



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FICHE RÉCAPITULATIVE

Algèbre Linéaire I

Julien Hébert-Doutreloux

April 11, 2020

Contents

1	Transformation linéaire et leurs propriétés	4
1.1	Transformation linéaire entre deux espaces vectoriels quelconques	4
1.2	Noyau et image d’une transformation linéaire	4
1.3	Transformation linéaire injective, surjective, isomorphisme	4
1.4	Transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et matrice associée	4
2	Bases et systèmes de coordonnées dans des espaces vectoriels	5
2.1	Base d’un espace ou sous-espace vectoriel	5
2.2	Système de coordonnées	5
2.3	Dimension d’un espace ou d’un sous-espace vectoriel	5
2.4	Théorèmes sur les bases	5
3	Changement de base et matrices associées à une transformation linéaire, rang	6
3.1	Système de coordonnées, matrice de passage	6
3.2	Système de coordonnées, matrice de passage et changement de base	6
3.3	Matrice associée à une transformation linéaire	6
3.4	Rang d’une transformation linéaire et matrice associée	6
4	Produit scalaire, norme, orthogonalité sur un espace vectoriel, notion d’espace euclidien	7
4.1	Produit scalaire sur un espace vectoriel \mathcal{V}	7
4.2	Produit scalaire sur un espace vectoriel \mathcal{V} et norme	7
4.3	Orthogonalité et propriétés	7
4.4	Ensembles orthogonaux et bases orthogonales	8
5	Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt	9
5.1	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel	9
5.2	Base orthonormée et matrice orthogonale	9
5.3	Procédé de Gram-Schmidt	9
6	Diagonalisation de matrices	10
6.1	Matrice semblables et processus de diagonalisation	10
6.2	Matrices semblables, transformation linéaire et changement de base	10
6.3	Matrices semblables et diagonalisation	10
6.4	Valeurs propres et multiplicité algébrique	10
6.5	Espaces propres et multiplicité géométrique	10
6.6	Diagonalisation de matrices carrées	11
7	Diagonalisation de matrices, valeurs propres multiples, diagonalisation des matrices symétriques réelles et hermitiennes complexes	12
7.1	Diagonalisation de matrices et valeurs propres multiples	12
7.2	Lien entre changement de base et diagonalisation de matrice associées à des transformations linéaires	12
7.3	Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes	12
	Index	13

1 Transformation linéaire et leurs propriétés

1.1 Transformation linéaire entre deux espaces vectoriels quelconques

Définition 1. Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux espaces vectoriels sur le corps des réels. L'application $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est dite *linéaire* si :

1. $T(O_{\mathcal{V}}) = O_{\mathcal{W}}$
2. $T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$
3. $T(cu) = cT(u), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}$

Proposition 1.

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \iff T \text{ est une transformation linéaire}$$

1.2 Noyau et image d'une transformation linéaire

Définition 2. Le noyau de T est un sous-ensemble de \mathcal{V} défini : $\ker(T) = \{u \in \mathcal{V} : T(u) = O_{\mathcal{W}}\}$.

Définition 3. L'image de T est un sous-ensemble de \mathcal{W} définie : $\text{im}(T) = \{w \in \mathcal{W} : \exists u \in \mathcal{V} | w = T(u)\}$.

Proposition 2. Si $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire alors,

1. $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V}
2. $\text{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{W}

1.3 Transformation linéaire injective, surjective, isomorphisme

Définition 4. Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est **injective** si tout vecteur de \mathcal{W} est l'image **d'au plus** un vecteur de \mathcal{V} .

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \iff \forall u_1, u_2 \in \mathcal{V} : u_1 \not\equiv u_2 \implies T(u_1) \not\equiv T(u_2).$$

Théorème 1.

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \iff \ker(T) = \{O_{\mathcal{V}}\}$$

Définition 5. Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est **surjective** si tout vecteur de \mathcal{W} est l'image **d'au moins** un vecteur de \mathcal{V} .

Théorème 2.

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ surjective} \iff \text{im}(T) = \mathcal{W}$$

Définition 6. Une transformation linéaire qui est à la fois injective et surjective est appelée un **isomorphisme** (bijective).

1.4 Transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et matrice associée

Proposition 3. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire et A est la matrice associée à T alors $\ker(T) = \ker A$ et $\text{im}(T) = \text{im } A$.

1. T injective $\iff \ker A = \{O\}$ colonnes de A linéairement indépendantes
2. T surjective $\iff \text{im } A = \mathbb{R}^m$ colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m

2 Bases et systèmes de coordonnées dans des espaces vectoriels

2.1 Base d'un espace ou sous-espace vectoriel

Définition 7. Soit un espace (resp. sous-ensemble) vectoriel \mathcal{V} . Un ensemble de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une **base** de \mathcal{V} si

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une famille libre (linéairement indépendant)
2. $\mathcal{V} = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (famille génératrice)

2.2 Système de coordonnées

Théorème 3. Soit $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base d'un espace vectoriel \mathcal{V} , alors

$$\forall v \in \mathcal{V}, \exists! c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Les coefficients réels c_1, c_2, \dots, c_n sont les **composantes** ou les **coordonnées** du vecteur v dans la base B . Autrement,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La correspondance entre l'espace vectoriel \mathcal{V} et \mathbb{R}^n est l'**application coordonnées** (relative à la base B) $T_C : v \in \mathcal{V} \longrightarrow [v]_B$

Théorème 4. Soit B une base formée de n vecteurs d'un espace vectoriel \mathcal{V} . L'application coordonnées $T_C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

2.3 Dimension d'un espace ou d'un sous-espace vectoriel

Définition 8. La **dimension** ($\dim \mathcal{V}$) d'un espace vectoriel est donnée par le nombre de vecteurs de ses bases.

Théorème 5. Soit $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base formée de n vecteurs d'un espace vectoriel \mathcal{V} alors toute famille de \mathcal{V} contenant plus de n vecteurs est **liée**. La dimension de d'une base de l'espace vectoriel \mathcal{V} équivalente à la dimension de l'espace vectoriel \mathcal{V} .

2.4 Théorèmes sur les bases

Théorème 6. Si $\dim \mathcal{V} = p \in \mathbb{N}$, alors tout ensemble linéairement indépendant de p vecteurs est une base de \mathcal{V} et tout ensemble générateur de p vecteurs est une base de \mathcal{V} .

3 Changement de base et matrices associées à une transformation linéaire, rang

3.1 Système de coordonnées, matrice de passage

Définition 9. Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ et $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de \mathcal{V} . La **matrice de passage** de la base B à la **base canonique** est définie par $P_B = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$, la matrice formée des vecteurs de B .

Proposition 4. Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (dans la base canonique) satisfait $x = P_B[x]_B \iff [x]_B = P_B^{-1}x$.

3.2 Système de coordonnées, matrice de passage et changement de base

Définition 10. Soit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ et $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel \mathcal{V} de dimension finie n . La **matrice de passage de la base B à la base C** est définie par $P_{C \leftarrow B} = ([b_1]_C [b_2]_C \dots [b_n]_C)$. La matrice de changement de base de B à C est la matrice formée des coordonnées des vecteurs de B dans la base C .

Théorème 7. La matrice de changement de base est unique et inversible telle que $(P_{C \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow C}$ et que pour tout vecteur $x \in \mathcal{V}$, $[x]_C = P_{C \leftarrow B}[x]_B$.

Si P_B (resp. P_C) est la matrice de passage de B (resp. C) à la base canonique alors, $P_{C \leftarrow B} = (P_C)^{-1}P_B$.

3.3 Matrice associée à une transformation linéaire

Définition 11. Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire de \mathcal{V} dans \mathcal{W} , telle que $\dim \mathcal{V} = n$ et $\dim \mathcal{W} = m$. Soit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ une base de \mathcal{V} et $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ une base de \mathcal{W} . La matrice associée à la transformation linéaire dans les bases B et C est donnée par

$$[T]_{C \leftarrow B} = \left([T(b_1)]_C \ [T(b_2)]_C \ \dots \ [T(b_n)]_C \right) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad [T(v)]_C = [T]_{C \leftarrow B}[v]_B, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Proposition 5. Soit la transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et soit deux bases différentes dans chacun des espaces \mathcal{V} et \mathcal{W} . Soit B et B' des bases de l'espace de départ et, C et C' deux bases de l'espace d'arrivée.

- $P_{B \leftarrow B'}$ (resp. $P_{C' \leftarrow C}$), la matrice de changement de base de B' à B (resp. C à C') dans \mathcal{V} (resp. \mathcal{W})
- $[T]_{C \leftarrow B}$ (resp. $[T]_{C' \leftarrow B'}$), la matrice associée à T dans les bases B et C (resp. B' et C')

Alors, $[T]_{C' \leftarrow B'} = P_{C' \leftarrow C}[T]_{C \leftarrow B}P_{B \leftarrow B'}$

3.4 Rang d'une transformation linéaire et matrice associée

Définition 12. Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire telle que $\dim \mathcal{V} = n$ et $\dim \mathcal{W} = m$. Le **rang** de T est égal à la dimension de son image : $\text{rang } T = \dim(\text{im } T)$.

Si A est la matrice canonique associée à $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, alors

$$\text{rang } T = \text{rang } A = \dim(\text{im } A)$$

(nombre de pivot de A et donc le nombre r de variables de bases). Alors que $\dim(\ker A) = n - r$, le nombre de variables libres. Autrement dit,

$$\dim(\text{im } A) + \dim(\ker A) = n$$

Théorème 8. Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire, alors

$$\text{rang } T + \dim(\ker T) = \dim \mathcal{V} \quad \text{ou encore} \quad \dim(\text{im } T) + \dim(\ker T) = \dim \mathcal{V}$$

Proposition 6. Si la transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est un **isomorphisme** alors $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$.

4 Produit scalaire, norme, orthogonalité sur un espace vectoriel, notion d'espace euclidien

4.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel \mathcal{V}

Définition 13. Un produit scalaire **réel** sur un espace vectoriel \mathcal{V} est une application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$, vérifiant les axiomes suivants $\forall u, v, w \in \mathcal{V}$ et $\forall c \in \mathbb{R}$:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

4.2 Produit scalaire sur un espace vectoriel \mathcal{V} et norme

Définition 14. La norme est donnée par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Normaliser :

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}, \quad \|\hat{u}\| = 1$$

Proposition 7.

1. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2. $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|, \forall c \in \mathbb{R}$
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ et $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ et $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4.3 Orthogonalité et propriétés

Définition 15. Soit un espace vectoriel \mathcal{V} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$, alors les vecteurs u et v sont dits **orthogonaux** si $\langle u, v \rangle = 0$

Définition 16. Soit \mathcal{W} un sous-espace vectoriel de \mathcal{V} . Le **complément orthogonal** de \mathcal{W} , noté \mathcal{W}^\perp , est l'espace engendré par les vecteurs orthogonaux à \mathcal{W} :

$$\mathcal{W}^\perp = \{z \in \mathcal{V} | \langle z, w \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{W}\}$$

Proposition 8. Soit un espace vectoriel \mathcal{V} (et \mathcal{W} un sous-espace) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$. Un tel espace est appelé **espace euclidien**. Alors,

1. le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de \mathcal{V}
2. les vecteurs u et v de \mathcal{V} sont orthogonaux $\iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
3. si $\mathcal{W} = \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, on a $z \in \mathcal{W}^\perp \iff \langle z, u_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$
4. \mathcal{W}^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V}
5. si \mathcal{V} est de dimension finie, alors $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$
6. $\mathcal{W} \subset \mathcal{H} \iff \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{W}^\perp$ (\mathcal{H} sous-espace de \mathcal{V})
7. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$
8. $\{0\}^\perp = \mathcal{V}$

4.4 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 17. Un ensemble de vecteur $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de \mathcal{V} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ forme une **base orthogonal** si

1. B est une base
2. Les vecteurs de B sont mutuellement orthogonaux

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$$

La base est orthonormée si tous ses vecteurs sont **unitaire**.

Proposition 9.

1. Si deux vecteurs u et v non nuls de \mathcal{V} sont **orthogonaux**, alors ils sont **linéairement indépendants**.
2. Si $\dim \mathcal{V} = n$ et que $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une famille orthogonale de vecteurs de \mathcal{V} alors c'est une base de \mathcal{V} .

5 Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt

5.1 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Définition 18. Soit $u \neq 0$ et y deux vecteurs de l'espace euclidien \mathcal{V} , alors la projection orthogonale de y sur u est donnée par le vecteur,

$$\hat{y} = \text{proj}_u y = \frac{\langle y, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

Théorème 9. Soit \mathcal{W} un sous-espace d'un espace euclidien \mathcal{V} et $B = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ une base **orthogonale** de \mathcal{W} , alors tout vecteur y de \mathcal{V} s'écrit de façon **unique** sous la forme

$$y = \hat{y} + z, \quad \hat{y} \in \mathcal{W}, z \in \mathcal{W}^\perp$$

$$\hat{y} = \text{proj}_{\mathcal{W}} y = \text{proj}_{u_1} y + \text{proj}_{u_2} y + \dots + \text{proj}_{u_p} y = \sum_{i=1}^p \frac{\langle y, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

$$z = y - \hat{y}$$

Le vecteur \hat{y} est appelé le vecteur de **projection orthogonale de y sur \mathcal{W}** . Aussi appelé la **meilleure approximation de y par un élément de \mathcal{W}** dans le sens suivant :

$$\forall v \in \mathcal{W} \setminus \{\hat{y}\}, \|y - \hat{y}\| < \|y - v\|$$

5.2 Base orthonormée et matrice orthogonale

Définition 19. Une **matrice orthogonale** est une matrice carrée d'ordre n formée de n vecteurs **orthonormés**.

Proposition 10.

1. Si U est une matrice orthogonale alors $U^T U = I \iff U^{-1} = U^T$
2. $|\det U| = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ux\| = \|x\|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
5. $(Ux) \cdot (Uy) = 0 \iff x \cdot y = 0$

Une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ représentée par une matrice orthogonale préserve les longueurs et l'orthogonalité des vecteurs de \mathbb{R}^n .

5.3 Procédé de Gram-Schmidt

Proposition 11. Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base quelconque d'un espace euclidien \mathcal{V} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, alors il existe une base orthogonale $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ qui peut être construite à partir de la base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ comme suit :

$$u_1 = v_1$$

$$u_{i>1} = v_i - \sum_{j>1}^i \text{proj}_{u_{j-1}} v_i$$

Il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale pour obtenir une base orthonormée.

6 Diagonalisation de matrices

6.1 Matrice semblables et processus de diagonalisation

Définition 20. Deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible d'ordre n telle que

$$P^{-1}AP = A'$$

6.2 Matrices semblables, transformation linéaire et changement de base

Proposition 12. Soit B et B' deux bases de \mathcal{V} , une transformation linéaire $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ et $[T]_{B \leftarrow B} = [T]_B$ et $[T]_{B' \leftarrow B'} = [T]_{B'}'$, les deux matrices relatives à ces bases. On a :

$$P_{B' \leftarrow B} [T]_B P_{B \leftarrow B'} = [T]_{B'}$$

avec

$$P_{B \leftarrow B'} = ([b'_1]_B, [b'_2]_B, \dots, [b'_n]_B)$$

Ainsi $[T]_{B'}$ et $[T]_B$ sont semblables car $P_{B' \leftarrow B} = (P_{B \leftarrow B'})^{-1}$

6.3 Matrices semblables et diagonalisation

Proposition 13.

1. Pour chaque λ_i fixé, $(A - \lambda_i I)$ est une matrice **singulière** ($\det(A - \lambda_i I) = 0$) car il doit exister des solutions non-triviales $U_{\lambda_i} \neq 0$ au système homogène $(A - \lambda_i I)u_{\lambda_i} = 0$
2. Le polynôme en λ , noté $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est appelé **polynôme caractéristique** de A
3. Les **valeurs propres** de A sont les racines de l'équation caractéristique $p_A(\lambda) = 0$. Il y en a exactement n (comptées avec leur **multiplicité algébrique**)
4. Tous les $u_{\lambda_i} \neq 0$ doivent être linéairement indépendants (car P est inversible)
5. Le vecteur u_{λ_i} est un **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** λ_i . Il satisfait $Au_{\lambda_i} = \lambda_i u_{\lambda_i}$

6.4 Valeurs propres et multiplicité algébrique

Proposition 14.

1. Une matrice singulière a toujours au moins une de ses valeurs propres égale à zéro
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont données par les éléments de sa diagonale. En particuliers, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux

6.5 Espaces propres et multiplicité géométrique

Définition 21. Soit A une matrice d'ordre n , l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est défini comme le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{u \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)u = 0\}$$

$$\dim E_\lambda = n - \text{rang}(A - \lambda I)$$

C'est la **multiplicité géométrique** de λ associée à A . Une base de chaque espace propre E_λ est formée des vecteurs linéairement indépendants solutions du système homogène $(A - \lambda I)u = 0$

Proposition 15.

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
2. Si l'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est de dimension 1, alors le vecteur propre associé est défini à un multiple près.
3. Si $\dim E_\lambda > 1$, les vecteurs propres associés forment une base de E_λ et il y a une infinité de manière de choisir ces vecteurs.

6.6 Diagonalisation de matrices carrées

Théorème 10. Une matrice A d'ordre n est diagonalisable \iff elle admet exactement n vecteurs propres linéairement indépendants $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_n}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Autrement, A est diagonalisable \iff il existe une matrice P d'ordre n inversible telle que

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

avec $P = u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_n}$

1. Si elle existe, la matrice diagonale D est formée des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.
2. L'ordre des valeurs et vecteurs propres est important lorsque l'on forme D et P .
3. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
4. Une matrice qui possède n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Théorème 11. Corollaire Si A est diagonalisable alors,

1. $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
2. $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
3. $A^k = PD^kP^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$
4. $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
5. Les matrices A et D sont semblables

7 Diagonalisation de matrices, valeurs propres multiples, diagonalisation des matrices symétriques réelles et hermitiennes complexes

7.1 Diagonalisation de matrices et valeurs propres multiples

Théorème 12. Soit une matrice A d'ordre n admettant $p \leq n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicité algébrique $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p : \sum \alpha_i = n$. Alors,

1. $\dim E_{\lambda_k} \leq \alpha_k, \forall k = 1, 2, \dots, p$
2. A est diagonalisable $\iff \dim E_{\lambda_k} = \alpha_k, \forall k = 1, \dots, p$
3. Si A est diagonalisable alors les vecteurs propres de A sont des vecteurs de base de tous les espaces propres $\dim E_{\lambda_k}, \forall k = 1, \dots, p$. Ils servent à construire la matrice inversible P .

Théorème 13. Corollaire

1. Toute matrice carrée n'est pas forcément diagonalisable
2. Une matrice est diagonalisable \iff la **multiplicité algébrique** des valeurs propres est **égale** à la **multiplicité géométrique** de ces dernières

7.2 Lien entre changement de base et diagonalisation de matrice associées à des transformations linéaires

Proposition 16. Si $A = [T]_B$ est diagonalisable sous la forme $P^{-1}AP = D$ alors D est la matrice qui représente T dans la base formée des vecteurs propres de A et $P = P_{B \leftarrow B'}$

7.3 Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Définition 22. Une **matrice hermitienne** A d'ordre n qui prend ses valeurs dans les nombres complexes est telle que $\bar{A}^T = A$ où \bar{A} signifie que cette matrice est formée des éléments obtenus en prenant la conjugaison complexe de chaque éléments de la matrice A .

Proposition 17. Une matrice hermitienne dont tout les éléments sont réels est une **matrice symétrique réelle**. Tout les théorèmes valables pour les matrices hermitiennes complexes le sont aussi pour les matrice symétriques réelles.

Théorème 14.

1. Une matrice hermitienne complexe A (symétrique réelle) est diagonalisable
2. Ses valeurs propres sont nécessairement réelles
3. Il existe une matrice unitaire U (orthogonale réelle) qui la diagonalise.

$$\exists U \in \mathbb{C}^{n \times n} : \bar{U}^T U = I \text{ et } U^{-1}AU = \bar{U}^T AU = D$$

Index

A

Application coordonnée 4
Application linéaire 3, 6

B

Base 4, 5, 7, 9
Base canonique 5
Base orthogonale 7, 8
Base orthonormée 7, 8
Bijection 3

C

Cauchy-Schwarz 6
Changement de base 5
Complément orthogonal 6

D

Diagonalisation 11
Dimension 4, 5

E

Ensemble générateur 4
Equation caractéristique 9
Espace d'arrivé 5
Espace de départ 5
Espace euclidien 6, 8
Espace propre 9, 11

F

Famille orthogonale 7

I

Image 3, 5
Injectivité 3
Inégalité triangulaire 6
Isomorphisme 3-5

M

Matrice associée 5
Matrice canonique 5
Matrice de changement de base 5
Matrice de passage 5
Matrice diagonalisable 10, 11
Matrice hermitienne 11
Matrice orthogonale 8, 11
Matrice relative 9

Matrice semblable 9, 10
Matrice singulière 9
Matrice triangulaire 9
Matrice unitaire 11
Meilleur approximation 8
Multiplicité algébrique 9, 11
Multiplicité géométrique 9, 11

N

Norme 6
Noyau 3, 5

O

Orthogonalité 6

P

Particularité de la diagonalisation 11
Polynôme caractéristique 9
Procédé de Gram-Schmidt 8
Produit scalaire 6-8
Projection orthogonale 8
Propriétés de l'orthogonalité 6
Propriétés des bases orthogonales/normées 7
Propriétés des matrices diagonalisable 10
Propriétés des matrices orthogonales 8
Propriétés du produit scalaire 6

R

Rang 5

S

Surjectivité 3
Système de coordonnées 4

T

Théorème spectral 11
Transformation linéaire 3, 5, 8, 9, 11

U

Unitaire 6

V

Valeur propre 9-11
Vecteur propre 9-11
Vecteurs orthogonaux 6