



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SOLUTIONNAIRE FINAL AUTOMNE 2019

Algèbre Linéaire

Julien Hébert-Doutreloux

April 25, 2020

Question 1

Soit l'application de $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p(x)) = x(x+1)p''(x) + (x-1)p'(x) - p(x)$.

a)

Soit le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c$, l'application T est

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= (x-1)(2ax+b) - ax^2 + 2a(x+1)x - bx - c \\ &= 3ax^2 - b - c \end{aligned}$$

b)

Par la proposition suivante,

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \iff T \text{ est une transformation linéaire}$$

montrons que T est une transformation linéaire.

Proof. Soit $p_1(x) = ax^2 + bx + c, p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)) &= (x-1)(\alpha(2ax+b) + \beta(2Ax+B)) + x(x+1)(2a\alpha + 2A\beta) \\ &\quad + \alpha(-(ax^2 + bx + c)) - \beta(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 3a\alpha x^2 + 3A\beta x^2 - \alpha b - \beta B - \alpha c - \beta C \\ &= \alpha T(p_1(x)) + \beta T(p_2(x)) \end{aligned}$$

□

c)

Déterminons la matrice associée A à l'application linéaire T en considérant les polynôme de \mathbb{P}_2 comme des vecteurs (eg: $p_1(x) := (c, b, a)$).

$$\begin{cases} T(1) = -1 \implies (-1, 0, 0) \\ T(x) = -1 \implies (-1, 0, 0) \\ T(x^2) = 3x^2 \implies (0, 0, 3) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'image de T est évidente,

$$\text{im}(T) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et le noyau de T est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \ker(T) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, l'image et le noyau sont respectivement de dimensions 2 et 1.

d)

Par un théorème,

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2 \text{ surjective} \iff \text{im}(T) = \mathbb{P}_2$$

Or, la dimensions de $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ tandis que celle de $\dim(\text{im}(T)) = 2$, alors la transformation linéaire n'est pas surjective.

Question 2

a)

Pour trouver la représentation de la base $[T]_B$,

$$\{T(b_1), T(b_2), T(b_3), T(b_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b_1) = (-1, 3, 0, 0) \bullet B \\ T(b_2) = (1, 2, 0, 0) \bullet B \\ T(b_3) = (0, 0, -1, 3) \bullet B \\ T(b_4) = (0, 0, 1, 2) \bullet B \end{cases} \implies [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

Récrivons les bases matricielles en bases vectoriel, et ce en considérant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$$

Ainsi, la bases B et B' deviennent respectivement,

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'ailleurs sous cette forme, la base B' est la matrice de passage $P_{B' \leftarrow B}$.

c)

De même qu'en a), pour la B'

$$\{T(b'_1), T(b'_2), T(b'_3), T(b'_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b'_1) = \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \bullet B' \\ T(b'_2) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right) \bullet B' \\ T(b'_3) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -3\right) \bullet B' \\ T(b'_4) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right) \bullet B' \end{cases} \implies [T]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

La relation est la suivante; $[T]_{B'} = P_{B' \leftarrow B} [T]_B P_{B \leftarrow B'}$