Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Calcul I

Julien Hébert-Doutreloux

April 21, 2020

Contents

1 Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

1.1 Les dérivées partielles

Théorème 1. *[Clairaut] Soit une fonction f définie sur un disque D qui contient le point (a,b). Si les fonction f_{xy} et f_{yx} sont continues sur D, alors*

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

■ Gives the multiple partial derivative `D[f,{x,n},{y,m},...]` ■

1.2 Les plans tangents et approximations linéaires

Les plans tangents

Définition 1. *Si f possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est*

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Les approximations linéaires

Définition 2. *La fonction linéaire dont le graph est ce plan tangent, à savoir*

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

*est appelée **linéarisation** de f en $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, et l'approximation*

$$f(\vec{x}) \approxeq f(\vec{c}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{c})(x_i - c_i)$$

*est appelée **approximation linéaire** de f en $\vec{c}$. La différentielle est*

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx_i$$

Théorème 2. *Si les dérivées partielles f_x et f_y existent près de (a,b) et sont continues en (a,b), alors f est différentiable en (a,b).*

1.3 La règle de dérivation en chaîne

Théorème 3 (Règle de dérivation en chaîne)**.** *Si u est une fonction différentiable de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, et si chaque x_j est une fonction différentiable des m variables $t_1, t_2, ..., t_m$, alors u est une foncition différentiable de $t_1, t_2, ..., t_m$ et*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_i}$$

1.4 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Les dérivées directionnelles

Définition 3. *La **dérivée directionnelle** (si la limite existe) de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a,b,c)$ en (x_0, y_0, z_0) est*

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

Définition 4. *Le **vecteur gradient**, noté* ∇f *ou* grad f, d'une fonction à n variables est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

D'où la dérivée dans la direction $\vec{u}$, un vecteur unitaire, est

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u}$$

■ Gradient of a scalar function $(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial_n)$: `Grad[f,{x_1,x_2,...,x_n}]` ou `D[f[x, y,...], {{x, y,...}}]` ■

Les plans tangents aux surfaces de niveau

Définition 5. *Soit une surface* S *d'équation* $F(x, y, z) = k$ *et* $P(x_0, y_0, z_0)$*, un point de* S*. Si* $\nabla F(P) \neq \vec{O}$*, alors le **plan tangent à la surface de niveau*** $F(x, y, z) = k$ *en* P *est*

$$\nabla F(P) \bullet (\vec{x} - P) = 0$$

Proposition 1. *Soit* f *une fonction différentiable de* n *variables, et* $\vec{x}$ *un point de* $\mathbb{R}^n$*. Alors,*

- *la dérivée directionnelle de* f *en* $\vec{x}$ *est maximale dans la direction du gradient* $\nabla f(\vec{x})$
- *la taux de variation maximal de* f *en* $\vec{x}$ *est* $||\nabla f(\vec{x})||$
- *si* $\vec{u} \perp \nabla f(\vec{x})$*, alors la* $\nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u} = 0$
- *le gradient* $\nabla f(\vec{x})$ *est perpendiculaire à l'ensemble de niveau de* f *passant par* $\vec{x}$

Proposition 2.

- *Le gradient* $\nabla f(x_0, y_0)$ *indique la direction (possiblement, non unitaire) dans laquelle la fonction* $f(x, y)$ *a le plus grand taux de variation en* (x_0, y_0)*.*
- *La taux maximal vaut :* $||\nabla f(x_0, y_0)||$
- $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ *est la direction perpendiculaire à la tengente à la courbe de niveau qui passe par* (x_0, y_0)

1.5 Les approximations de Taylor en deux variables

Définition 6. *[Polynôme de Taylor de degré* 1 *de* f *en* (a, b)*]*

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Définition 7. *[Polynôme de Taylor de degré* 2 *de* f *en* (a, b)*]*

$$Q(x, y) = L(x, y) + \frac{1}{2!} f_x x(a, b)(x - a)^2 + f_x y(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2!} f_y y(a, b)(y - b)^2$$

2 L'optimisation

2.1 Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables

Définition 8. *(Matrice Hessienne) La matrice Hessienne d'une fonction* f *à* n *variables est la matrice carrée d'ordre* n *notée* $\nabla^2 f$ *telle que l'élément* $(\nabla^2 f)_{ij} = f_{x_i x_j}$ *:*

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

■ Le matrice Hessienne : `MatrixForm[D[f[x, y,...], {{x, y,...}}, {{x, y,...}}]]` ■

Définition 9. *[Point critique] Soit* f *une fonction à* n *variables et* $P = (c_1, c_2, ..., c_n)$*, un point. Le point* P *est un point critique si* $\nabla f(P) = \vec{O}$*.*

Théorème 4. *[Test des dérivées premières] Si* f *possède un maximum (resp. minimum) local en* (a, b) *et si les dérivées partielles du premiers ordre de* f *existent, alors* $\nabla f(a, b) = \vec{O}$*.*

Les maximums et minimum absolus

Théorème 5. *[Bornes atteintes] Si f est continu sur un compact K, alors f atteint sont maximum (resp. sont minimum) absolus en au moins un points de K. Autrement dit,*

$$\exists \vec{x}_1, \vec{x}_1 \in K : f(\vec{x}_1) = \inf_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\} \quad et \quad f(\vec{x})_2 = \sup_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\}$$

2.2 L'optimisation des fonctions de plusieurs variables

Définition 10. *Un point critique $\vec{a}$ est un point de selle de la fonction $f$si, dans toute boule ouverte $B_\varepsilon(\vec{a})$, il existe des points $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ tels que $f(\vec{x}_1) < f(x) < f(\vec{x}_2)$.*

Le signe d'une matrice

Théorème 6. *[Critère de Sylvester] Soit A une matrice symétrique inversible*

- *Si $\alpha_j > 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$, alors A est définie positive.*
- *Si $\beta_j > 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$, alors A est définie négative.*

■ Calculer les mineurs principaux d'une matrice :

```
submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice[[1 ;; d, 1 ;; d]]]
mineur[matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
{x, y, z} = {0, 1, 2}
For[i = 1, i < 4, i++, Print[mineur[matrice, i]]]
```

où `d` le numéro de la colonne du ième élément de la diagonale principale. ■

Théorème 7. *Conditions suffisantes du deuxièmes ordre pour un problème d'optimisation sans contraintes*

- *si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est définie positive (resp. négative), alors f possède un minimum (resp. un maximum) local en $\vec{a}$.*
- *si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est indéfiniem alors $\vec{a}$ est un point de selle de f*

■ Exemple de résolution pour trouver les points critique ;

```
F[x_, y_, z_] := x^3 - x y + y^2 + z^2 gradient = Grad[F[x, y, z], {x, y, z}]
Solve[Resolve[{gradient == mu Grad[x x + y y + z z, {x, y, z}] &&
 x x + y y + z z == 1}, {mu, x, y, z}, Reals]]
```

■

2.3 Les multiplicateurs de Lagrange

2.3.1 Les fonctions de plus de deux variables

Théorème 8.

a) Résoudre le système de $m + n$ équations à $m + n$ inconnues

$$\begin{gathered}\nabla f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) = k_1 \\ g_2(\vec{x}) = k_2 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) = k_m\end{gathered}$$

b) Évaluer la fonction f en tous les points critiques trouvés à l'étape a) pour déterminer la nature de ses points (minimum ou maximum)

Théorème 9. *Si f est continue sur un domaine S compact dans $\mathbb{R}^n$, alors f admet un minimum absolu et un maximum absolu et des points $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ de S.*

$$\exists \vec{x}_2, \vec{x}_2 \in S : \inf_{\vec{x}\in S} f = f(\vec{x_1}) \quad \textit{et} \quad \sup_{\vec{x}\in S} f = f(\vec{x_2})$$

3 Les intégrales doubles

Définition 11. *Si $f(x,y) \geq 0$, alors le volume V du solide au-dessus du rectangle R et sous la surface $z = f(x,y)$ est*

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dA$$

Définition 12. *Selon l'ordre d'intégration, les intégrales itérées sont ;*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \tag{1}$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \tag{2}$$

Théorème 10. *Si f est continue sur le rectangle $R = \big\{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\big\}$, alors*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Si on suppose que f est bornée sur R, que f est discontinue sur un nombre fini de courbes lisses et que les intégrales itérées existent.

3.1 Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Définition 13. *Si f est continue sur un région D de type I,*

$$D = \big\{(x,y)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\big\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Définition 14. *Si f est continue une région D de type II,*

$$D = \big\{(x,y)|c \leq y \leq c, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\big\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Proposition 3. *Si on intègre la fonction constante $f(x,y) = 1$ sur une région D, on obtient l'aire de D, car le volume sous $f(x,y) = 1$ au-dessus de D est égal à l'aire de D;*

$$\iint\limits_D 1\,dA = A(D)$$

3.2 Système de coordonnée

Définition 15. *Le passage du système cartésien au système polaire est donné par les relations suivantes;*

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Définition 16. *Le passage du système cartésien au système cylindrique est donné par les relations suivantes;*

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Définition 17. *Le passage du système cartésien au système sphérique est donné par les relations suivantes;*

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

3.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Définition 18. *Si f est continue sur un rectangle polaire R défini par $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, alors*

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

Si f est continue sur région polaire de la forme

$$D = \big\{(r,\theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\big\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

4 Les intégrales triples

4.1 Les intégrales triples

Théorème 11. *Si f est contniue sur le rectangle $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, alors*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Définition 19. *Une région solide E est dite de type 1 si elle est située entre les graphes de deux fonctions continues de x et y,*

$$E = \big\{(x,y,z) | (x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\big\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Définition 20. *Si la projection D de E dans le plan xy est une région de type I, alors*

$$E = \big\{(x,y,z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\big\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Définition 21. *Si D est une région de type II, alors*

$$E = \big\{(x,y,z) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\big\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Définition 22. *Une région solide E est de type 2 si elle est de la forme*

$$E = \big\{(x,y,z) | (y,z) \in D, u_1(y,z) \leq z \leq u_2(y,z)\big\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

Définition 23. *Une région solide E est de type 3 si elle est de la forme*

$$E = \big\{(x,y,z) | (x,z) \in D, u_1(x,z) \leq z \leq u_2(x,z)\big\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

Proposition 4. *Soit la fonction $f(x,y,z) = 1$ pour tout points de E, alors l'intégrale triple représente le volume de E,*

$$V(E) = \iiint\limits_E dV$$

4.2 Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition 24.

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dx\,dr\,d\theta$$

4.3 Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Définition 25.

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d\int_{\alpha}^{\beta}\int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \big\{(\rho,\theta,\phi)|a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\big\}$$

Aussi,

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d\int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \big\{(\rho,\theta,\phi)|\alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)\big\}$$

5 Code Mathematica

5.1 Méthode pour trouver et déterminer les extremums locaux d'une fonction à plusieurs variables.

```
Quit[]
(*Trouvez les maximums locaux,les minimums locaux et
les points de selle de la fonction.Si vous disposez d'un logiciel
le permettant,tracez le graphe de la fonction en choisisesant un
domaine et un point de vue qui révèlent toutes les caractéris
tiques importantes de la fonction. *)

submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice[[1 ;; d, ;; d]]];
mineur   [matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
Syvelster[matrice_]     := For[i = 1, i < Length[matrice]+1, i++,Print[Evaluate@mineur[matrice, i]]]

%%%
5.1.16
Panel[Grid[{
           {f := x y Exp[-(x^2 + y^2)/2]},
           {solu = Reduce@Resolve[Grad[f, {x, y}] == 0]},
           {mathess = D[f, {{x, y}}, {{x, y}}];},
           {MatrixForm@mathess},
           {ContourPlot[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}],
                      Plot3D[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]},
           {{x, y} = {-1, 1};},
           {Syvelster[mathess]}}]]
%%%
5.1.20
Panel[Grid[{
           {f := Sin[x] Sin[y]},
           {solu = Reduce@Resolve[Grad[f, {x, y}] == 0,
            {x, y} \[Element] ImplicitRegion[-Pi <= x <= Pi && -Pi <= y <= Pi , {x, y}]]},
           {mathess = D[f, {{x, y}}, {{x, y}}];},
           {MatrixForm@mathess},
           {ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}],
                      Plot3D[Sin[x] Sin[y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]},
           {{x, y} = {0, 0};},
           {Syvelster[mathess]}}]]
```

***

5.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extremums sous contraintes

```
(*Utilisez les multiplicateurs de Lagrange pour trouver le maxi
mum et le minimum de la fonction sous les contraintes données.*)
%%%
5.3.8
Panel[Grid[{
           {f[x_, y_] := x Exp[y], g[x_, y_] := x^2 + y^2},
           {solu = Solve[Grad[f[x, y], {x, y}] == mu Grad[g[x, y],
           {x, y}] && g[x, y] == 2, {x, y, mu}, Reals]}}]]
           {f[1, 1], f[-1, 1]}
```

***

```
%%%
5.3.14
Panel[Grid[{
          {f[x_, y_, z_] := x^4 + y^4 + z^4, g[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2},
          {solu = Solve[Grad[f[x, y, z], {x, y, z}] == mu Grad[g[x, y, z],
          {x, y, z}] && g[x, y, z] == 1, {x, y, z, mu}, Reals]},
          {Minimize[{f[x, y, z], g[x, y, z] == 1}, {x, y, z}]},
          {Maximize[{f[x, y, z], g[x, y, z] == 1}, {x, y, z}]}
}]]
```

***

```
%%%
5.3.18
Panel[Grid[{
          {f[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2, g[x_, y_,z_] := x-y,h[x_, y_, z_] := y^2 - z^2},
          {solu = Solve[Grad[f[x, y, z], {x, y, z}] == mu Grad[g[x, y, z], {x, y, z}] +
               nu Grad[h[x, y, z], {x, y, z}] && g[x, y, z] == 1 &&
                   h[x, y, z] == 1, {x, y, z, mu, nu}, Reals]},
          {Minimize[{f[x, y, z], g[x, y, z] == 1 && h[x, y, z] == 1}, {x, y, z}]},
          {Maximize[{f[x, y, z], g[x, y, z] == 1 && h[x, y, z] == 1}, {x, y,z}]}
}]]
```

Mathematica indique qu'aucun maximum est atteint, mais le maximum est atteint au point (2,1,0).

***

5.3 Méthode pour trouvez les extremums globaux sous une contrainte d'inégalité

```
(*Trouvez les extremums globaux de f, s'ils existent,sur la
région décrite par l'inégalité.*)
%%%
5.3.38
Panel[Grid[{
          {f[x_, y_, z_] := z Exp[x y], g[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2},
          {Minimize[{f[x, y, z], g[x, y, z] <= 9}, {x, y, z}]},
          {Maximize[{f[x, y, z], g[x, y, z] <= 9}, {x, y, z}]}
}]]
```

***

5.4 Intégrale doubles

```
(*Calculez l'intégrale double en la considérant comme le volume d'un solide.*)
%%%
6.1.9
Panel[Grid[{
          {Integrate[Sqrt[2], {x, 2, 6}, {y, -1, 5}]},
          {Integrate[Sqrt[2], {x, y} \[Element] ImplicitRegion[2 <= x <= 6 && -1 <= y <= 5, {x, y}]]}
}]]
```

***

```
(*Calculez l'intégrale double.*)
%%%
6.2.9
Panel[Grid[{
```

```
          {f := Exp[-y^2]},
          {Integrate[f, {y, 0, 3}, {x, 0, y}]},
          {Integrate[f, {x, y} \[Element] ImplicitRegion[0 <= y <= 3 && 0 <= x <= y, {x, y}]]}
}]]

%%%
6.2.17
Panel[Grid[{
          {f := 2 x - y},
          {Integrate[f, {x, y} \[Element] Circle[{0, 0}, 2]]}
}]]

%%%
6.2.25
Panel[Grid[{
          {f := 1},
          {Integrate[f, {x, y, z} \[Element] ImplicitRegion[0 <= z <= x^2 && x^2 <= y <= 4, {x, y, z}]]
}]]
```

***

5.5 Intégrale triple

```
Exemple 7.3.2
(*Calcul d'intégrale triple*)
Panel[Grid[{
          {R = ImplicitRegion[Sqrt[x^2 + y^2] <= z <= 2, {x, y, z}]},
          {"Result :", Integrate[(x^2 + y^2), {x, y, z} \[Element] R]},
          {DiscretizeRegion[R]},
          {ClearAll["Global`"]}}]]
```

***

```
%%%
7.4.2
(*Calcul de volume*)
Panel[Grid[{
          {"Result :", Integrate[\[Rho]^2 Sin[\[Phi]], {\[Rho], 0, 3},
          {\[Theta], 0,Pi/2} , { \[Phi], 0, Pi/6}]}
}]]
```

***

```
%%%
7.4.5
(*Calcul d'intégrale triple*)
Panel[Grid[{
          {"Region :", region745 = ImplicitRegion[x^2 + y^2 + z^2 <= 25, {x, y, z}]},
          {"Result :", Integrate[(x^2 + y^2 + z^2)^2, {x, y, z} \[Element] region745]}
}]]

%%%
7.4.8
Panel[Grid[{
          {"Region :",region748 = ImplicitRegion[x^2 + y^2 + z^2 <= 9 && y >= 0, {x, y, z}]},
          {"Result :", Integrate[y^2, {x, y, z} \[Element] region748]}
}]]
```

```
%%%
7.4.26
(*Calcul de volume borné par des surfaces*)
(*Le résultat est erroné*)
\
Panel[Grid[{
           {"Region :", region7426 = ImplicitRegion[x^2 + y^2 + (z - 1)^2 <= 16
            && x^2 + y^2 <= 4, {x, y, z}]},
           {"Result :", Integrate[1, {x, y, z} \[Element] region7426]},
           {DiscretizeRegion[region7426]}}]]
```

***

5.6 Méthode pour calculer des volumes bornés par des surfaces

```
R = ImplicitRegion[x x + y y <= z && x x + y y <= 25 && z <= 25, {x, y, z}]
RegionBoundary[R]
DiscretizeRegion[R, MeshQualityGoal -> "Maximal"]
Volume[R]
RegionMeasure[R, 3]
```

Index