Question 2

a)

Pour trouver la représentation de la base $[T]_B$,

$$\{T(b_1), T(b_2), T(b_3), T(b_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b_1) = (-1, 3, 0, 0) \bullet B \\ T(b_2) = (1, 2, 0, 0) \bullet B \\ T(b_3) = (0, 0, -1, 3) \bullet B \\ T(b_4) = (0, 0, 1, 2) \bullet B \end{cases} \implies [T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

Réecrivons les bases matricielles en bases vectorielles, et ce en considérant

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$$

Ainsi, la bases B et B' deviennent respectivement,

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'ailleurs sous cette forme, la base B' est la matrice de passage $P_{B' \leftarrow B}$.

c)

De même qu'en a), pour la B'

$$\{T(b'_1), T(b'_2), T(b'_3), T(b'_4)\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} T(b'_1) = \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) \bullet B' \\ T(b'_2) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right) \bullet B' \\ T(b'_3) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -3 \right) \bullet B' \\ T(b'_4) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2 \right) \bullet B' \end{cases} \implies [T]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

La relation est la suivante; $[T]_{B'} = P_{B' \leftarrow B}[T]_B P_{B \leftarrow B'}$