Université de Montréal

Fiche De Note

Probabilités

Julien Hébert-Doutreloux

June 17, 2020

Contents

1 Analyse combinatoire

Théorème 1 (Principe de multiplication)**.** *Soit r le nombre d'expérience à réaliser tel que pour chaque expérience il y a n_i possibilités avec $i = 1, 2, 3 \ldots, r$ alors le total des possibilités est donné par*

$$\prod_{i}^{r} n_i \tag{1}$$

Définition 1 (Permutation)**.** *On appelle permutation un arrangement de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.*

Théorème 2. *Le nombre de permutaitons de n objets discernables est $n!$.*

Théorème 3 (Permutations d'objets partiellement indiscernables)**.** *Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont indiscernables entre eux, n_2 sont indiscernables entre eux, ..., n_r sont indiscernables entre eux est donné par :*

Remarque. *Une permutation de n objets est un arrangement de ces objets considérés tous en même temps. Dans certains cas, on peut faire un arrangement de r objets choisis parmi n, avec ou sans répétition.*

1. *Permutation sans répétition,*
$$A_r^n := \frac{n!}{(n-1)!}$$
2. *Permutation avec répétition,*
$$n \cdot n \cdots n = n^r$$

Définition 2 (Coefficient binomial)**.** *Toute disposition de r objets choisis sans répétition dans un ensemble qui en contient n est appelé combinaison de r objets pris parmi n. On note le coefficient binomial par*

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2}$$

Théorème 4. $\binom{n}{r}$ *est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n.*

Remarque. $\binom{n}{r}$ *est nombre de façons de choisir r objets sans répétition dans un ensemble qui en contient n. Les cas particuliers,*

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-1} = n$$

Théorème 5 (Théorème du binôme)**.**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{3}$$

Quelques s'identités remarquables

$$\begin{aligned}
&(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
&(x+y)^3 = 3x^2y + x^3 + 3xy^2 + y^3 \\
&(x+y)^4 = 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 + 4xy^3 + y^4 \\
&(x+y)^5 = 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^4y + x^5 + 5xy^4 + y^5 \\
&(x+y)^6 = 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^5y + x^6 + 6xy^5 + y^6 \\
&(x+y)^7 = 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7x^6y + x^7 + 7xy^6 + y^7 \\
&(x+y)^8 = 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8x^7y + x^8 + 8xy^7 + y^8 \\
&(x+y)^9 = 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9x^8y + x^9 + 9xy^8 + y^9
\end{aligned}$$

Lemme 6.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r} \tag{4}$$

Définition 3 (Coefficients multinomiaux)**.** *Soit $n_1, n_2, \cdots, n_r$ des entiers positifs tels que $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. On définit le coefficients multinomiaux par*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_r!} = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} (n_i)!\right)^{-1} \tag{5}$$

Théorème 7 (Formule du multinôme de Newton)**.**

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i} \cdot \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left(\prod_{i=1}^{r} (n_i)! \right)^{-1} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \cdots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \left\{ \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n_1}}{(n_i)!} \right\}\end{aligned} \tag{6}$$

Théorème 8. *Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ vecteurs $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$*

2 Théorème de probabilité et probabilités conditionnelles

1. Si Ø est l'ensemble vide, alors $P(\emptyset) = 0$
2. Si S est l'espace échantillonnal, alors $P(S) = 1$
3. Si E et F sont deux événements, alors
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$
4. Si E et F sont des événements mutuellement exclusifs, alors
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$
5. Si E et E^c sont des événements complémentaires, alors
$$P(E) = 1 - P(E^c)$$
6. La probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'événement F dénoté par $P(E|F)$ et est définie par
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$
7. Deux événements E et F sont dits indépendant si et seulement si
$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$
E est dit statistiquement indépendant de F si $P(E|F) = P(E)$ et $P(F|E) = P(F)$
8. Les événements $E_1, E_2, ..., E_n$ sont appelés mutuellement indépendant pour toute combinaison si et seulement si chaque combinaison de ces événements pris à un nombre quelconque à la fois est indépendante.

9. (Théorème de Bayes) Si $E_1, E_2, ..., E_n$ sont n événements mutuellement exclusifs où leur union est l'espace échantillonnal S, et E est un événement arbitraire de S tel que $P(E) \neq 0$, alors

$$P(E_k|E) = \frac{P(E|E_k) \cdot P(E_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(E|E_j) \cdot P(E_j)}$$

10. Si E et F sont des événements indépendants, alors E et F^c le sont aussi

Définition 4 (Probabilité conditionnelle). *Si $P(A) > 0$, alors la* ***probabilité conditionnelle*** *de B est :*

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{7}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{8}$$

Remarque (Généralisation de 8). *La règle de multiplication est:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \prod_{i=2}^{n-1} P\left(A_{i+1} \middle| \bigcap_{j=1}^{i} A_j\right) \tag{9}$$

Définition 5 (Formule des probabilités totales). *Soient A et B deux événements. avec $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$*

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \tag{10}$$

Par la règle de multiplication

$$(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \tag{11}$$

Définition 6 (Formule de Bayes).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)} \tag{12}$$

Définition 7 (Partition). *Soit S un ensemble donné. Si pour un certain $k > 0, S_1, S_2, \cdots, S_k$ sont des sous-ensembles* ***disjoints*** *non vides de S tels que :*

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i = S$$

alors l'ensemble $S_1, S_2, \cdots, S_k$ est une partition de S.

Théorème 9 (Formule de Bayes généralisée).

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} \tag{13}$$

Quelques identités

1. $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c$
2. $P(B^c|A) = 1 - P(B|A)$
3. $P(B|A^c) = 1 - P(B^c|A^c)$