Université de Montréal

Fiche Solution

Analyse I

Julien Hébert-Doutreloux

April 18, 2020

4.10.5

a) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage $V(x_0, \delta)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $f(x) > \varepsilon$ pour tout $x \in D \cap V(x_0, \delta)$. *De même, pour $f(x_0) < 0$, montrer qu'il existe un voisinage $V(x_0, \delta)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $f(x) < -\varepsilon$ pour tout $x \in D \cap V(x_0, \delta)$ (solution analogue).*

Solution

Remarquons les différents comportements d'une fonction continue dans un voisinage relativement proche de $f(x_0)$.

1. $\longleftrightarrow$: Constant
2. $\nearrow\searrow$: Croissant-Décroissant
3. $\searrow\nearrow$: Décroissant-Croissant
4. $\searrow\searrow$: Décroissant-Décroissant
5. $\nearrow\nearrow$: Croissant-Croissant

Les cas 1 et 3 sont triviaux puisqu'il existe un petit voisinage tel que pour tout $f(x) \in f\big(V(x_0, \delta)\big), f(x) > 0$.
En particuliers, $f(x) > f(x_0)/2 = \varepsilon > 0$.
Pour les autres cas, le cas 2 se résout de manière similaire au cas 4 et au cas 5.

Sans perdre de généralité f Croissant-Décroissant et $f(x_0) > 0$

$$\begin{cases} \nearrow \implies \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0), x > y \implies f(y) > f(x) \\ \searrow \implies \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in D \cap (x_0, x_0 + \delta_2), x > y \implies f(y) < f(x) \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on a,

$$V(x_0, \delta) \subset (x_0 - \delta_1, x_0) \cup \{x_0\} \cup (x_0, x_0 + \delta_2)$$

tel que f croisse sur l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et décroisse sur l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$.
Par le théorème de valeurs intermédiaire, $(f(x_0 - \delta) \neq f(x_0))$:

$$\forall y \in f([x_0 - \delta, x_0]), \exists c_1 \in (x_0 - \delta, x_0) : f(c_1) = y < f(x_0)$$

Ainsi, il existe une préimage c_1 (resp. c_2) tel que l'image est strictement supérieure à zero et strictement inférieure à $f(x_0)$, car la fonction croît (*resp. décroît*) sur l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0]$ (*resp.* $[x_0, x_0 + \delta]$) jusqu'à (*resp. de*) x_0 où la fonction est strictement positive. Donc, en redéfinissant $\delta = \min\{c_1, c_2\}$ on a

$$\forall x \in D \cap V(x_0, \delta), f(x) > \min\{f(c_1), f(c_2)\} = \varepsilon$$

b) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $h(r) = 0$ pour tout nombre rationnel r. Montrer que $h(x) = 0$ pour tout nombre réel x.

Solution

Puisque h est continue, alors pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x_0 avec $x_n \in \mathbb{R}$ pour chaque n, la suite $\{h(x_n)\}$ converge vers $h(x_0)$.
En particuliers, par la densité des nombre irrationnel (*resp. rationnel*) dans les réels.

$$\exists (y_n) \in \mathbb{Q}^C : \forall n \in \mathbb{N}, y_n \neq r, \lim_{n\to\infty} y_n = r$$

$$\exists (x_n) \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq r, \lim_{n\to\infty} x_n = r$$

En supposant que $\lim_{n\to\infty} h(y_n) \neq 0$ on contredit la condition de continuité de h puisqu'il existerait deux suites (x_n) et (y_x) telles que $\lim_{n\to\infty} h(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} h(y_n)$. Pour que h soit une fonction continue, il est donc nécéssaire que la $\lim_{n\to\infty} h(y_n) = 0 = h(r)$ pour toute suite convergente.

c) Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre rationnel. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel x.

Solution

En définissant la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, on se retrouve dans la situation de l'exercice précédant.

4.10.8

d) Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [0, 2\pi]$ tel que $f(c) = f(c + \pi)$.

Solution

Considérons $h : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (thm. *algèbre de fonction continue*) définie par $h(x) = f(x) - f(x + \pi)$. Alors,

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - f(\pi) \\ h(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) \end{cases}$$

Par trichotomie des nombres réels,

$$h(0) > h(\pi) \tag{1}$$
$$h(0) = h(\pi) \tag{2}$$
$$h(0) < h(\pi) \tag{3}$$

Sachant que $h(0) + h(\pi) = 0$, alors de (1) et (3),

$$h(0)h(\pi) < 0$$

En particuliers, h étant continue sur $[0, \pi]$ et respectant : $h(0) \neq h(\pi)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [0, \pi] : 0 = h(c) = f(c) - f(c + \pi)$$

De (2), l'existence d'un $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = f(c + \pi)$ est triviale, $c = 0$ et/ou $c = \pi$.

4.8.1.2

e) Montrer que la fonction $f : (a, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, 0 < a < 1$ définie par $f(x) = 1/x$, est uniformément continue sur $(a, 1)$.

Utilisons le fait que f est continue en tout point sauf en $x = 0$. Puisque $a > 0$, alors $(a, 1) \subset [a/2, 1] = E$.

Par un théorème toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. Ainsi, f est uniformément continue sur E et par conséquent l'est aussi sur $(a, 1)$.

f) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur $(0, \infty)$.

Par définition, f est uniformément continue sur E si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in E, |x - y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in (0, \infty)$ et $0 \leq |x - y| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(y)\right| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2 - y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \left|\frac{\delta(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|
\end{aligned}$$

Si $a \in (0,1), a^2 < a < 1 \implies a < 1 + a^2$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$.

Sinon, $a \in [1, \infty), 1 \leq a < a^2 \implies a < a^2 + 1$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$

En particuliers, $\forall a \in (0, \infty)$, $\frac{a}{1+a^2} < 1$. Alors,

$$\delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| < 2\delta$$

En posant, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in (0, \infty), |x - y| < \delta \implies \left|f(x) - f(y)\right| < 2\delta = \varepsilon$$

Donc, la fonction f est uniformément continue sur $(0, \infty)$.

3.8.11

Montrer que si $|r| < 1$, alors

$$\frac{1}{(1-r)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n$$

Solution

Remarquons que si $|r| \geq 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge.
Posons $A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$, qui est absolument convergente pour $|r| < 1$. En utilisant le théorème relatif au produit de Cauchy:

> Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ qui converge absolument et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ qui converge. Posons $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$. Le produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge vers $A \cdot B$

Supposons, $a_n = b_n = r^n$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente, alors elle est simplement convergente. Par définition du produit de Cauchy,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} r^k \cdot r^{n-k}$$

Par un changement d'indice,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} r^{k-1} \cdot r^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} r^n \\
&= (n+1)r^n
\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n = A \cdot B = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\right)^2 = \frac{1}{(1-r)^2}$$

3.8.14

Montrer par un contre-exemple que le développement décimal d'un nombre réel n'est pas unique.

Solution

Soit le développement de 1 comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9 * 10^n} \longrightarrow 1 \quad et \quad 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{10^n} \longrightarrow 1$$

4.8.10.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

Considérons la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x) - x$. Ainsi,

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - 0 \implies 0 \leq h(0) \leq 1 \\ h(1) = f(1) - 1 \implies -1 \leq h(1) \leq 0 \end{cases}$$

En particuliers, si $h(1) < 0 < h(0)$, par le théorème des valeurs intémédiaires,

$$0 \in [f(1), f(0)], \exists c \in [0,1] : h(c) = f(c) - c = 0$$

Pour les cas $h(0) = 0$ et/ou $h(1) = 0$, alors la valeur de c est /vidente (0 et/ou 1)

4.8.13.

Soit une fonction continue $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction bornées et uniformément continues. Montrer que la fonction produit (usuel) $f \cdot g$ est aussi uniformément continue. Est-ce toujours vras si les fonctions sont non-bornées.

Solution

Par hypothèse que f et g sont bornées :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D, \big|f(x)\big| \leq M_1 \tag{4}$$
$$\exists M_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D, \big|g(x)\big| \leq M_2 \tag{5}$$

Par hypothèse que f et g sont sont uniformément continues :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in D, |x-y| < \delta_1 \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon_1 \tag{6}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in D, |x-y| < \delta_2 \implies \big|g(x) - g(y)\big| < \varepsilon_2 \tag{7}$$

Considérons la fonction continue (*thm* sur produit de fonction continu) $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x)g(x)$. Montrons que h est uniformément continue:

Définissons $M = \max\{M_1, M_2\}$ et considérons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 := \frac{\epsilon}{2M}$

$$\begin{aligned}
\big|h(x) - h(y)\big| &= \big|f(x)g(x) - f(y)g(y)\big| \\
&= \big|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)\big| \\
&= \big|f(x)\big(g(x) - g(y)\big) + g(y)\big(f(x) - f(y)\big)\big|
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
&\leq \big|f(x)\big(g(x) - g(y)\big)\big| + \big|g(y)\big(f(x) - f(y)\big)\big| \\
&= \big|f(x)\big| \cdot \big|\big(g(x) - g(y)\big)\big| + \big|g(y)\big| \cdot \big|\big(f(x) - f(y)\big)\big|
\end{aligned}$$

Par (1) et (2),

$$\leq M_1 \cdot \big|\big(g(x) - g(y)\big)\big| + M_2 \cdot \big|\big(f(x) - f(y)\big)\big|$$

Par (3) et (4),

$$\begin{aligned}
&< M_1 \cdot \varepsilon_2 + M_2 \cdot \varepsilon_1 \\
&< 2M(\frac{\epsilon}{2M}) = \epsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction h satisfait la définition de continuité uniforme,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{(\epsilon)} > 0 : \forall x, y \in D, |x - y| < \delta \implies \big|h(x) - h(y)\big| < \epsilon$$

Ce n'est pas toutes les fonctions continues qui par le produit avec une autre fonction continue sont uniformément continues. Le carré de la fonction identité en est un exemple (contre-exemple).

4.8.14.

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est dit *lipschitzienne* s'il existe un nomber réel $K > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer qu'une telle fonction est uniformément continue sur I, Toutes les fonctions uniformément continues sur I sont-elles lipschitziennes ?

Solution

Puisque $K > 0$ est un nombre fixe et $|x - y| < \delta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq K\delta$$

Posons $\varepsilon = K\delta$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

La réciproque est généralement fausse ($e.g\ f(x) := \sqrt{x}$)

4.8.15.

Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}$$

est uniformément continue sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

Solution

Par définition, f est uniformément continue sur E si,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in (0, \infty)$ et $0 \leq |x-y| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f(y)\big| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2 - y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \left|\frac{\delta(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|
\end{aligned}$$

Si $a \in (0,1), a^2 < a < 1 \implies a < 1 + a^2$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$.

Sinon, $a \in [1, \infty), 1 \leq a < a^2 \implies a < a^2 + 1$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$

En particuliers, $\forall a \in (0, \infty)$, $\frac{a}{1+a^2} < 1$. Alors,

$$\delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| < 2\delta$$

En posant, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in (0, \infty), |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < 2\delta = \varepsilon$$

Donc, la fonction f est uniformément continue sur $(0, \infty)$.

4.8.17.

Un véhicul se rend en une heure d'une point A à un point B distants de $D > 0$ kilomètres. En faisant les hypothèses nécessaires, montrer qu'il existe deux points du trajet distants de $D/2$ kilomètres où le véhicule passe a une demie-heure d'intervalle. *Suggestion* : Considérer $d(s)$ la distance parcourue du temps 0 au temps $s \in [0, 1]$ et définir

$$h(t) = d(t + 1/2) - d(t) - D/2$$

Solution

Puisque h dépend du temps, alors elle est par hypothèse continue (la téléportation est impossible).

$$\begin{cases} h(0) = d(0 + 1/2) - d(0) - D/2 = d(1/2) - D/2 \\ h(1/2) = d(1/2 + 1/2) - d(1/2) - D/2 = D/2 - d(1/2) \end{cases}$$

Par trichotomie des nombres réels,

$$h(0) > h(1/2) \tag{8}$$
$$h(0) = h(1/2) \tag{9}$$
$$h(0) < h(1/2) \tag{10}$$

Sachant que $h(0) + h(1/2) = 0$, alors de (1) et (3),

$$h(0)h(1/2) < 0$$

En particuliers, h étant continue sur $[0, 1/2]$ et respectant : $h(0) \neq h(1/2)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [0, 1/2] : 0 = h(c) = d(c + 1/2) - d(c) - D/2$$

De (2), l'existence d'un $c \in [0, 1/2]$ tel que $h(c) = h(c + 1/2)$ est triviale, $c = 0$ et/ou $c = 1/2$.

4.8.20.

Soit une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow [m, M]$ avec $[a, b] \subseteq [m, M]$, où on définit $[a, b] : m = \inf\{f : x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f : x \in [a, b]\}$ pour $-\infty < a < b < +\infty$. Montrer qu'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

En supposant que $a \neq b$,

$$[a, b] \subseteq [m, M] \implies m \leq a < b \leq M \tag{11}$$

De même, par le codomaine de f on a pour tout $x \in [a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M \tag{12}$$

Par la continuité de f si $m = \inf\{f : x \in [a, b]\}$, alors il existe un point α de $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$ et respectivement si $M = \sup\{f : x \in [a, b]\}$, alors il existe un point β de $[a, b]$ tel que $f(\beta) = M$.
Considérons la fonction $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x) - x$. Sans perdre de généralité posons $\alpha < \beta$

$$\begin{cases} h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = m - \alpha \leq m - a \leq 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - \beta = M - \beta \geq M - b \geq 0 \end{cases}$$

En particuliers, $h(\alpha)h(\beta) < 0$ puisque $h(\alpha) < 0 < h(\beta)$, alors par le théorème des valeurs absolue,

$$0 \in [h(\alpha), h(\beta)], \exists c \in [a, b] : h(c) = f(c) - c = 0$$

Les cas $h(\alpha) = 0$ et $h(\beta) = 0$ sont évident ($c = m$ ou $c = M$).

4.8.8.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < +\infty$, une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = 0$.

Solution

Remarquons que $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ puisque $f(a)f(b) < 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\forall y \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a, b) : f(c) = y$$

5.9.14.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction constante.

Solution

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 &\implies 0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \\ &\implies 0 \leq \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \to y} |x - y| = 0 \\ &\implies 0 \leq \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 0 \end{aligned}$$

Par trichotomie, la dérivée en tout point est nulle, par conséquent la primitive est une fonction constante.

5.9.21.

Déterminer, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

sur tout $x \in \mathbb{R}$

Solution

Par la valeur absolue,

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^3)^{-1} & \text{si } x < 0 \\ (1+x^3)^{-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, la dérivée de f est,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2(1-x^3)^{-2} & \text{si } x < 0 \\ -3x^2(1+x^3)^{-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La dérivé existe car

$$0 = \lim_{x \to 0^-} 3x^2(1-x^3)^{-2} = \lim_{x \to 0} -3x^2(1-x^3)^{-2} = 0$$

5.9.7.

Soit une fonction $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur l'intervalle (a, b) pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que si la dérivée f' est bornée, alors f est uniformément continue.

Solution

Alternative

Soit $x, y \in (a, b)$ telle que sans perdre de généralité $x < y$. Par le théorème de la moyenne,

$$\exists c \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{x - y} = f'(c)$$

Par hypothèse, $\exists M \in \mathbb{R}_{>0} : \forall z \in (a, b), |f'(z)| < M$, alors

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| < M$$

En particuliers, la fonction est lipschitzienne,

$$\forall x, y \in (a, b), |f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Par conséquent, la fonction est uniformément continue.

5.9.8.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) pour $-\infty < a < b < +\infty$, telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in (a, b)$. Montrer qu'il existe un seul point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

Considérons la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur les mêmes intervalle que f et définie par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $a \leq f(x) \leq b$,

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$0 \in \mathbb{R}, \exists c \in [a, b] : g(c) = f(c) - c = 0$$

Montrons l'unicité du point vérifiant l'égalité ci-dessus.

$$g(x) = f(x) - x \implies g'(x) = f'(x) - 1$$

Par hypothèse, $|f'(x)| < 1$, alors $g'(x) < 1 - 1 = 0$ pour tout $x \in (a, b)$. En particuliers, la vitesse d'accroissement de g est strictement négative donc la fonction se doit d'être injective (donc bijective sur son image) sur l'intervalle $[a, b]$ sans quoi il existerait deux point ayant la même image et donc par le théorème de Rolle un point e où la dérivé de g en ce point serai nulle, il y aurai ainsi une contradiction.