Université de Montréal

Fiche De Note

Probabilités

Julien Hébert-Doutreloux

May 22, 2020

Contents

1 Analyse combinatoire

Théorème 1 (Principe de multiplication). *Soit r le nombre d'expérience à réaliser tel que pour chaque expérience il y a n_i possibilités avec $i = 1, 2, 3 \ldots, r$ alors le total des possibilités est donné par*

$$\prod_{i}^{r} n_i \tag{1}$$

Définition 1 (Permutation). *On appelle permutation un arrangement de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.*

Théorème 2. *Le nombre de permutaitons de n objets discernables est $n!$.*

Théorème 3 (Permutations d'objets partiellement indiscernables). *Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont indiscernables entre eux, n_2 sont indiscernables entre eux, ..., n_r sont indiscernables entre eux est donné par :*

Remarque. *Une permutation de n objets est un arrangement de ces objets considérés tous en même temps. Dans certains cas, on peut faire un arrangement de r objets choisis parmi n, avec ou sans répétition.*

1. *Permutation sans répétition,*
$$A_r^n := \frac{n!}{(n-1)!}$$
2. *Permutation avec répétition,*
$$n \cdot n \cdots n = n^r$$

Définition 2 (Coefficient binomial). *Toute disposition de r objets choisis sans répétition dans un ensemble qui en contient n est appelé combinaison de r objets pris parmi n. On note le coefficient binomial par*

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

Théorème 4. $\binom{n}{r}$ *est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n.*

Remarque. $\binom{n}{r}$ *est nombre de façons de choisir r objets sans répétition dans un ensemble qui en contient n. Les cas particuliers,*

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-1} = n$$

Théorème 5 (Théorème du binôme).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{3}$$

Quelques s'identités remarquables

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= 3x^2y + x^3 + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 + 4xy^3 + y^4 \\
(x+y)^5 &= 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^4y + x^5 + 5xy^4 + y^5 \\
(x+y)^6 &= 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^5y + x^6 + 6xy^5 + y^6 \\
(x+y)^7 &= 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7x^6y + x^7 + 7xy^6 + y^7 \\
(x+y)^8 &= 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8x^7y + x^8 + 8xy^7 + y^8 \\
(x+y)^9 &= 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9x^8y + x^9 + 9xy^8 + y^9
\end{aligned}$$

Lemme 6.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r} \tag{4}$$

Définition 3 (Coefficients multinomiaux)**.** *Soit $n_1, n_2, \cdots, n_r$ des entiers positifs tels que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. On définit le coefficients multinomiaux par*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} (n_i)!\right)^{-1} \tag{5}$$

Théorème 7 (Formule du multinôme de Newton)**.**

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} \cdot \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} (n_i)!\right)^{-1} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \left\{ \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n_1}}{(n_i)!} \right\}\end{aligned} \tag{6}$$

Théorème 8. *Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ vecteurs $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$*

2 Axiomes de probabilités

Définition 4 (Ensemble fondamental)**.** *L'ensemble des résultats possibles d'une expérience est appelé ensemble fondamental et est noté S.*

Définition 5 (Événement)**.** *Tout sous-ensemble E de S est appelé événement.*

Remarque.

1. *L'événement $\{a\}$ contenant un seul élément de S est appelé événement élémentaire.*
2. *L'ensemble vide noté $\emptyset$ et S sont des événements. Le premier est appelé événement impossible, alors que le deuxième est appelé événement certain.*

Définition 6. *Si un résultat de l'expérience est contenu dans E, on dit que E est réalisé.*

Définition 7. *Soit E et F des événements d'un ensemble fondamental S.*

1. *$E \cup F$ dit l'union de E et F, est l'événement qui est réalisé si*