Université de Montréal

Solutionnaire Final Automne 2019

# Algèbre Linéaire

*Julien Hébert-Doutreloux*

April 25, 2020

# Question 1

Soit l'application de $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T\big(p(x)\big) = x(x+1)p''(x) + (x-1)p'(x) - p(x)$.

## a)

Soit le pôlynome $p(x) = ax^2 + bx + c$, l'application $T$ est

$$\begin{aligned} T\big(p(x)\big) &= (x-1)(2ax+b) - ax^2 + 2a(x+1)x - bx - c \\ &= 3ax^2 - b - c \end{aligned}$$

## b)

Par la proposition suivante,

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \Longleftrightarrow T \text{ est une tranformation linéaire}$$

montrons que $T$ est une transformation linéaire.

*Proof.* Soit $p_1(x) = ax^2 + bx + c$,$p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T\big(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)\big) &= (x-1)(\alpha(2ax+b) + \beta(2Ax+B)) + x(x+1)(2a\alpha + 2A\beta) \\ &\quad + \alpha\left(-\left(ax^2+bx+c\right)\right) - \beta\left(Ax^2+Bx+C\right) \\ &= 3a\alpha x^2 + 3A\beta x^2 - \alpha b - \beta B - \alpha c - \beta C \\ &= \alpha T\big(p_1(x)\big) + \beta T\big(p_2(x)\big) \end{aligned}$$

$\square$

## c)

Déterminons la matrice associée $A$ à l'application linéaire $T$ en considérant les polynôme de $\mathbb{P}_2$ comme des vecteurs (eg: $p_1(x) := (c, b, a)$).

$$\begin{cases} T(1) = -1 \implies (-1,0,0) \\ T(x) = -1 \implies (-1,0,0) \\ T(x^2) = 3x^2 \implies (0,0,3) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aini, l'image de $T$ est évidente,

$$im(T) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et le noyau de $T$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \ker(T) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi, l'image et le noyau sont respectivement de dimensions 2 et 1.

## d)

Par un théorème,

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2 \text{ surjective} \Longleftrightarrow \mathrm{im}(T) = \mathbb{P}_2$$

Or, la dimensions de $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ tandis que celle de $\dim(im(T)) = 2$, alors la transformation linéaire n'est pas surjective.

# Question 2

## a)

Pour trouver la représentation de la base $[T]_B$,

$$\{T(b_1), T(b_2), T(b_3), T(b_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b_1) = (-1, 3, 0, 0) \bullet B \\ T(b_2) = (1, 2, 0, 0) \bullet B \\ T(b_3) = (0, 0, -1, 3) \bullet B \\ T(b_4) = (0, 0, 1, 2) \bullet B \end{cases} \implies [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

## b)

Réecrivons les bases matricielles en bases vectorielles, et ce en considérant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$$

Ainsi, la bases $B$ et $B'$ deviennent respectivement,

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'ailleurs sous cette forme, la base $B'$ est la matrice de passage $P_{B \leftarrow B'}$.

## c)

De même qu'en a), pour la $B'$

$$\{T(b'_1), T(b'_2), T(b'_3), T(b'_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b'_1) = \left( -1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) \bullet B' \\ T(b'_2) = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right) \bullet B' \\ T(b'_3) = \left( 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -3 \right) \bullet B' \\ T(b'_4) = \left( 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2 \right) \bullet B' \end{cases} \implies [T]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

## d)

La relation est la suivante; $[T]_{B'} = P_{B' \leftarrow B} [T]_B P_{B \leftarrow B'}$

# Question 3

## a)

Par le procédé de **Gram-Schmidt**

$$\hat{y} = \text{proj}_{\mathcal{W}} y = \text{proj}_{u_1} y + \text{proj}_{u_2} y + \cdots + \text{proj}_{u_p} y = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle y, u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i$$

$$z = y - \hat{y}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_3 = v - \text{proj}_W v &= v - \text{proj}_{w_1} v - \text{proj}_{w_2} v \\ &= v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{||w_1||^2} - \frac{\langle v, w_2 \rangle}{||w_2||^2} \\ &= (1,1,1) - \frac{(1,1,1) \bullet (1,0,1)}{2} - \frac{(1,1,1) \bullet (0,1,1)}{2} \\ &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

## b)

Considérons une base orthonormée de $W$ suivante:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Par le procédé de Gram-Schimdt appliqué à la base ci-dessus (même chose qu'en a)) on obtient la base orthonormée suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

# Question 4

## a)

Le polynôme caratéristique de la matric $A$ est :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = &\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 12\lambda^3 + 48\lambda^2 - 64\lambda \\ &= (\lambda - 4)^3 \lambda \end{aligned}$$

On conclut que $\lambda = 4$ est une racine du polynôme caratéristique de $A$, donc une de ses valeurs propres. Elle est d'ailleurs de multiplicité algébrique de 3.

## b)

Selon le résultat obtenue ci-dessus, les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$ respectivement de multiplicité algébrique de 3 et de 1.

Pour $\lambda_1$,

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $E_{\lambda_1} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Pour $\lambda_2$,

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $E_{\lambda_2} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

## c)

La matrice $P$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs propres, on obtient la matrice $O$:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$