Demostración cuarta derivada central

Primero, el desarrollo de la serie de Taylor para la derivada de una función en $f(x+h)$ y $f(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O_{11}(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O_{11}(h^6)$$

Sumando $f(x+h)$ y $f(x-h)$ para hallar una expresión para la segunda derivada:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f^{(2)}(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + O_{21}(h^6)$$

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) - O_{21}(h^6) = h^2 f^{(2)}(x)$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) - O_{21}(h^6)}{h^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x) - O_{21}(h^4)$$

Ahora, el desarrollo de la serie de Taylor para la derivada de una función en $f(x+2h)$ y $f(x-2h)$ para encontrar la cuarta derivada:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf^{(1)}(x) + 2h^2 f^{(2)}(x) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O_{21}(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf^{(1)}(x) + 2h^2 f^{(2)}(x) - \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) - \frac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O_{21}(h^6)$$

Sumando $f(x+2h)$ y $f(x-2h)$:

$$f(x+2h)+f(x-2h)=2f(x)+4h^2f^{(2)}(x)+\frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x)+O_{22}(h^6)$$

$$f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)-4h^2f^{(2)}(x)-O_{22}(h^6)=\frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{4}\left[\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)-4h^2f^{(2)}(x)-O_{22}(h^6)}{h^4}\right]$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{4}\left[\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}\right]-\frac{3}{h^2}f^{(2)}(x)-O_{221}(h^2)$$

Reemplazando $f^{(2)}(x)$ por la expresión anteriormente hallada:

$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{4}\left[\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}\right]-\frac{3}{h^2}\left[\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x)-O_{21}(h^4)\right]-O_{221}(h^2)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{4}\left[\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}\right]+\frac{-3f(x+h)+6f(x)-3f(x-h)}{h^4}+\frac{1}{4}f^{(4)}(x)+O_{211}(h^2)-O_{221}(h^2)$$

$$\frac{3}{4}f^{(4)}(x)=\frac{3}{4}\left[\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}\right]+\frac{-3f(x+h)+6f(x)-3f(x-h)}{h^4}+O_{211}(h^2)-O_{221}(h^2)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}+\frac{4}{3}\left[\frac{-3f(x+h)+6f(x)-3f(x-h)}{h^4}\right]+O_{211}(h^2)-O_{221}(h^2)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)+f(x-2h)-2f(x)}{h^4}+\frac{-4f(x+h)+8f(x)-4f(x-h)}{h^4}+O_{211}(h^2)-O_{221}(h^2)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}+O_{211}(h^2)-O_{221}(h^2)$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}+O(h^2)$$

Por lo tanto, el orden del error de la aproximación sería de $O(h^2)$.