Question 4

a)

Le polynôme caratéristique de la matric A est :

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^4 - 12\lambda^3 + 48\lambda^2 - 64\lambda \\
&= (\lambda-4)^3\lambda
\end{aligned}$$

On conclut que $\lambda = 4$ est une racine du polynôme caratéristique de A, donc une de ses valeurs propres. Elle est d'ailleurs de multiplicité algébrique de 3.

b)

Selon le résultat obtenue ci-dessus, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$ respectivement de multiplicité algébrique de 3 et de 1.
Pour λ_1,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, $E_{\lambda_1} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Pour λ_2,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $E_{\lambda_2} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c)

La matrice P est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs propres, on obtient la matrice O et la matrice diagonale des valeurs propres D:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)