donde $r_{+(min)} > 0$ pero no necesariamente $T > 0$.



(a) Temperatura en términos de r donde $T > 0$, para todo $r > 0$. (b) Temperatura en términos de r donde el agujero negro se congela.

Figura 3.5: Comportamiento de la temperatura para distintos valores en la región $(\alpha - \beta)$.

Si bien es esperable que tener un comportamiento de $T > 0$ no sea problemático, en el caso del comportamiento de la ecuación (3.29) presenta el problema de evaporación y la pérdida de la información. Por otro lado, en las regiones donde $T_{(min)}$ es menor a cero, el agujero negro se congela al llegar a $T = 0$ y conserva la información al interior del horizonte de eventos. Por tanto, no es estrictamente necesario asegurar que el agujero negro tenga temperatura positiva para todo valor del horizonte de eventos.

3.4.2. Entropía

Para el caso de la entropía, esta se puede encontrar a través de la primera ley de la termodinámica de agujeros negros [24, 18] $dM = TdS$, es decir,

$$S = \int \frac{dM}{T} = \int \frac{1}{T} \frac{\partial M}{\partial r_+} dr_+. \quad (3.32)$$

Dado que $\frac{\partial M}{\partial r_+} = 2\pi r_+ T$, se obtiene que la entropía del agujero negro será

$$S = \pi r_+^2 = \frac{A_+}{4}, \quad (3.33)$$

con A_+ el área del horizonte del agujero negro,

$$A_+ = \int \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} \Big|_{r_+} d\phi d\theta = \int r_+^2 d\Omega = 4\pi r_+^2. \quad (3.34)$$

4 Solución rotante

Si bien la solución estudiada en el capítulo 3 es una solución que resuelve las ecuaciones de campo de la ecuación (2.11), esta solución es una solución estática cuyo tensor momento energía $T_{\mu\nu} = 0$. Una de las soluciones de las ecuaciones de campo de la relatividad General ($m_g = 0$) es la solución de agujero negro tipo Kerr, la cual corresponde a un agujero negro con masa que además rota sobre sí mismo. La solución de tipo Kerr es una solución que es mucho más compleja comparada con la solución de Schwarzschild y por ello se han estudiado diferentes formas de obtenerla [25]. Una de las formas de obtener agujeros negros rotantes es el algoritmo de Janis-Newman. Mediante este procedimiento es posible generar la solución rotante de Kerr a partir de la solución de Schwarzschild [25] y también otras soluciones rotantes a partir de diferentes soluciones estáticas [26]).

4.1. Algoritmo de Janis-Newman

El algoritmo de Janis-Newman es una de las técnicas para generar métricas rotantes partiendo de métricas estáticas [25]. Si bien en un principio se postuló como un algoritmo para generar soluciones en relatividad general [25, 26], esta ha funcionado al aplicarse en otras teorías de gravedad que se derivan de la RG [25].

El algoritmo puede resumirse como sigue [25, 26]:

1. Determinar la métrica denominada como “semilla”, y usarla en las coordenadas de Eddington-Finkelstein, haciendo una transformación de (t, r, θ, ϕ) a (u, r, θ, ϕ) .
2. Realizar una transformación compleja de coordenadas a la estructura tensorial dx^μ y la función $F(r)$ propuesta en (3.1). La transformación de coordenadas puede ser realizada usando el formalismo de tetradas de Newman-Penrose.
3. Realizar una transformación de coordenadas para simplificar la métrica, como puede ser el sistema de coordenadas de Boyer-Lindquist.

4.1.1. Janis-Newman: Formalismo de Newman-Penrose

Una de las formas de llevar a cabo el algoritmo de Janis-Newman es usando el formalismo de Newman-Penrose de tetradas (también existe el formalismo de Giampieri, sin embargo

es posible mostrar que éste es equivalente al formalismo de Newman-Penrose [26]), el cual consiste en la escogencia de una base coordenada especial, llamada una base nula [27] con un par de vectores reales l^μ , n^μ y un par de vectores (complejos) conjugados m^μ y \bar{m}^μ , tal que

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (4.1)$$

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (4.2)$$

junto con la condición de normalización

$$-l^\mu n_\mu = m^\mu \bar{m}_\mu = 1. \quad (4.3)$$

Lo anterior implica que la matriz que transforma en el espacio de las tetradas viene dada por

$$[\eta_{(a)(b)}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Luego, la métrica $g^{\mu\nu}$ puede ser escrita en términos de los tensores $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ en la forma [27]

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (4.5)$$

Al realizar la transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ cada uno de los tensores $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ transforman como

$$\tilde{Z}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} Z^\nu, \quad (4.6)$$

donde la nueva métrica \tilde{g} vendrá dada por

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = -\tilde{l}^\mu \tilde{n}^\nu - \tilde{l}^\nu \tilde{n}^\mu + \tilde{m}^\mu \tilde{\bar{m}}^\nu + \tilde{m}^\nu \tilde{\bar{m}}^\mu. \quad (4.7)$$

Con lo anterior, es posible usar la métrica que describe el elemento de línea de la ecuación (3.1) para obtener una métrica rotante en la gravedad dRGT.

4.2. Agujero negro rotante

4.2.1. Paso 1: Métrica semilla en coordenadas Eddington-Finkelstein

Como se comentó anteriormente, el paso 1 del algoritmo consiste en seleccionar una métrica “semilla” sobre la cual se aplicará el algoritmo. Esta métrica semilla es la métrica que describe el elemento de línea de la ecuación (3.1) con $F(r)$ descrito en (3.12).

Para obtener la ecuación (3.1) en las coordenadas de Enddington-Finkelstein se realiza el siguiente cambio de coordenadas

$$dt = du - \frac{dr}{F(r)}, \quad (4.8)$$

con lo cual el elemento de línea queda escrito como

$$ds^2 = -F(r)du^2 + 2dudr + r^2 d\Omega^2. \quad (4.9)$$

De esta forma, la métrica $g_{\mu\nu}$ queda descrita, en su representación matricial, en la forma

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -F & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

mientras que la métrica en su forma contravariante será

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

4.2.2. Paso 2: Formalismo de Newman-Penrose y transformación compleja de la función semilla $F(r)$

Para realizar la transformación compleja de la métrica es necesario realizar una correcta selección de las tetradas de Newman-Penrose [28],

$$l^\mu = \delta_r^\mu, \quad (4.12)$$

$$n^\mu = \delta_u^\mu - \delta_r^\mu \frac{F}{2}, \quad (4.13)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right), \quad (4.14)$$

las cuales cumplen con las condiciones (4.1), (4.2), (4.3) y además que también describe la métrica de la ecuación (4.11) según la ecuación (4.5).

Tras definir las tetradas las coordenadas u y r puede tomar valores complejos, pero manteniendo que \tilde{l}^μ y \tilde{n}^μ sean reales y que $(\tilde{m}^\mu)^* = \tilde{\bar{m}}^\mu$. Así, se realiza la siguiente transformación sobre las coordenadas [28],

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + ia \cos \theta (\delta_u^\mu - \delta_{\tilde{r}}^\mu), \quad (4.15)$$

donde la variable a corresponderá al parámetro de espín del agujero negro. Usando la transformación de tetradas descrita por (4.6), se tienen las tetradas resultantes de la transformación de coordenadas [28],

$$\tilde{l}^\mu = \delta_r^\mu, \quad (4.16)$$

$$\tilde{n}^\mu = -\delta_u^\mu - \frac{1}{2}\tilde{F}(r, \tilde{r})\delta_r^\mu, \quad (4.17)$$

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta (\delta_r^\mu + \delta_u^\mu) + \delta_\theta^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^\mu \right) \quad (4.18)$$

donde se ha introducido la transformación $F(r) \rightarrow \tilde{F}(r, \tilde{r})$. Definiendo ρ como

$$\rho^2 = |\tilde{r}|^2 = (r + ia \cos \theta)(r - ia \cos \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.19)$$

y usando la ecuación (4.7), se obtienen los siguientes términos para la métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$

$$[\tilde{g}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 1 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ 1 + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & \tilde{F} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & \frac{\alpha}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & \frac{\alpha}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Uno de los aspectos menos comprendidos sobre el algoritmo es la forma de realizar la transformación compleja de la función $F(r)$ de la semilla [26, 25]. Si bien esta transformación es arbitraria se han cubierto diferentes opciones. Una transformación que ha funcionado para no solo el caso de Kerr, sino también para soluciones de tipo dS y AdS es la que se introduce a continuación,

$$\tilde{F}(r, \tilde{r}) = 1 - \frac{2m(r)}{r} \left(\frac{r^2}{\rho^2} \right), \quad (4.21)$$

donde $m(r)$ es la masa de la función raíz considerada como una función de la coordenada r . Con los elementos obtenidos anteriormente, resta encontrar la métrica en su forma covariante ($\tilde{g}_{\mu\nu}$) y reescribirla en coordenadas Boyer-Lindquist.

4.2.3. Paso 3: Reescribir la métrica en coordenadas de Boyer-Lindquist

La métrica en su forma covariante, $\tilde{g}_{\mu\nu}$, es tal que $\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\mu\nu} = \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es el tensor identidad. Por tanto, el tensor $\tilde{g}_{\mu\nu}$ viene dado por

$$[\tilde{g}_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -\tilde{F} & 1 & 0 & a(\tilde{F} - 1)\sin^2\theta \\ 1 & 0 & 0 & -a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ a(\tilde{F} - 1)\sin^2\theta & -a\sin^2\theta & 0 & (\rho^2 + (2 - \tilde{F})a^2\sin^2\theta)\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

o escrito en términos del elemento de línea,

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 = & -\tilde{F}du^2 + 2dudr + \rho^2d\theta^2 + \left(\rho^2 + (2 - \tilde{F})a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\ & + 2a(\tilde{F} - 1)\sin^2\theta dud\phi - 2a\sin^2\theta drd\phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para realizar la transformación a coordenadas en Boyer-Lindquist se realizan los siguientes cambios sobre los diferenciales [28]

$$du = dt + g(r)dr, \quad (4.24)$$

$$d\phi = d\phi + h(r)dr, \quad (4.25)$$

con $g(r)$ y $h(r)$ funciones ajustadas de tal manera que $\tilde{g}_{r\phi} = \tilde{g}_{tr} = 0$. Reemplazando los diferenciales en (4.24) y (4.25) en la ecuación (4.23) se obtiene que las funciones $g(r)$ y $h(r)$ deben ser

$$g(r) = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \quad (4.26)$$

$$h(r) = \frac{a}{\Delta}. \quad (4.27)$$

con

$$\Delta = \rho^2\tilde{F} + a^2\sin^2\theta. \quad (4.28)$$

Luego, usando las ecuaciones (4.26) y (4.27), se obtiene el siguiente elemento de línea para la solución rotante

$$d\tilde{s}^2 = -\tilde{F}dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2d\theta^2 + (\rho^2 + (2 - \tilde{F})a^2\sin^2\theta)\sin^2\theta d\phi^2 + 2(\tilde{F} - 1)a\sin^2\theta d\phi dt. \quad (4.29)$$

La representación matricial de la métrica resultante para la solución rotante vendrá expresada como

$$[\tilde{g}_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -\tilde{F} & 0 & 0 & (\tilde{F} - 1)a \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ (\tilde{F} - 1)a \sin^2 \theta & 0 & 0 & (\rho^2 + (2 - \tilde{F})a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

con $\Delta = \rho^2 \tilde{F} + a^2 \sin^2 \theta$.

4.3. Métrica de la solución rotante

Se aplicó el algoritmo de Janis Newman a la solución estática de la ecuación (3.1), donde la función semilla viene dada por la ecuación (3.12). Para la solución mostrada en (3.12) se tiene

$$m(r) = M + \frac{\Lambda}{6}r^3 - \frac{\gamma}{2}r^2 - \frac{\zeta}{2}r. \quad (4.31)$$

Por tanto, $\tilde{F}(r, \tilde{r})$ viene dada por

$$\tilde{F}(r, \tilde{r}) = 1 - \frac{1}{\rho^2} \left(2Mr + \frac{\Lambda}{3}r^4 - \gamma r^3 - \zeta r^2 \right) \quad (4.32)$$

y dado que $\tilde{F}(r, \tilde{r})$ no tiene dependencia explícita de \tilde{r} , se tendrá que $\tilde{F}(r, \tilde{r}) = \tilde{F}(r)$.

Reemplazando la ecuación (4.32) en (4.29) se obtiene el elemento de línea para el agujero negro rotante en gravedad dRGT, el cual viene dado por

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 = & - \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \left(2Mr + \frac{\Lambda}{3}r^4 - \gamma r^3 - \zeta r^2 \right) \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ & + \left[\rho^2 - \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \left(2Mr + \frac{\Lambda}{3}r^4 - \gamma r^3 - \zeta r^2 \right) \right) a^2 \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & - \frac{2a \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(2Mr + \frac{\Lambda}{3}r^4 - \gamma r^3 - \zeta r^2 \right) d\phi dt, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $\Delta = \rho^2 - 2Mr - \frac{\Lambda}{3}r^4 + \gamma r^3 + \zeta r^2 + a^2 \sin^2 \theta$. Usando la definición de ρ^2 , se obtiene la siguiente expresión para Δ ,

$$\Delta = -\frac{\Lambda}{3}r^4 + \gamma r^3 + (\zeta + 1)r^2 - 2Mr + a^2. \quad (4.34)$$

Para el elemento de línea mostrado en la ecuación (4.33) es posible corroborar que cuando el parámetro de espín del agujero negro a tiende a cero, se recupera el elemento de línea de la solución estática, es decir, (3.1) con $F(r)$ definido en (3.12).

4.4. Horizonte de eventos

Según lo considerado en la sección 3, el horizonte de eventos se encuentra en el valor de r que resuelve la ecuación (3.19) [22], es decir, resuelve $\tilde{g}^{rr} = 0$. Para el caso de la solución rotante dada por el elemento de línea (4.33) se tiene que

$$\tilde{g}^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} = 0, \quad (4.35)$$

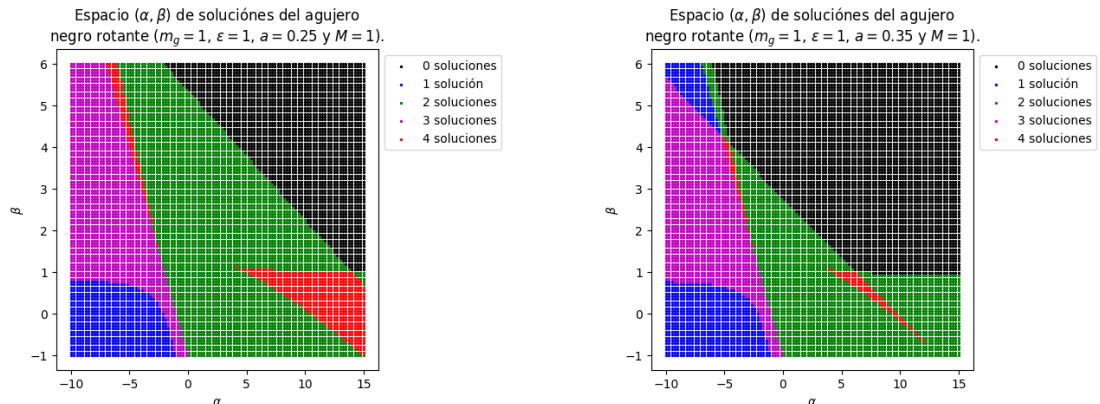
con Δ definido según la ecuación (4.34). La ecuación (4.35) implica

$$-\frac{\Lambda}{3}r^4 + \gamma r^3 + (\zeta + 1)r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \quad (4.36)$$

donde no se tiene una dependencia explícita del ángulo θ . Además, dado que la ecuación (4.36) es de orden 4 se puede tener a lo sumo 4 raíces.

4.4.1. Número de soluciones en el espacio $(\alpha - \beta)$

Análogo a la solución estática, se puede hacer un análisis del número de horizontes dependiendo de los valores de α y β . Además, es posible comparar las regiones respecto de los resultados obtenidos en la figura 3.1. En la figura 4.1 se encuentran 4 gráficas similares a las presentadas en la figura 3.1. Como se notó anteriormente, la métrica del agujero negro rotante se convierte en la métrica de la solución estática cuando a , el parámetro de espín, tiende a cero. Por ello, las regiones con soluciones se conservan en las dos soluciones (esto sin tener en cuenta la interacción del parámetro de espín), salvo que el número de soluciones por región aumenta en una en el caso de la solución rotante.



(a) Soluciones en el espacio $(\alpha - \beta)$ con $a = 0,25$.

(b) Soluciones en el espacio $(\alpha - \beta)$ con $a = 0,35$.

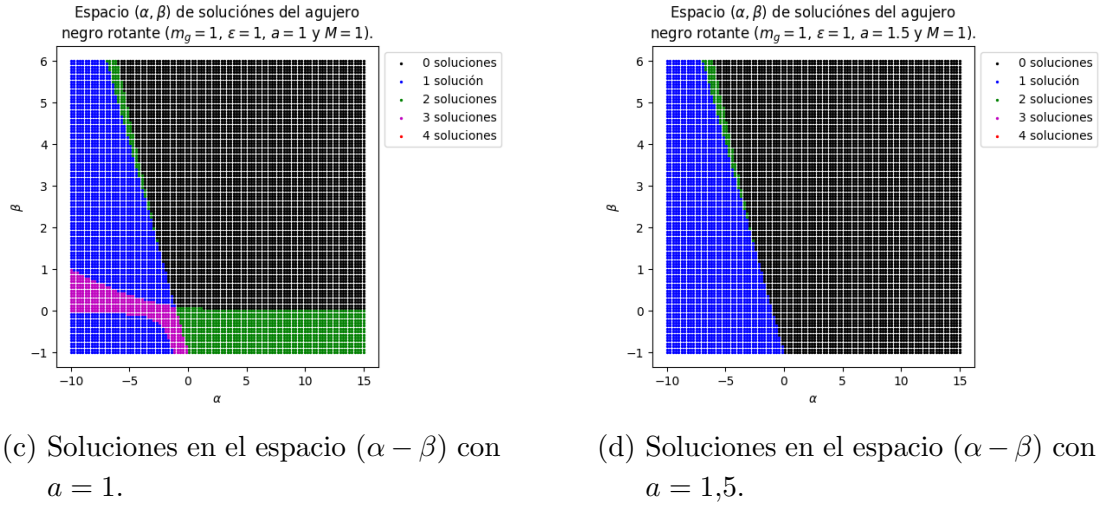


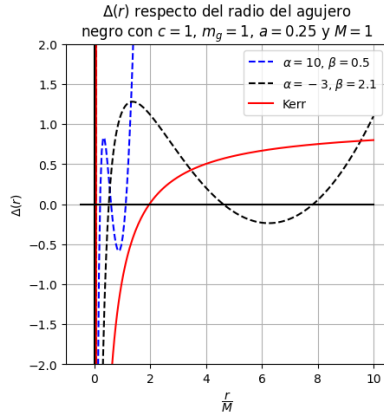
Figura 4.1: Número de soluciones a la ecuación (3.21) en el espacio $(\alpha - \beta)$ con $m_g = 1$, $\epsilon = 1$ y $M = 1$ para distintos valores de a .

En las gráficas 4.1a y 4.1b se presenta el efecto del parámetro de espín sobre el número de raíces. La región de color negro, corresponde a la región donde se presenta una singularidad desnuda, pues no hay un horizonte de eventos físicamente válido. El parámetro de espín también tiene efectos sobre la región de máximo número de soluciones, esto es notable pues la región de color rojo se ha reducido en las dos figuras mostradas. En las dos figuras se cumple la relación entre a y M válida para el agujero negro de Kerr, es decir $a \leq M$.

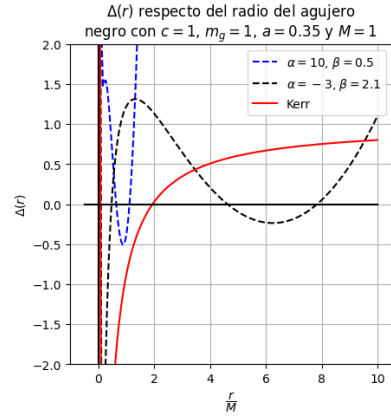
Por otro lado, en las gráficas 4.1c y 4.1d se presenta el efecto del parámetro de espín cuando $a \geq M$ y como puede verse, aún se encuentran soluciones válidas de horizontes. Los agujeros negros de Kerr con $a = M$ son denominados agujeros negros extremales. En este caso, los agujeros negros con $a > M$ son llamados agujeros negros súper-rotantes (los cuales son posibles en las soluciones de las ecuaciones de campo de la relatividad general con constante cosmológica). El límite de α y β dado un valor de a se encuentra en el borde de la región de color negro, región donde hay singularidades desnudas.

4.4.2. Comportamiento del horizonte de eventos

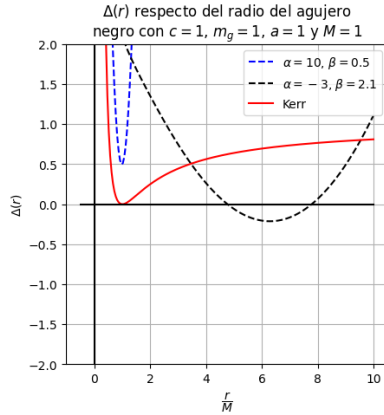
Si bien los gráficos 4.1 permiten descartar valores de α y β en los cuales no hay horizonte de eventos, estos gráficos no permiten visualizar el comportamiento de la métrica para distintos valores de los parámetros en la solución rotante.



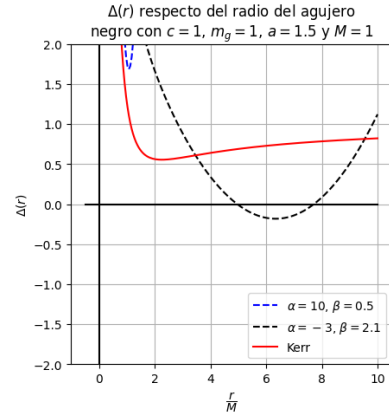
(a) Gráfica de la ecuación (4.34) con $a = 0,25$.



(b) Gráfica de la ecuación (4.34) con $a = 0,35$.



(c) Gráfica de la ecuación (4.34) con $a = 1$.



(d) Gráfica de la ecuación (4.34) con $a = 1,5$.

Figura 4.2: Gráficas de la ecuación (4.34) con $\epsilon = 1$, $m_g = 1$ y $M = 1$ para algunos valores de α , β y distintos valores de a . En rojo se tiene la función Δ para el caso de Kerr, es decir la ecuación (4.34) con $m_g = 0$

En las figuras de la figura 4.2 se muestra el comportamiento de la función $\Delta(r)$ para distintos valores de a . En cada una de las gráficas se observa que el momento angular del agujero negro, añade horizontes. Además, Δ sufre un corrimiento sobre el eje vertical hasta que estas curvas no tienen raíces reales. Esto representa una condición sobre los valores que a puede tomar dados valores de α y β .

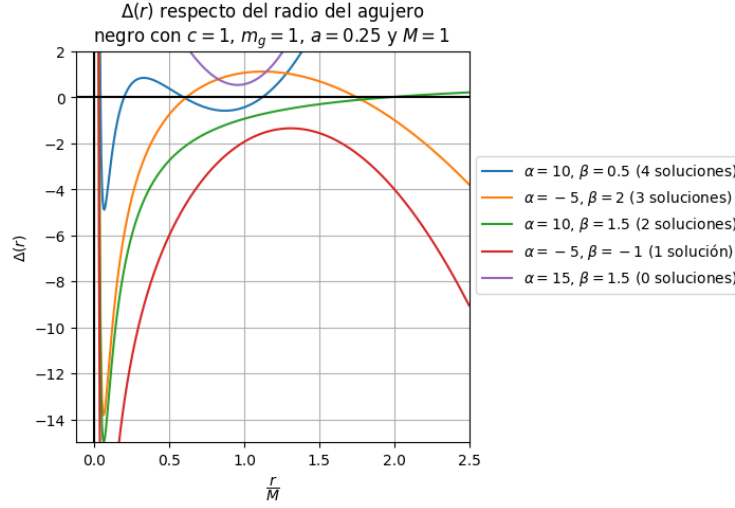


Figura 4.3: Comportamiento de la ecuación (4.34) para valores arbitrarios de cada región de la gráfica 4.1a.

Por otra parte, en la gráfica 4.3 se pueden ver soluciones de distintas regiones del gráfico 4.1a. En esta se observa el comportamiento del signo de la función $\Delta(r)$. Análogo al caso estático, se espera que la región fuera del agujero negro corresponda con un $\Delta > 0$. Por ello, de este gráfico se pueden descartar los valores de horizonte de eventos con una y tres soluciones (además de la región sin soluciones), regiones que corresponden con las que fueron descartadas usando el mismo argumento para la solución estática. Nuevamente, pueden existir valores de α y β donde exista horizonte cosmológico. Las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se pueden revisar con mayor detalle en [20].

4.5. Ergosfera

Para el caso de agujeros negros rotantes definidos según la ecuación (4.30), se tiene que

$$\tilde{g}_{tt}|_{r_H} = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \Big|_{r_H} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2 + r_H^2 \cos^2 \theta}, \quad (4.37)$$

con r_H el valor del horizonte de eventos del agujero negro. Esto muestra que \tilde{g}_{tt} no se cancela en el horizonte de eventos (salvo en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, los polos del horizonte de eventos). Esta es una de las diferencias notables entre un agujero negro rotante, respecto de agujeros negros estáticos (tipo Schwarzschild) [29].

La hipersuperficie en la cual $\tilde{g}_{tt} = 0$ es conocida como la ergosfera (o superficie de l límite estático) y corresponde al punto a partir del cual el espacio-tiempo rota junto con el agujero negro [29].

Dado un fotón que orbita al agujero negro en r_e y $\theta = \frac{\pi}{2}$, con r_e tal que $\tilde{g}_{tt}|_{r_e} = 0$, es decir, un fotón orbitando sobre el ecuador de la ergosfera, su elemento de línea será

$$ds^2 = -\tilde{g}_{tt}dt^2 + 2\tilde{g}_{t\phi}dtd\phi + \tilde{g}_{\phi\phi}d\phi^2 = 0, \quad (4.38)$$

de la cual se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\tilde{g}_{\phi\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + 2\tilde{g}_{t\phi} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - \tilde{g}_{tt} = 0. \quad (4.39)$$

Luego,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\tilde{g}_{t\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{g}_{t\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} \right)^2 - \frac{\tilde{g}_{tt}}{\tilde{g}_{\phi\phi}}} \quad (4.40)$$

y sobre la ergosfera se tendría

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\tilde{g}_{t\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} \pm \frac{\tilde{g}_{t\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}}, \quad (4.41)$$

de donde se obtiene que la velocidad angular del fotón será

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{cases} -2\frac{\tilde{g}_{t\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} & \text{si corrotante} \\ 0 & \text{si contrarrotante.} \end{cases} \quad (4.42)$$

La primera solución corresponde a la velocidad angular de un fotón moviéndose en la misma dirección del giro del agujero negro (corrotante), mientras que la segunda solución corresponde a la velocidad angular de un fotón moviéndose hacia la dirección opuesta al giro del agujero negro (contrarrotante). Es decir, el agujero negro cambia la velocidad angular de los cuerpos que se encuentren sobre la ergosfera [30] (este efecto es conocido como *arrastré de sistemas inerciales*).

La región que se encuentra entre el horizonte de eventos y la ergosfera se llama la ergoregión y, a diferencia del interior del horizonte de eventos, si está conectada causalmente con el exterior. Este hecho es importante para realizar mediciones sobre la energía de rotación del agujero negro.

4.5.1. Ergosfera agujero negro rotante dRGT

Dado que la ergosfera corresponde a la superficie en la cual se tiene $\tilde{g}_{tt} = 0$, para el caso del agujero negro descrito por la métrica (4.30) vendría dada por la expresión $\tilde{g}_{tt} = -\tilde{F} = 0$. Utilizando la expresión de \tilde{F} dada por (4.32) se tiene

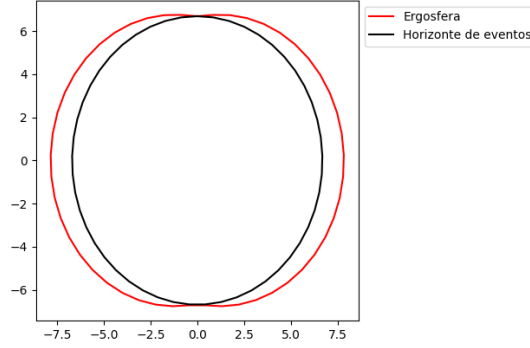
$$\rho^2 - 2Mr - \frac{\Lambda}{3}r^4 + \gamma r^3 + \zeta r^2 = 0, \quad (4.43)$$

es decir,

$$-\frac{\Lambda}{3}r^4 + \gamma r^3 + (\zeta + 1)r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (4.44)$$

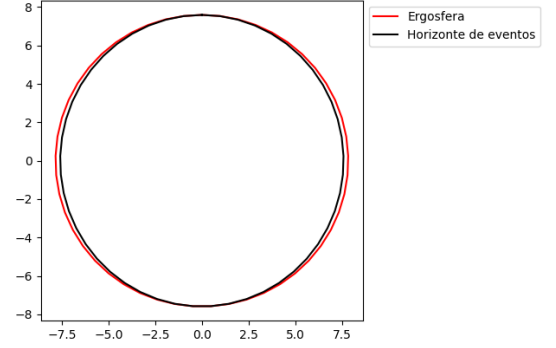
La ecuación (4.44) coincide con la ecuación (4.36) en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi$ como es esperable para el comportamiento del horizonte de eventos y la ergosfera.

Ergósfera para agujero negro de $c = 1$, $m_g = 1$, y $M = 1$
con $a = 3.14$, $\alpha = -3$ y $\beta = 2.1$



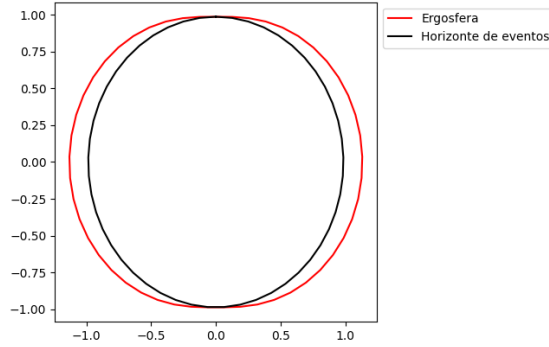
(a) Ergosfera y horizonte de eventos del agujero negro con $a = 3.14$.

Ergósfera para agujero negro de $c = 1$, $m_g = 1$, y $M = 1$
con $a = 2$, $\alpha = -3$ y $\beta = 2.1$



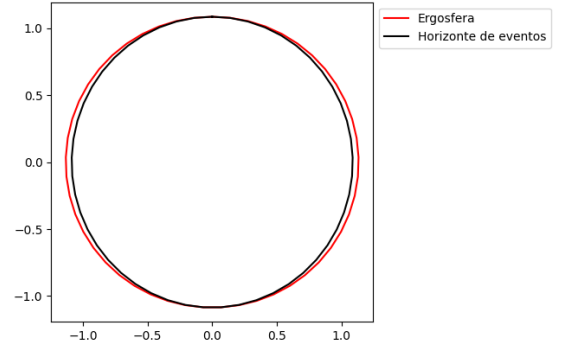
(b) Ergosfera y horizonte de eventos del agujero negro con $a = 2$.

Ergósfera para agujero negro de $c = 1$, $m_g = 1$, y $M = 1$
con $a = 0.72$, $\alpha = 10$ y $\beta = 0.5$



(c) Ergosfera y horizonte de eventos del agujero negro con $a = 0.72$.

Ergósfera para agujero negro de $c = 1$, $m_g = 1$, y $M = 1$
con $a = 0.5$, $\alpha = 10$ y $\beta = 0.5$



(d) Ergosfera y horizonte de eventos del agujero negro con $a = 0.5$.

Figura 4.4: Ergosfera, en rojo, y horizonte de eventos, en negro, para agujeros negros de $M = m_g = \epsilon = 1$ y distintos valores de α y β .

Como comprobación, tanto de la existencia de ergosfera como de que esta coincide con el horizonte de eventos en los polos, se presentan los gráficos de la figura 4.4. Allí se graficaron tanto el horizonte de eventos (en negro) y la ergosfera (en rojo) para un agujero negro super rotante y una agujero negro con $M > a$. Estos dos agujeros negros presentan un comportamiento similar en la forma de la ergosfera. Además, efectivamente, la ergosfera

coincide con el horizonte en los polos sin importar el valor de los parámetros del agujero negro.

4.5.2. Arrastre de sistemas inerciales

Para el agujero negro descrito por la métrica (4.30) se tienen los siguientes elementos de línea cuando son evaluados en el radio r_e de la ergosfera

$$\tilde{g}_{t\phi} = -a \sin^2 \theta, \quad (4.45)$$

$$\tilde{g}_{\phi\phi} = (r_e^2 + a^2(1 + \sin^2 \theta)) \sin^2 \theta, \quad (4.46)$$

reemplazando estos dos elementos de la métrica en la ecuación (4.42) se obtiene que el arrastre de un fotón en órbita en la ergósfera vendrá dado según

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{cases} \frac{2a}{r_e^2 + a^2(1 + \sin^2 \theta)} & \text{si corrotante} \\ 0 & \text{si contrarrotante.} \end{cases} \quad (4.47)$$

4.6. Termodinámica del agujero negro rotante

De igual manera que en la solución estática, se estudió la termodinámica de la solución rotante, obteniendo la gravedad superficial, la temperatura y la entropía asociadas.

4.6.1. Gravedad superficial

Dado que la métrica propuesta es estacionaria y axialmente simétrica, ésta admite los vectores de Killing $u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}$ y $\phi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi}$ [24, 30] en las coordenadas de Eddington-Finkelstein y cualquier combinación lineal de u^α y ϕ^α será también un vector de Killing. En particular, consideraremos ahora el vector de Killing dado por

$$\xi^\alpha = u^\alpha + \omega_H \phi^\alpha, \quad (4.48)$$

donde $\omega = -\frac{\tilde{g}_{u\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}}$ y $\omega_H = \omega(r_H)$ es el valor de la velocidad angular ω en el horizonte de eventos.

La función $\omega(r)$ esta dada por

$$\omega = \frac{2m(r)ar}{\Sigma}, \quad (4.49)$$

con $m(r)$ definido según la ecuación (4.31) y $\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$. En cualquiera de los radios r_i encontrados mediante la ecuación (4.36), se cumple que $m(r_i) = \frac{r_i^2 + a^2}{2r_i}$ y $\Sigma = (r_i^2 + a^2)^2$. Por lo tanto se tiene que

$$\omega_H = \frac{a}{r_i^2 + a^2}. \quad (4.50)$$

Por otro lado, la gravedad superficial esta definida, en general, a través de un vector de Killing ξ_α (4.48) y la ecuación

$$\nabla_\alpha (-\xi^\beta \xi_\beta) = 2\kappa \xi_\alpha. \quad (4.51)$$

Para realizar este cálculo, se obtiene primero la norma del vector (4.48),

$$\begin{aligned} \xi^\beta \xi_\beta &= \tilde{g}_{\alpha\beta} (u^\alpha + \omega_H \phi^\alpha) (u^\beta + \omega_H \phi^\beta) \\ &= \tilde{g}_{\phi\phi} \left(\omega_H^2 - 2\omega\omega_H + \frac{\tilde{g}_{uu}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} \right) \\ &= \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} (\omega_H - \omega)^2 - \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

y la derivada covariante vendrá dada por

$$\nabla_\alpha (-\xi^\beta \xi_\beta) = \partial_\alpha \left(\frac{\rho^2}{\Sigma} \right) \Delta + \frac{\rho^2}{\Sigma} \partial_\alpha \Delta - \partial_\alpha \left(\frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) (\omega_H - \omega)^2 - 2 \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} \partial_\alpha (\omega_H - \omega). \quad (4.53)$$

En el horizonte de eventos se cumple que $\Delta = 0$ y $\omega_H = \omega$, por lo que

$$\nabla_\alpha (-\xi^\beta \xi_\beta) = \frac{\rho^2}{(r_i^2 + a^2)^2} \partial_\alpha \Delta. \quad (4.54)$$

Por otra parte, el vector $\xi_r = (\tilde{g}_{ur} + \omega_H \tilde{g}_{\phi r})|_{r_i} = (1 - \omega_H a \sin^2 \theta)$ en el horizonte de eventos y, realizando un poco de álgebra, la gravedad superficial se obtendrá en la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial_r \Delta}{r_i^2 + a^2}. \quad (4.55)$$

La derivada de la ecuación (4.34) respecto de r , viene dada por

$$\partial_r \Delta = \left(-\frac{4}{3} \Lambda r^3 + 3\gamma r^2 + 2(\zeta + 1)r - 2M \right). \quad (4.56)$$

En los horizontes de eventos r_i se cumple que

$$M = \frac{1}{2r_i} \left(-\frac{\Lambda}{3} r_i^4 + \gamma r_i^3 + (\zeta + 1)r_i^2 + a^2 \right). \quad (4.57)$$

Finalmente, reemplazando el valor de la masa en la ecuación (4.56) se obtiene que

$$\kappa = \frac{1}{2r_i} \frac{-\Lambda r_i^4 + 2\gamma r_i^3 + (\zeta + 1)r_i^2 - a^2}{r_i^2 + a^2}. \quad (4.58)$$

4.6.2. Temperatura

De manera análoga al caso estático, la temperatura del agujero negro está definida como

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (4.59)$$

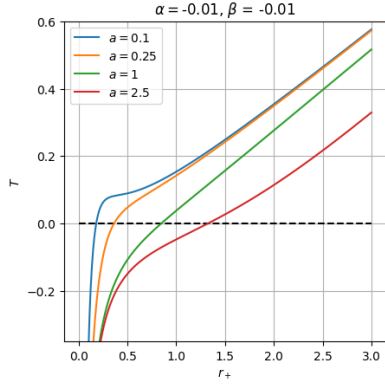
es decir,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi} \frac{-\Lambda r_i^4 + 2\gamma r_i^3 + (\zeta + 1)r_i^2 - a^2}{(r_i^2 + a^2)r_i} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha(3r_i^4 - 4r_i^3 + r_i^2) + \beta(3r_i^4 - 6r_i^3 + 3r_i^2) + (3r_i^4 - 2r_i^3 + r_i^2 - a^2)}{(r_i^2 + a^2)r_i}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

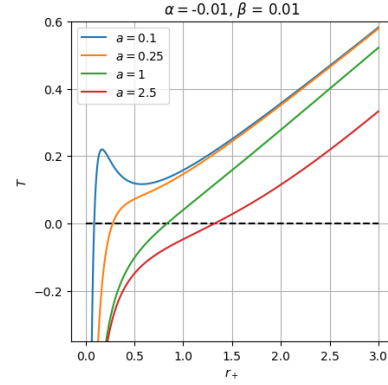
De la ecuación (4.60) se puede notar que, cuando $a \rightarrow 0$, la temperatura tiende a la temperatura del agujero negro estático (3.29), como es de esperarse. Adicionalmente, dado que cada r_i puede corresponder a 4 distintos valores, se encuentra la temperatura de tres horizontes internos, si es que existen, y la temperatura del horizonte de eventos.

A diferencia de la ecuación (3.29), la temperatura del agujero negro rotante no siempre presenta mínimo global para todos los parámetros de α y β . Es más, de la derivada respecto de r_i no hay una expresión analítica de $r_{i(min)}$ pues es resultado de encontrar las raíces de un polinomio de grado 6. A pesar de esto, el comportamiento de la temperatura se ve ilustrado en las gráficas de la figura 4.5, donde se ilustra el comportamiento de la temperatura del agujero negro rotante con diferentes combinaciones de α y β y para cuatro valores de a .

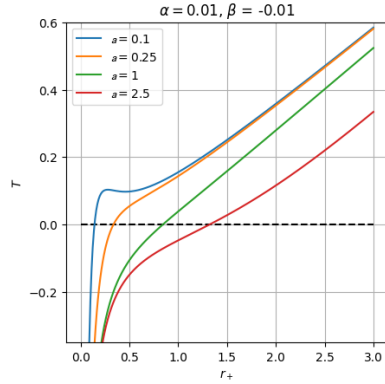
En cada una de las gráficas es posible notar que no siempre existe un mínimo global para la temperatura, razón por la cual la temperatura logra llegar a cero y por tanto el agujero negro rotante se congelará y almacenará toda la información en su interior, resolviendo el problema de evaporación del agujero negro de Schwarzschild.



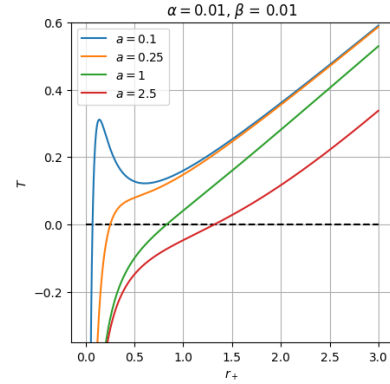
(a) Gráfica de la ecuación (4.60) con $\alpha < 0$ y $\beta < 0$.



(b) Gráfica de la ecuación (4.60) con $\alpha < 0$ y $\beta > 0$.



(c) Gráfica de la ecuación (4.60) con $\alpha > 0$ y $\beta < 0$.



(d) Gráfica de la ecuación (4.60) con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Figura 4.5: Gráfica de la ecuación (4.60) con $\epsilon = 1$, $m_g = 1$ para distintos valores de α , β y a .

Es posible notar en la figura 4.5 que al incrementar el momento angular del agujero negro, éste tiende a congelarse antes debido a un corrimiento del valor $T = 0$ hacia valores más grandes para el radio del horizonte r_+ .

4.6.3. Entropía

Es posible establecer dos vías de obtener la entropía del agujero negro, la primera es a través del cálculo del área del horizonte de eventos y la segunda es a través de las leyes de la termodinámica de agujeros negros. En principio, estas dos posibilidades deberán coincidir.

4.6.3.1. Entropía a través del área del horizonte de eventos

La entropía del agujero negro está definida como

$$S = \frac{A}{4}. \quad (4.61)$$

Dado que se está en una métrica cuyo elemento de línea en θ y ϕ es diferente del elemento de línea el área del horizonte de eventos viene dada como sigue

$$A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{|\tilde{g}_{\theta\theta}\tilde{g}_{\phi\phi}|} \Big|_{r_i} d\phi d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r_i^2 + a^2) \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi(r_i^2 + a^2). \quad (4.62)$$

Luego, la entropía vendrá dada por

$$S = \pi(r_i^2 + a^2). \quad (4.63)$$

4.6.3.2. Entropía a través de las leyes de termodinámica

Para un agujero negro rotante, la primera ley de la termodinámica queda descrita como [24]

$$dS = \frac{1}{T}(dM - \omega_H dJ), \quad (4.64)$$

donde J es el momento angular del agujero negro. El parámetro de espín a está definido como $J = Ma$, luego $dJ = a dM$ y con ello

$$dS = \frac{1}{T} (1 - a\omega_H) dM = \frac{1}{T} (1 - a\omega_H) \frac{\partial M}{\partial r_i} dr_i. \quad (4.65)$$

Usando la ecuación (4.31) y derivando respecto a r_i se obtiene que

$$\frac{\partial M}{\partial r_i} = \frac{1}{2r_i} \left(-\Lambda r_i^3 + 2\gamma r_i^2 + (\zeta + 1)r_i - \frac{a^2}{r_i} \right), \quad (4.66)$$

mientras que para el otro término se tiene

$$(1 - a\omega_H) = \frac{r_i^2}{r_i^2 + a^2}. \quad (4.67)$$

Multiplicando los factores (4.66) y (4.67) se obtiene la siguiente expresión

$$(1 - a\omega_H) \frac{\partial M}{\partial r_i} = 2\pi r_i T, \quad (4.68)$$

y reemplazando (4.68) en (4.65) se tendrá

$$\int_{S(0)}^S dS = \int_0^{r_i} 2\pi r_i dr_i. \quad (4.69)$$

Integrando ambos lados de la expresión se obtiene

$$S = \pi r_i^2 + S(0). \quad (4.70)$$

La entropía $S(0)$ corresponde a la entropía de un agujero negro de radio a , por tanto, $S(0) = \pi a^2$, obteniendo así el siguiente resultado

$$S = \pi(r_i^2 + a^2), \quad (4.71)$$

la cual efectivamente recupera el valor de la entropía obtenido a través del área del horizonte de eventos mostrado en (4.63).

5 Conclusiones

Se realizó un desarrollo de la teoría de gravedad masiva propuesta por de Rahm, Gabadadze y Tolley (dRGT) en el capítulo 2, donde se expresó que la mayor diferencia entre la RG y la teoría de gravedad masiva dRGT está en la masa del gravitón. Adicionalmente, se estudiaron las nuevas ecuaciones de campo de la teoría obtenidas al introducir el potencial de gravedad masiva dRGT y a través de ellas fue posible deducir una solución de agujero negro estático. A partir de la solución estática y aplicando el algoritmo de Janis-Newman, se obtuvo una métrica para agujero negro rotante en gravedad dRGT. Una vez se obtuvieron las soluciones de agujero negro, se estudiaron las diferentes propiedades de interés, entre ellas el horizonte de eventos, la gravedad superficial, la temperatura y la entropía.

A lo largo del capítulo 3 se dedujo la solución de agujero negro estático en la teoría dRGT, proponiendo la métrica (3.1) y obteniendo los resultados de la ecuación (3.12), donde se puede comprobar que con la masa del gravitón igual a cero se recuperan los resultados del agujero negro de Schwarzschild. Una vez se dedujo la solución estática se estudiaron algunas de sus propiedades físicas como la singularidad esencial determinada por la ecuación (3.14), el horizonte de eventos y su comportamiento termodinámico. Se encontró que existen un máximo de tres horizontes. Sin embargo, esta solución solo puede tener uno o tres horizontes, pues cuando no hay ninguno se presenta una singularidad desnuda y cuando hay dos, se presentan problemas de signatura sobre la métrica del espacio tiempo.

Por otra parte, para el comportamiento termodinámico de la solución, se obtuvo que el agujero negro estático cumple con la ley cero de la termodinámica de agujeros negros, es decir, la gravedad superficial es constante en todo el horizonte de eventos. También se encontró que el agujero negro presenta una temperatura mínima positiva, lo cual trae como consecuencia los mismos problemas asociados con la evaporación de agujero negro que se presentan en el caso de Schwarzschild. Por esta razón, resulta conveniente que la temperatura mínima sea negativa o cero en algún punto de la historia ya que así, el agujero negro se congelaría y almacenará la información en su interior. Finalmente, también se encontró que la entropía cumple con la ley del área del horizonte de eventos de los agujeros negros.

Una vez se tiene la solución estática, en el capítulo 4, se aplicó el algoritmo de Janis-Newman para generar una solución rotante de la ecuación (4.33), la cual se reduce a la solución de Kerr en el límite de la relatividad general.

A continuación se estudió el comportamiento de los horizontes para éste agujero negro estacionario, mostrando que existen un máximo de 4 posibles horizontes. De manera similar al caso estático, sólo hay solución válida con cuatro y dos horizontes, pues para cero horizontes habrá una singularidad esencial y para los demás números de soluciones hay problemas en la definición de la signatura de la métrica. Adicionalmente, debido a la rotación se presenta una ergosfera, la cual se comporta de manera muy similar al caso de Kerr. También se obtuvieron los resultados del arrastre de sistemas inerciales, mostrando un comportamiento esperado.

Finalmente, también se estudió el comportamiento termodinámico del agujero negro estacionario. Al igual que en el caso estático, el agujero negro rotante cumple con la ley cero de la termodinámica, pues la gravedad superficial se mantiene constante sobre el horizonte de eventos. La temperatura del agujero negro presenta un comportamiento similar al del caso estático, sin embargo, este no presenta un mínimo global, sino que se alcanza el cero absoluto, de tal forma que estos agujeros de la teoría dRGT se congelarían almacenando toda la información en su interior. Para la entropía se corroboró que siguen el comportamiento usual, obteniendo que tanto por la primera ley de la termodinámica de agujeros negros como por la ley del área del horizonte de eventos, se obtiene el mismo resultado.

Bibliografía

- [1] Claudia de Rham. Massive gravity. *LIVING REVIEWS IN RELATIVITY*, 17, 2014. ISSN 2367-3613. doi: 10.12942/lrr-2014-7. URL <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-7>.
- [2] Kurt Hinterbichler. Theoretical aspects of massive gravity. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):671–710, may 2012. doi: 10.1103/revmodphys.84.671. URL [url{https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.671}](https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.671).
- [3] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. Helicity decomposition of ghost-free massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2011(11), nov 2011. doi: 10.1007/jhep11(2011)093. URL [https://doi.org/10.1007/jhep11\(2011\)093](https://doi.org/10.1007/jhep11(2011)093).
- [4] Matteo Carrera and Domenico Giulini. Classical analysis of the van dam - veltman discontinuity, 2001. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0107058>.
- [5] H. van Dam and M. Veltman. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. *Nuclear Physics B*, 22(2):397–411, 1970. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(70\)90416-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(70)90416-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321370904165>.
- [6] V. I. Zakharov. Linearized Gravitation Theory and the Graviton Mass. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 12:447, January 1970.
- [7] Lasma Alberte, Ali H. Chamseddine, and Viatcheslav Mukhanov. Massive gravity: exorcising the ghost. *Journal of High Energy Physics*, 2011(4), apr 2011. doi: 10.1007/jhep04(2011)004. URL [https://doi.org/10.1007/jhep04\(2011\)004](https://doi.org/10.1007/jhep04(2011)004).
- [8] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. Resummation of massive gravity. *Physical Review Letters*, 106(23), jun 2011. doi: 10.1103/physrevlett.106.231101. URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.106.231101>.
- [9] Claudia de Rham and Gregory Gabadadze. Generalization of the fierz-pauli action. *Physical Review D*, 82(4), aug 2010. doi: 10.1103/physrevd.82.044020. URL <https://doi.org/10.1103/physrevd.82.044020>.

- [10] Supriya Pan and Subenoy Chakraborty. A cosmological study in massive gravity theory. *Annals of Physics*, 360:180–193, sep 2015. doi: 10.1016/j.aop.2015.04.003. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.aop.2015.04.003>.
- [11] A. I. Vainshtein. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Physics Letters B*, 39(3):393–394, 1972. ISSN 0370-2693. doi: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(72\)90147-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(72)90147-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269372901475>.
- [12] S. F. Hassan, Rachel A. Rosen, and Angnis Schmidt-May. Ghost-free massive gravity with a general reference metric. *Journal of High Energy Physics*, 2012(2), feb 2012. doi: 10.1007/jhep02(2012)026. URL <https://doi.org/10.1007%2Fjhep02%282012%29026>.
- [13] Eugeny Babichev and Richard Brito. Black holes in massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 32(15):154001, jul 2015. doi: 10.1088/0264-9381/32/15/154001. URL <https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F32%2F15%2F154001>.
- [14] H. Kodama and I. Arraut. Stability of the schwarzschild-de sitter black hole in the dRGT massive gravity theory. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014(2):23E02–0, feb 2014. doi: 10.1093/ptep/ptu016. URL <https://doi.org/10.1093%2Fptep%2Fptu016>.
- [15] Laura Bernard, C'e dric Deffayet, and Mikael von Strauss. Consistent massive graviton on arbitrary backgrounds. *Physical Review D*, 91(10), may 2015. doi: 10.1103/physrevd.91.104013. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.91.104013>.
- [16] Ping Li, Xin zhou Li, and Ping Xi. Black hole solutions in de rham-gabadadze-tolley massive gravity. *Physical Review D*, 93(6), mar 2016. doi: 10.1103/physrevd.93.064040. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.93.064040>.
- [17] De-Jun Wu and Shuang-Yong Zhou. No hair theorem in quasi-dilaton massive gravity. *Physics Letters B*, 757:324–329, jun 2016. doi: 10.1016/j.physletb.2016.04.016. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.physletb.2016.04.016>.
- [18] Suchant G. Ghosh, Lunchakorn Tannukij, and Pitayuth Wongjun. A class of black holes in dRGT massive gravity and their thermodynamical properties. *The European Physical Journal C*, 76(3), mar 2016. doi: 10.1140/epjc/s10052-016-3943-x. URL <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-3943-x>.
- [19] R.P. Singh, B.K. Singh, B.R.K. Gupta, and Shobhit Sachan. Thermodynamic properties of bardeen black holes in dRGT massive gravity. *Canadian Journal of Physics*, 100(1):39–47, jan 2022. doi: 10.1139/cjp-2021-0092. URL <https://doi.org/10.1139%2Fcjp-2021-0092>.

-
- [20] Jhon Sebastián Moreno Triana. AgujerosNegrosdRGT, 9 2022. URL <https://github.com/JhOmpis/AgujerosNegrosdRGT>.
- [21] Tim Johannsen. Systematic study of event horizons and pathologies of parametrically deformed kerr spacetimes. *Physical Review D*, 87(12), jun 2013. doi: 10.1103/physrevd.87.124017. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.87.124017>.
- [22] Cosimo Bambi. *Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity*. 06 2017. ISBN 978-981-10-4523-3. doi: 10.1007/978-981-10-4524-0.
- [23] Jonathan Thornburg. Event and apparent horizon finders for 3+1 numerical relativity. 2005. doi: 10.48550/ARXIV.GR-QC/0512169. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0512169>.
- [24] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [25] Harold Erbin. Janistextendashnewman algorithm: Generating rotating and NUT charged black holes. *Universe*, 3(1):19, mar 2017. doi: 10.3390/universe3010019. URL <https://doi.org/10.3390%2Funiverse3010019>.
- [26] Yu-Ching Chou. An extension of newman-janis algorithm for rotation metrics in general relativity. 11 2019. doi: 10.31219/osf.io/gy3t2.
- [27] Zafar Ahsan. *The Potential of Fields in Einstein's Theory of Gravitation*. Springer Singapore, 2019.
- [28] Devin Hansen and Nicol'a s Yunes. Applicability of the newman-janis algorithm to black hole solutions of modified gravity theories. *Physical Review D*, 88(10), nov 2013. doi: 10.1103/physrevd.88.104020. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.88.104020>.
- [29] Subrahmanyan Chandrasekhar and Kip S Thorne. *The mathematical theory of black holes*, 1985.
- [30] Alexis Larrañaga. *Black holes i. geometric description*, 2013.