Question 3

a)

Par le procédé de **Gram-Schmidt**

$$\hat{y} = \text{proj}_{\mathcal{W}} y = \text{proj}_{u_1} y + \text{proj}_{u_2} y + \cdots + \text{proj}_{u_p} y = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle y, u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i$$

$$z = y - \hat{y}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_3 = v - \text{proj}_W v &= v - \text{proj}_{w_1} v - \text{proj}_{w_2} v \\ &= v - \frac{\langle v, w_1 \rangle}{||w_1||^2} - \frac{\langle v, w_2 \rangle}{||w_2||^2} \\ &= (1,1,1) - \frac{(1,1,1) \bullet (1,0,1)}{2} - \frac{(1,1,1) \bullet (0,1,1)}{2} \\ &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

b)

Considérons une base orthonormée de W suivante:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Par le procédé de Gram-Schimdt appliqué à la base ci-dessus (même chose qu'en a)) on obtient la base orthonormée suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$