



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FICHE RÉCAPITULATIVE

Calcul I

Julien Hébert-Doutreloux

April 20, 2020

Contents

1	Les dérivées des fonctions de plusieurs variables	2
1.1	Les dérivées partielles	2
1.2	Les plans tangents et approximations linéaires	2
1.3	La règle de dérivation en chaîne	2
1.4	Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient	2
1.5	Les approximations de Taylor en deux variables	3
2	L'optimisation	3
2.1	Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables	3
2.2	L'optimisation des fonctions de plusieurs variables	4
3	Les intégrales doubles	4
3.1	Les intégrales doubles sur des domaines généraux	5
3.2	Système de coordonnée	5
3.3	Les intégrales doubles en coordonnées polaires	5
4	Les intégrales triples	5
4.1	Les intégrales triples	5
4.2	Les intégrales triples en coordonnées cylindriques	6
4.3	Les intégrales triples en coordonnées sphériques	6
5	Code Mathematica	7
	Index	8

1 Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

1.1 Les dérivées partielles

Théorème 1. [Clairaut] Soit une fonction f définie sur un disque D qui contient le point (a, b) . Si les fonction f_{xy} et f_{yx} sont continues sur D , alors

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

■

Gives the multiple partial derivative $D[f, \{x, n\}, \{y, m\}, \dots]$

■

1.2 Les plans tangents et approximations linéaires

Les plans tangents

Définition 1. Si f possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Les approximations linéaires

Définition 2. La fonction linéaire dont le graph est ce plan tangent, à savoir

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

est appelée **linéarisation** de f en $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, et l'approximation

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{c}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{c})(x_i - c_i)$$

est appelée **approximation linéaire** de f en \vec{c} . La différentielle est

$$dw = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i$$

Théorème 2. Si les dérivées partielles f_x et f_y existent près de (a, b) et sont continues en (a, b) , alors f est différentiable en (a, b) .

1.3 La règle de dérivation en chaîne

Théorème 3 (Règle de dérivation en chaîne). Si u est une fonction différentiable de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , et si chaque x_j est une fonction différentiable des m variables t_1, t_2, \dots, t_m , alors u est une fonction différentiable de t_1, t_2, \dots, t_m et

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

1.4 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Les dérivées directionnelles

Définition 3. La **dérivée directionnelle** (si la limite existe) de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b, c)$ en (x_0, y_0, z_0) est

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Définition 4. Le **vecteur gradient**, noté ∇f ou $\text{grad } f$, d'une fonction à n variables est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

D'où la dérivée dans la direction \vec{u} , un vecteur unitaire, est

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u}$$

■ Gradient of a scalar function $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n) : \text{Grad}[f, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}]$ ou $D[f[x, y, \dots], \{\{x, y, \dots\}\}]$ ■

Les plans tangents aux surfaces de niveau

Définition 5. Soit une surface S d'équation $F(x, y, z) = k$ et $P(x_0, y_0, z_0)$, un point de S . Si $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, alors le **plan tangent à la surface de niveau** $F(x, y, z) = k$ en P est

$$\nabla F(P) \bullet (\vec{x} - P) = 0$$

Proposition 1. Soit f une fonction différentiable de n variables, et \vec{x} un point de \mathbb{R}^n . Alors,

- la dérivée directionnelle de f en \vec{x} est maximale dans la direction du gradient $\nabla f(\vec{x})$
- la taux de variation maximal de f en \vec{x} est $\|\nabla f(\vec{x})\|$
- si $\vec{u} \perp \nabla f(\vec{x})$, alors la $\nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u} = 0$
- le gradient $\nabla f(\vec{x})$ est perpendiculaire à l'ensemble de niveau de f passant par \vec{x}

1.5 Les approximations de Taylor en deux variables

Définition 6. [Polynôme de Taylor de degré 1 de f en (a, b)]

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Définition 7. [Polynôme de Taylor de degré 2 de f en (a, b)]

$$Q(x, y) = L(x, y) + \frac{1}{2!} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2!} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

2 L'optimisation

2.1 Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables

Définition 8. (Matrice Hessienne) La matrice Hessienne d'une fonction f à n variables est la matrice carrée d'ordre n notée $\nabla^2 f$ telle que l'élément $(\nabla^2 f)_{ij} = f_{x_i x_j}$:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \dots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \dots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

■ Le matrice Hessienne : `MatrixForm[D[f[x, y, ...], {{x, y, ...}}, {{x, y, ...}}]]` ■

Définition 9. [Point critique] Soit f une fonction à n variables et $P = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, un point. Le point P est un point critique si $\nabla f(P) = \vec{0}$.

Théorème 4. [Test des dérivées premières] Si f possède un maximum (resp. minimum) local en (a, b) et si les dérivées partielles du premiers ordre de f existent, alors $\nabla f(a, b) = \vec{0}$.

Les maximums et minimum absolus

Théorème 5. [Bornes atteintes] Si f est continu sur un compact K , alors f atteint son maximum (resp. son minimum) absolu en au moins un point de K . Autrement dit,

$$\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : f(\vec{x}_1) = \inf_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\} \quad \text{et} \quad f(\vec{x}_2) = \sup_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\}$$

2.2 L'optimisation des fonctions de plusieurs variables

Définition 10. Un point critique \vec{a} est un point de selle de la fonction f si, dans toute boule ouverte $B_\varepsilon(\vec{a})$, il existe des points \vec{x}_1 et \vec{x}_2 tels que $f(\vec{x}_1) < f(\vec{a}) < f(\vec{x}_2)$.

Le signe d'une matrice

Théorème 6. [Critère de Sylvester] Soit A une matrice symétrique inversible

- Si $\alpha_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, alors A est définie positive.
- Si $\beta_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, alors A est définie négative.

■ Calculer les mineurs principaux d'une matrice :

```
submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice[[1 ;; d, 1 ;; d]]]
mineur[matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
{x, y, z} = {0, 1, 2}
For[i = 1, i < 4, i++, Print[mineur[matrice, i]]]
```

où d le numéro de la colonne du i ème élément de la diagonale principale. ■

Théorème 7. Conditions suffisantes du deuxième ordre pour un problème d'optimisation sans contraintes

- si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est définie positive (resp. négative), alors f possède un minimum (resp. un maximum) local en \vec{a} .
- si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est indéfinie alors \vec{a} est un point de selle de f

■ Exemple de résolution pour trouver les points critiques ;

```
F[x_, y_, z_] := x^3 - x y + y^2 + z^2 gradient = Grad[F[x, y, z], {x, y, z}]
Solve[Resolve[{gradient == mu Grad[x x + y y + z z, {x, y, z}] &&
  x x + y y + z z == 1}, {mu, x, y, z}, Reals]]
```

■

3 Les intégrales doubles

Définition 11. Si $f(x, y) \geq 0$, alors le volume V du solide au-dessus du rectangle R et sous la surface $z = f(x, y)$ est

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Définition 12. Selon l'ordre d'intégration, les intégrales itérées sont ;

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Théorème 8. Si f est continue sur le rectangle $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Si on suppose que f est bornée sur R , que f est discontinue sur un nombre fini de courbes lisses et que les intégrales itérées existent.

3.1 Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Définition 13. Si f est continue sur une région D de type I,

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Définition 14. Si f est continue une région D de type II,

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Proposition 2. Si on intègre la fonction constante $f(x, y) = 1$ sur une région D , on obtient l'aire de D , car le volume sous $f(x, y) = 1$ au-dessus de D est égal à l'aire de D ;

$$\iint_D 1 dA = A(D)$$

3.2 Système de coordonnées

Définition 15. Le passage du système cartésien au système polaire est donné par les relations suivantes;

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Définition 16. Le passage du système cartésien au système cylindrique est donné par les relations suivantes;

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

Définition 17. Le passage du système cartésien au système sphérique est donné par les relations suivantes;

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

3.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Définition 18. Si f est continue sur un rectangle polaire R défini par $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Si f est continue sur région polaire de la forme

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

4 Les intégrales triples

4.1 Les intégrales triples

Théorème 9. Si f est continue sur le rectangle $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, alors

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Définition 19. Une région solide E est dite de type 1 si elle est située entre les graphes de deux fonctions continues de x et y ,

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Définition 20. Si la projection D de E dans le plan xy est une région de type I, alors

$$E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Définition 21. Si D est une région de type II, alors

$$E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Définition 22. Une région solide E est de type 2 si elle est de la forme

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

Définition 23. Une région solide E est de type 3 si elle est de la forme

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Proposition 3. Soit la fonction $f(x, y, z) = 1$ pour tout points de E , alors l'intégrale triple représente le volume de E ,

$$V(E) = \iiint_E dV$$

4.2 Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition 24.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dx dr d\theta$$

4.3 Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Définition 25.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Aussi,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta, \phi)}^{g_2(\theta, \phi)} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

5 Code Mathematica

■ Méthode pour calculer des volumes bornée par des régions ;

```
R = ImplicitRegion[x x + y y <= z && x x + y y <= 25 && z <= 25, {x, y, z}]
RegionBoundary[R]
DiscretizeRegion[R, MeshQualityGoal -> "Maximal"]
Volume[R]
RegionMeasure[R, 3]
```

■

Index

A

Aire 5

B

Bornes atteintes 4

C

Critère de Sylvester 4

Cylindrique 5

D

Derivative 2

Domaine de type 1 6

Domaine de type 1.I 6

Domaine de type 1.II 6

Domaine de type 2 6

Domaine de type 3 6

Domaine de type I 5

Domaine de type II 5

Dérivée directionnelle 2

G

Gradient 3

I

Intégrales doubles en polaire 5

Intégrales itérées 4

Intégrales triples en cylindrique 6

Intégrales triples en sphérique 6

M

Matrice Hessienne 3

O

Optimisation avec contrainte 4

P

Point critique 3

Polaire 5

Polynôme de Taylor 3

S

Sphérique 5

Sylvester 4

Système de coordonnées 5

T

Test des dérivées premières 3

Théorème de Clairaut 2

Théorème de Fubini 4

Théorème de Fubini pour les intégrales triples 5

V

Vecteur gradient 3

Volume 4-7