Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Algèbre Linéaire

Julien Hébert-Doutreloux

April 27, 2020

Contents

1 Transformation linéaire et leurs propriétés

1.1 Transformation linéaire entre deux espaces vectoriels quelconques

Définition 1. *Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels sur le corps des réels. L'application $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est dite linéaire si :*

1. $T(O_{\mathcal{V}}) = O_{\mathcal{W}}$
2. $T(u+v) = T(u) + t(v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$
3. $T(cu) = cT(u), \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}$

Proposition 1.

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu+dv) = cT(u) + dT(v) \Longleftrightarrow T \textit{ est une tranformation linéaire}$$

1.2 Noyau et image d'une transformation linéaire

Définition 2. *Le noyau de T est un sous-ensemble de $\mathcal{V}$ défini :* $\ker(T) = \{u \in \mathcal{V} : T(u) = O_{\mathcal{W}}\}$.

Définition 3. *L'image de T est un sous-ensemble de $\mathcal{W}$ définie :* $\mathrm{im}(T) = \{w \in \mathcal{W} : \exists u \in \mathcal{V} | w = T(u)\}$.

Proposition 2. *Si $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire alors,*

1. $\ker(T)$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$*
2. $\mathrm{im}(T)$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{W}$*

1.3 Transformation linéaire injective, surjective, isomorphisme

Définition 4. *Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est **injective** si tout vecteur de $\mathcal{W}$ est l'image **d'au plus** un vecteur de $\mathcal{V}$.*

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \Longleftrightarrow \forall u_1, u_2 \in \mathcal{V} : u_1 \overset{\neq}{=} u_2 \implies T(u_1) \overset{\neq}{=} T(u_2).$$

Théorème 1.

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \Longleftrightarrow \ker(T) = \{O_{\mathcal{V}}\}$$

Définition 5. *Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est **surjective** si tout vecteur de $\mathcal{W}$ est l'image **d'au moins** un vecteur de $\mathcal{V}$.*

Théorème 2.

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ surjective} \Longleftrightarrow \mathrm{im}(T) = \mathcal{W}$$

Définition 6. *Une transformation linéaire qui est à la fois injective et surjective est appelée un **isomorphisme** (bijective).*

1.4 Transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et matrice associée

Proposition 3. *Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire et A est la matrice associée à T alors* $\ker(T) = \ker A$ *et* $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}\ A$.

1. T injective $\Longleftrightarrow \ker A = \{O\}$ *colonnes de A linéairement indépendantes*
2. T surjective $\Longleftrightarrow \mathrm{im}\ A = \mathbb{R}^m$ *colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$*

2 Bases et systèmes de coordonnées dans des espaces vectoriels

2.1 Base d'un espace ou sous-espace vectoriel

Définition 7. *Soit un* ***espace (resp. sous-ensemble) vectoriel*** $\mathcal{V}$*. Un ensemble de vecteurs* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ***est une base de*** $\mathcal{V}$ *si*

1. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *est une famille libre (linéairement indépendant)*
2. $\mathcal{V} = \text{Vect}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *(famille génératrice)*

2.2 Système de coordonnées

Théorème 3. *Soit* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *une base d'un espace vectoriel* $\mathcal{V}$*, alors*

$$\forall v \in \mathcal{V}, \exists! c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

Les coefficients réels $c_1, c_2, ..., c_n$ *sont les* ***composantes ou les coordonnées*** *du vecteur* v *dans la base* B*. Autrement,*

$$[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La correspondance entre l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ *et* $\mathbb{R}^n$ *est l'****application coordonnées*** *(relative à la base* B*)* $T_C : v \in \mathcal{V} \longrightarrow [v]_B$

Théorème 4. *Soit* B *une base formée de* n *vecteurs d'un espace vectoriel* $\mathcal{V}$*. L'application coordonnées* $T_C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

2.3 Dimension d'un espace ou d'un sous-espace vectoriel

Définition 8. *La* ***dimension (****$\dim \mathcal{V}$****) d'un espace vectoriel est donnée par le nombre de vecteurs de ses bases.***

Théorème 5. *Soit* $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *une base formée de* n *vecteurs d'un espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *alors toute famille de* $\mathcal{V}$ *contenant plus de* n *vecteurs est* ***liée****. La dimension de d'une base de l'espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *équivalente à la dimension de l'espace vectoriel* $\mathcal{V}$*.*

2.4 Théorèmes sur les bases

Théorème 6. *Si* $\dim \mathcal{V} = p \in \mathbb{N}$*, alors tout ensemble linéairement indépendant de* p *vecteurs est une base de* $\mathcal{V}$ *et tout ensemble générateur de* p *vecteurs est un base de* $\mathcal{V}$*.*

3 Changement de base et matrices associées à une transformation linéaire, rang

3.1 Système de coordonnées, matrice de passage

Définition 9. *Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ et $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base de $\mathcal{V}$. La* ***matrice de passage*** *de la base B à la* ***base canonique*** *est définie par $P_B = (v_1\ v_2\ ...\ v_n)$, la matrice formée des vecteurs de B.*

Proposition 4. *Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (dans la base canonique) satisfait $x = P_B[x]_B \iff [x]_B = P_B^{-1}x$.*

3.2 Système de coordonnées, matrice de passage et changement de base

Définition 10. *Soit $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ et $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimensions finie n. La* ***matrice de passage de la base*** *B* ***à la base*** *C est définie par $P_{C\leftarrow B} = \big([b_1]_C[b_2]_C...[b_n]_C\big)$. La matrice de changement de base de B à C est la matrice formée des coordonnées des vecteurs de B dans la base C.*

Théorème 7. *La matrice de changement de base est unique et inversible telle que $\big(P_{C\leftarrow B}\big)^{-1} = P_{B\leftarrow C}$ et que pour tout vecteur $x \in \mathcal{V}, [x]_C = P_{C\leftarrow B}[x]_B$.*
Si P_B (resp. P_C) est la matrice de passage de B (resp. C) à la base canonique alors, $P_{C\leftarrow B} = \big(P_C\big)^{-1}P_B$.

3.3 Matrice associée à une transformation linéaire

Définition 11. *Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$, telle que* $\dim\ \mathcal{V} = n$ *et* $\dim\ \mathcal{W} = m$. *Soit $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ une base de $\mathcal{V}$ et $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ une base de $\mathcal{W}$. La matrice associée à la transformation linéaire dans les bases B et C est donnée par*

$$[T]_{C\leftarrow B} = \Big(\big[T(b_1)\big]_C\ \big[T(b_2)\big]_C\ ...\ \big[T(b_n)\big]_C\Big) \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \textit{et} \quad \big[T(v)\big]_C = [T]_{C\leftarrow B}[v]_B, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Proposition 5. *Soit la transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ et soit deux bases différentes dans chacuns des espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. Soit B et B' des bases de l'espace de départ et, C et C' deux bases de l'espace d'arrivé.*

- *$P_{B\leftarrow B'}$ (resp. $P_{C'\leftarrow C}$), la matrice de changement de base de B' à B (resp. C à C') dans $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$)*
- *$[T]_{C\leftarrow B}$ (resp. $[T]_{C'\leftarrow B'}$), la matrice associée à T dans les bases B et C (resp. B' et C')*

Alors,

$$[T]_{C'\leftarrow B'} = P_{C'\leftarrow C}[T]_{C\leftarrow B}P_{B\leftarrow B'}$$

3.4 Rang d'une transformation linéaire et matrice associée

Définition 12. *Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire telle que* $\dim\ \mathcal{V} = n$ *et* $\dim\ \mathcal{W} = m$. *Le* ***rang*** *de T est égal à la dimension de son image :* $\text{rang}\ T = \dim(\text{im}\ T)$.
Si A est la matrice canonique associée à $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, alors

$$\text{rang}\ T = \text{rang}\ A = \dim(\text{im}\ A)$$

(nombre de pivot de A et donc le nombre r de variables de bases). Alors que $\dim(\ker A) = n - r$, *le nombre de variables libres. Autrement dit,*

$$\dim(\text{im}\ A) + \dim(\ker A) = n$$

Théorème 8. *Soit $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ une transformation linéaire, alors*

$$\text{rang}\ T + \dim(\ker T) = \dim\ \mathcal{V} \quad \textit{ou encore} \quad \dim(\text{im}\ T) + \dim(\ker T) = \dim\ \mathcal{V}$$

Proposition 6. *Si la transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ est un* ***isomorphisme*** *alors* $\dim\ \mathcal{V} = \dim\ \mathcal{W}$.

4 Produit scalaire, norme, orthogonalité sur un espace vectoriel, notion d'espace euclidien

4.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$

Définition 13. *Un produit scalaire **réel** sur un espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *est une application notée* $\langle , . , \rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $(u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle$*, vérifiant les axiomes suivants* $\forall u,v,w \in \mathcal{V}$ *et* $\forall c \in \mathbb{R}$ *:*

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
2. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
3. $\langle cu,v\rangle = c\langle u,v\rangle$
4. $\langle u,u\rangle \geq 0$ *et* $\langle u,u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

4.2 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ et norme

Définition 14. *La norme est donnée par :*

$$||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

Normaliser :

$$\hat{u} = \frac{u}{||u||}, \quad ||\hat{u}|| = 1$$

Proposition 7.

1. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$
2. $||cu|| = |c| \cdot ||u||, \forall c \in \mathbb{R}$
3. $|\langle u,v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$ *et* $|\langle u,v\rangle| = ||u|| \cdot ||v|| \Longleftrightarrow u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$ *et* $||u+v|| = ||u|| + ||v|| \Longleftrightarrow u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4.3 Orthogonalité et propriétés

Définition 15. *Soit un espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *muni d'un produit scalaire* $\langle , . , \rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $(u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle$*, alors les vecteurs* u *et* v *sont dits **orhtogonaux** si* $\langle u,v\rangle = 0$

Définition 16. *Soit* $\mathcal{W}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{V}$*. Le **complément orthogonal** de* $\mathcal{W}$*, noté* $\mathcal{W}^\perp$*, est l'espace engedré par les vecteurs orthogonaux à* $\mathcal{W}$*:*

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{ z \in \mathcal{V} | \langle z,w\rangle = 0, \forall w \in \mathcal{W} \right\}$$

Proposition 8. *Soit un espace vectoriel* $\mathcal{V}$ *(et* $\mathcal{W}$ *un sous-espace) muni d'un produit scalaire* $\langle , . , \rangle : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $(u,v) \longmapsto \langle u,v\rangle$*. Un tel espace est appelé **espace euclidien**. Alors,*

1. *le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de* $\mathcal{V}$
2. *les vecteurs* u *et* v *de* $\mathcal{V}$ *sont orthogonaux* $\Longleftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$
3. *si* $\mathcal{W} = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2, ..., u_n\}$*, on a* $z \in \mathcal{W}^\perp \Longleftrightarrow \langle z, u_i\rangle = 0, \forall i = 1,2,...,p$
4. $\mathcal{W}^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{V}$
5. *si* $\mathcal{V}$ *ests de dimension finie, alors* $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$
6. $\mathcal{W} \subset \mathcal{H} \Longleftrightarrow \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{W}^\perp$ *(*$\mathcal{H}$ *sous-espace de* $\mathcal{V}$*)*
7. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$
8. $\{0\}^\perp = \mathcal{V}$

4.4 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

Définition 17. *Un ensemble de vecteur $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de $\mathcal{V}$ muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ forme une* ***base orthogonal*** *si*

1. *B est une base*
2. *Les vecteurs de B sont mutuellement orthogonaux*

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \forall i, j = 1, 2, ..., n, i \neq j$$

La base est orthonormée si tous ses vecteurs sont ***unitaire****.*

Proposition 9.

1. *Si deux vecteurs u et v non nuls de $\mathcal{V}$ sont* ***orthogonaux****, alors ils sont* ***linéairement indépendants****.*
2. *Si $\dim \mathcal{V} = n$ et que $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ est une famille orthogonale de vecteurs de $\mathcal{V}$ alors c'est une base de $\mathcal{V}$.*

5 Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt

5.1 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Définition 18. *Soit $u \neq 0$ et y deux vecteurs de l'espace euclidien $\mathcal{V}$, alors la projection orthogonale de y sur u est donnée par le vecteur,*

$$\hat{y} = \text{proj}_u y = \frac{\langle y, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{\langle y, u\rangle}{||u||^2} u$$

Théorème 9. *Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace d'un espace euclidien $\mathcal{V}$ et $B = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ une base **orthogonale** de $\mathcal{W}$, alors tout vecteur y de $\mathcal{V}$ s'écrit de façon **unique** sous la forme*

$$y = \hat{y} + z, \quad \hat{y} \in \mathcal{W}, z \in \mathcal{W}^\perp$$

$$\hat{y} = \text{proj}_{\mathcal{W}} y = \text{proj}_{u_1} y + \text{proj}_{u_2} y + \cdots + \text{proj}_{u_p} y = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle y, u_i\rangle}{||u_i||^2} u_i$$

$$z = y - \hat{y}$$

*Le vecteur $\hat{y}$ est appelé le vecteur de **projection orthogonale de** y **sur** $\mathcal{W}$. Aussi appelé la **meilleur approximation de** y **par un élément de** $\mathcal{W}$ dans le sens suivant :*

$$\forall v \in \mathcal{W}\backslash\{\hat{y}\}, ||y - \hat{y}|| < ||y - v||$$

5.2 Base orthonormée et matrice orthogonale

Définition 19. *Une **matrice orthogonale** est une matrice carrée d'ordre n formée de n vecteurs **orthonormés**.*

Proposition 10.

1. *Si U est une matrice orthogonale alors $U^T U = I \iff U^{-1} = U^T$*
2. $|\det U| = 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, ||Ux|| = ||x||$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
5. $(Ux) \cdot (Uy) = 0 \iff x \cdot y = 0$

Une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ représentée par une matrice orthogonale préserve les longueurs et l'orthogonalité des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

5.3 Procédé de Gram-Schmidt

Proposition 11. *Soit $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ une base quelconque d'un espace euclidien $\mathcal{V}$ muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$, alors il existe une base orthogonale $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ qui peut être construite à partir de la base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ comme suit :*

$$u_1 = v_1$$

$$u_{i>1} = v_i - \sum_{j>1}^{i} \text{proj}_{u_{j-1}} v_i$$

Il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale pour obtenir une base orthonormée.

6 Diagonalisation de matrices

6.1 Matrice semblables et processus de diagonalisation

Définition 20. *Deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont dites* ***semblables*** *s'il existe une matrice P inversible d'ordre n telle que*

$$P^{-1}AP = A'$$

6.2 Matrices semblables, transformation linéaire et changement de base

Proposition 12. *Soit B et B' deux bases de $\mathcal{V}$, une transformation linéaire $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $[T]_{B\leftarrow B} = [T]_B$ et $[T]_{B'\leftarrow B'} = [T]'_B$, les deux matrices relatives à ces bases. On a :*

$$P_{B'\leftarrow B}[T]_B P_{B\leftarrow B'} = [T]_{B'}$$

avec

$$P_{B\leftarrow B'} = \left([b'_1]_B, [b'_2]_B, ..., [b'_n]_B, \right)$$

Ainsi $[T]_{B'}$ et $[T]_B$ sont semblables car $P_{B'\leftarrow B} = \left(P_{B\leftarrow B'}\right)^{-1}$

6.3 Matrices semblables et diagonalisation

Proposition 13.

1. *Pour chaque λ_i fixé, $(A - \lambda_i I)$ est une matrice* ***singulière*** *($\det(A - \lambda_i I) = 0$) car il doit exister des solutions non-triviales $U_{\lambda_i} \neq 0$ au système homogène $(A - \lambda_i I)u_{lambda_i} = 0$*
2. *Le polynôme en λ, noté $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est appelé* ***polynôme caractéristique*** *de A*
3. *Les* ***valeurs propres*** *de A sont les racines de* ***l'équation caractéristique*** *$p_A(\lambda) = 0$. Il y en a exactement n (comptées avec leur* ***multiplicité algébrique****)*
4. *Tous les $u_{\lambda_i} \neq 0$ doivent être linéairement indépendant (car P est inversible)*
5. *Le vecteur u_{λ_i} est un* ***vecteur propre*** *de A associé à la* ***valeur propre*** *λ_i. Il satisfait $Au_{\lambda_i} = \lambda_i u_{\lambda_i}$*

6.4 Valeurs propres et multiplicité algébrique

Proposition 14.

1. *Une matrice singulière à toujours au moins une de ses valeurs propres égale à zéro*
2. *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont données par les éléments des sa diagonale. En particuliers, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux*

6.5 Espaces propres et multiplicité géométrique

Définition 21. *Soit A une matrice d'ordre n, l'espace propre de A associé à la valeur propre λ est défini comme le sous-espace vectoriel*

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{u \in \mathbb{C}^n | (A - \lambda I)u = 0\}$$
$$\dim E_\lambda = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)$$

C'est la ***multiplicité géométrique*** *de λ associée à A. Une base de chaque espace propre E_λ est formée des vecteurs linéairement indépendants solutions du système homogène $(A = \lambda I)u = 0$*

Proposition 15.

1. *Des vecteurs propres associés à des vecteurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*
2. *Si l'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ est de dimension 1, alors le vecteur propre assoicé est défini à un multiple près.*
3. *Si $\dim E_\lambda > 1$, les vecteurs propres associés forment une base de E_λ et il y a une infinité de manière de choisir ces vecteurs.*

6.6 Diagonalisation de matrices carrées

Théorème 10. *Une matrice A d'ordre n est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ elle admet exactement n vecteurs propres linéairement indépendants $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, ..., u_{\lambda_n}$ correspondant aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Autrement, A est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ il existe une matrice P d'ordre n inversible telle que*

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$

avec $P = u_{\lambda_1}\, u_{\lambda_2} \ldots u_{\lambda_n}$

1. *Si elle existe, la matrice diagonale D est formée des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.*
2. *L'ordres des valeurs et vecteurs propres est important lorsque l'on forme D et P.*
3. *Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*
4. *Une matrice qui possède n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Théorème 11. *Corollaire Si A est diagonalisable alors,*

1. $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
3. $A^k = PD^kP^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$
4. $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
5. *Les matrices A et D sont semblables*

7 Diagonalisation de matrices, valeurs propres multiples, diagonalisation des matrices symétriques réelles et hermitiennes complexes

7.1 Diagonalisation de matrices et valeurs propres multiples

Théorème 12 (Algorithme de diagonalisation)**.** *SoitA une matrice $n \times n$ diagonalisable ($A = PDP^{-1}$). Pour diagonaliser la matrice A, on procède comme suit;*

1. *Déterminer le polynôme caratéristique de A*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. *Trouver les racines de $P_A(\lambda)$ (valeurs propres de A)*
3. *Déterminer les bases des espaces propres E_λ*
4. *Construire la matrice inversible P à partir des vecteurs de base de tous les espaces propres*
5. *Construire la matrice diagonale D à partir des valeurs propres de A.*

Théorème 13. *Soit une matrice A d'ordre n admettant $p \leq n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de multiplicité algébrique $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p : \sum \alpha_i = n$. Alors,*

1. $\dim E_{\lambda_k} \leq \alpha_k, \forall k = 1, 2, ..., p$
2. *A est diagonalisable* $\iff \dim E_{\lambda_k} = \alpha_k, \forall k = 1, ..., p$
3. *Si A est diagonalisable alors les vecteurs propres de A sont des vecteurs de base de tous les espaces propres $\dim E_{\lambda_k}, \forall k = 1, ..., p$. Ils servent à construire la matrice inversible P.*

Théorème 14. *Corollaire*

1. *Toute matrice carrée n'est pas forcément diagonalisable*
2. *Une matrice est diagonalisable $\iff$ la **multiplicité algébrique** des valeurs propres est **égale** à la **multiplicité géométrique** de ces dernières*

7.2 Lien entre changement de base et diagonalisation de matrice associées à des transformations linéaires

Proposition 16. *Si $A = [T]_B$ est diagonalisable sous la forme $P^{-1}AP = D$ alors D est la matrice qui représente T dans la base formée des vecteurs propres de A et $P = P_{B \leftarrow B'}$*

7.3 Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Définition 22. *Une **matrice hermitienne** A d'ordre n qui prend ses valeurs dans les nonbres complexes est telle que $\bar{A}^T = A$ où $\bar{A}$ signifie que cette matrice est formée des éléments obtenus en prenant la conjugaison complexe de chaque éléments de la matrice A.*

Proposition 17. *Une matrice hermitienne dont tout les éléments sont réels est une **matrice symétrique réelle**. Tout les théorèmes valables pour les matrices hermitiennes complexes le sont aussi pour les matrice symétriques réelles.*

Théorème 15.

1. *Une matrice hermitienne complexe A (symétrique réelle) est diagonalisable*
2. *Ses valeurs propres sont nécessairement réelles*
3. *Il existe une matrice unitaire U (orthogonale réelle) qui la diagonalise.*

$$\exists U \in \mathbb{C}^{n \times n} : \bar{U}^T U = I \text{ et } U^{-1}AU = \bar{U}^T AU = D$$

Index