Les motivations première d'un article est la recherche et le partage d'une question ainsi que de sa réponse. De même un corrigé à bien plus de valeur si les solutions sont donné avec les énoncées. Cela est bien, mais cette rigueur n'as pas été utiliser par un certain Srinivasa Ramanujan assurément l'autodidacte le plus productif du 20 siècles. Ce mathématicien de génie aura tout au long de sa carrière découvert pas moins de 3900 formules et théorèmes, mais la quasi totalité son legué sans démonstration. L'on nomme d'ailleurs les Cahiers de Ramanujan, les quatres recueils manuscrits où se retrouve ses résulats. L'hisoire ne s'arrête pas à sa mort car plus de 50 ans après celle-ci, un autre mathématicien, Bruce Carl Berndt, s'intéresse de près à ces cahiers et consacra plus de 20 ans à leur editions commenté. Ce derniers ainsi que ses collaborateurs George Andrews, Richard Askey et Robert A. Rankinse tenteront de prouver ou de retracer les références explicant les résultats de Ramanujan. Maintenant, la question ayant poussé l'écriture du présent article est la suivante : est-il possible de prouvé une des formules (au allure spéctaculaire) en utilisant des outils simples. La formule est la suivante (présente sur la page wikipedia consacrer à Ramanujan) :

Corollaire.

$$\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots}}}}}} = \frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{15-6\sqrt{5}}}{2}$$

où l'alternance des signes est périodique $(++,-,+)$.

Cette identité est en fait un corrolaire de la proposition suivante :

Proposition (« Entry 32 »)**.** Les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 &= a+y \\ y^2 &= a+z \\ z^2 &= a+u \\ u^2 &= a+x \end{aligned}$$

détermines un polynôme en x (ou y ou z ou u) de degrée 16. Ce polynôme peut être factorisé en un produit de quatre polynômes quartique, l'un d'entre eux est $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a$. Les autres polynômes quartiques restant ont la forme

$$(x^2 + px + \frac{1}{2}(p^2 - 2a - 1/p))(x^2 + qx + \frac{1}{2}(q^2 - 2a - 1/q)), \quad (1)$$

où $pq = -1$ et $p + q$ est une racine de l'équation polynomial

$$z^3 + 3z = a(1 + az) \quad (2)$$

Démonstration : Direct. La preuve qui suivra est tiré du quatrième volume des ouvrages de Berndt.

Soit $\{a_n\}$ une suite de terme telle que $a_1 = \sqrt{5}, a_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}}, \ldots$ où a_n est la n^{e} radical imbriqué de la partie de droite du corollaire. Maintenant posons les fonctions f, g continues définie par

$$f(x) = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5-x}}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{5+x} \quad (0 \le x \le 5)$$

Remarquons que f est décroissante et que g est croissante sur leur interval de définition. En particulier,

$$\begin{aligned} f(0) = a_3 > f\left(\sqrt{5}\right) = (f\circ g)(0) = a_4 > (f\circ g)\left(\sqrt{5}\right) \\ = a_5 > (f\circ g)\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right) = a_6 > (f\circ g)(a_3) = a_7 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_7 < (f\circ g)(a_4) = a_8 < (f\circ g)(a_5) = a_9 < (f\circ g)(a_6) \\ = a_{10} < (f\circ g)(a_7) = a_{11} \end{aligned}$$

Il suit par induction que

$$\begin{cases} a_{8n+3} > a_{8n+4} > a_{8n+5} > a_{8n+6} > a_{8n+7} \\ a_{8n+7} < a_{8n+8} < a_{8n+9} < a_{8n+10} < a_{8n+11} \end{cases} \quad (3)$$

pour tout entiers n non-négatif. En prenant la racine carrée et puis en additionnant ou soustrayant 5, l'on montre aussi par induction que $2 < a_7 < a_15 < a_{23} < \cdots < a_{8n+7} < a_{8n+11} < a_{8n+3} < \cdots < a_{19} < a_{11} < a_3 < 5$, pour tout entier n non-négatif. Par conséquent, la sous-suite $\{a_{8n+7}\}$ est monotone croissante tandis que la sous-suite $\{a_{8n+3}\}$ est monotone décroissante. Toutes deux sont bornées, alors elle converge, et disons qu'elles convergent respectivement vers α et β. Notons que $a_{8n+7} = (f\circ g)(a_{8n+3})$. Par continuité de f et g

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f\circ g)(a_{8n+3}) &= (f\circ g)\left(\lim_{n\to\infty} a_{8n+3}\right) \\ &= (f\circ g)(\beta), \end{aligned}$$

alors que a_{8n+7} tends vers α lorsque $n \to \infty$. Aussi puisque $a_{8n+11} = (f\circ g)(a_{8n+7})$, alors par un argument similaire, $\beta = (f\circ g)(\alpha)$.

Donc, $\beta = (f\circ g)(\beta)$. En posant la fonction $h = f\circ g$, alors on observe que α et β sont des points fixes de $h\circ h$, c'est-à-dire que $p(x) = x$ où dans ce cas $(h\circ h)(\alpha) = \alpha$ et $(h\circ h)(\beta) = \beta$. En dérivant $(h\circ h)$, on remarque $0 < (h\circ h)'(x) < 1$ pour $a_7 \le x \le a_3$. Ainsi, l'équation $(h\circ h)(x) = x$ à au plus une racine sur cette intervale. Alors, $\alpha = \beta$ et donc la sous-suite $\{a_{4n+3}\}$ converge.

Par (3), on peut aussi conclure que que la suite $\{a_n\}$ converges. En posant, $a = 5$ dans la suites d'équalité de la proposition présenté plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} u^2 &= 5+x, \\ z^2 &= 5+u, \\ y^2 &= 5+z, \\ x^2 &= 5+y, \end{aligned}$$

Que l'on peut combiner de sorte à obtenir l'équation polynômiale

$$5 + x = (((x^2-5)^2-5)^2-5)^2 \quad (4)$$

En posant, $F(x) = 5 + x - (((x^2-5)^2-5)^2-5)^2$ et en le factorisant par *Mathematica* on trouve

$$\begin{aligned} &\left(x^2-x-5\right)\cdot\left(x^2+x-4\right)\cdot\left(x^4-4x^3-4x^2+31x-29\right)\cdot \\ &\left(x^8+4x^7-10x^6-54x^5+9x^4+226x^3+125x^2-301x-269\right) \end{aligned}$$

Un monstre dont l'une des racines est la limite de $\{a_n\}$. Par la proposition, $p + q$ est un racine de (2)

$$z^3 - 17z - 4 = (z^2 - 4z - 1)(z + 4) = 0.$$

Soit $p + q = -4$. Alors puisque $pq = -1$,on trouve que $p, q = -2 \pm \sqrt{5}$. Ainsi, le polynôme de l'équation (1) est donné par

$$\begin{aligned} &\left(x^2 + \left(-\sqrt{5}-2\right)x + \frac{1}{2}\left(\left(-\sqrt{5}-2\right)^2 - 10 - \frac{1}{-\sqrt{5}-2}\right)\right)\cdot \\ &\left(x^2 + \left(\sqrt{5}-2\right)x + \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{5}-2\right)^2 - 10 - \frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)\right) = \\ &x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 31x - 29 \end{aligned}$$

Les quatres racines de ce polynôme sont données par $\frac{2\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{15-6\sqrt{5}}}{2}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{15-6\sqrt{5}}}{2}$ à l'expension radical donné dans l'énoncé du corollaire. Cela peut ce faire à l'aide de *Mathematica* en calculant les seizes racines de $F(x)$ dont une seule satisfait l'équation requise (une variante de 4) :

$$(f\circ g)(x) = x = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5+x}}}}$$

□