

## Question 1

Soit l'application de  $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$  définie par  $T(p(x)) = x(x+1)p''(x) + (x-1)p'(x) - p(x)$ .

a)

Soit le polynôme  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , l'application  $T$  est

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= (x-1)(2ax+b) - ax^2 + 2a(x+1)x - bx - c \\ &= 3ax^2 - b - c \end{aligned}$$

b)

Par la proposition suivante,

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \iff T \text{ est une tranformation linéaire}$$

montrons que  $T$  est une transformation linéaire.

*Proof.* Soit  $p_1(x) = ax^2 + bx + c, p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)) &= (x-1)(\alpha(2ax+b) + \beta(2Ax+B)) + x(x+1)(2a\alpha + 2A\beta) \\ &\quad + \alpha(-(ax^2 + bx + c)) - \beta(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 3a\alpha x^2 + 3A\beta x^2 - \alpha b - \beta B - \alpha c - \beta C \\ &= \alpha T(p_1(x)) + \beta T(p_2(x)) \end{aligned}$$

□

c)

Déterminons la matrice associée  $A$  à l'application linéaire  $T$  en considérant les polynôme de  $\mathbb{P}_2$  comme des vecteurs (eg:  $p_1(x) := (c, b, a)$ ).

$$\begin{cases} T(1) = -1 \implies (-1, 0, 0) \\ T(x) = -1 \implies (-1, 0, 0) \\ T(x^2) = 3x^2 \implies (0, 0, 3) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aini, l'image de  $T$  est évidente,

$$\text{im}(T) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et le noyau de  $T$  est

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \ker(T) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, l'image et le noyau sont respectivement de dimensions 2 et 1.

d)

Par un théorème,

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2 \text{ surjective} \iff \text{im}(T) = \mathbb{P}_2$$

Or, la dimensions de  $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$  tandis que celle de  $\dim(\text{im}(T)) = 2$ , alors la transformation linéaire n'est pas surjective.