Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Analyse I

Julien Hébert-Doutreloux

April 17, 2020

Contents

1 Les nombre réels

Théorème 1. *Les nombres réels sont ordonné tel que*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a + b \geq 0$$

$$a \in \mathbb{R}, \begin{cases} a < 0 \\ a = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Théorème 2. *Soit* $\mathbb{R} \supset E \neq \emptyset$*,*
E borné supérieurement (resp. inférieurement) possède un supremum (resp. infimum) dans $\mathbb{R}$

Proposition 1. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}, x > 0, x < y \implies \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $nx > y$

Définition 1.

$$x \in \mathbb{R}, |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$$

$$x, y \in \mathbb{R}, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|$$

2 Les intervalles

Définition 2. *I est un intervalle $\subset \mathbb{R}$ si lorsque* $x, y \in I : x < y \implies \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y$ *est dans I*

Définition 3. *I est borné s'il possède un* $\sup I = b$ *et un* $\inf I = a$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$

Définition 4.

- *Non-borné sup. :* $\sup I \notin \mathbb{R}$
- *Non-borné inf. :* $\inf I \notin \mathbb{R}$
- *Non-borné :*

Définition 5. *Voisinage centré en* $x \in \mathbb{R}$ *de rayon* $\delta > 0$ *:* $V(x, \delta)$ *est l'intervalle ouvert*

$$(x - \delta, x + \delta)$$

Définition 6. *Voisinage pointé... :* $V'(x, \delta) = V(x, \delta) \backslash \{x\}$

3 Les points

Définition 7. *Un point* $a \in E \subset \mathbb{R}$ *est un point intérieur de E si*

$$\exists \delta_{>0} : V(a, \delta) \subset E$$

Définition 8. *Un point* $a \in \mathbb{R}$ *est un point d'accumulation de* $E \subset \mathbb{R}$ *si*

$$\forall \delta_{>0} : V'(a, \delta) \cap E \neq \emptyset$$

Remarque : $a \notin E \not\Rightarrow a \notin E'$

Définition 9. *Un point* $a \in \mathbb{R}$ *est un point adhérent de* $E \subset \mathbb{R}$ *si,*

$$\forall \delta_{>0}, V(a, \delta) \cap E \neq \emptyset$$

Remarque:

$$a \in \bar{E} \implies a \in E'$$

$$a \in E \implies a \in \bar{E}$$

4 Les ensembles

Définition 10. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, l'ensemble de ses point intérieur noté int E est tel que*

$$int\ E = \{x \in E | \exists \delta_{>0}, V(x,\delta) \subset E\}$$

$$int\ E \subset E \subset \mathbb{R}$$

Remarque: int E est un ouvert

Définition 11. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, l'ensemble de ses point d'accumulation noté E' est tel que*

$$E' = \{x \in E | \forall \delta_{>0}, V'(x,\delta) \cap E \neq \emptyset\}$$

$$E' \subset \mathbb{R} \supset E$$

Remarque : "Ensemble dérivé de E"

$$E\ fini \implies E' = \emptyset$$

$$E\ infini \not\Rightarrow E' = \emptyset$$

Définition 12. *Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ ouvert \iff int\ E = E$$

$$E \subset int\ E \subset E \subset \mathbb{R}$$

Définition 13. *Ensemble fermé Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ fermé \iff E' \subset E$$

Définition 14. *Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ compact \iff E\ fermé\ et\ borné$$

Ensemble compact si tout recouvrement ouvert de E possède un sous-recouvrement fini.

Définition 15. *Recouvrement ouvert Ensemble O : collection d'ensemble ouvert*

$$\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

tel que

$$\mathbb{R} \supset E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

Théorème 3. *Soit O un recouvrement ouvert de $E \subset \mathbb{R}$*

$$O' \subset O$$

sera appelé sous-recouvrement fini si O' est lui même un recouvrement ouvert de E et qu'il contient un nombre fini d'éléments.

Définition 16. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, la frontière de E noté $Fr\ E = fr\ E = \bar{E} \backslash \{int\ E\}$*

$$\bar{E} \backslash \{int\ E\} \subset fr\ E \subset \bar{E} \backslash \{int\ E\}$$

5 Les théorème

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Tout ensemble borné et infini possède un point d'accumulation.*

Théorème 5 (Heine-Borel)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$, un recouvrement ouvert de E est un ensemble O d'ensemble ouvert*

$$\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

tel que

$$\mathbb{R} \supset E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

Théorème 6 (Densité des nombres réels)**.** *Soit $a < b$ deux nombres réels (resp. irrationels) dans les réels, alors*

$$\exists x \in \mathbb{Q}\ (resp.\ \mathbb{Q}^C) : a < x < b$$

Théorème 7 (Corolaire)**.** *Soit $a < b$ deux nombres réels, alors il existe un nombre infini de rationnels (resp. irrationels) entre a et b.*

6 Les propriétés

Ouvert/Fermé/Compact

Proposition 2 ($\bigcup\bigcap$ ouvert)**.** *Soit* $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble ouvert*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ *ouvert*
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} O_\lambda$ *ouvert si* $|\Lambda| < \infty$

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 3 ($\bigcup\bigcap$ fermé)**.** *Soit* $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble fermé*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ *fermé fermé si* $|\Lambda| < \infty$
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} F_\lambda$ *fermé*

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 4 ($\bigcup\bigcap$ compact)**.** *Soit* $\{K_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble compact*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *compact si* $|\Lambda| < \infty$
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} K_\lambda$ *compact si* $|\Lambda| < \infty$

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 5. • $\emptyset$ *ouvert*

- A, B *ouverts* $\implies \begin{cases} A \cup B \text{ ouvert} \\ A \cap B \text{ ouvert} \end{cases}$
- E *ouvert* $\iff E^C$ *fermé*
- E *fermé* $\iff E' \subset E$
- E *compact* $\implies \sup E \in E$
- F *fermé*, E *compact* : $F \subset E \subset \mathbb{R} \implies F$ *compact*
- *Soit* $E \subset \mathbb{R}$
  - *int* $E = \bigcup\limits_{O\subset E} O$
    (L'intérieur d'un ensemble E est la réunion de tous les ensembles ouvert contenue dans E)
  - *int E ouvert*
  - *int E plus grand ouvert contenue dans E*

Adhérence/Accumulation/Intérieur

Proposition 6. • $\bar{E} = E \cup E'$

- $(\bar{E}) = int\ (E^C)$
- $\bar{E}$ *fermé*
- $A, B \subset \mathbb{R}$,

- $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} \implies \bar{A} \cup \bar{B}$
- $int\ (A \cap B) = int\ (A) \cap int\ (B)$
- $int\ (A \cup B) = int\ (A) \cup int\ (B)$

• *Soit* $A \subset \mathbb{R}_{\neq \emptyset}$,

- $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ *la distance* x *de* A
- $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$
- A *fermé et* $d(x, A) = 0 \implies x \in A$

Proposition 7 (Supremum/Infimum). *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *non-vide et borné,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists x, y \in E : \begin{cases} \sup E - \varepsilon < x \leq \sup E \\ \inf E \geq x < \inf E + \varepsilon \end{cases}$$

7 Suites numériques

a) Limite d'une suite et suite bornée

Définition 17. *Une suite de nombres réels est une fonction de domain* $\mathbb{N}$ *et de champ (ou image) un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$

Définition 18. *La suite* $\{x_n\}$ *converge (ou tend) vers la limite* x *si,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists N : n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon$$

Notation : $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ *ou* $x_n \longrightarrow x$

Théorème 8 (Unicité). *Si* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n \to \infty} x_n = y$*, alors* $x = y$

Définition 19. *Une suite est bornée supérieurement si,*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| < M$$

Une suite est bornée inférieurment si,

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| > m$$

Théorème 9. *Toute suite convergent est bornée*

b) Opération sur les limites

Théorème 10. *Si* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n \to \infty} y_n = y$,

1. $\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$
2. $\lim_{n \to \infty} k \cdot x_n = k \cdot x, k \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$
4. $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, y \neq 0$

Théorème 11. *Soit* $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = x$*. Si* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *pour tout entier positif* n*, alors* $\lim_{n \to \infty} y_n = x$.

Théorème 12. *Un point* x_0 *est un point d'accumulation d'un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *si et seulement si il existe une suite* $\{x_n\}$ *d'éléments de* E*,* $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Théorème 13.

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \pm\infty$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = \mp\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = -\infty$
4. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
5. $\lim_{n\to\infty} x_n > 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \pm\infty$

Théorème 14. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite telle que* $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. *Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L \in \mathbb{R}$$

a) $L < 1 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $L > 1 \implies \lim_{n\to\infty} |x_n| = \pm\infty$

c) Sous-suites et suites monotones

Définition 20. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite quelconque d'entiers positifs telle que* $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ *On appelle la suite* $\{x_{n_k}\}$ *une sous-suite de la suite* $\{x_n\}$.

Théorème 15. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite convergente. Toute sous-suite de* $\{x_n\}$ *converge et a la même limite que la suite* $\{x_n\}$.

Théorème 16 (Corollaire)**.** *Si une suite* $\{x_n\}$ *possède deux sous-suites qui convergent vers différentes valeurs, la suite* $\{x_n\}$ *diverge.*

Théorème 17. *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Définition 21. *Une suite* $\{x_n\}$ *est dite croissante (resp. décroissante) si* $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ *(resp.* $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$*). Si pour tout entier positif* n, $x_n < x_{n+1}$, *la suite* $\{x_n\}$ *est dite strictement croissante. Si pour tout entier positif* n, $x_n > x_{n+1}$, *la suite* $\{x_n\}$ *est dite strictement décroissante. Une suite qui a une des ces propriétés est dite monotone*

Théorème 18. *Toute suite monotone bornée possède une limite (à partir d'un certain rang* N*).*

Théorème 19. *Un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *est compact* $\iff$ *toute suite* $\{x_n\}$ *d'éléments de* E *contient une sous-suite qui converge vers un élément de* E.

d) Suites de Cauchy

Définition 22. *Une suite* $\{x_n\}$ *est appelée suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \wedge \ \forall k \in \mathbb{N}, |x_{n+k} - X_n| < \varepsilon$$

ou pour tout couple d'entiers $n, m > N, |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Théorème 20. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 21. *Une suite convergente* $\iff$ *elle est de Cauchy.*

e) Limite supérieure et limite inférieure

Définition 23. *Un nombre réel* x *est appelé valeur d'adhérence d'une suite* $\{x_n\}$ *s'il existe une sous-suite de* $\{x_n\}$ *qui converge vers* x.

Théorème 22. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite bornée et*

$$A = \{x \mid \exists \{x_{n_k}\} \in \{x_n\} : \{x_{n_k}\} \longrightarrow x\}$$

L'ensemble A *est non vide, borné et fermé.*

Définition 24. *On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) d'une suite bornée* $\{x_n\}$ *la plus petite borne supérieure (resp. la plus grande borne inférieure) de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite.*

8 Limite et continuité

a) Limite d'une fonction

Définition 25. *Soit x_0 un point d'accumulation de D_f. On dit que f a pour limite L au point x_0 (ou encore tend vers L lorsque x tend vers x_0) si,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{>0} : \forall x \in D_f \cap V'(x_0, \delta), f(x) \in V(L, \varepsilon)$$

ou encore soit une suite $\{x_n\} \in D_f : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0$

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{>0} : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{>0} : \forall x \in D_f \backslash \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notation

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad ou \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$$

Théorème 23. *Si la limite d'une fonction f existe en un point, elle est unique.*

Théorème 24. *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point d'accumulation de D_f. On a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff$ pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x_0 avec $x_n \in D_f, x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers L.*

Définition 26. *Une fonction f est bornée si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in D_f, |f(x)| \leq M$$

Une fonction f est localement bornée en un point $x_0 \in D_f$ si

$$\exists \delta_{>0} \ \wedge \ \exists M_{>0} : \forall x \in D_f \cap V(x_0, \delta) |f(x)| \leq M$$

Théorème 25. *Si f possède une limite L au point x_0, x_0 étant un point d'accumulation de D_f, elle est localement bornée au point x_0.*

Théorème 26. *Soit x_0 un point d'accumulation de $D_f \cap (x_0, +\infty)$ (resp. $D_f \cap (-\infty, x_0)$). La fonction possède une limite à droite (resp. à gauche) au point x_0 si,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{>0} : \forall x \in D_f \cap (x_0, x_0 + \delta), |f(x) - L| < \varepsilon$$

resp.

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{>0} : \forall x \in D_f \cap (x_0 - \delta, x_0), |f(x) - L| < \varepsilon$$

Notation

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

resp.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Théorème 27. *Soit x_0 un point d'accumulation de $D_f \cap (-\infty, x_0)$ et de $D_f \cap (x_0, +\infty)$. Alors,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

b) Opérations sur les limites

Théorème 28. *Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de domaine commun D qui possèdent une limites en x_0, un point d'accumulation de D. On a*

1. $(f + g)(x_0) : \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2. $(f \cdot g)(x_0) : \lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \Big(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\Big)$

3. $(f/g)(x_0) : \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, *si* $\forall x \in D, g(x) \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Théorème 29. *Soit f, g, h trois fonctions de domaine commun D telles que*

$$\exists \delta_{>0} : \forall x \in D \cap V'(x_0, \delta), f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L \implies \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

c) Continuité

Définition 27. *Une fonction f est continue au point $x_0 \in D_f$ si*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{(\varepsilon)} : \forall x \in D_f \cap V(x_0, \delta), f(x) \in V\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{(\varepsilon)} : \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Théorème 30. *Soit x_0 un point d'accumulation de D_f, $x_0 \in D_f$. Les énoncés suivants s'équivalent.*

a) f *est continue en* $x = x_0$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\big(\lim\limits_{x \to x_0}\big) = f(x_0)$

c) *Pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x_0 avec $x_n \in D_f$ pour chaque n, la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x_0)$.*

d) Opération sur les fonction continues

Théorème 31. *Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in D$. On a*

a) $f + g$ *continue en* x_0

b) fg *continue en* x_0

c) f/g *continue en* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$

Théorème 32. *Soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : C \longrightarrow D$ telles que $f(A) \subset C$. Si f est continue en $x_0 \in A$ et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

e) Propriétés des fonctions continues

Théorème 33. *Soit D un ensemble compact et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f(D)$ est compact.*

Théorème 34 (Corollaire)**.** *Soit D un ensemble compact et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction f est bornée sur D.*

Théorème 35 (Bornes atteintes)**.** *Soit D un ensemble compactet $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : f(a) = \sup_{x \in D} f(x) \quad et \quad f(b) = \inf_{x \in D} f(x)$$

Théorème 36 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continuesur $[a, b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$ et y un nombre arbitraire compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors,*

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = y$$

Théorème 37 (Corollaire)**.** *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. L'image de $f\big([a, b]\big)$ est un intervalle.*

f) Continuité uniforme

Définition 28. *Une fonction f est uniformément continue sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Théorème 38. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et D un ensemble compact. Toute fonction f continue sur D est uniformément continue.*

Théorème 39. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point d'accumulation de D et f une fonction uniformément continue sur D. Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.*

g) Fonction réciproque

Définition 29. *Soit $f : A \longrightarrow B$, la fonction f est injective si*

$$\forall x, y, f(x) = f(y) \implies x = y \quad (ou\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$$

Définition 30. *Soit $f : A \longrightarrow B$, la fonction f est surjective si*

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y \implies f(A) = B$$

Définition 31. *Une fonction est bijective si elle est injective et surjective*

Définition 32. *La fonction identité est la fonction $f : A \longrightarrow A$ définie par $f(x) = x$.*

Définition 33. *Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow A$ sont telles que la composée $f \circ g$ est la fonction identité sur B, et que $g \circ f$ est la fonction identité sur A, on dit que la fonction g est la fonction réciproque (ou inverse) de f. On note la réciproque de f par f^{-1}.*

Théorème 40. *Une fonction $f : A \longrightarrow B$ possède un fonction réciproque $\iff$ f est bijective.*

Définition 34. *Une fonction f est croissante (resp. strictement croissante) si $x, y \in D$ et $x > y \implies f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$). Une fonction f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $x, y \in D$ et $x > y \implies f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). Une fonction qui a une de ces propriétés est monotone (resp. strictement monotone).*

Théorème 41. *Soit $f : A \longrightarrow f\big(A\big)$ une fonction strictement croissante (resp. strictement décroissante). On a*

a) f est injective, d'où f^{-1}

b) f^{-1} est strictement croissante (resp. strictement décroissante)

c) f continue $\implies$ f^{-1} continue

Index