

Estructura y termodinámica de un agujero negro de Kerr-de Sitter con parámetros de aceleración y deformación

Casallas Michael, Gutierrez Carlos, Hernández Oscar, Moreno Jhon

macasallasb@unal.edu.co, cagutierrezgu@unal.edu.co, osdhernandezpa@unal.edu.co, jmorenotr@unal.edu.co

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, Colombia.

Junio 2022

1. Objetivos

1.1. General

Comparar los resultados de la estructura (horizonte de eventos, radio ISCO, radio de órbita de fotones, potencial efectivo y ergosfera) y la termodinámica (temperatura de Hawking y entropía) de un agujero negro de Kerr respecto de los resultados obtenidos de la métrica de Kerr-de Sitter modificada añadiendo parámetros fenomenológicos (aceleración y deformación).

1.2. Específicos

- Proponer una métrica de Kerr-de Sitter modificada añadiendo parámetros de aceleración y de deformación.
- Calcular el horizonte de eventos, el radio ISCO, el radio de órbita de fotones, el potencial efectivo y ergosfera para el agujero negro con métrica de Kerr-Sitter modificada para distintos valores de los parámetros introducidos.
- Obtener la temperatura de Hawking y la entropía para el agujero negro con métrica Kerr-de Sitter modificada para distintos valores de los parámetros de aceleración y de deformación.
- Verificar los resultados obtenidos del artículo “The non-Kerr Black Hole with acceleration” para la estructura y la termodinámica de un agujero negro con métrica de Kerr-de Sitter modificada en el límite cuando el parámetro de la constante cosmológica tiende a cero.
- Clasificar el espacio-tiempo en regiones y establecer relaciones causales entre ellas a través de diagramas de Penrose.

- Identificar las regiones de los parámetros introducidos donde se evidencie temperatura negativa y/o donde no se cumpla la segunda ley de la termodinámica.

2. Justificación

En los últimos años se han hecho estudios sobre la estructura y termodinámica de agujeros negros en métricas de Kerr modificadas con parámetros de aceleración y deformación (non-Kerr con parámetro de deformación) [1] con la finalidad de estudiar el alcance y las limitaciones de la física de estas métricas modificadas. Por otra parte, en la actualidad existen severas evidencias observacionales presentes en supernovas de tipo Ia [2] y en el CMB (Cosmic Microwave Background) [3] las cuales conducen a la existencia de la expansión acelerada del universo. La expansión acelerada no está contenida en las primeras ecuaciones de campo de Einstein. Una de las propuestas hechas para resolver este problema es realizar una modificación a las ecuaciones de campo de la relatividad general añadiendo una constante cosmológica Λ [4], por esta razón cambia la estructura de las soluciones para agujero negro. Una de las soluciones que aparecen es la Kerr-de Sitter (KdS) [5], solución de un agujero negro en rotación y con masa.

El estudio de la métrica KdS con parámetros de aceleración y deformación permitiría realizar un estudio más cercano a los resultados esperados para un agujero negro real. Por tanto, analizar la estructura y la termodinámica de agujeros negros de tipo KdS modificada permite estudiar el alcance y las limitaciones de la relatividad general en proximidades del agujero negro.

3. Pertinencia Social

El desarrollo de disciplinas como la astronomía y astrofísica han contribuido, directa o indirectamente, al avance de otros campos de la ciencia. Por ejemplo, en los años 80, el estudio de la degeneración de electrones en enanas blancas inspiró el desarrollo de aspectos relevantes de la física del estado sólido [6], el estudio de los rayos cósmicos provenientes de fuentes astrofísicas con emisión violenta de radiación ha permitido un desarrollo en el estudio de la interacción de los neutrinos y la materia [7], entre otros desarrollos científicos. Paralelamente, de manera indirecta, la necesidad de realizar mediciones experimentales ha permitido el crecimiento de la tecnología que se usa actualmente. Por ejemplo, la internet (la cual fue desarrollada por astrónomos australianos que estudiaban fuentes de radio en el cielo) o el desarrollo en óptica que ha traído la realización de potentes telescopios [6] o incluso el descubrimiento de los agujeros negros ha permitido el desarrollo de telescopios que indirectamente miden ondas gravitacionales [8].

Por otra parte, el interés por investigar agujeros negros ha desarrollado el mundo de la computación y la inteligencia artificial (tendencias tecnológicas que apuntan a estar presente en la vida cotidiana de la sociedad). Además, en 2019 se registró la denominada “primera foto de un agujero negro” con ayuda del código hecho por Katie Bouman [9]. También el desarrollo teórico ha permitido llegar a la comprobación de las ondas gravitacionales detectadas en 2015 por LIGO; las cuales muestran un gran potencial no sólo en estudios astronómicos sino también en la cooperación de diferentes personas en la medición e interpretación de estas [8].

El estudio tanto teórico como observacional de agujeros negros tiene un gran potencial para el desarrollo de la ciencia, como nuestro lenguaje común [6], y la sociedad; puesto que estos desarrollos permiten tener un mejor entendimiento del mundo e invita a la sociedad a trabajar unidos en beneficio del desarrollo cultural, la educación y la internacionalización.

4. Cronograma

Las fechas y desarrollos importantes para cumplir con los objetivos del proyecto de investigación, según las fechas establecidas para los avances y entrega final, se exponen el cuadro siguiente

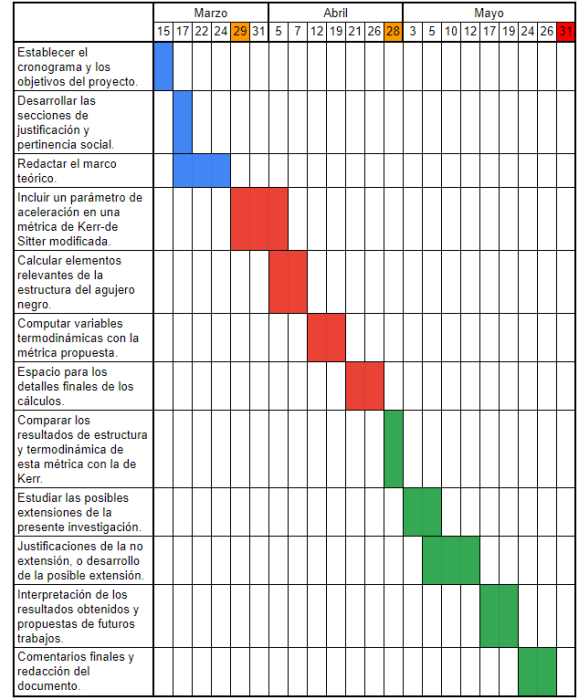


Figura 1: Cronograma tentativo del proyecto de investigación.

5. Marco Teórico

Los agujeros negros pueden ser descritos como el producto final del colapso gravitacional completo de objetos astrofísicos masivos. En la estructura de la física que aborda este tipo de singularidades, la métrica espacio-temporal de un agujero negro astrofísico se aproxima satisfactoriamente a partir la solución de Kerr. Sin embargo, desviaciones considerables evidenciadas muestran que existen escenarios que la teoría de la relatividad de Einstein no predice adecuadamente, razón por la cual se consideran a los agujeros negros como un laboratorio ideal para evaluar teorías de gravedad fuerte [10].

Cada una de las ecuaciones del presente trabajo están expresadas en unidades naturales, es decir $c = k_B = G = \hbar = 1$.

5.1. Espacio de de Sitter y la constante cosmológica

A partir de la evidencia observacional proveniente de supernovas de tipo Ia [2] y de CMB (Cosmic Microwave Background) [3] se conoce acerca de la expansión acelerada del universo y el modelo que se ajusta adecuadamente a esta expansión es el modelo de de Sitter [11]. Una suposición más acertada de los agujeros negros debe basarse en el modelo de de Sitter y no en el de Minkowski como se hace típicamente en la Relatividad General. Ahora, la

generalización del agujero negro rotante de Kerr con el parámetro de la constante cosmológica Λ no solo es una solución a las ecuaciones de Einstein sino que también aborda la evolución espacio temporal dependiente de Λ .

El espacio de de Sitter es una solución analítica de las ecuaciones de Einstein donde la constante cosmológica Λ es positiva. Este espacio puede representarse como una hiperboloide cuadridimensional inmerso en un espacio-tiempo plano de Minkowski de 5 dimensiones, de la forma

$$-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = l^2. \quad (1)$$

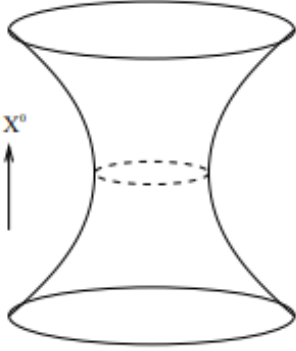


Figura 2: Representación del espacio-tiempo de Sitter (dS_4), representado por un hiperboloide [12].

La métrica de de Sitter se expresa generalmente como

$$ds^2 = -d\tau^2 + l^2 \cosh^2\left(\frac{\tau}{l}\right) d\Omega_{d-1}^2, \quad (2)$$

donde $d\Omega_{d-1}^2$ es la métrica de S^{d-1} [12].

La importancia de este espacio radica en que su métrica puede caracterizar el universo en el periodo de inflación. Es por esto, y debido a la expansión acelerada del universo, que en la actualidad se aborda recurrentemente esta métrica.

Además, la métrica de de Sitter posee una naturaleza termodinámica. Concretamente, para el espacio de de Sitter en $2 + 1$ dimensiones se tiene que la temperatura del horizonte de eventos es de la forma

$$T = \frac{1}{2\pi l} \quad (3)$$

y su entropía está dada por

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{\Lambda}}. \quad (4)$$

5.2. Agujeros Negros

Una de las primeras soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein es la solución de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5)$$

capaz de describir el efecto gravitacional generado por una configuración esférica uniforme fuera de la misma. Es decir, la métrica de Schwarzschild describe la deformación que un cuerpo de interés (el Sol, por ejemplo) genera en el espacio tiempo en general, el resto del universo se toma como vacío. En este sentido, la métrica está diseñada para estudiar masas de prueba fuera de la configuración [10].

El teorema de no pelo afirma que un agujero negro es descrito en su totalidad por 3 parámetros (pelos); masa M , momento angular J y carga eléctrica q [10], la métrica descrita por Schwarzschild solo contiene uno de estos parámetros (la masa). La solución de las ecuaciones de Einstein que contiene al parámetro de espín y la masa se denomina métrica de Kerr y está descrita por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 - 4a \frac{Mr}{\rho^2} \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (6)$$

con

$$\begin{aligned} a &= \frac{J}{M}, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{\Sigma^2}{\rho^2} &= r^2 + a^2 \left(1 - \left(\frac{2Mr}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta\right), \\ \Delta &= \rho^2 \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) + a^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

La anterior solución corresponde a un agujero negro con masa que rota, donde a es llamado el parámetro de espín del agujero negro.

5.3. Estructura de un agujero negro

5.3.1. Horizonte de Eventos

Intuitivamente se entiende el horizonte de eventos como una región del espacio a la cual se puede entrar pero de la cual no se puede salir. Esto se debe a que la curvatura generada por el agujero negro es tal que no permite que ni siquiera la luz pueda salir de esa región.

Por ejemplo, en el caso de la solución de Schwarzschild [5], la discontinuidad que presenta la componente radial de la métrica en $r = 2M$ resulta ser la ubicación del horizonte de eventos. Esto se puede ver con un cambio de coordenadas [13].

En muchos casos, se puede calcular el horizonte de eventos mediante la condición

$$g^{rr} = 0, \quad (8)$$

donde g^{rr} es el término rr del tensor inverso del tensor métrico g_{rr} . Sin embargo, esto solo ocurre en ciertos tipos de coordenadas (tipo Boyer-Lindquist). En general, garantizar que una superficie es un horizonte de eventos requiere demostrar que solo se puede entrar pero no salir de esta superficie [14].

5.3.2. ISCO

El ISCO (Innermost Stable Circular Orbit / Órbita Circular Estable más Pequeña) como su nombre lo indica es la órbita estable más pequeña que se puede tener alrededor del agujero negro.

La forma específica como se obtiene la ISCO depende de la métrica con que se esté trabajando. Sin embargo, un procedimiento general [15] consiste en tomar la ecuación radial para la métrica dada e imponer que el radio sea constante, luego intentar minimizar el radio de la órbita.

5.3.3. Esfera de fotones

La esfera de fotones es una región del espacio donde los fotones son forzados a viajar en órbitas. El procedimiento para hallar las órbitas es similar al de la ISCO [15], adaptando la ecuación radial para partículas no masivas.

5.3.4. Ergosfera

La ergosfera es una región del espacio entre el horizonte de eventos de un agujero negro rotante y la superficie de límite estacionario donde las partículas de prueba están forzadas a moverse en la dirección de rotación del agujero negro. La superficie de límite estacionario es precisamente la superficie tras la cual toda partícula de prueba debe estar en movimiento.

Para especificar la ergoesfera basta con especificar el horizonte de eventos y la superficie de límite estacionario. Esta última se puede obtener mediante la condición [14]

$$K^\mu K_\mu = 0, \quad (9)$$

donde K^μ es el vector de Killing.

5.4. Termodinámica de Agujeros Negros

5.4.1. Temperatura de Hawking

Un agujero negro emite radiación de Hawking thermalizada la cual presenta un comportamiento equivalente a la del cuerpo negro y correspondiente a una temperatura T_H denominada Temperatura de Hawking, la cual se expresa de la forma [16]

$$T_H = \frac{\kappa_H}{2\pi}, \quad (10)$$

donde κ_H es un parámetro relacionado con la gravedad en la superficie del horizonte de eventos.

5.4.2. Entropía

La entropía S , que para los agujeros negros se denomina como entropía de Bekenstein-Hawking [17] está directamente relacionada con el área del horizonte de eventos A y puede ser descrita como una medida de desorden o de cuánta información se conoce de este objeto astrofísico. Para las métricas descritas posteriormente la entropía se expresa de la forma

$$S = \frac{1}{4}A. \quad (11)$$

5.5. Métrica de Kerr con parámetro de deformación

Los estudios de métricas modificadas que describan el espacio-tiempo alrededor de los agujeros negros se han intensificado en este siglo con el fin de poner a prueba el teorema de no pelo en regímenes de gravedad fuerte, es decir, en regiones cercanas al agujero negro. Una de las posibles modificaciones a la métrica rotante de Kerr consiste en introducir un parámetro de deformación. Una propuesta de métricas de este tipo fue hecha por Johannsen y Psaltis en 2011 [18], donde construyen una métrica que describe un espacio-tiempo estacionario, axisimétrico y asintóticamente plano. El procedimiento que realizan Johannsen y Psaltis para obtener una métrica modificada consiste en tomar un elemento de línea de Schwarzschild generalizado, al que se le aplica el algoritmo de Newman-Janis [19] para introducir la rotación del agujero negro, resultando

$$ds^2 = -[1+h] \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \rho^2 d\theta^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} [1+h] dt d\phi + \frac{\rho^2 [1+h]}{\Delta + a^2 h \sin^2 \theta} dr^2 + \left[\sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) + h \frac{a^2 (\rho^2 + 2Mr) \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\phi^2, \quad (12)$$

donde la constante a es la definida en la ecuación (7) y tendrá el mismo significado para las métricas a mencionar posteriormente. Además, los parámetros Δ , ρ^2 y el de deformación h pueden modelarse como

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ h &= \frac{\epsilon M^3 r}{\rho^4}. \end{aligned} \quad (13)$$

La función $h(r, \theta)$ muestra que la métrica depende del parámetro de deformación ϵ , y que al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se recupera la métrica de Kerr.

5.6. Métrica de Kerr con parámetro de aceleración

La primera aproximación a las métricas con parámetro de aceleración para agujeros negros fue formulada por Plebánski y Demianski en 1976 [20], cuya expresión general incluye diferentes parámetros como la aceleración, la constante cosmológica, cargas eléctrica y magnética, entre otros. La métrica planteada por Plebánski y Demianski es de tipo estacionaria y axialmente simétrica, propiedades que comparte con métricas como la de Schwarzschild. En particular, resulta de interés estudiar el caso de la métrica con parámetro de aceleración diferente de cero, además de la masa y el momento angular, la cual presenta la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[- \left(\frac{Q}{\rho^2} - \frac{a^2 P \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{Q} dr^2 + \frac{\rho^2}{P} d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[\frac{P(r^2 + a^2)^2}{\rho^2} - \frac{Qa^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] d\phi^2 - \left[\frac{2a \sin^2 \theta [P(a^2 + r^2) - Q]}{\rho^2} \right] dt d\phi \right], \quad (14)$$

en la que se tiene

$$\begin{aligned} \Omega &= 1 - \alpha r \cos \theta, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ P &= 1 - 2\alpha M \cos \theta + \alpha^2 a^2 \cos^2 \theta, \\ Q &= (a^2 + r^2 - 2Mr)(1 - \alpha^2 r^2). \end{aligned} \quad (15)$$

La métrica contiene el parámetro de aceleración α en los términos Ω , P y Q , y al igual que en el caso de la métrica de Kerr con deformación, puede tomarse el límite $\alpha \rightarrow 0$ para obtener la métrica de Kerr. La métrica general de Plebánski y Demianski proporciona una herramienta para estudiar un espacio-tiempo de diversas características, por ejemplo, uno con constante cosmológica como se mostrará más adelante.

5.7. Métrica Kerr-de Sitter

Si bien se han realizado estudios sobre la métrica de Kerr con parámetros de aceleración y fenomenológicos [1] es bastante común que se ignore la constante cosmológica en estos trabajos. La solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica que describe un agujero negro rotante se denomina solución Kerr-de Sitter (KdS). Esta ecuación fue encontrada por Carter en 1973 [5] y es una solución especial para la familia de soluciones de Plebánski-Demiánski [20]. En coordenadas Boyer-Lindquist la métrica Kerr-de Sitter viene dada co-

mo sigue

$$ds^2 = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\Delta_{Kds} - \Delta_\theta a^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{\Lambda}{3} a^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_{Kds}} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + 2 \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{\Delta_{Kds} - \Delta_\theta (r^2 + a^2)}{1 + \frac{\Lambda}{3} a^2} \right) dt d\phi + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta_{Kds} &= r^2 - 2Mr + \frac{\Lambda}{3} r^2 (a^2 + r^2) + a^2, \\ \Delta_\theta &= 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta, \\ \frac{\Sigma^2}{\rho^2} &= \frac{\Delta_\theta (r^2 + a^2)^2 - \Delta_{Kds} a^2 \sin^2 \theta}{1 + \frac{\Lambda}{3} a^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

con Λ la constante cosmológica y a el parámetro de espín del agujero negro. En los casos límites de la métrica si $a = 0$ se tiene la métrica Schwarzschild-de Sitter (solución de la métrica de Schwarzschild con constante cosmológica), si $\Lambda = 0$ se recupera la métrica de Kerr y si $\Lambda = a = 0$ se tiene la métrica de Schwarzschild [11]. La ecuación (16) será el punto de partida para acelerar y añadir el parámetro de deformación a la métrica KdS.

5.8. Propuesta para una métrica de tipo no-Kerr acelerada.

La propuesta para una métrica de tipo no-Kerr (es decir, con parámetro de deformación) que adicionalmente tiene un parámetro de aceleración está descrita por la siguiente expresión [1]

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left\{ (-Q + a^2 P \sin^2 \theta) \frac{1+h}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{P} d\theta^2 + \frac{\rho^2(1+h)}{Q + a^2 h \sin^2 \theta} dr^2 - \frac{2a [P(r^2 + a^2) - Q] (1+h) \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \left[(P(r^2 + a^2)^2 - Qa^2(1+h) \sin^2 \theta) \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} + a^2 \sin^2 \theta \left(2h + \frac{a^2 h \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \right] d\phi^2 \right\}, \quad (18)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega &= 1 - \alpha r \cos \theta, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ P &= 1 - 2\alpha M \cos \theta + \alpha^2 a^2 \cos^2 \theta, \\ Q &= (a^2 + r^2 - 2Mr)(1 - \alpha^2 r^2), \\ h &= \frac{\epsilon M^3 r}{\rho^4}. \end{aligned} \quad (19)$$

La métrica (18), con los parámetros (19), corresponde al caso de la métrica KdS acelerada y con parámetro de deformación cuando Λ vale cero. A partir de esta métrica es posible extender al caso KdS y realizar cada uno de los objetivos planteados.

6. Desarrollos analíticos

6.1. Propuesta para una métrica KdS acelerada y con parámetro de deformación

Dado que la métrica KdS acelerada pertenece a la familia de soluciones de Plebánski y Demianski esta se puede escribir de la misma forma que la ecuación (14) [21] salvo los términos Q y P , los cuales cambian para cada métrica. La métrica KdS acelerada viene dada por

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[-\frac{Q - Pa^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{Q} dr^2 + \frac{\rho^2}{P} d\theta^2 + \left[\frac{P(r^2 + a^2)^2 - Qa^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\rho^2} [P(r^2 + a^2) - Q] dt d\phi \right], \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned} \Omega &= 1 - \alpha r \cos \theta, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ P &= 1 - 2\alpha M \cos \theta + \left(\alpha^2 + \frac{\Lambda}{3} \right) a^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (21)$$

$$Q = (a^2 + r^2 - 2Mr)(1 - \alpha^2 r^2) - \frac{\Lambda}{3}(a^2 + r^2)r^2,$$

donde, si $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación (16). Siguiendo el proceso para la métrica acelerada con parámetro de deformación propuesta en [1] se propone la métrica KdS acelerada y con parámetro de deformación como sigue

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left\{ (-Q + a^2 P \sin^2 \theta) \frac{1+h}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{P} d\theta^2 + \frac{\rho^2(1+h)}{Q + a^2 h \sin^2 \theta} dr^2 - \frac{2a [P(r^2 + a^2) - Q] (1+h) \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \left[(P(r^2 + a^2)^2 - Qa^2(1+h) \sin^2 \theta) \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} + a^2 \sin^2 \theta \left(2h + \frac{a^2 h \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \right] d\phi^2 \right\}, \quad (22)$$

donde los valores de P , Q , Ω , ρ^2 vienen dados por la ecuación (21) y $h = \frac{\epsilon M^3 r}{\rho^4}$. Además, $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in [r_0, \infty)$ y $\theta \in (0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ [10], con r_0 el radio del cuerpo, en general $r_0 > 0$. Es posible notar que cuando $\Lambda \rightarrow 0$ la ecuación (22) se reduce a la ecuación (19), lo cual es consistente con la propuesta.

6.2. Estructura del agujero negro

6.2.1. Horizonte de eventos

Para encontrar el horizonte de eventos de la métrica propuesta se usa la expresión de la ecuación (8), es decir

$$\frac{Q + a^2 h \sin^2 \theta}{\rho^2(1+h)} = 0, \quad (23)$$

o también

$$\left((a^2 + r^2 - 2Mr)(1 - \alpha^2 r^2) - \frac{\Lambda}{3}(a^2 + r^2)r^2 \right) + \frac{a^2 \sin^2 \theta M^3 \epsilon r}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} = 0. \quad (24)$$

Dada la complejidad de la ecuación (24), la superficie generada por esta debe ser calculada por métodos numéricos.

6.2.2. Ergosfera

Una vez se ha encontrado el horizonte de eventos basta con encontrar el límite estático para encontrar la región que encierra la ergosfera. Para encontrar el límite estático basta con resolver $g_{tt} = 0$ [10] para la ecuación (22), obteniendo las siguientes soluciones

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 \theta - 2Mr + r^2 - \frac{\Lambda}{3}((a^2 + r^2)r^2 - a^4(\sin \theta \cos \theta)^2) \\ + \alpha(2a^2 M \sin^2 \theta \cos \theta - \alpha(r^2(a^2 - 2Mr + r^2) - a^4(\sin \theta \cos \theta)^2)) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

y

$$\epsilon M^3 r = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2. \quad (26)$$

La ecuación (26) no es una solución posible para el límite estático [1]. La solución de la ecuación (25) representa la ubicación del límite estático cuándo $r > r_h$, con r_h el radio del horizonte de eventos. La solución mostrada en la ecuación (26) representa la singularidad del agujero negro.

6.2.3. Potencial efectivo

El estudio de la dinámica de partículas alrededor de un agujero negro se realiza calculando el potencial efectivo, para así encontrar las órbitas estables más cercana para partículas masivas (ISCO), así como para partículas sin masa (esfera de fotones). A partir de la relación

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \delta, \quad (27)$$

que se cumple para partículas con masa si $\delta = -1$, mientras que para partículas sin masa se tiene $\delta = 0$. De la ecuación anterior el potencial efectivo se define de la relación [10]

$$\dot{r}^2 + \frac{g_{\theta\theta}}{g_{rr}} \dot{\theta}^2 = V_{eff}(r, \theta), \quad (28)$$

donde

$$V_{eff}(r, \theta) = \frac{E^2 g_{\phi\phi} + 2EL_z g_{t\phi} + L_z^2 g_{tt}}{g_{rr}(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})} + \frac{\delta}{g_{rr}}, \quad (29)$$

con E y L_z la energía por unidad de masa y el momento angular por unidad de masa de la partícula que orbita el agujero negro. La ecuación (22) contiene las componentes de la métrica y la definición de las anteriores constantes de movimiento permiten conocer el comportamiento del potencial para así comparar con otros casos como el de Newton, Schwarzschild, Kerr, entre otros.

6.2.4. Esfera de fotones

La órbita estable más cercana para partículas no masivas se define a partir de las relaciones [10]

$$\epsilon = \frac{E}{m_0} = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\omega}{\sqrt{-(g_{tt} + 2g_{t\phi}\omega + g_{\phi\phi}\omega^2)}}, \quad (30)$$

$$l = \frac{L_z}{m_0} = \frac{g_{\phi\phi}\omega + g_{t\phi}}{\sqrt{-(g_{tt} + 2g_{t\phi}\omega + g_{\phi\phi}\omega^2)}}, \quad (31)$$

donde m_0 es la masa de la partícula orbitante y $\omega = \frac{\dot{\phi}}{t}$ es su velocidad angular. Para partículas no masivas $m_0 = 0$ y en ambos casos debe cumplirse la relación

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\omega + g_{\phi\phi}\omega^2 = 0 \quad (32)$$

donde la velocidad angular ω se escribe como [10]

$$\omega_{\pm} = \frac{-\partial_r g_{t\phi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\phi})^2 - (\partial_r g_{\phi\phi})(\partial_r g_{tt})}}{\partial_r g_{\phi\phi}}. \quad (33)$$

en la que el signo positivo (+) se refiere a partículas corrotantes y el signo negativo (-) representa partículas contrarrotantes. Debido a la complejidad de los términos de la métrica es necesario usar métodos computacionales para calcular las derivadas involucradas y hallar las raíces de la ecuación (32) para encontrar los posibles radios de las órbitas de fotones.

6.2.5. ISCO

La definición de la órbita estable más cercana al agujero negro para partículas masivas está dada por

$$\partial_r^2 V_{eff} = 0 \quad (34)$$

y

$$\partial_\theta^2 V_{eff} = 0, \quad (35)$$

donde V_{eff} es el mismo que se definió en la sección del potencial efectivo. Al igual que en el caso de la órbita de fotones, se hará uso de herramientas computacionales para el cálculo de la segunda derivada.

6.3. Termodinámica del agujero negro

6.3.1. Temperatura

La temperatura de Hawking para un agujero negro en general viene dado por la ecuación (10). Por tanto, es necesario conocer la gravedad superficial para la métrica propuesta, la cual es constante en todos los puntos del horizonte de eventos por la ley cero de la termodinámica [22]. La gravedad superficial se puede escribir como [1]

$$\kappa(r, \theta) = \frac{\Omega^2}{1+h} \frac{\sqrt{Q + a^2 h \sin^2 \theta}}{\sqrt{Q - a^2 P \sin^2 \theta}} \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho^2} \sqrt{(Q + a^2 h \sin^2 \theta)(Q - a^2 P \sin^2 \theta)} \right).$$

Para el cálculo de la temperatura se evalúa la ecuación (36) sobre el horizonte de eventos y se divide en un factor de 2π . La gravedad superficial en $x^\mu = (t, r_h, \frac{\pi}{2}, \phi)$ (r_h es el horizonte de eventos en $\frac{\pi}{2}$) es descrita por

$$\kappa \left(r_h, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\Omega^2}{1+h} \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial(Q + a^2 h)}{\partial r}. \quad (37)$$

6.3.2. Entropía

La entropía viene dada por la ecuación (11), la cual depende de las soluciones para la ecuación (24); por lo tanto, una vez se tiene el conjunto de $r_h(\theta)$ es posible, numéricamente, calcular el área del horizonte de eventos para diferentes masas y encontrar la entropía en términos de la masa del agujero negro.

7. Métodos numéricos

Se empleó el lenguaje de Python para la implementación de las ecuaciones resultantes de los desarrollos analíticos. La implementación de los métodos numéricos fueron desarrollados en un cuaderno de Google Colab, usando principalmente las librerías Einsteinpy, Math, Sympy, Numpy y Matplotlib, el código fuente se encuentra en el archivo adjunto “AgujeroNegroNoKerrdeSitter.ipynb”.

7.1. Horizonte de eventos

Para encontrar las soluciones del horizonte de eventos es necesario resolver la ecuación (24) para cada valor de θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (debido a la simetría en θ); por tanto, es necesario definir la función a solucionar (código 1), donde se definieron cada una de las variables en una celda anterior del entorno de ejecución.

```
#Forma analitica del horizonte de
eventos
hev=p**2*Q+a**2*sin(theta)**2*m**3*eps*r
```

```
hev0=hev.subs(Q,(a**2-2*m*r+r**2)*(1-
alpha**2*r**2)+L/3*(a**2+r**2)*r**2).
subs(p,r**2+a**2*cos(theta)**2)
```

Código 1: Inicialización de la ecuación (24).

Tomando un número de datos arbitrarios, para luego hacer pasos discretos en el intervalo de θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, es posible reemplazar cada valor en la variable *hev0* (con la ayuda de una variable auxiliar *hev1*) y solucionarlo usando el método *solve* de la librería Sympy. Esto se puede ver en las siguientes líneas de código

```
#Plantear un numero dado de ecuaciones
por resolver
numDeDatos=50
horizonEqs=[]
hev1=subs(hev0,mVal,aVal,epsilonVal,
alphaVal,lambdaVal)
thetaValues=np.linspace(0,1,numDeDatos)*
pi/2
for j in thetaValues:
    horizonEqs.append(hev1.subs(theta,j))
```

Código 2: Definición de las ecuaciones por resolver.

La matriz *horizonEqs* contiene en cada posición la ecuación (24) evaluada en diferentes valores de θ . Siguiendo con el código, se resuelve cada una de las ecuaciones en *horizonEqs* con el método *solve* como se ve a continuación en el código 3.

```
rValues=[]
thetaValues0=[]
for i in range(len(horizonEqs)):
    #Metodo que devuelve las soluciones
    para cada ecuacion dependiendo de
    theta
    sol=list(filter(lambda l:type(l)==
    sympy.core.numbers.Float, solve(
    horizonEqs[i],r,check=False)))
    if len(sol)!=0:
        #Dado que el horizonte de eventos
        corresponde a la zona exterior de
        las soluciones se toma la
        solucion real que sea mayor
        rValues.append(max(sol))
        thetaValues0=np.append(thetaValues0,
        thetaValues[i])
```

Código 3: Solución de las ecuaciones definidas en el código 2.

Dentro la lista *rValues* se encuentran las soluciones del horizonte de eventos dado un valor de *thetaValues*, valores con los cuales se puede obtener la gráfica del horizonte de eventos.

7.2. Ergosfera

De una manera similar al caso del horizonte de eventos se definió la ecuación (25) dentro del entorno de ejecución como se ve en el código 4.

```
erg=a**2*cos(theta)**2-2*m*r+r**2-(L/3)
*((a**2+r**2)*r**2-a**4*(sin(theta)*
cos(theta)**2)+alpha*(2*a**2*m*sin(
theta)**2*cos(theta)-alpha*(r**2*(a
**2-2*m*r)-a**4*(sin(theta)*cos(theta)
)**2))
```

Código 4: Inicialización de la ecuación (25).

Luego, se definen las ecuaciones a resolver para diferentes valores de θ en el código 5, para finalmente encontrar las soluciones a la ergosfera usando el método *solve* de Sympy, como se ve en el código 6.

```
numDeDatosErgosfera=50
#Numero de angulos donde se va a evaluar
la ergosfera
thetas=np.linspace(0,1,
numDeDatosErgosfera)*math.pi
ergoEqs=[]
#Diferentes ecuaciones para la ergosfera
dado theta
for i in thetas:
    ergoEqs.append(erg1.subs(theta,i))
```

Código 5: Definición de las ecuaciones a resolver para la ergosfera.

```
#Encuentra las soluciones para la
ergosfera
ergoRads=[]
thetas0=[]
sol1=lambda x:sympy.re(x)
for i in range(len(ergoEqs)):
    numbs=solve(ergoEqs[i],r,check=False)
    sol=list(filter(lambda l:sympy.im(l)<1
e-20, numbs))
    for j in range(len(sol)):
        sol[j]=sol1(sol[j])
    if len(sol)!=0:
        ergoRads.append(max(sol))
        thetas0=np.append(thetas0,thetas[i])
```

Código 6: Solucionador de las ecuaciones para ergosfera.

Tras ejecutar el código para distintos valores de los parámetros de la métrica obteniendo gráficas similares a la siguiente

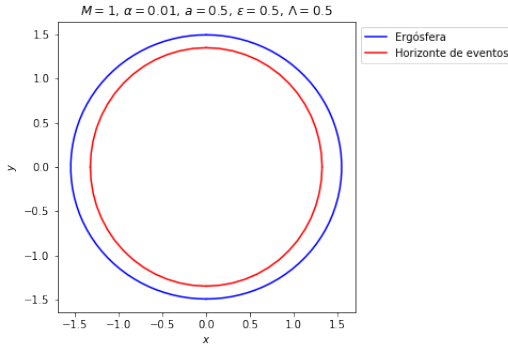


Figura 3: Solución de la ecuación (25) junto con el horizonte de eventos.

7.3. Esfera de fotones e ISCO

En el caso del problema para encontrar el radio de ISCO, se hace necesario encontrar el radio que satisfaga las ecuaciones (34) y (35). Sin embargo, en este trabajo nos restringimos a encontrar dichas órbitas en el plano ecuatorial, lo que reduce el problema únicamente a la ecuación (34). Debido a la complejidad de la forma funcional de los términos de la métrica en estudio, la forma del potencial efectivo y sus derivadas, se usará como primera aproximación un método gráfico para encontrar esta órbita para algunos valores de los parámetros (masa, momento angular, constante cosmológica, parámetro de deformación y parámetro de aceleración) fijos.

Dado el panorama descrito anteriormente, se empezó definiendo las constantes y las funciones a usar para el cálculo de esta órbita

```
#Definicion de los valores de los
    parametros de los que depende la
    metrica
mVal=1
alphaVal=0.01
aVal=0.5
epsilonVal=0.5
lambdaVal=0.7
subs=lambda f: f.subs(m,mVal).subs(a,aVal)
    .subs(alpha,alphaVal).subs(eps,
    epsilonVal).subs(L,lambdaVal).subs(
    theta,pi/2)
g1=subs(g)
# Derivadas de componentes de la metrica
    para definir la velocidad angular
dr_g00=diff(g1[0][0],r)
dr_g03=diff(g1[3][0],r)
dr_g33=diff(g1[3][3],r)
#Velocidades angulares co y
    contrarrotantes
Omega=[simplify((-dr_g03+sqrt((dr_g03)
    **2-dr_g00*dr_g33))/dr_g33),simplify
    ((-dr_g03-sqrt((dr_g03)**2-dr_g00*
```

```
dr_g33))/dr_g33)]
```

```
# Definicion de constantes (Energia y
    momento angular por unidad de masa co
    y contrarrotantes)
```

```
E,Lz=[],[]
for o in Omega:
    E.append((-g1[0][0]+o*g1[0][3])/sqrt
        (-g1[0][0]-2*o*g1[0][3]-o**2*g1
        [3][3]))
    Lz.append(((g1[0][3]+o*g1[3][3])/sqrt
        (-g1[0][0]-2*o*g1[0][3]-o**2*g1
        [3][3])))
```

Código 7: Definición de las ecuaciones a resolver para ISCO.

A continuación, se definió el potencial efectivo y se calculó su segunda derivada

```
Veff=[]
for i in range(2):
    Veff.append(((E[i]**2*g01[3][3]+2*E[i]
        ]*Lz[i]*g01[0][3]+Lz[i]**2*g01
        [0][0])/(g01[0][3]**2-g01[0][0]*g01
        [3][3])-1/g01[1][1]))
dr2_Veff=[]
for j in Veff:
    dr2_Veff.append((diff(diff(j,r),r)))
```

Código 8: Definición del potencial efectivo y cálculo de su segunda derivada.

Finalmente, se calculan los valores de esta segunda derivada para diferentes radios con el fin de encontrar un valor para el que se haga cero y afirmar que este es el radio de ISCO

```
# Definicion de arreglos para graficar
    la funcion de ISCO con respecto al
    radio
ISCO=[]
for i in dr2_Veff:
    ISCO.append(i)
rIsco=np.linspace(0,5,50)
valIsco=[]
counter=0
# Calculo de la segunda derivada para
    diferentes radios y filtro de los
    valores imaginarios bajos en
    comparacion con su respectiva parte
    real
for i in ISCO:
    valIsco.append([])
    for j in rIsco:
        valIsco[counter].append([i.subs(r,j)
            ,j])
        counter+=1
```

```

valIsco[0]=list(filter(lambda x:type(x
[0])!=sympy.core.numbers.NaN and
sympy.im(x[0])<1e-10,valIsco[0]))
valIsco[1]=list(filter(lambda x:type(x
[0])!=sympy.core.numbers.NaN and
sympy.im(x[0])<1e-10,valIsco[1]))
valIsco[0]=list(map(lambda x:[sympy.re(x
[0]),x[1]],valIsco[0]))
valIsco[1]=list(map(lambda x:[sympy.re(x
[0]),x[1]],valIsco[1]))

```

Código 9: Cálculo de la segunda derivada del potencial efectivo para diferentes radios.

El anterior procedimiento conduce a la gráfica de la figura 5, que a la vez deja ver la comparación con el horizonte de eventos que se obtiene con los valores de los parámetros establecidos. En este caso específico se evidencia que el radio de ISCO está afuera del horizonte de eventos, lo que es consistente con los tipos de agujero negro en la relatividad general.

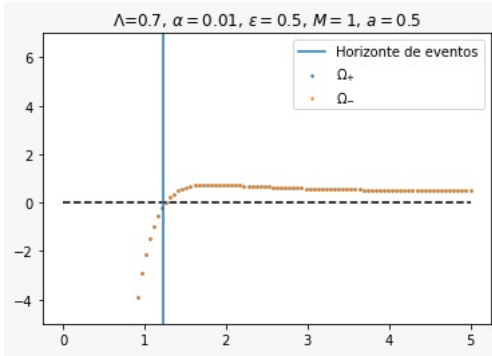


Figura 4: Método gráfico para la determinación del radio de ISCO con parámetros fijos.

La ecuación a resolver para el problema de la esfera de fotones es la (32), que al igual que en el caso de ISCO se realizó un método gráfico para encontrar dicho radio debido a lo extensas que resultan las ecuaciones.

Inicialmente se definió la ecuación (32) en el código implementado.

```

fotones=[]
for i in Omega:
    fotones.append(g1[0][0]+2*i*g1[0][3]+i
**2*g1[3][3])

```

Código 10: Definición de la ecuación a resolver para la esfera de fotones.

Seguido a esto, se procede a reemplazar diferentes valores de radios para esta ecuación, ya que solo queda esta dependencia al poner parámetros fijos para el resto de constantes

```

rFotones=np.linspace(0,5,100)
valFotones=[]
counter=0
for i in fotones:
    valFotones.append([])
    for j in rIsco:
        valFotones[counter].append([i.subs(r
,j),j])
    counter+=1
#Filtro de los valores imaginarios bajos
    en comparacion con su respectiva
    parte real
for i in ISCO
valFotones[0]=list(filter(lambda x:type(
x[0])!=sympy.core.numbers.NaN and
sympy.im(x[0])<1e-10,valFotones[0]))
valFotones[1]=list(filter(lambda x:type(
x[0])!=sympy.core.numbers.NaN and
sympy.im(x[0])<1e-10,valFotones[1]))
valFotones[0]=list(map(lambda x:[sympy.
re(x[0]),x[1]],valFotones[0]))
valFotones[1]=list(map(lambda x:[sympy.
re(x[0]),x[1]],valFotones[1]))

```

Código 11: Cálculo de la ecuación a resolver para la esfera de fotones para diferentes radios.

Finalmente, los resultados obtenidos se grafican en función del radio correspondiente y son mostrados en la figura 6. Así como en el caso del radio de ISCO, también se obtienen resultados para la esfera de fotones afuera del horizonte de eventos con los mismos parámetros que se usaron en dicho caso.

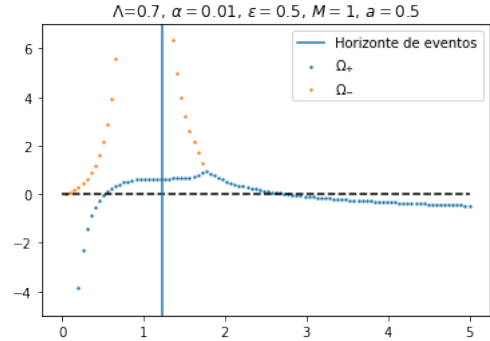


Figura 5: Método gráfico para la determinación del radio de la esfera de fotones con parámetros fijos.

7.4. Gravedad superficial y temperatura

Dado que la gravedad superficial es constante en todo el horizonte de eventos, es posible calcular este en el ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ para cada valor de masa o parámetro que se decida variar, esto se ve en el código 12; para luego, tras definir la función de la ecuación (36) en el cuaderno

de Python, se evalúan los valores obtenidos por el código 12.

```
#Se varia para dos valores distintos de
epsilon en este caso, pero este mismo
metodo se puede usar para los demas
parametros, salvo la masa.
epsilons=np.array([-10,10])*epsilonVal
rHorizon=[]
#una vez se tienen los parametros
definidos, se calcula el radio del
horizonte de eventos en pi/2 para
cada valor de masa y parametro.
for j in range(len(epsilons)):
    rHorizon.append([])
    for i in range(len(mases)):
        eventHorizon=subs(hev0, mases[i], aVal,
            epsilonVal, alphaVal, lambdaVal).
            subs(theta, pi/2)
        rHorizon[j].append(max(list(filter(
            lambda x: type(x)!=sympy.core.add.
            Add, solve(eventHorizon, r, check=
            False)))))
```

Código 12: Cálculo del horizonte de eventos en el ecuador para diferentes valores de M y otro parámetro (en este caso ϵ).

```
#Se define la gravedad superficial
kappa=(O**2/(2*(1+h)*p))*sympy.diff((a
**2-2*m*r+r**2)*(1-alpha*r)-(L/3)*(a
**2+r**2)*r**2, r)
kappa=kappa.subs(O, 1-alpha*r*cos(theta))
.subs(h, eps*m**3*r/p**2).subs(p, r**2+
a**2*cos(theta)**2)
gSup=[]
#Se calcula cada valor para la gravedad
superficial
for j in range(len(epsilons)):
    gSup.append([])
    for i in range(len(mases)):
        gAux=kappa.subs(m, mases[i]).subs(a,
            aVal).subs(alpha, alphaVal).subs(
            eps, epsilons[j]).subs(L, lambdaVal)
            .subs(theta, pi/2)
        gSup[j].append(gAux.subs(r, rHorizon[
            j][i]))
```

Código 13: Cálculo de la gravedad superficial en términos de M para diferentes ϵ en este caso.

Finalmente se grafican los resultados tras dividir la gravedad superficial en 2π para obtener la temperatura T en términos de la masa M , obteniendo los siguientes datos.

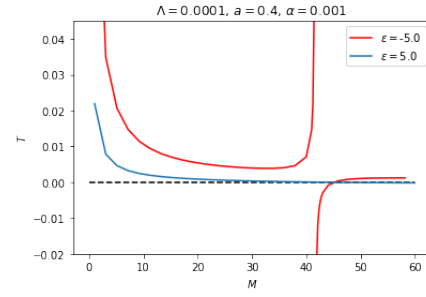


Figura 6: Gráfica de temperatura respecto de la masa para distintos valores de ϵ .

7.5. Entropía

Tras obtener las soluciones del horizonte de eventos, en términos de (r, θ) , se hizo una transformación a coordenadas polares (x, y) con la intención de poder aproximar cada par de soluciones obtenidas a un cono truncado y calcular su área, lo cual se puede ver en el siguiente código.

```
#Con el calculo del horizonte de eventos
se puede calcular el area del
horizonte, para luego calcular la
entropia
xa=rValues*np.sin(thetaValues)
ya=rValues*np.cos(thetaValues)
longitud=0
area=0
for i in range(len(xa)-1):
    #Se calcula el area del horizonte de
    eventos aproximando dos anillos de
    la solucion a un cono truncado y
    sumando sus areas superficiales
    longitud+=math.sqrt((ya[i]-ya[i+1])
        **2+(xa[i]-xa[i+1])**2)
    r2=xa[i]
    r1=xa[i+1]
    h=ya[i]-ya[i+1]
    area+=np.pi*(r2**2+r1**2+math.sqrt(h
        **2+(r1-r2)**2)*(r1+r2))
area*=1/2
```

Código 14: Cálculo del área del horizonte de eventos mediante el código de python.

La ejecución para obtener la solución del horizonte de eventos es cara en términos de recursos del entorno de ejecución; por tanto, para poder graficar la entropía debieron tomarse varias veces los datos de horizonte variando el valor de la masa. De esta manera se obtuvieron gráficas como la siguiente

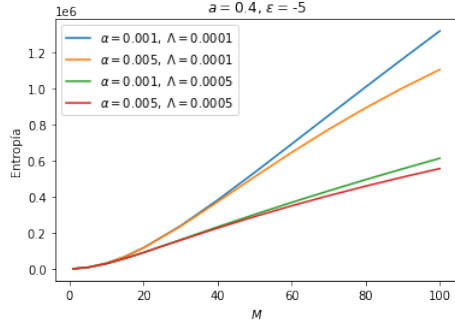


Figura 7: Entropía para agujeros negros con parámetros diferentes respecto de la masa.

8. Resultados y análisis

8.1. Horizonte de eventos y ergosfera

A partir del desarrollo analítico y de la implementación numérica la cual soluciona las ecuaciones (24) para el horizonte de eventos, y (25) para la ergosfera, se obtuvieron los siguientes resultados:

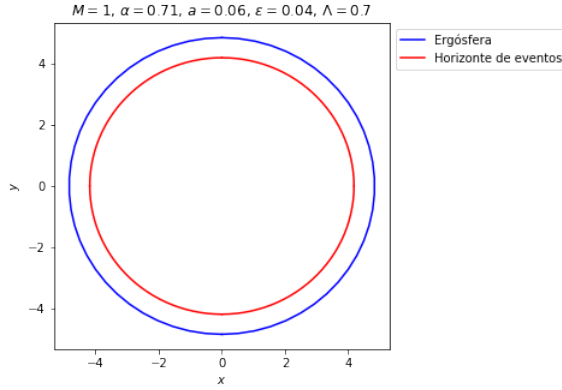


Figura 8: Horizonte de eventos y ergosfera del agujero negro KdS acelerado y con parámetro de deformación, con $M = 1$, $\alpha = 0,71$, $a = 0,06$, $\epsilon = 0,04$, $\Lambda = 0,7$.

Para determinar la relevancia de cada parámetro en el horizonte eventos se realizaron variaciones de cada uno de estos manteniendo los otros constantes, así se determinó que aunque la variación en los parámetros de la aceleración α y el espín a producen alteraciones en el radio del horizonte de eventos, son los parámetros de deformación ϵ y la constante cosmológica Λ aquellos que inciden considerablemente en la topología de dicho horizonte.

En la figura 9 se observa que tanto el horizonte de eventos como la ergosfera poseen topología esférica, y también que la ergosfera contiene al horizonte de eventos, este es el caso común para las soluciones del horizonte de eventos y de la ergosfera en la métrica KdS.

Además de los casos más comunes, también se halló que para ciertos parámetros surgen variaciones en la topología de estas estructuras.

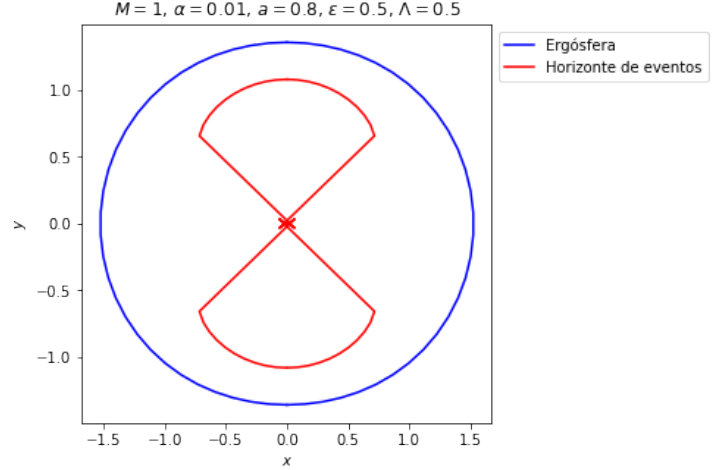


Figura 9: Horizonte de eventos y ergosfera del agujero negro KdS acelerado y con parámetro de deformación, con $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,8$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = 0,5$.

A partir de la figura 9, se observa que existen casos donde la topología del horizonte de eventos no es esférica, y en el origen aparecen discontinuidades de la singularidad, estos casos pueden atenuarse bajo parámetros concretos en los cuales se observen dos horizontes de eventos.

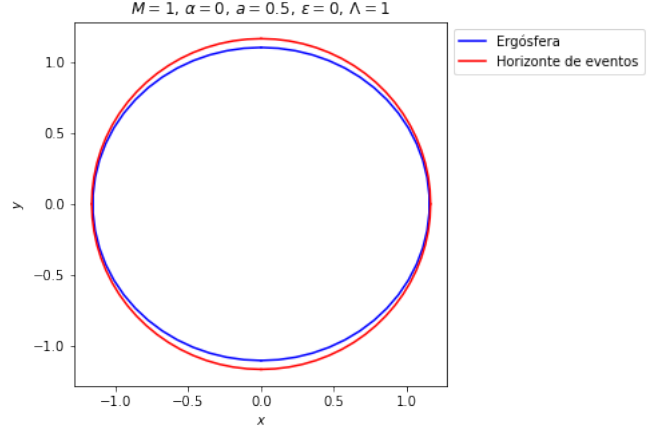


Figura 10: Horizonte de eventos y ergosfera del agujero negro KdS acelerado y con parámetro de deformación, con $M = 1$, $\alpha = 0$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0$, $\Lambda = 1$.

De la figura 10, se observa que para unos parámetros definidos el agujero negro no tiene ergosfera ya que está contenida en el horizonte de eventos.

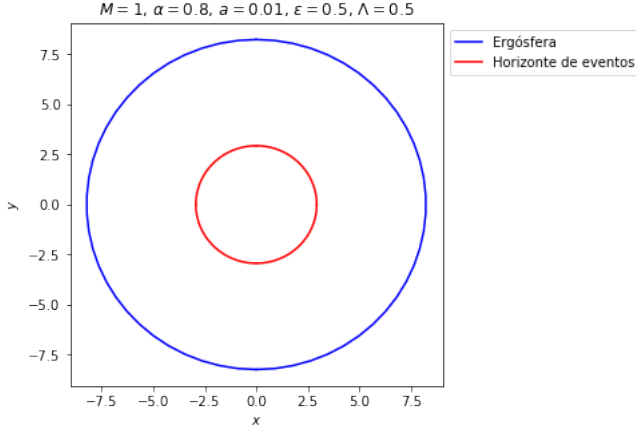


Figura 11: Horizonte de eventos y ergosfera del agujero negro KdS acelerado y con parámetro de deformación, con $M = 1$, $\alpha = 0,8$, $a = 0,01$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = 0,5$.

También existen casos en los cuales la ergosfera es considerablemente mayor al horizonte de eventos tal y como se observa en la figura 11.

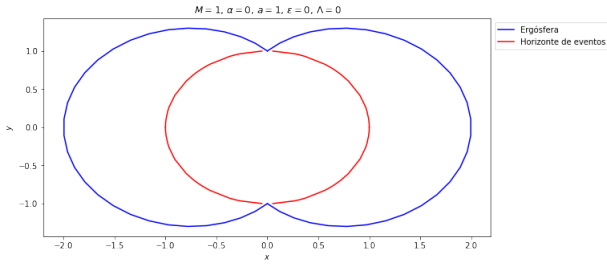


Figura 12: Horizonte de eventos y ergosfera del agujero negro KdS acelerado y con parámetro de deformación, con $M = 1$, $\alpha = 0$, $a = 1$, $\epsilon = 0$, $\Lambda = 0$.

Finalmente, en la figura 12 se consideró $\Lambda = 0$ y $\epsilon = 0$ y se observó que el resultado es un caso límite de los agujeros negros de tipo Kerr.

Se obtuvieron las perturbaciones de las soluciones de horizonte de eventos en el ecuador respecto de la métrica de Kerr para algunos parámetros estudiados, gráficas que se ven en la siguiente figura:

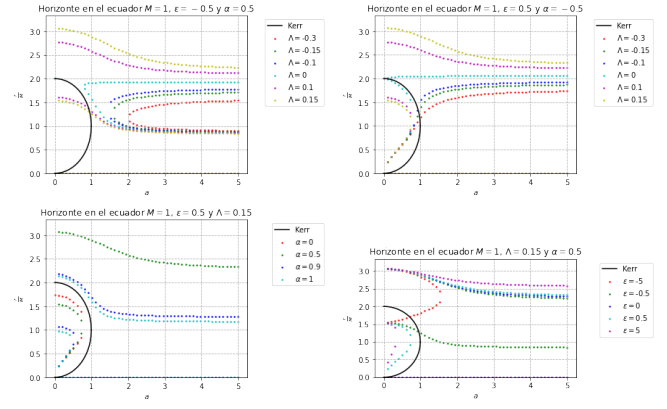


Figura 13: Comparación de las soluciones reales y positivas de la ecuación (24) respecto de las soluciones de Kerr para distintos valores de los parámetros de la métrica.

De las cuales se puede notar un fuerte cambio respecto de las soluciones de Kerr. Se obtienen soluciones de horizonte de eventos para valores de $|a| > M$, obteniendo agujeros negros superrotantes, esto es común en la solución KdS. A pesar de que la ecuación (24) es de grado 8 se encuentran a lo mucho 3 soluciones reales y positivas para los valores estudiados, encontrando un mayor número en la región con $|a| < M$.

Una de las propiedades más características dentro del universo KdS ($\Lambda > 0$) es la existencia de horizonte cosmológico, cosa que no está presente en el universo anti KdS ($\Lambda < 0$). Una de las formas de determinar la existencia de estos es a través de la gráfica de la ecuación (24) respecto de la coordenada espacial r . Gráficas que se pueden observar en los gráficos de la figura 14.

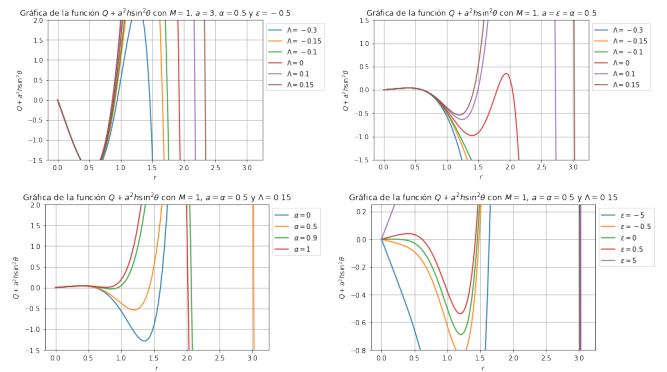


Figura 14: Gráficas de la ecuación (24) para los casos de las gráficas 13 para algunos valores de a y los demás parámetros de la métrica.

De los gráficos anteriores es posible resaltar los casos en los que se obtienen horizonte cosmológico, encontrando

do que los diferentes valores de α y ϵ hacen aparecer horizonte de eventos en el espacio anti KdS, cosa que no ocurre en las soluciones sin deformación y aceleración. Se encontró además que para valores de $\alpha \geq 1$ se obtienen agujeros negros con horizonte cosmológico; pero, no horizonte de eventos, presentando singularidad desnuda, descartando estos posibles valores para soluciones reales, cosa que también ocurre con el valor de $\epsilon = 5$ en la gráfica inferior derecha de la figura 14.

8.2. ISCO

A partir de considerar únicamente el estudio de esta órbita en el plano ecuatorial, y por lo tanto, de la implementación numérica de la ecuación (34), se obtuvieron las siguiente gráficas del ISCO considerando en cada caso valores diferentes de los parámetros constante cosmológica Λ y parámetro de deformación ϵ .

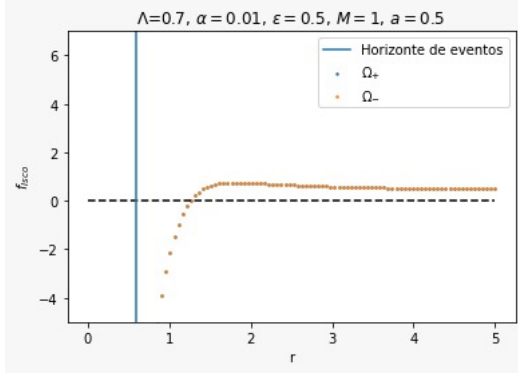


Figura 15: ISCO del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = 0,7$.

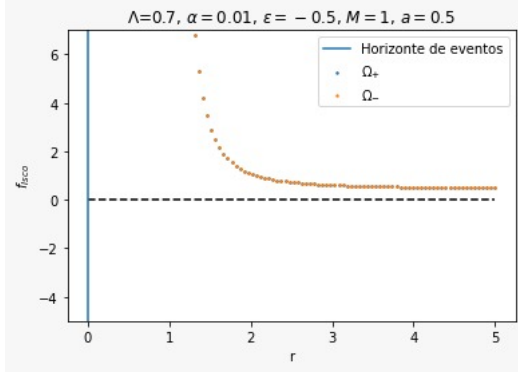


Figura 16: ISCO del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = -0,5$, $\Lambda = 0,7$.

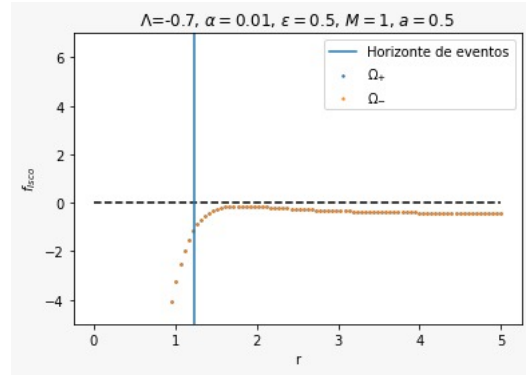


Figura 17: ISCO del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = -0,7$.

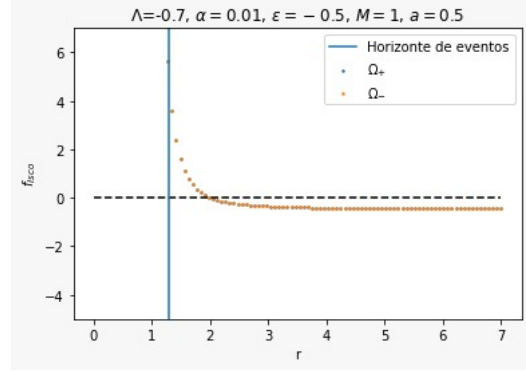


Figura 18: ISCO del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = -0,5$, $\Lambda = -0,7$.

De las figuras (16) a la (19) pueden observarse diferentes comportamientos del radio ISCO según la variación de los parámetros de constante cosmológica Λ y de deformación ϵ entre valores positivos y negativos de estos. Los diferentes casos vistos en cada una de las figuras pueden clasificarse en los siguientes: existencia de ISCO fuera del horizonte de eventos y no existencia de ISCO.

Para la combinación de parámetros $\epsilon = 0,5$ y $\Lambda = 0,7$, y $\epsilon = -0,5$ y $\Lambda = -0,7$, figuras (16) y (19) respectivamente, se observa que hay ISCO fuera del horizonte de eventos correspondiente para cada par de parámetros, lo que es coherente en términos físicos ya que no admite órbitas circulares estables de partículas masivas en el interior del horizonte de eventos. Sin embargo, para las combinaciones de parámetros con signos opuestos $\epsilon = -0,5$ y $\Lambda = 0,7$, y $\epsilon = 0,5$ y $\Lambda = -0,7$, figuras (17) y (18) respectivamente, es notable que la curva punteada no corta el eje x y por lo tanto no hay ISCO para estas combinaciones de parámetros, lo que significa que no existen órbitas circulares estables para ningún radio, hecho que no se ajusta con teorías más elementales como la newtoniana.

Además, ya que el movimiento de partículas alrededor del agujero negro es un cálculo adicional a lo estudiado

en el artículo guía de este proyecto, los resultados obtenidos pueden compararse con métricas comunes de la relatividad general como la métrica de Kerr, la cual considera únicamente los parámetros de masa M y de espín a . Según la literatura [10], el horizonte de eventos y el radio ISCO en el ecuador para un agujero negro de Kerr se escriben respectivamente como sigue

$$r_{Hor} = M + \sqrt{M^2 + a^2}, \quad (38)$$

$$r_{ISCO} = 3M + Z_2 \mp \sqrt{(3M - Z_1)(3M + Z_1 + 2Z_2)}, \quad (39)$$

donde r_{Hor} y r_{ISCO} son el radio del horizonte de eventos y de ISCO respectivamente, y

$$Z_1 = M + (M^2 - a^2)^{1/3}[(M + a)^{1/3} + (M - a)^{1/3}],$$

$$Z_2 = \sqrt{3a^2 + Z_1^2}, \quad (40)$$

así que para los parámetros $M = 1$ y $a = 0,5$ usados en las figuras (16) a (19) los valores que se tienen para estos dos radios son $r_{Hor} = 2,12$, $r_{ISCO+} = 4,23$ y $r_{ISCO-} = 7,55$, donde r_{ISCO+} y r_{ISCO-} corresponde a partícula corrotantes y contrarrotantes respecto al momento angular del agujero negro. Estos resultados para Kerr muestran que las órbitas circulares estables se forman fuera del horizonte de eventos, luego únicamente los parámetros de las figuras (16) y (19) pueden compararse con lo visto en métricas de la relatividad general como la de Kerr.

8.3. Esfera de fotones

Análogamente al procedimiento hecho para el ISCO, se realizó una implementación numérica, en este caso para la ecuación (32), y se obtuvo la siguiente serie de resultados para esferas de fotones considerando en cada caso variaciones de los parámetros Λ y ϵ .

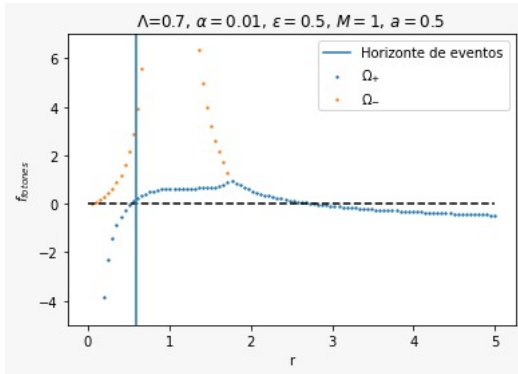


Figura 19: Esfera de fotones del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = 0,7$.

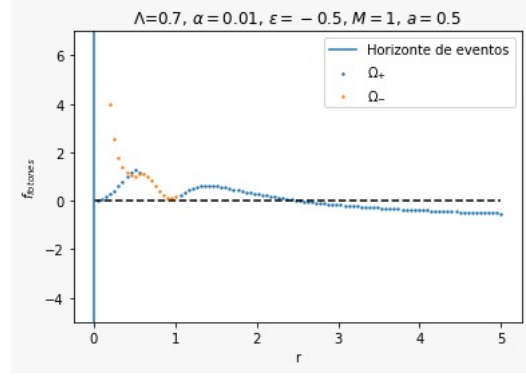


Figura 20: Esfera de fotones del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = -0,5$, $\Lambda = 0,7$.

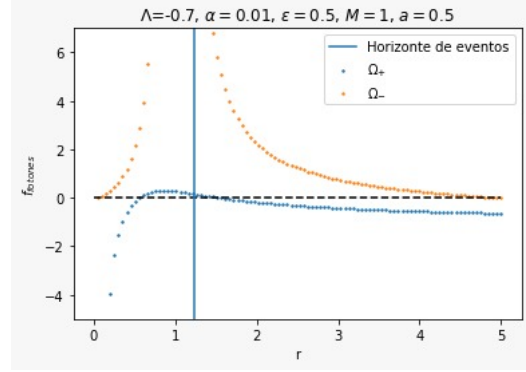


Figura 21: Esfera de fotones del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = 0,5$, $\Lambda = -0,7$.

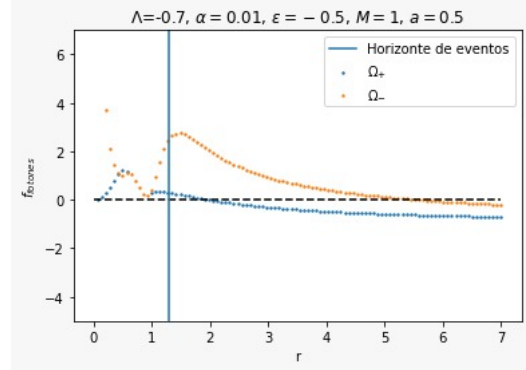


Figura 22: Esfera de fotones del agujero negro KdS, con parámetros $M = 1$, $\alpha = 0,01$, $a = 0,5$, $\epsilon = -0,5$, $\Lambda = -0,7$.

Al igual que en el caso del radio ISCO, es posible clasificar los resultados obtenidos para esfera de fotones en los siguientes: existencia de la esfera de fotones en el exterior del horizonte de eventos y no existencia de la esfera de fotones.

El caso en el que hay esfera de fotones en el exterior del horizonte de eventos es el más observado para los parámetros usados, ya que se presenta en figuras (20) y (21) para partículas corrotantes (Ω_+) y para partículas corrotantes y contrarrotantes (Ω_-) en las figuras (22) y (23), esto nuevamente es lo esperado físicamente como se mencionó en el caso del radio ISCO. Por otro lado, puede observarse que para partículas contrarrotantes en las figuras (20) y (21), las curvas punteadas desaparecen e indican que no existe corte en el eje x, por lo que no hay esfera de fotones en este caso y se interpreta como en el caso de ISCO, pero con la aclaración de que la esfera de fotones representa partículas sin masa.

De igual manera, pueden compararse los resultados con la métrica de Kerr ya que no hay contraparte de esta sección en el artículo guía. Así que el radio de la esfera de fotones en el ecuador para los agujeros negros de Kerr está determinado por la expresión [10]

$$r_{ph} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right] \right\} \quad (41)$$

por lo que con las ecuaciones (39) y (41) pueden calcularse para los parámetros $M = 1$ y $a = 0,5$ los radios de horizontes de eventos $r_{Hor} = 2,12$ y de esfera de fotones $r_{ph+} = 2,35$ y $r_{ph-} = 3,53$, donde r_{ph+} y r_{ph-} denotan los radios para partículas corrotantes y contrarrotantes respectivamente. Nuevamente es notable destacar que ambas órbitas para partículas sin masa se forman en el exterior del horizonte de eventos justificando así por qué la esfera de fotones debe ubicarse fuera de dicho radio.

8.4. Entropía

Para el caso de la entropía, a través del código descrito en la sección anterior, se encontraron algunos casos de entropía mostrados tanto en la figura 7 y la figura 23, de las cuales es interesante notar como cambia el comportamiento de la entropía para algunos valores de los parámetros, obteniendo una entropía con una concavidad diferente a la esperada en la figura 23, estos resultados se deben a los parámetros nuevos introducidos en la métrica (α y ϵ).

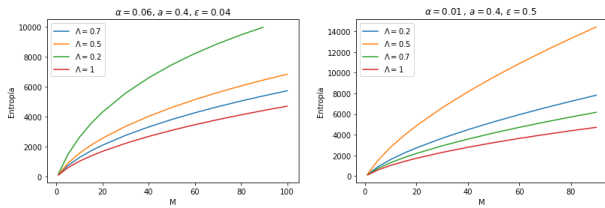


Figura 23: Entropía Bekenstein-Hawking para algunos valores de los parámetros.

Por otra parte, en la figura 7 se tiene un comportamiento normal y esperado para la entropía respecto de

la masa, es un comportamiento propio de agujeros negro tipo Kerr. A pesar de encontrar el cambio en la concavidad de la entropía, esta sigue siendo positiva, permitiendo que para esos valores, al menos la entropía, siga siendo una cantidad física, pues se cumple que $\Delta S \geq 0$.

8.5. Temperatura

En el estudio de la entropía se encontraron las gráficas mostradas en las figuras 6 y 24, estas exhiben el comportamiento de la temperatura respecto de la masa del agujero negro.

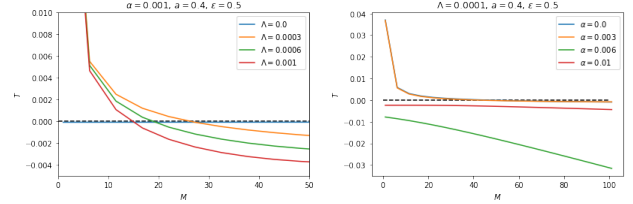


Figura 24: Temperatura Bekenstein-Hawking para algunos valores de los parámetros.

En las gráficas obtenidas se exhibe un comportamiento decreciente para valores grandes de la masa, como es de esperarse pues usualmente va como $\frac{1}{M}$. Sin embargo, es posible encontrar en todas las gráficas, para varios valores de los parámetros y ciertas regiones de M , valores donde la temperatura es negativa, descartando estos valores de los parámetros para encontrar agujeros negros reales y físicos. En el caso de la gráfica de la figura 6 se encuentra una discontinuidad para valores de ϵ , esta discontinuidad siempre se tiene para valores de $\epsilon < 0$ debido a la forma funcional de la gravedad superficial como se puede ver en la ecuación (37), del cual se puede obtener una zona “prohibida” donde no hay agujeros negros, esta zona se encuentra donde la temperatura diverge y salta a valores negativos.

8.6. Diagrama de Penrose, Causalidad y Aspectos Globales

Si bien los resultados en cuanto a diagramas de Penrose y causalidad para la métrica de Kerr-de Sitter deformada y acelerada resultaron prácticamente idénticos a los de la métrica de Kerr-de Sitter, una discusión de los efectos de la aceleración y deformación sirve para entender las diferencias (que aunque relativamente pequeñas) entre ambos casos y los fenómenos nuevos que introducen, aún sin tener un efecto en la estructura causal.

Para estudiar la estructura causal de una métrica dada se obtienen todos los horizontes que puedan asociarse a esta. Todas estas posibilidades las cubre las raíces del polinomio

A pesar de que el polinomio es de grado 8, solo hay 4 raíces que están asociadas a horizontes (las demás son complejas o representan singularidades aparentes no asociadas a horizontes). Para entender mejor el comportamiento de las raíces es conveniente entender como surge cada una empezando con la métrica de Kerr.

La métrica de Kerr depende de dos parámetros. El parámetro de masa (M) y el de momentum angular o spin (a). De la relación de estos se encuentran tres soluciones posibles para el agujero negro: $a < M$, $a = M$, $a > M$. Solo el caso $a < M$ es físicamente relevante. El caso $a > M$ presenta una singularidad desnuda y el caso $a = M$ es inestable (cualquier pérdida de masa o aumento de giro resultaría en una singularidad desnuda, por minúsculo que sea el cambio).

En este caso ($a < M$) hay dos singularidades aparentes, la mayor de las cuales se entiende como el horizonte de eventos, la menor viene a ser un horizonte de eventos "interno". Ambos horizontes invierten.^{el} comportamiento del vector de Killing ∂_t . Este comportamiento resulta en el ya conocido diagrama de Penrose para la métrica de Kerr

Al pasar a la métrica de Kerr-de Sitter se introducen dos nuevos horizontes, uno asociado a una raíz positiva y el otro a una negativa. Si bien en principio la raíz negativa no tendría significado físico, al extender la métrica (como se hace para obtener el diagrama de Penrose) sí se debe tener en cuenta la raíz negativa. En cualquier caso, ambas raíces se comportan como horizontes cosmológicos. En total habrían cuatro horizontes reflejados en el diagrama de Penrose correspondiente.

El efecto principal que tiene la introducción de la constante cosmológica es el de permitir mayores valores para el spin máximo, es decir, $a = M$ e incluso $a > M$ están permitidos, hasta cierto punto. Además, para valores suficientemente grandes de la constante cosmológica (Λ) hay también un valor mínimo de spin. Eventualmente, para valores aún más grandes de la constante cosmológica se pierde la estructura del agujero negro para cualquier valor de spin.

Al añadir aceleración a la métrica de Kerr-de Sitter (α) no se introducen nuevos horizontes, siempre que $\Lambda > 0$. De hecho, se intensifica el efecto de la constante cosmológica. Esto es por que ambos parámetros se comportan de forma similar en el polinomio.

Para el caso con $\Lambda = 0$ el parámetro de aceleración introduce horizontes de aceleración, que se comportan como horizontes cosmológicos.

Si en cambio se deforma la métrica de Kerr-de Sitter en vez de acelerarla es entonces donde el polinomio se vuelve de grado 8. Sin embargo, siguen existiendo los mismos horizontes de antes. El parámetro de deformación (ε) no tiene efectos en el polo norte, pero al ir au-

mentando el ángulo polar el horizonte de eventos y el horizonte cosmológico se van haciendo más angostos (o anchos, dependiendo del signo del parámetro) hasta llegar al ecuador, donde si se sigue aumentando el ángulo se revierte el efecto hasta llegar al polo sur. Para ciertos valores del ángulo polar aparecen más raíces reales. Sin embargo, estas no representan horizontes, ya que no son superficies (puesto que solo se evidencian en ángulos específicos), sino anillos, y por tanto no afectan la estructura causal del agujero negro.

Por último, si se acelera y deforma la métrica de Kerr-de Sitter, simplemente se obtiene un efecto compuesto entre ambas, la estructura causal se mantiene igual al caso de Kerr-de Sitter y el diagrama de Penrose sería el mismo.

9. Conclusiones

Se propuso el elemento de línea de Kerr-de Sitter modificado añadiendo los parámetros de aceleración α y de deformación ε el cual viene dado por la ecuación (22), donde se encontró que cuando $\varepsilon = 0$ y $\alpha = 0$ se obtiene la ecuación (16), además si $\Lambda = 0$ se encuentra la solución de Kerr.

A partir del desarrollo analítico, se encontró la ecuación (24) para el horizonte de eventos, solucionando numéricamente se encontró la existencia de horizontes cosmológicos esperables de acuerdo a la métrica KdS, además, se encontraron dos tipos de horizontes, uno con topología esférica como se muestra en la Figura 22 y otro en donde aparecen dos horizontes disyuntos como se muestra en la Figura 9. Finalmente, se encontraron agujeros negros hiperrotantes los cuales son una extensión a la métrica de Kerr.

Análogamente a lo realizado con el horizonte de eventos, se encontró la ecuación (25) para la ergosfera, solucionándola numéricamente se encontró que su topología es en general esférica y que para la gran mayoría de los casos la ergosfera contiene al horizonte de eventos. Además, se halló un caso límite de los agujeros negros tipo Kerr considerando $\Lambda = 0$ y $\varepsilon = 0$.

Para encontrar los radios de ISCO y esfera de fotones se implementó un método de solución gráfico debido a la complejidad de las ecuaciones a resolver. En ambos tipos de órbitas se realizaron variaciones en los valores de los parámetros de constante cosmológica Λ y de deformación ε para analizar diferentes resultados.

Se calcularon las órbitas estables más cercanas al agujero negro para partículas con masa y sin masa en el ecuador y se obtuvieron dos casos generales, órbitas más cercanas dentro y fuera del horizonte de eventos para

partículas corrotantes y contrarrotantes respecto del momento angular del agujero negro. Dichos resultados en el interior y exterior del horizonte de eventos dependen de la combinación de los parámetros usados.

Así mismo, se compararon los resultados obtenidos con el caso de la métrica de Kerr, en la cual pudo observarse que las órbitas circulares estables más cercanas para partículas con y sin masa se encuentran fuera del horizonte de eventos, luego los resultados obtenidos fuera del horizonte de eventos para la métrica estudiada en este proyecto se consideran como los físicamente aceptados.

Se encontró la entropía Bekenstein-Hawking usando la ecuación (11) con el área del horizonte de eventos, para diferentes parámetros de la métrica, en términos de la masa. Se obtuvieron dos comportamientos distintos para la entropía los cuales se muestran en la figura 7 y la figura 23, donde hay un cambio en la concavidad de las entropía en cada figura, en la figura 7 se encontró un comportamiento más cercano a el caso de Kerr. Adicionalmente, se encontró que la entropía es concordante con la segunda ley de la termodinámica.

Para la temperatura, se encontró a través de la gravedad superficial, donde se pudieron encontrar regiones donde no hay existencia de agujeros negros debido a existencia de temperatura negativa. Se encontró que la temperatura sigue un comportamiento decreciente en términos de la masa, sin embargo presenta una discontinuidad para $\epsilon < 0$.

El presente trabajo se puede tomar como un punto de partida para el estudio de otro tipo de deformaciones como pueden ser las cargas magnéticas y eléctricas que se pueden introducir en las métricas de Plebanski-Demiński. Adicionalmente, se puede realizar el análisis de la métrica extendida de los diagramas de Penrose.

Referencias

- [1] U. A. Gillani, R. Rahim, K. Saifullah. The non-Kerr black hole with acceleration. *Astroparticle Physics*, 138, 2022. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09641-4>.
- [2] Alexei Khokhlov, Ewald Mueller, Peter Höflich. Light curves of type ia supernova models with different explosion mechanisms. *Astronomy and Astrophysics*, 270:223–248, 1993.
- [3] J. Chluba, M. H. Abitbol, N. Aghanim, Y. AliHaïmoud, M. Alvarez, K. Basu, B. Bolliet, C. Burigana, P. de Bernardis, J. Delabrouille, E. Dimastrogiovanni, F. Finelli, D. Fixsen, L. Hart, C. Hernández-Monteagudo, J. C. Hill, A. Kogut, K. Kohri, J. Lesgourgues, B. Maffei, J. Mather, S. Mukherjee, S. P. Patil, A. Ravenni, M. Remazeilles, A. Rotti, J. A. Rubiño-Martin, J. Silk, R. A. Sunyaev, E. R. Switzer. New horizons in cosmology with spectral distortions of the cosmic microwave background. *Experimental Astronomy*, 51 (3):1515–1554, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10686-021-09729-5>. Cited By :6.
- [4] Cormac O’Raifeartaigh, Michael O’Keeffe, Werner Nahm, Simon Mitton. Einstein’s 1917 static model of the universe: a centennial review. *The European Physical Journal H*, 42(3):431–474, 2017.
- [5] Carter. in black holes (les astres occlus). C. De Witt, B. S. DeWitt (Gordon and Breach Science Publishers), page 57, 1973
- [6] G. Setti. *Astronomy and society. Rend. Fis. Acc. Lincei*, 23:39–46, 2012. <https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/s12210-012-0198-9>.
- [7] IceCube, 2022. <https://icecube.wisc.edu/science/icecube/>.
- [8] Introducción a LIGO y a las ondas gravitacionales. el potencial de las ondas gravitacionales. <https://www.ligo.org/sp/science/GW-Potential.php>.
- [9] BBC News Mundo. Katie Bouman, la mujer de 29 años detrás de la primera foto de un agujero negro. Página web, Abril 2019. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-47893532>.
- [10] Cosimo Bambi. *Black Holes: A Laboratory for Testing Strong Gravity*. Springer Nature Singapore Pte Ltd, Springer, Singapore, 2017. <https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/978-981-10-4524-0>.
- [11] S. Akcay, R. A. Matzner. The Kerr-de Sitter universe. *Classical and Quantum Gravity*, 28(8), 2011. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/8/085012>. Cited By :50.
- [12] Marcus Spradlin, Andrew Strominger, Anastasia Volovich. De sitter space. In *Unity from Duality: Gravity, Gauge Theory and Strings*, pages 423– 453. Springer, 2002. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0110007>.
- [13] G.F.R Ellis, S.W Hawking. *The Large Scale Structure of Spacetime*. Cambridge University Press, 1973. ISBN 0-521-09906-4.
- [14] Sean Carroll. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, 2004. ISBN 0-8053-8732-3.
- [15] E. Thomas, D. Raine. *Black Holes: An Introduction*. Imperial College Press, 2010. ISBN 978-1-84816- 382-9

- [16] Sean A Hayward, R Di Criscienzo, Mario Nadalin, L Vanzo, S Zerbini. Local hawking temperature for dynamical black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(6):062001, 2009. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/6/062001>.
- [17] Paulino Ajiquichí Pecher. Entropía de agujeros negros y analogías entre las leyes mecánicas de agujeros negros y la termodinámica. 2019. <https://repositorio.uvg.edu.gt/handle/123456789/3399>.
- [18] T. Johannsen, D. Psaltis. Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 83(12), 2011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.124015>. Cited By :198.
- [19] E. T. Newman, A. I. Janis. Note on the kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):915–917, 1965. <https://doi.org/10.1063/1.1704350>. Cited By :403.
- [20] J. F. Plebanski, M. Demianski. Rotating, charged, and uniformly accelerating mass in general relativity. *Annals of Physics*, 98(1):98–127, 1976. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(76\)90240-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90240-2). Cited By :462.
- [21] J. B. Griffiths and J. Podolský. A new look at the plebański-demiański family of solutions. *International Journal of Modern Physics D*, 15(3): 335–369, 2006. <https://doi.org/10.1142/S021827180600774>. Cited By :138.
- [22] W. Vleeshouwers D. Lüst. *Black Hole Information and Thermodynamics*. Springer, Cham, 2019. ISBN 978-3-030-10918-9. <https://doi-org.ezproxy.unal.edu.co/10.1007/978-3-030-10918-9.12>