Quiz 2 NOM :

MAT1720 CODE PERMANENT :

RÉPONSE (Problème) :

- Soit X_1 et X_2 deux V. A. ind. distribuées t.q.

$$X_1 \sim N(0;1) \quad \text{et} \quad X_2 \sim \text{Gamma}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

- Les densités sont définies ainsi :

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \quad \text{et} \quad f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_2}} e^{-x_2/2} \quad , \quad \begin{matrix} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 > 0 \end{matrix}$$

- On pose $y_1 = x_1 / \sqrt{x_2}$ et $y_2 = x_2$

2×0.5 a) $x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2$

$$x_1 = y_1 \sqrt{y_2}$$

2×0.5 b) • $\text{dom}(y_1) = \text{ima}(g_1) = \mathbb{R}$ • $\text{dom}(y_2) = \text{dom}(x_2) \Rightarrow y_2 > 0$

c) On pose

$$D = \underbrace{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} \\[2ex] \dfrac{\partial h_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}_{1} = \underbrace{\begin{vmatrix} \sqrt{y_2} & 0 \\[2ex] \dfrac{y_1}{2\sqrt{y_2}} & 1 \end{vmatrix}}_{1} = \sqrt{y_2}$$

RÉPONSE (Problème) :

d) On pose $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \; |D|$

$$= f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\; |D|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi x_2}} e^{-x_2/2} \sqrt{y_2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y_1^2 y_2 + y_2\right)\right]$$

• Bonne réponse (1) $= \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(-\dfrac{y_2}{2}\left(y_1^2+1\right)\right)$

(1) • Domaine de définition : ~~y_1 est défini~~ la densité est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

(1.5)

e) • $f_{Y_1}(y_1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_2}{2}\left(y_1^2+1\right)\right) dy_2$

$$= \frac{-1}{\pi} \frac{1}{(y_1^2+1)} \exp\left[-\frac{y_2}{2}(y_1^2+1)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi\left(y_1^2+1\right)}$$

(.5)

• La densité de f_{Y_1} est définie sur $\mathbb{R}$

Quiz 2 NOM :

MAT1720 CODE PERMANENT :

RÉPONSE (Problème) :

f) $\mathbb{E}[Y_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \, f_{Y_1}(y_1) \, dy_1$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1}{\pi (y_1^2+1)} \, dy$ .5

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy_1} \left[\frac{1}{2} \log(y^2+1) \right] dy$ .5

$= \frac{1}{2} \log (y^2+1) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$= \infty - \infty$ Forme indéterminée.

g) 1 pour tous!