Variable Aléatoire Discrète

Nom	**Formule**	**Espérance**	**Variance**	**Notation**
Bernoulli	$\begin{cases} P(X=1)=p \\ P(X=0)=1-p \end{cases}$	p	$p(1-p)$	
Binomiale[1]	$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$	$X \sim B(n,p)$
Binomiale négative	$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$	$X \sim Bn(r,p)$
Poisson[2]	$P(X=i)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$	λ	λ	$X \sim Po(\lambda)$
Géométrique	$P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$X \sim Geom(p)$
Hypergéométrique[3]	$P(X=i)=\dfrac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$	np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$	$X \sim Hpg(n,N,m)$

Théorème.

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$
$$Var(X)=E[X^2]-\big(E[X]\big)^2$$
$$Var(aX+b)=a^2Var(X)$$

Fonctions de répartition et probabilité sur X

Définition. *La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie pour tout nombre réel b, $-\infty < b < \infty$ par :*

$$F(b)=P(X\leq b)=F(b)\lim_{x\to b^-}F(x)$$

1. $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$
2. $P(X>b)=1-P(X\leq b)=1-F(b)$
3. $P(X\geq a)=1-P(X<b)=1-\lim_{n\to\infty}F\Big(b-\dfrac{1}{n}\Big)$

Densité de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Définition. *Soit la variable aléatoire $X:S\longrightarrow\mathbb{R}$. Si $X(S)$ est un sous-ensemble infini non dénombrable, alors X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction non négative définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout ensemble $B\subseteq R$ (la fonction f est appelée densité de probabilité):*

$$P\big(\{X\in B\}\big)=\int_B f(x)\,dx$$

1. $f(x)\geq 0$

[1] $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=1$

[2] Approximation poissonnienne de lois binomiales : Si n est grand et si p est petit, alors $B(n,p)\approx Po(\lambda)$

[2] Processus de Poisson (3 conditions): $P\Big(N(t)=k\Big)=\binom{n}{k}\Big(\dfrac{\lambda t}{n}\Big)^k\Big(1-\dfrac{\lambda t}{n}\Big)^{n-k}\approx e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!},\quad N(t)=\lambda t$

[3] n : sous-ensemble de la population, N : population, m : ensemble ayant une caractéristique (indistinguable entre eux)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

4. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$

5. $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad P(X \geq b) = \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$

Définition. *Soit X une variable aléatoire continue de densité $f(x)$. La fonction de répartition F_X de X est définie par :*

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

Variable Aléatoire Continue

Nom	**Formule**	**Espérance**	**Variance**	**Notation**
Uniforme[4]	$P\{a \leq X \leq b\} = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$	$\frac{\beta+\alpha}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$X \sim Unif(\alpha,\beta)$
Normale[5]	$P\{X \leq a\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$
Exponentielle[6]	$P\{X \leq a\} = 1 - e^{-\lambda a}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$X \sim Exp(\lambda)$
Gamma[7]	$P\{T_n \leq t\} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$	$\frac{s}{\lambda}$	$\frac{s}{\lambda^2}$	$T_n \sim Gam(n,p)$

Poisson vs Exponentielle

- Poisson : Compte le nombre d'apparition d'un phénomène
- Exponentielle : Compte le temps entre deux apparition d'un phénomène

Correction de continuité et Approximation

Si $X \sim Bin(n,p)$ est approximée par $Y \sim N\big(np, np(1-p)\big)$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = a) &\simeq P(a - 0.5 < Y < a + 0.5) \\ P(a < X < b) &\simeq P(a + 0.5 < Y < b - 0.5) \\ P(a \leq X \leq b) &\simeq P(a - 0.5 < Y < b + 0.5) \end{aligned}$$

[6] $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & si\, \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 \quad sinon \end{cases}$

[7] Variable normale centrée réduite

[8] Taux de panne : $\lambda(t) = \frac{f(t)}{(1-F(t))}$ tel que $F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right)$

[9] Fonction Gamma : $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{s-1}\,dy$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$

[9] Si $s = n$ entier, la loi gamma de paramètres (n, λ) décrit le temps d'attente avant la n-ième apparition du phénomène. Notons T_n l'heure à laquelle le n-ième événement se produit et $N(t)$ le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t]$

1. Soit $X \sim Bin(n,p)$ tel que $np \leq 5$, alors l'approximation par une loi de Poisson est adéquate $X \approx Po(\lambda = np)$
2. Soit $X \sim Bin(n,p)$ tel que $np > 5$, alors l'approximation par une loi Normale est adéquate $X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

Fonction de densité

Fonction de densité	
Nom	**Formule**
Exponentielle	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$
Gamma	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(x)} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$
Uniforme	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & , \alpha < x < \beta \\ 0 & sinon \end{cases}$
Normale	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad , x \in \mathbb{R}$

Théorème. *Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X. Soit g une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) et dérivable, donc continue. La densité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| & si\ y = g(x)\ pour\ un\ x\ quelconque \\ 0 & si\ y \neq g(x)\ pour\ tout\ x \end{cases}$$