DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES – UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIGLE DU COURS :	MAT 1600
TITRE DU COURS :	Algèbre linéaire
NOM DES PROFESSEURS :	K. Amoura, V. Hussin
DATE DE L'EXAMEN :	Le 17 décembre 2019 de 09h00 à 11h50
DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES :	Aucune documentation permise, aucune calculatrice

---

1. Soit $P_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 et $T : P_2[x] \to P_2[x]$, l'application donnée par $T(p(x)) = x(x+1)p''(x) + (x-1)p'(x) - p(x)$ où $p''(x),\ p'(x)$ sont respectivement les dérivées seconde et première de $p(x)$.

(5) **(a)** Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$, vérifier que $T(p(x)) = 3ax^2 - (b+c)$.

(5) **(b)** Montrer que T est une transformation linéaire.

(5) **(c)** Déterminer une base et la dimension des sous-espaces $\mathrm{Ker}\, T$ et $\mathrm{Im}\, T$.

(5) **(d)** Est-ce que T est surjective? Justifier.

2. Soit V l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2, muni de la base usuelle

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Considérons la transformation linéaire T de V dans V telle que $T(A) = AM$ avec $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(5) **(a)** Déterminer la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ réprésentant T dans la base B.

(5) **(b)** Considérons la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Déterminer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$.

(5) **(c)** Déterminer la matrice $[T]_{\mathcal{B}'}$ réprésentant T dans la base B'.

(5) **(d)** Quelle est la relation entre les matrices $[T]_{\mathcal{B}'}$ et $[T]_{\mathcal{B}}$?

3. Soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$W = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | a + b = c \}.$$

(10) **(a)** Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer sa projection orthogonale sur W pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

(10) **(b)** Trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\{v_1, v_2\}$ soit une base de W.

4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) **(a)** Montrer que $\lambda = 4$ est une valeur propre de A.

(10) **(b)** Déterminer toutes les valeurs propres de A et les vecteurs propres correspondants.

(5) **(c)** Trouver une matrice orthogonale O et la matrice diagonale D telle que $O^T A O = D$.

(5) **(d)** Vérifier le résultat en (c) par multiplication matricielle explicite.

(10) **5. (a)** Est-ce que l'expression suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} v, \quad u, v \in \mathbb{R}^2.$$

(5) **(b)** Soient les matrices carrées A et T telles que A est orthogonale, T est inversible et $B = AT$. Montrer que B est inversible et que la matrice $C = T\,B^{-1}$ est orthogonale.

Note : les questions **(a)** et **(b)** ci-dessus sont indépendantes.