Probabilidad general

Punto 12

(a) **Muestre que el número de configuraciones posibles (microestados) está dado por:**

$$\Omega(N, n_0) = \frac{N!}{n_0!\, n_1!}$$

Primero, hay que tener en cuenta que las configuraciones posibles (microestados) es un problema de combinación.

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

$$\Omega(N, n_0) = \frac{N!}{(N-n_0)!\, n_0!}$$

$$\Omega(N, n_0) = \frac{N!}{n_1!\, n_0!}$$

$$\Omega(N, n_0) = \frac{N!}{n_0!\, n_1!}$$

(b) **Usando la ecuación de entropía $S(N, n0) = k_B ln(\Omega)$ y la fórmula de Stirling $ln(N!) \approx Nln(N) - N$, muestre que la entropía es aproximadamente igual a:**

$$S(N, n0, n1) = k_B(Nln(N) - n_0 \ln(n_0) - n_1 \ln(n_1))$$

Para esto, es simplemente sacar el logaritmo natural de la función omega usando la fórmula de Stirling.

$$S(N, n0, n1) = k_B \ln(\Omega)$$

$$S(N, n0, n1) = k_B \ln\left(\frac{N!}{n_0!\, n_1!}\right)$$

$$S(N, n0, n1) = k_B(\ln(N!) - \ln(n_0!) - \ln(n_1!))$$

$$S(N, n0, n1) = k_B\ (\mathrm{Nln}(N)\ -\ N - \mathrm{n_0ln}(n_0) + n_0 - \mathrm{n_1ln}(n_1) + n_1)$$

$$S(N, n0, n1) = k_B\ (\mathrm{Nln}(N)\ -\ N - \mathrm{n_0ln}(n_0) - \mathrm{n_1ln}(n_1) + N)$$

$$S(N, n0, n1) = k_B\ (\mathrm{Nln}(N)\ - \mathrm{n_0ln}(n_0) - \mathrm{n_1ln}(n_1))$$

(c) Si definimos la función $x = \frac{n_1}{N}$ de partículas que se encuentran en el nivel de energía ε_1. Muestre que la entropía toma la forma:

$$S(N, x) = -k_B N[x \ln(x) + (1-x)\ln(1-x)]$$

Es necesario reemplazar $x = \frac{n_1}{N}$ en $S(N, n0, n1) = k_B\ (\mathrm{Nln}(N)\ - \mathrm{n_0ln}(n_0) - \mathrm{n_1ln}(n_1))$. Sin embargo, hay que tener en cuenta primero que $n_1 = Nx$ y $n_0 = N - Nx$

$$S = k_B(\mathrm{Nln}(N)\ - (\mathrm{N - Nx})\ln(N - Nx) - \mathrm{xNln}(xN))$$

$$S = k_B(\mathrm{N}\ln(N)\ - \mathrm{N}\ln(N - Nx) + Nx\ln(N - Nx) - \mathrm{xN}\ln(x) - xN\ln(N))$$

$$S = Nk_B(\ln(N)\ - \ln(N - Nx) + x\ln(N - Nx) - \mathrm{x}\ln(x) - x\ln(N))$$

$$S = Nk_B(\ln(N)\ - \ln(N) - \ln(1 - x) + \mathrm{x}\ln(N) + x\ln(1 - x) - \mathrm{x}\ln(x) - x\ln(N))$$

$$S = Nk_B(-\ln(1 - x) + x\ln(1 - x) - \mathrm{x}\ln(x))$$

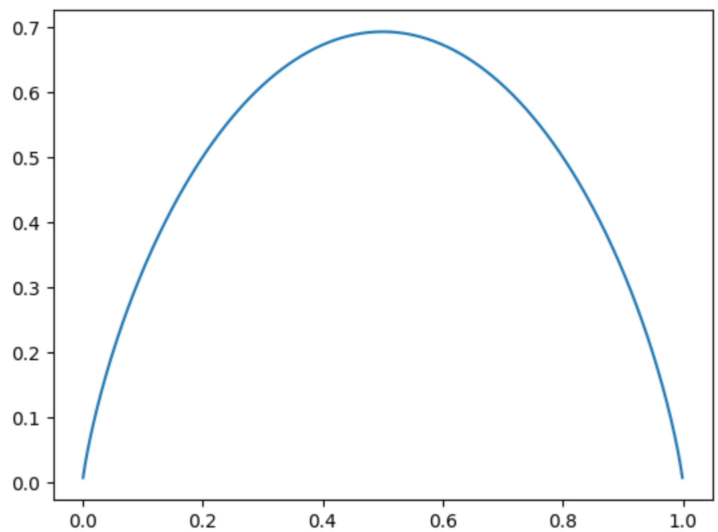
$$S = Nk_B\big(-\mathrm{x}\ln(x) + \ln(1 - x)\,(x - 1)\big)$$

$$S(N, x) = -Nk_B(\mathrm{x}\ln(x) + \ln(1 - x)\,(1 - x))$$

$x = \frac{1}{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)(E - N\epsilon_0)}$

(d) Graficar

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9d7de577f0>]
```



(e) De la primera ley tenemos:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_N \left(\frac{\partial x}{\partial E}\right)_N$$

Muestre que la proporción de partículas como función de la temperatura está dada por:

$$x(T) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}}$$

Para esto simplemente toca derivar parcialmente y despejar:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_N \left(\frac{\partial x}{\partial E}\right)_N = -Nk_B(\ln x - \ln(1 - x))\left(\frac{1}{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)}\right)$$

$$\frac{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{T} = -Nk_B(\ln x - \ln(1 - x))$$

$$\frac{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{TNk_B} = -\ln x + \ln(1-x)$$

$$e^{\frac{N(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{TNk_B}} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$e^{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{Tk_B}} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta E}{Tk_B}}}$$

(f) Para bajas y altas temperaturas encuentre $x(T)$. Muestre que la entropía a altas temperaturas vale lo siguiente:

$$\lim_{T\to\infty} S(T) = k_B N ln(2)$$

$$S(N,x) = -Nk_B(\mathrm{x}\ln(x) + \ln(1-x)\,(1-x))$$

$$S(N,x) = -Nk_B\left(\ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}\right)\left(\frac{1}{1+e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{1+e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}\right)\left(1 - \frac{1}{1+e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}\right)\right)$$

$$\lim_{T\to\infty} S(T) = -Nk_B\left(-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\ln 2\right) = Nk_B \ln 2$$

(g) Cambio de entropía en un sistema termodinámico isotérmico:

$$\Delta S = nRln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\Delta S = nRln\left(\frac{2V}{V}\right)$$
$$\Delta S = Nk_B ln\left(\frac{2V}{V}\right)$$
$$\Delta S = Nk_B ln(2)$$