Quiz 2 - Hiver 2018

MAT1720 - Probabilités

Problème 1
Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Notez que

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x_1^2}{2}) \quad \text{et} \quad f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x_2^2}{2}),$$

où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Appliquons le changement de variables

$$X_1 \triangleq h_1(R,\Theta) \triangleq R\cos(\Theta),$$
$$X_2 \triangleq h_2(R,\Theta) \triangleq R\sin(\Theta).$$

(a) (**2 points**) Calculez

$$D \triangleq \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} h_1(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta} h_1(r,\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r} h_2(r,\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta} h_2(r,\theta) \end{pmatrix}.$$

(b) (**2 points**) En prenant pour acquis que

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X_1,X_2}(h_1(r,\theta), h_2(r,\theta)) \cdot |D|,$$

trouvez une expression explicite pour $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ lorsque $r > 0$ et $\theta \in (0, 2\pi)$.

(c) (**1 point**) Est-ce que R et Θ sont des v.a. indépendantes ? (Justifiez)

Problème 2 Soit Y et Z deux v.a. avec densité conjointe

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{1}{y^2 z^2}, \quad y > 1,\ z > 1.$$

Appliquons le changement de variables

$$\begin{aligned} S &\triangleq g_1(Y,Z) \triangleq YZ, \\ T &\triangleq g_2(Y,Z) \triangleq \tfrac{Y}{Z}. \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} Y &\triangleq h_1(S,T) \triangleq \sqrt{ST}, \\ Z &\triangleq h_2(S,T) \triangleq \sqrt{\tfrac{S}{T}}. \end{aligned}$$

(a) (**2 points**) Calculez

$$J \triangleq \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} g_1(y,z) & \frac{\partial}{\partial z} g_1(y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y} g_2(y,z) & \frac{\partial}{\partial z} g_2(y,z) \end{pmatrix}.$$

(b) (**2 points**) En prenant pour acquis que

$$f_{S,T}(s,t) = f_{Y,Z}(h_1(s,t), h_2(s,t)) \cdot |J|^{-1},$$

trouvez une expression explicite pour $f_{S,T}(s,t)$ lorsque $s > 1$ et $s^{-1} < t < s$.

(c) (**1 point**) Calculez la densité marginale $f_S(s),\ s > 1$.

(d) (**BONUS 2 points**) Calculez la densité marginale $f_T(t),\ t > 0$.