Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Algèbre Linéaire

Julien Hébert-Doutreloux

April 24, 2020

Question 1

0.1

Par un théorème vue en classe. Tout ensemble fermé contient c'est point limite (point d'accumulation). Or 0 est un point d'accumulation de E car

$$\forall \delta_{>0}, ((0-\delta, 0) \cup (0, 0+\delta)) \cap E \neq \emptyset$$

Par densité des nombre rationnels dans les réels, (et avec le principe d'Archimède aussi), il existe un entiers positif non nul N tel que $1/N < \delta$. Donc $1/N \in E$ et $1/N \in (0, \delta)$ implique $E \cap (0, \delta) \neq \emptyset$ (puisque $1/N$ est un élément commum à E et $(0, \delta)$)
Ainsi, 0 n'appartient pas à E donc E ne contient pas tout ses point d'accumulation donc l'ensemble n'est pas fermé.

0.2

Non, la fonction f n'atteint pas son supremum en un point (fixe) de $(0, 1)$. Mais supposons le contraire, f atteint son supremum en $x_0 \in (0, 1)$. Alors,

$$\forall x \in (0, 1), \sup f = f(x_0) \geq f(x)$$

Or en prenant $x_1 = \frac{x_0}{2} \in (0, x_0) \subseteq (0, 1)$, on a

$$x_1 = \frac{x_0}{2} < x_0 \implies \sup f = f(x_0) = \frac{1}{x_0} < \frac{2}{x_0} = f(x_1)$$

Donc, $\sup f < f(x_1)$ donc il n'est pas le supreme de f ce qui est une contradiction de la définition de supremum comme étant le plus petit majorant de f. Donc, f n'atteint pas son supremum sur le domaine $(0, 1)$.

Question 2

0.3

Par la définition de limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \implies \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) - 0 \right| < \varepsilon$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a) - 0 \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k) - \frac{1}{n} n(a) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k) - a \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi à l'aide de l'hypothèse et de la définition de limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \implies \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k) - a \right| < \varepsilon$$

0.4

Utilisons la décomposition suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| = \sum_{k=1}^{N} |a_k - a| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a|$$

Puisque la suite (a_k) converge vers a, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > N \implies |a_n - a| < \varepsilon$$

À partir d'un certain rang N,

$$|a_k - a| < \varepsilon \implies \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a| < \sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon$$

Puisque $\sum_{k=1}^{N} |a_k - a| = A$ est une somme finie, alors elle sa somme est une nombre réel (ici, il est positif) A

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - a| < A + \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| &< \frac{A}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| &< \frac{A}{n} + \varepsilon \end{aligned}$$

Par un résultat vue en classe, $\forall \epsilon > 0, \exists N : n > N \implies |1/n - 0| < \epsilon$. Donc il est de même pour la suite (A/n), à partir d'un certain rang N.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| < \epsilon + \varepsilon = \varepsilon'$$

Donc,

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N : n > N \implies \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| < \varepsilon'$$

Question 3

0.5 Continuité

La fonction est continue f est continue partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(-x)}, & si\ x \in (-\infty, 0) \\ e^{0}, & si\ x = 0 \\ e^{-(x)}, & si\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Puisque la fonction exponentielle (e^x) est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $(-\infty, 0)$. La fonction e^{-x} est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $(0, +\infty)$. Elle est trivialement continue en $x = 0$ puisque $\lim_{x\to 0^-} e^{-(-x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1 = f(0)$.

0.6 Dérivabilité

Puisque la fonction exponentielle est dérivable, alors le seul point problématique est en $x = 0$, puisque f est une fonction par partie où le comportement de la fonction change avec le signe de x). Par la définition de dérivée (à gauche),

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-(-x)} - 1}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Par la règle de L'Hospital (cas 0/0) avec les fonction continue $h(x) = e^x - 1$ et $g(x) = x$ sur $(-\infty, 0)$ $(g(x) \neq 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ de même pour $g'(x))$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)}{g(x)} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0^-} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{1} = 1 = f'(0^-)$$

Donc la dérivée à gauche est $f'(0^-) = 1$.
Par la définition de dérivée (à droite),

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-(x)} - 1}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Par la règle de L'Hospital (cas 0/0) avec les fonction continue $h(x) = e^{-x} - 1$ et $g(x) = x$ sur $(0, +\infty)$ $(g(x) \neq 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ de même pour $g'(x))$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{g(x)} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0^+} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^{-x}}{1} = -1 = f'(0^+)$$

Ainsi, on a les valeurs de dérivées (gauche/droite) sont différentes en $x = 0$, donc la fonction n'est pas différentiable en ce point uniquement (puisque la limite n'existe pas si la valeur de la limite n'est pas unique). La fonction exponentielle à été vue en classe : elle dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et il est est de même pour son inverse qui existe car la fonction exponentielle est strictement croissante (injective). Il s'en suit que f est dérivable sur $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

0.7 Croissance

Par le caratère monotone,

$$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)\ et\ x_1 < x_2, 0 < -|x_1| = -(-x_1) < -(-x_2) = -|x_2| \implies e^{-|x_1|} < e^{-|x_2|}$$

Ainsi, f est strictement croissante (monotone) sur $(-\infty, 0)$.

0.8 Décroissance

Par le caratère monotone,

$$\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)\ et\ x_1 < x_2, x_1 < x_2 \implies e^{-x_1} > e^{-x_2}$$

Ainsi, f est strictement décroissante (monotone) sur $(0, +\infty)$.

Question 4

0.9

Considèrons la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x) - x$. Cette fonction hérite de la continuité de f sur $[0,1]$ et de sa dérivabilitée (première et seconde) sur $(0,1)$.

Par hypothèse, $f(x_1) < x_1$ et $f(1) > 1$, alors

$$\begin{cases} h(x_1) = f(x_1) - x_1 < 0 \\ h(1) = f(1) - 1 > 0 \end{cases}$$

Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue sur $[0,1]$),

$$h(x_1)h(1) < 0 \implies \exists x_0 \in (x_1, 1) : h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$$

Ainsi, le point x_0 existe

0.10

Par le théorème de la moyenne (f est continue sur $[0,1]$),

$$\exists x_3 \in (0, x_1) : \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = f'(x_3)$$

Par hypothèse, $f(x_1) < x_1$, alors

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1} < 1 \implies f'(x_3) < 1$$

0.11

Par le théroème de la moyenne (f est continue sur $[0,1]$),

$$\exists x_4 \in (x_1, 1) : \frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1} = f'(x_4)$$

Par hypothèse, $f(1) > 1$ et $x_1 \in (0,1) \implies x_1 < 1$, alors

$$1 = \frac{1 - x_1}{1 - x_1} < \frac{f(1) - x_1}{1 - x_1} = f'(x_4) \implies 1 < f'(x_4)$$

0.12

Par les précédants numéros, $f'(x_3) < 1$ et $f'(x_4) > 1$ avec $(x_3, x_4) \subseteq (0,1)$ (f' étant continue sur $(0,1)$ par hypothèse), alors par le théorème des valeurs intermédiaires

$$1 \in (f'(x_3), f'(x_4)) \implies \exists x_5 \in (x_3, x_4) : f'(x_5) = 1$$

0.13

Par les précédants numéros, $f'(x_3) < 1$ et $f'(x_4) > 1$ avec $(x_3, x_4) \subseteq (0,1)$ (f' et f'' étant continue sur $(0,1)$ par hypothèse), alors par le théorème de la moyennes,

$$\exists x_6 \in (x_3, x_4) : \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = f''(x_6)$$

Puisque $x_3 < x_4$, et que $f'(x_3) < 1$ et $f'(x_4) > 1$, alors,

$$0 = \frac{1 - 1}{x_4 - x_3} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = f''(x_6) \implies 0 < f''(x_6)$$