



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FICHE RÉCAPITULATIVE

## Algèbre Linéaire

*Julien Hébert-Doutreloux*

April 25, 2020

# Contents

<b>1</b>	<b>Transformation linéaire et leurs propriétés</b>	<b>3</b>
1.1	Transformation linéaire entre deux espaces vectoriels quelconques . . . . .	3
1.2	Noyau et image d’une transformation linéaire . . . . .	3
1.3	Transformation linéaire injective, surjective, isomorphisme . . . . .	3
1.4	Transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et matrice associée . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Bases et systèmes de coordonnées dans des espaces vectoriels</b>	<b>4</b>
2.1	Base d’un espace ou sous-espace vectoriel . . . . .	4
2.2	Système de coordonnées . . . . .	4
2.3	Dimension d’un espace ou d’un sous-espace vectoriel . . . . .	4
2.4	Théorèmes sur les bases . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Changement de base et matrices associées à une transformation linéaire, rang</b>	<b>5</b>
3.1	Système de coordonnées, matrice de passage . . . . .	5
3.2	Système de coordonnées, matrice de passage et changement de base . . . . .	5
3.3	Matrice associée à une transformation linéaire . . . . .	5
3.4	Rang d’une transformation linéaire et matrice associée . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Produit scalaire, norme, orthogonalité sur un espace vectoriel, notion d’espace euclidien</b>	<b>6</b>
4.1	Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ . . . . .	6
4.2	Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ et norme . . . . .	6
4.3	Orthogonalité et propriétés . . . . .	6
4.4	Ensembles orthogonaux et bases orthogonales . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt</b>	<b>8</b>
5.1	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel . . . . .	8
5.2	Base orthonormée et matrice orthogonale . . . . .	8
5.3	Procédé de Gram-Schmidt . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Diagonalisation de matrices</b>	<b>9</b>
6.1	Matrice semblables et processus de diagonalisation . . . . .	9
6.2	Matrices semblables, transformation linéaire et changement de base . . . . .	9
6.3	Matrices semblables et diagonalisation . . . . .	9
6.4	Valeurs propres et multiplicité algébrique . . . . .	9
6.5	Espaces propres et multiplicité géométrique . . . . .	9
6.6	Diagonalisation de matrices carrées . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Diagonalisation de matrices, valeurs propres multiples, diagonalisation des matrices symétriques réelles et hermitiennes complexes</b>	<b>11</b>
7.1	Diagonalisation de matrices et valeurs propres multiples . . . . .	11
7.2	Lien entre changement de base et diagonalisation de matrice associées à des transformations linéaires . . . . .	11
7.3	Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes . . . . .	11
	<b>Index</b>	<b>12</b>

# 1 Transformation linéaire et leurs propriétés

## 1.1 Transformation linéaire entre deux espaces vectoriels quelconques

**Définition 1.** Soit  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  deux espaces vectoriels sur le corps des réels. L'application  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  est dite *linéaire* si :

1.  $T(O_{\mathcal{V}}) = O_{\mathcal{W}}$
2.  $T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$
3.  $T(cu) = cT(u), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{V}$

**Proposition 1.**

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \iff T \text{ est une transformation linéaire}$$

## 1.2 Noyau et image d'une transformation linéaire

**Définition 2.** Le noyau de  $T$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{V}$  défini :  $\ker(T) = \{u \in \mathcal{V} : T(u) = O_{\mathcal{W}}\}$ .

**Définition 3.** L'image de  $T$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{W}$  définie :  $\text{im}(T) = \{w \in \mathcal{W} : \exists u \in \mathcal{V} | w = T(u)\}$ .

**Proposition 2.** Si  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  une transformation linéaire alors,

1.  $\ker(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$
2.  $\text{im}(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{W}$

## 1.3 Transformation linéaire injective, surjective, isomorphisme

**Définition 4.** Soit  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  est **injective** si tout vecteur de  $\mathcal{W}$  est l'image **d'au plus** un vecteur de  $\mathcal{V}$ .

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \iff \forall u_1, u_2 \in \mathcal{V} : u_1 \not\equiv u_2 \implies T(u_1) \not\equiv T(u_2).$$

**Théorème 1.**

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ injective} \iff \ker(T) = \{O_{\mathcal{V}}\}$$

**Définition 5.** Soit  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  deux espaces vectoriels sur le corps des réels. La transformation linéaire  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  est **surjective** si tout vecteur de  $\mathcal{W}$  est l'image **d'au moins** un vecteur de  $\mathcal{V}$ .

**Théorème 2.**

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} \text{ surjective} \iff \text{im}(T) = \mathcal{W}$$

**Définition 6.** Une transformation linéaire qui est à la fois injective et surjective est appelée un **isomorphisme** (bijective).

## 1.4 Transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et matrice associée

**Proposition 3.** Si  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est une transformation linéaire et  $A$  est la matrice associée à  $T$  alors  $\ker(T) = \ker A$  et  $\text{im}(T) = \text{im } A$ .

1.  $T$  injective  $\iff \ker A = \{O\}$  colonnes de  $A$  linéairement indépendantes
2.  $T$  surjective  $\iff \text{im } A = \mathbb{R}^m$  colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$

## 2 Bases et systèmes de coordonnées dans des espaces vectoriels

### 2.1 Base d'un espace ou sous-espace vectoriel

**Définition 7.** Soit un espace (resp. sous-ensemble) vectoriel  $\mathcal{V}$ . Un ensemble de vecteurs  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est une **base** de  $\mathcal{V}$  si

1.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  est une famille libre (linéairement indépendant)
2.  $\mathcal{V} = \text{Vect}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  (famille génératrice)

### 2.2 Système de coordonnées

**Théorème 3.** Soit  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$ , alors

$$\forall v \in \mathcal{V}, \exists! c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Les coefficients réels  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sont les **composantes** ou les **coordonnées** du vecteur  $v$  dans la base  $B$ . Autrement,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La correspondance entre l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  et  $\mathbb{R}^n$  est l'**application coordonnées** (relative à la base  $B$ )  $T_C : v \in \mathcal{V} \longrightarrow [v]_B$

**Théorème 4.** Soit  $B$  une base formée de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$ . L'application coordonnées  $T_C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3 Dimension d'un espace ou d'un sous-espace vectoriel

**Définition 8.** La **dimension** ( $\dim \mathcal{V}$ ) d'un espace vectoriel est donnée par le nombre de vecteurs de ses bases.

**Théorème 5.** Soit  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base formée de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  alors toute famille de  $\mathcal{V}$  contenant plus de  $n$  vecteurs est **liée**. La dimension de d'une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$  équivalente à la dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{V}$ .

### 2.4 Théorèmes sur les bases

**Théorème 6.** Si  $\dim \mathcal{V} = p \in \mathbb{N}$ , alors tout ensemble linéairement indépendant de  $p$  vecteurs est une base de  $\mathcal{V}$  et tout ensemble générateur de  $p$  vecteurs est une base de  $\mathcal{V}$ .

### 3 Changement de base et matrices associées à une transformation linéaire, rang

#### 3.1 Système de coordonnées, matrice de passage

**Définition 9.** Soit  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  et  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base de  $\mathcal{V}$ . La **matrice de passage** de la base  $B$  à la **base canonique** est définie par  $P_B = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ , la matrice formée des vecteurs de  $B$ .

**Proposition 4.** Tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  (dans la base canonique) satisfait  $x = P_B[x]_B \iff [x]_B = P_B^{-1}x$ .

#### 3.2 Système de coordonnées, matrice de passage et changement de base

**Définition 10.** Soit  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  et  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  deux bases d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de dimension finie  $n$ . La **matrice de passage de la base  $B$  à la base  $C$**  est définie par  $P_{C \leftarrow B} = ([b_1]_C [b_2]_C \dots [b_n]_C)$ . La matrice de changement de base de  $B$  à  $C$  est la matrice formée des coordonnées des vecteurs de  $B$  dans la base  $C$ .

**Théorème 7.** La matrice de changement de base est unique et inversible telle que  $(P_{C \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow C}$  et que pour tout vecteur  $x \in \mathcal{V}$ ,  $[x]_C = P_{C \leftarrow B}[x]_B$ .

Si  $P_B$  (resp.  $P_C$ ) est la matrice de passage de  $B$  (resp.  $C$ ) à la base canonique alors,  $P_{C \leftarrow B} = (P_C)^{-1}P_B$ .

#### 3.3 Matrice associée à une transformation linéaire

**Définition 11.** Soit  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  une transformation linéaire de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{W}$ , telle que  $\dim \mathcal{V} = n$  et  $\dim \mathcal{W} = m$ . Soit  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  une base de  $\mathcal{V}$  et  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  une base de  $\mathcal{W}$ . La matrice associée à la transformation linéaire dans les bases  $B$  et  $C$  est donnée par

$$[T]_{C \leftarrow B} = \left( [T(b_1)]_C \ [T(b_2)]_C \ \dots \ [T(b_n)]_C \right) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad [T(v)]_C = [T]_{C \leftarrow B}[v]_B, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

**Proposition 5.** Soit la transformation linéaire  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  et soit deux bases différentes dans chacun des espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$ . Soit  $B$  et  $B'$  des bases de l'espace de départ et,  $C$  et  $C'$  deux bases de l'espace d'arrivée.

- $P_{B \leftarrow B'}$  (resp.  $P_{C' \leftarrow C}$ ), la matrice de changement de base de  $B'$  à  $B$  (resp.  $C$  à  $C'$ ) dans  $\mathcal{V}$  (resp.  $\mathcal{W}$ )
- $[T]_{C \leftarrow B}$  (resp.  $[T]_{C' \leftarrow B'}$ ), la matrice associée à  $T$  dans les bases  $B$  et  $C$  (resp.  $B'$  et  $C'$ )

Alors,  $[T]_{C' \leftarrow B'} = P_{C' \leftarrow C}[T]_{C \leftarrow B}P_{B \leftarrow B'}$

#### 3.4 Rang d'une transformation linéaire et matrice associée

**Définition 12.** Soit  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  une transformation linéaire telle que  $\dim \mathcal{V} = n$  et  $\dim \mathcal{W} = m$ . Le **rang** de  $T$  est égal à la dimension de son image :  $\text{rang } T = \dim(\text{im } T)$ .

Si  $A$  est la matrice canonique associée à  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , alors

$$\text{rang } T = \text{rang } A = \dim(\text{im } A)$$

(nombre de pivot de  $A$  et donc le nombre  $r$  de variables de bases). Alors que  $\dim(\ker A) = n - r$ , le nombre de variables libres. Autrement dit,

$$\dim(\text{im } A) + \dim(\ker A) = n$$

**Théorème 8.** Soit  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  une transformation linéaire, alors

$$\text{rang } T + \dim(\ker T) = \dim \mathcal{V} \quad \text{ou encore} \quad \dim(\text{im } T) + \dim(\ker T) = \dim \mathcal{V}$$

**Proposition 6.** Si la transformation linéaire  $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$  est un **isomorphisme** alors  $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$ .

## 4 Produit scalaire, norme, orthogonalité sur un espace vectoriel, notion d'espace euclidien

### 4.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$

**Définition 13.** Un produit scalaire **réel** sur un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  est une application notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$ , vérifiant les axiomes suivants  $\forall u, v, w \in \mathcal{V}$  et  $\forall c \in \mathbb{R}$  :

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3.  $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  et  $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

### 4.2 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ et norme

**Définition 14.** La norme est donnée par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Normaliser :

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}, \quad \|\hat{u}\| = 1$$

**Proposition 7.**

1.  $\|u\| = 0 \iff u = 0$
2.  $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|, \forall c \in \mathbb{R}$
3.  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  et  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  et  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff u = \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

### 4.3 Orthogonalité et propriétés

**Définition 15.** Soit un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$ , alors les vecteurs  $u$  et  $v$  sont dits **orthogonaux** si  $\langle u, v \rangle = 0$

**Définition 16.** Soit  $\mathcal{W}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$ . Le **complément orthogonal** de  $\mathcal{W}$ , noté  $\mathcal{W}^\perp$ , est l'espace engendré par les vecteurs orthogonaux à  $\mathcal{W}$ :

$$\mathcal{W}^\perp = \{z \in \mathcal{V} | \langle z, w \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{W}\}$$

**Proposition 8.** Soit un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  (et  $\mathcal{W}$  un sous-espace) muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$ . Un tel espace est appelé **espace euclidien**. Alors,

1. le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de  $\mathcal{V}$
2. les vecteurs  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{V}$  sont orthogonaux  $\iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
3. si  $\mathcal{W} = \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , on a  $z \in \mathcal{W}^\perp \iff \langle z, u_i \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$
4.  $\mathcal{W}^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$
5. si  $\mathcal{V}$  est de dimension finie, alors  $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathcal{V}$
6.  $\mathcal{W} \subset \mathcal{H} \iff \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{W}^\perp$  ( $\mathcal{H}$  sous-espace de  $\mathcal{V}$ )
7.  $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\}$
8.  $\{0\}^\perp = \mathcal{V}$

#### 4.4 Ensembles orthogonaux et bases orthogonales

**Définition 17.** Un ensemble de vecteur  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  de  $\mathcal{V}$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  forme une **base orthogonal** si

1.  $B$  est une base
2. Les vecteurs de  $B$  sont mutuellement orthogonaux

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$$

La base est orthonormée si tous ses vecteurs sont **unitaire**.

**Proposition 9.**

1. Si deux vecteurs  $u$  et  $v$  non nuls de  $\mathcal{V}$  sont **orthogonaux**, alors ils sont **linéairement indépendants**.
2. Si  $\dim \mathcal{V} = n$  et que  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $\mathcal{V}$  alors c'est une base de  $\mathcal{V}$ .

## 5 Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt

### 5.1 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

**Définition 18.** Soit  $u \neq 0$  et  $y$  deux vecteurs de l'espace euclidien  $\mathcal{V}$ , alors la projection orthogonale de  $y$  sur  $u$  est donnée par le vecteur,

$$\hat{y} = \text{proj}_u y = \frac{\langle y, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

**Théorème 9.** Soit  $\mathcal{W}$  un sous-espace d'un espace euclidien  $\mathcal{V}$  et  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  une base **orthogonale** de  $\mathcal{W}$ , alors tout vecteur  $y$  de  $\mathcal{V}$  s'écrit de façon **unique** sous la forme

$$y = \hat{y} + z, \quad \hat{y} \in \mathcal{W}, z \in \mathcal{W}^\perp$$

$$\hat{y} = \text{proj}_{\mathcal{W}} y = \text{proj}_{u_1} y + \text{proj}_{u_2} y + \dots + \text{proj}_{u_p} y = \sum_{i=1}^p \frac{\langle y, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

$$z = y - \hat{y}$$

Le vecteur  $\hat{y}$  est appelé le vecteur de **projection orthogonale de  $y$  sur  $\mathcal{W}$** . Aussi appelé la **meilleure approximation de  $y$  par un élément de  $\mathcal{W}$**  dans le sens suivant :

$$\forall v \in \mathcal{W} \setminus \{\hat{y}\}, \|y - \hat{y}\| < \|y - v\|$$

### 5.2 Base orthonormée et matrice orthogonale

**Définition 19.** Une **matrice orthogonale** est une matrice carrée d'ordre  $n$  formée de  $n$  vecteurs **orthonormés**.

**Proposition 10.**

1. Si  $U$  est une matrice orthogonale alors  $U^T U = I \iff U^{-1} = U^T$
2.  $|\det U| = 1$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ux\| = \|x\|$
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (Ux) \cdot (Uy) = x \cdot y$
5.  $(Ux) \cdot (Uy) = 0 \iff x \cdot y = 0$

Une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  représentée par une matrice orthogonale préserve les longueurs et l'orthogonalité des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.3 Procédé de Gram-Schmidt

**Proposition 11.** Soit  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  une base quelconque d'un espace euclidien  $\mathcal{V}$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ , alors il existe une base orthogonale  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  qui peut être construite à partir de la base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  comme suit :

$$u_1 = v_1$$

$$u_{i>1} = v_i - \sum_{j>1}^i \text{proj}_{u_{j-1}} v_i$$

Il suffit de normaliser les vecteurs de la base orthogonale pour obtenir une base orthonormée.



## 6 Diagonalisation de matrices

### 6.1 Matrice semblables et processus de diagonalisation

**Définition 20.** Deux matrices carrées  $A$  et  $A'$  d'ordre  $n$  sont dites **semblables** s'il existe une matrice  $P$  inversible d'ordre  $n$  telle que

$$P^{-1}AP = A'$$

### 6.2 Matrices semblables, transformation linéaire et changement de base

**Proposition 12.** Soit  $B$  et  $B'$  deux bases de  $\mathcal{V}$ , une transformation linéaire  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  et  $[T]_{B \leftarrow B} = [T]_B$  et  $[T]_{B' \leftarrow B'} = [T]_{B'}'$ , les deux matrices relatives à ces bases. On a :

$$P_{B' \leftarrow B} [T]_B P_{B \leftarrow B'} = [T]_{B'}$$

avec

$$P_{B \leftarrow B'} = ([b'_1]_B, [b'_2]_B, \dots, [b'_n]_B)$$

Ainsi  $[T]_{B'}$  et  $[T]_B$  sont semblables car  $P_{B' \leftarrow B} = (P_{B \leftarrow B'})^{-1}$

### 6.3 Matrices semblables et diagonalisation

**Proposition 13.**

1. Pour chaque  $\lambda_i$  fixé,  $(A - \lambda_i I)$  est une matrice **singulière** ( $\det(A - \lambda_i I) = 0$ ) car il doit exister des solutions non-triviales  $U_{\lambda_i} \neq 0$  au système homogène  $(A - \lambda_i I)u_{\lambda_i} = 0$
2. Le polynôme en  $\lambda$ , noté  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  est appelé **polynôme caractéristique** de  $A$
3. Les **valeurs propres** de  $A$  sont les racines de l'équation caractéristique  $p_A(\lambda) = 0$ . Il y en a exactement  $n$  (comptées avec leur **multiplicité algébrique**)
4. Tous les  $u_{\lambda_i} \neq 0$  doivent être linéairement indépendants (car  $P$  est inversible)
5. Le vecteur  $u_{\lambda_i}$  est un **vecteur propre** de  $A$  associé à la **valeur propre**  $\lambda_i$ . Il satisfait  $Au_{\lambda_i} = \lambda_i u_{\lambda_i}$

### 6.4 Valeurs propres et multiplicité algébrique

**Proposition 14.**

1. Une matrice singulière a toujours au moins une de ses valeurs propres égale à zéro
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont données par les éléments de sa diagonale. En particuliers, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux

### 6.5 Espaces propres et multiplicité géométrique

**Définition 21.** Soit  $A$  une matrice d'ordre  $n$ , l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est défini comme le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{u \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)u = 0\}$$

$$\dim E_\lambda = n - \text{rang}(A - \lambda I)$$

C'est la **multiplicité géométrique** de  $\lambda$  associée à  $A$ . Une base de chaque espace propre  $E_\lambda$  est formée des vecteurs linéairement indépendants solutions du système homogène  $(A - \lambda I)u = 0$

**Proposition 15.**

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
2. Si l'espace propre  $E_\lambda$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est de dimension 1, alors le vecteur propre associé est défini à un multiple près.
3. Si  $\dim E_\lambda > 1$ , les vecteurs propres associés forment une base de  $E_\lambda$  et il y a une infinité de manière de choisir ces vecteurs.

## 6.6 Diagonalisation de matrices carrées

**Théorème 10.** Une matrice  $A$  d'ordre  $n$  est diagonalisable  $\iff$  elle admet exactement  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants  $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots, u_{\lambda_n}$  correspondant aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Autrement,  $A$  est diagonalisable  $\iff$  il existe une matrice  $P$  d'ordre  $n$  inversible telle que

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

avec  $P = u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_n}$

1. Si elle existe, la matrice diagonale  $D$  est formée des valeurs propres de  $A$  comptées avec leur multiplicité.
2. L'ordre des valeurs et vecteurs propres est important lorsque l'on forme  $D$  et  $P$ .
3. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.
4. Une matrice qui possède  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

**Théorème 11.** Corollaire Si  $A$  est diagonalisable alors,

1.  $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
2.  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
3.  $A^k = PD^kP^{-1}, \forall k \in \mathbb{N}$
4.  $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
5. Les matrices  $A$  et  $D$  sont semblables

## 7 Diagonalisation de matrices, valeurs propres multiples, diagonalisation des matrices symétriques réelles et hermitiennes complexes

### 7.1 Diagonalisation de matrices et valeurs propres multiples

**Théorème 12** (Algorithme de diagonalisation). Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  diagonalisable ( $A = PDP^{-1}$ ). Pour diagonaliser la matrice  $A$ , on procède comme suit;

1. Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

2. Trouver les racines de  $P_A(\lambda)$  (valeurs propres de  $A$ )
3. Déterminer les bases des espaces propres  $E_\lambda$
4. Construire la matrice inversible  $P$  à partir des vecteurs de base de tous les espaces propres
5. Construire la matrice diagonale  $D$  à partir des valeurs propres de  $A$ .

**Théorème 13.** Soit une matrice  $A$  d'ordre  $n$  admettant  $p \leq n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  de multiplicité algébrique  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p : \sum \alpha_i = n$ . Alors,

1.  $\dim E_{\lambda_k} \leq \alpha_k, \forall k = 1, 2, \dots, p$
2.  $A$  est diagonalisable  $\iff \dim E_{\lambda_k} = \alpha_k, \forall k = 1, \dots, p$
3. Si  $A$  est diagonalisable alors les vecteurs propres de  $A$  sont des vecteurs de base de tous les espaces propres  $\dim E_{\lambda_k}, \forall k = 1, \dots, p$ . Ils servent à construire la matrice inversible  $P$ .

**Théorème 14.** Corollaire

1. Toute matrice carrée n'est pas forcément diagonalisable
2. Une matrice est diagonalisable  $\iff$  la **multiplicité algébrique** des valeurs propres est égale à la **multiplicité géométrique** de ces dernières

### 7.2 Lien entre changement de base et diagonalisation de matrice associées à des transformations linéaires

**Proposition 16.** Si  $A = [T]_B$  est diagonalisable sous la forme  $P^{-1}AP = D$  alors  $D$  est la matrice qui représente  $T$  dans la base formée des vecteurs propres de  $A$  et  $P = P_{B \leftarrow B'}$

### 7.3 Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

**Définition 22.** Une **matrice hermitienne**  $A$  d'ordre  $n$  qui prend ses valeurs dans les nombres complexes est telle que  $\bar{A}^T = A$  où  $\bar{A}$  signifie que cette matrice est formée des éléments obtenus en prenant la conjugaison complexe de chaque éléments de la matrice  $A$ .

**Proposition 17.** Une matrice hermitienne dont tout les éléments sont réels est une **matrice symétrique réelle**. Tout les théorèmes valables pour les matrices hermitiennes complexes le sont aussi pour les matrice symétriques réelles.

**Théorème 15.**

1. Une matrice hermitienne complexe  $A$  (symétrique réelle) est diagonalisable
2. Ses valeurs propres sont nécessairement réelles
3. Il existe une matrice unitaire  $U$  (orthogonale réelle) qui la diagonalise.

$$\exists U \in \mathbb{C}^{n \times n} : \bar{U}^T U = I \text{ et } U^{-1}AU = \bar{U}^T AU = D$$

# Index

## A

Application coordonnée ..... 4  
Application linéaire ..... 3, 6

## B

Base ..... 4, 5, 7, 9  
Base canonique ..... 5  
Base orthogonale ..... 7, 8  
Base orthonormée ..... 7, 8  
Bijection ..... 3

## C

Cauchy-Schwarz ..... 6  
Changement de base ..... 5  
Complément orthogonal ..... 6

## D

Diagonalisation ..... 11  
Dimension ..... 4, 5

## E

Ensemble générateur ..... 4  
Equation caractéristique ..... 9  
Espace d'arrivé ..... 5  
Espace de départ ..... 5  
Espace euclidien ..... 6, 8  
Espace propre ..... 9, 11

## F

Famille orthogonale ..... 7

## I

Image ..... 3, 5  
Injectivité ..... 3  
Inégalité triangulaire ..... 6  
Isomorphisme ..... 3-5

## M

Matrice associée ..... 5  
Matrice canonique ..... 5  
Matrice de changement de base ..... 5  
Matrice de passage ..... 5  
Matrice diagonalisable ..... 10, 11  
Matrice hermitienne ..... 11  
Matrice orthogonale ..... 8, 11  
Matrice relative ..... 9

Matrice semblable ..... 9, 10  
Matrice singulière ..... 9  
Matrice triangulaire ..... 9  
Matrice unitaire ..... 11  
Meilleur approximation ..... 8  
Multiplicité algébrique ..... 9, 11  
Multiplicité géométrique ..... 9, 11

## N

Norme ..... 6  
Noyau ..... 3, 5

## O

Orthogonalité ..... 6

## P

Particularité de la diagonalisation ..... 11  
Polynôme caractéristique ..... 9  
Procédé de Gram-Schmidt ..... 8  
Produit scalaire ..... 6-8  
Projection orthogonale ..... 8  
Propriétés de l'orthogonalité ..... 6  
Propriétés des bases orthogonales/normées ..... 7  
Propriétés des matrices diagonalisable ..... 10  
Propriétés des matrices orthogonales ..... 8  
Propriétés du produit scalaire ..... 6

## R

Rang ..... 5

## S

Surjectivité ..... 3  
Système de coordonnées ..... 4

## T

Théorème spectral ..... 11  
Transformation linéaire ..... 3, 5, 8, 9, 11

## U

Unitaire ..... 6

## V

Valeur propre ..... 9-11  
Vecteur propre ..... 9-11  
Vecteurs orthogonaux ..... 6