EXAMEN INTRA
MAT 1720 PROBABILITÉS

— **Vous avez deux heures pour compléter l'intra.**

— **Expliquez de manière détaillée votre raisonnement.**

— **La calculatrice n'est pas permise et de toute manière inutile.**

— **Si vous êtes bloqués sur une question, passez à la suivante !**

Professeur : Alexander Fribergh, Université de Montréal.

(1) **(5 points) Vrai ou Faux** (Aucune justification n'est nécessaire)

(a) Le nombre de manières différentes de distribuer 52 cartes distinctes entre 4 joueurs distincts est $52!/(13!)^4$.

(b) La probabilité qu'*exactement* un des événements A ou B se réalise est $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

(c) Soient A, B deux événements dans $\mathcal{S}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, alors A et B sont indépendants.

(d) Soient A et B deux événements dans $\mathcal{S}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Si la réalisation de B augmente la probabilité que A se réalise, alors la réalisation de A augmente la probabilité que B se réalise.

(e) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un ensemble $\mathcal{S}$. On considère la variable aléatoire $(X - Y)^2$ sur $\mathcal{S}$. Si $\mathbb{E}[XY] = 0$, alors $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ égale $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2]$.

(2) **(10 points)**

Dans une épreuve de ski de fond nous comptons 4 Canadiens, 2 Américains, 2 Russes et 4 skieurs de nationalités toutes différentes.

Nous estimons que les classements finaux des skieurs sont équiprobables.

À partir de ces informations, répondez aux questions suivantes :

(a) (3 points) Montrer que la probabilité de l'événement *exactement deux skieurs sur les trois premiers sont canadiens* est $12/55$.

(b) (2 points) Montrer que la probabilité de l'événement *au moins un skieur canadien est parmi les trois premiers* est $41/55$.

(c) (2 points) Calculer la probabilité que deux skieurs canadiens se classent premier et deuxième.

(d) (3 points) Votre collègue prétend que comme il y a 4 Canadiens, 2 Américains et 2 Russes, la probabilité que les deux premiers skieurs soient canadiens sachant que les deux premiers skieurs ont la même nationalité est $1/2$. Calculer cette probabilité pour déterminer si votre collègue a raison.

(3) (**5 points**) Un couple, Alice et Bob, et une personne célibataire, Claudio, visitent une maison dans l'optique de faire un achat immobilier. Considérons les événements suivants

$$A = \{\textit{Alice aime la maison qu'elle visite}\}$$
$$B = \{\textit{Bob aime la maison qu'il visite}\}$$
$$C = \{\textit{Claudio aime la maison qu'il visite}\}$$

Nous remarquons que

— la probabilité que les 3 personnes aiment la maison est nulle,
— la probabilité que personne n'aime la maison est de 1/2,
— la probabilité qu'une personne aime la maison est de 1/4, et ceci pour les trois acheteurs potentiels.

(a) (2 points) Exprimez l'événement *personne n'aime la maison* en termes des événements ci-dessus. En déduire la probabilité de l'événement qu'*une personne au moins aime la maison* .

(b) (3 points) Lors des visites Claudio ne discute pas avec Alice et Bob et se fait donc une opinion indépendante. Cela veut dire que C est indépendant de A et B. Utiliser la question précédente pour calculer $P[A \cap B]$ et en déduire si A et B sont indépendants.

(4) (**10 points**) Les élèves d'une classe se divisent en trois groupes : ceux qui sont doués, les élèves normaux et ceux qui ont des difficultés. On note C_1 (resp. C_2, C_3) l'événement qu'un élève est doué (resp. normal, en difficulté).

On suppose que

— $P[C_1] = \frac{1}{4}$ et qu'un élève doué a 80% de chances d'avoir un A à chacun de ses cours,
— $P[C_2] = \frac{1}{2}$ et qu'un élève normal a 50% de chances d'avoir un A à chacun de ses cours,
— $P[C_3] = \frac{1}{4}$ et qu'un élève en difficulté a 20% de chances d'avoir un A à chacun de ses cours.

(a) (2 points) Quelle est la probabilité qu'un élève ait un A ?

(b) (2 points) Supposons qu'un élève a eu un A à son premier test. On note cet événement A_1. Quelle est la probabilité qu'il soit normal ?

(c) (1 point) Montrer que C_2 est indépendant de A_1.

(d) (2 point) Montrer que $P[C_1 \mid A_1] - P[C_1] = -(P[C_3 \mid A_1] - P[C_3])$.

(e) (3 points) Utiliser les questions précédentes pour montrer que $P[A_2 \mid A_1] \geq P[A_1]$, où A_2 est l'événement que l'élève ait un A à son deuxième cours.

(5) (**5 points**) Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $\{X = k\}$ et $\{Y = k'\}$ sont des événements indépendants pour tout $k, k' \geq 0$.

(a) (2 points) Montrer que pour tout $k, k' \geq 0$

$$P[X = k \text{ et } Y \leq k'] = P[X = k]P[Y \leq k']$$

et

$$P[X \leq k]P[Y \leq k'] = P[X \leq k \text{ et } Y \leq k'].$$

(b) (3 points) Posons $Z = \max(X, Y)$ et notons F_X (resp. F_Y et F_Z) les fonctions de répartition de X (resp. Y et Z). Montrer que pour tout $k \geq 0$

$$F_Z(k) = F_X(k)F_Y(k).$$

Solutions

Exercice 1

(1) **Vrai**.
(2) **Vrai**, voir formule d'inclusion-exclusion.
(3) **Vrai**, $P[A \cap B] = P[A \mid B]P[B] = P[A]P[B]$.
(4) **Vrai**. On suppose $P[A \mid B] \geq P[A]$ et on veut prouver $P[B \mid A] = P[A \mid B]\frac{P[B]}{P[A]} \geq P[B]$.
(5) **Faux**, $E[(X-Y)^2] = E[X^2] - 2E[XY] + E[Y^2] = E[X^2] + E[Y^2]$

Exercice 2

(a) Ici nous pouvons procéder de manière non-ordonnée. Nous avons $\binom{12}{3}$ possbilité pour les trois premiers skieurs. Le nombre de choix de canadiens est de $\binom{4}{2}$. Le nombre de choix du dernier skieur non-canadien est $\binom{8}{1}$. La probabilité est donc

$$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{6 \times 8}{12 \times 11 \times 10/6} = \frac{6 \times 8 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = 12/55$$

(b) Calculons la probabilité qu'il n'y ait aucun canadien. Nous avons $\binom{8}{3}$ choix pour ces skieurs

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = 14/55 \ .$$

L'événement voulu est le complément de cet év'enement. La probabilité est donc $1 - 14/55 = 41/55$.

(c) Cette fois l'ordre est important. Nous avons que le nombre de classement ordonné possible des 2 premiers est 12×11. Le nombre de classements où deux canadiens sont premiers est 4×3. Nous avons donc que la probabilité est

$$\frac{4 \times 3}{12 \times 11} = 1/11 \ .$$

(d) Soit C l'événement *deux skieurs canadiens se classent premier et deuxième* et N l'événement *les deux skieurs ont la même nationalité*. Nous avons

$$\mathbb{P}(C|N) = \frac{\mathbb{P}(C \cap N)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(N)}$$

Mais $N = A \cup R \cup C$ où A est *deux skieurs américains se classent premier et deuxième* et de manière similaire pour R. Ces événements sont disjoints. De plus $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R)$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2 \times 1}{12 \times 11} = 1/66$$

Nous avons donc que $\mathbb{P}(C|N) = \frac{1/11}{1/66+1/66+6/66} = 6/8 = 3/4$. Clairement, notre collègue n'a pas suivi mat1720.

Exercice 3

(1) L'événement est $A^c \cap B^c \cap C^c$. Donc
$$P[A \cup B \cup C] = 1 - P[A^c \cap B^c \cap C^c] = 1 - 1/2 = 1/2.$$

(2) Avec l'information donnée, nous savons que $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/16$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = 1/16$. De plus $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Nous avons donc par le principe d'inclusion-exclusion que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C \cap B) \\ &= 3/4 - \mathbb{P}(A \cap B) - 2/16 + 0\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1/2$. Nous concluons que $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/4 - 2/16 - 1/2 = 1/8$. Nous concluons que les deux événements ne sont pas indépendants car $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1/16$.

Exercice 4

(1) $P[A_1 \mid C_1]P[C_1] + P[A_1 \mid C_2]P[C_2] + P[A_1 \mid C_3]P[C_3] = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$.

(2) $P[C_2 \mid A_1] = \frac{P[A_1|C_2]P[C_2]}{P[A_1]}$. Donc $P[C_2 \mid A_1] = \frac{1}{2}$.

(3) On a $P[C_2 \mid A_1] = P[C_2]$ donc on est indépendant.

(4) On a $P[C_1 \mid A_1] + P[C_2 \mid A_1] + P[C_3 \mid A_1] = 1$ et $P[C_1] + P[C_2] + P[C_3] = 1$. Comme de plus $P[C_2] = P[C_2 \mid A_1]$ il suffit de faire la différence pour obtenir l'équation voulue.

(5) On
$$P[A_2 \mid A_1] = P[A_2 \mid C_1, A_1]P[C_1 \mid A_1] + P[A_2 \mid C_2, A_1]P[C_2 \mid A_1] + P[A_2 \mid C_3, A_1]P[C_3 \mid A_1],$$
et $P[A_2 \mid C_i, A_1] = P[A_1 \mid C_i]$ pour tout i. Par la formule du 1 et l'indépendance de 3 on voit que
$$P[A_2 \mid A_1] - P[A_1] = P[A_1 \mid C_1](P[C_1 \mid A_1] - P[C_1]) + P[A_1 \mid C_3](P[C_3 \mid A_1] - P[C_3]),$$
et comme $P[A_1 \mid C_1] > P[A_1 \mid C_3]$ implique que $P[A_2 \mid A_1] - P[A_1] > 0$.

Exercice 5

(1) On a $\{X = k, Y \leq k'\} = \cup_{j \leq k'} \{X = k, Y = j\}$ où l'union est disjointe. Cela implique
$$\begin{aligned}P[X = k, Y \leq k'] = \sum_{j \leq k'} P[X = k, Y = j] &= \sum_{j \leq k'} P[X = k]P[Y = j] \\ =& P[X = k] \sum_{j \leq k'} P[Y = j] = P[X = k]P[Y \leq k'].\end{aligned}$$

De même on a $\{X \leq k, Y \leq k'\} = \cup_{j \leq k} \{X = j, Y \leq k'\}$, ce qui avec un raisonnement similaire donne
$$P[X \leq k, Y \leq k'] = P[X \leq k]P[Y \leq k'].$$

(2) On a $P[Z \leq k] = P[\max(X, Y) \leq k] = P[X \leq k \text{ et } Y \leq k] = P[X \leq k]P[Y \leq k]$.