EXAMEN FINAL
MAT 1720 PROBABILITÉS

— **Vous avez trois heures pour compléter le final.**

— **Expliquez de manière détaillée votre raisonnement.**

— **La calculatrice n'est pas permise et de toute manière inutile.**

— **Si vous êtes bloqué sur une question, passez à la suivante !**

Professeur : Alexander Fribergh, Université de Montréal.

(1) **(5 points) Vrai ou Faux (Aucune justification n'est nécessaire)**

(a) Soit Z_1 et Z_2 sont des variables i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Considérons $X = \cos\frac{\pi}{4}Z_1 + \sin\frac{\pi}{4}Z_2$ et $Y = -\sin\frac{\pi}{4}Z_1 + \cos\frac{\pi}{4}Z_2$. Les variables X et Y sont indépendantes.

(b) Soit X une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0,1)$. Alors la densité de $Y = |X|$ est pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2}).$$

(c) Si X et Y sont indépendantes alors $E[X+Y \mid Y] = Y + E[X]$.

(d) Nous considérons une variable aléatoire X avec la fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons $\mathbb{P}(X \in [1/2, 1]) = 3/4$.

(e) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(2,4)$. Alors $\mathbb{P}(X \in (1,3)) = 2F_Z(0.5) - 1$ où $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$.

(2) (**7 points**) Un point X est choisi au hasard sur l'intervalle $[-1,1]$ avec la densité suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1+x)(1-x) & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) (1 points) Trouver c.

(b) (2 points) Calculer $\mathbb{E}[X^2]$.

(c) (2 points) Trouver la fonction de répartition $F_X(x)$ de X pour $x \in [-1,1]$.

(d) (2 points) Soit la variable aléatoire $Y := \frac{1+X}{2}$. Quelles sont les valeurs prises par Y ? Trouver la densité de Y et indiquer de quelle type loi il s'agit ? (paramêtres non nécéssaires)

(3) (**7 points**) Nous choisissons un point aléatoire (X, Y) dans la région $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ avec la densité de probabilité

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) (2 points) Trouver la densité marginale de X et la densité marginale de Y. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

(b) (3 points) Nous considérons la variable aléatoire $Z = XY$. Trouvez la fonction de répartition et la densité de Z. Quelle est sa loi ?

(c) (2 points) Montrer que $cov(X, Y) = -\infty$.

(4) (**5 points**) Soit X et Y de densité jointe donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\exp(-y)}{y} \text{ si } 0 < x < y,\ 0 < y < \infty.$$

(a) (3 points) Trouver la densité marginale de Y. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

(b) (2 points) Calculer $E[X \mid Y]$ et $E[X]$.

(5) (**8 points**) Soit X et Y données par une densité jointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x}{y}\exp(-x(y + y^{-1})) & \text{si } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

Trouver la loi **jointe** de U et V.

(6) (**6 points**)

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Nous considérons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire discrète Y_n avec loi

$$\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (2 points) Calculer $\mathbb{E}[e^{tU}]$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.

(b) (2 points) Calculer $\mathbb{E}[e^{tY_n}]$ pour $t \in \mathbb{R}$ fixé.

(c) (2 points) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{tY_n}] = \mathbb{E}[e^{tU}]$. Que pouvez-vous en déduire ?

Rappels :

$$\sum_{i=1}^{n} a^i = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ n & \text{si } a = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} n(1 - \exp(t/n)) = -t.$$

(7) (**7 points**) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

(a) (4 points) Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $E[S_n]$. En déduire que si G_n est une variable aléatoire de loi Gamma$(n,1)$ alors

$$\lim_{n\to\infty} P[G_n > 2n] = 0.$$

(b) (3 points) Montrer que

$$E[\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)] = 1.$$