# Densité marginale

**Définition** (Densités marginales)**.** *Si $f(x,y)$ est continue, les densités marginales de $X$ et $Y$ sont données par :*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad et \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

**Définition** (Fonction de répartition marginale)**.** *La fonction de répartition marginale est déduite de la fonction de répartition conjointe de $X$ et $Y$ comme suit*

$$\begin{aligned} F_X(a) &= P\{X \le a\} = \{X \le a, Y < \infty\} \\ &= \lim_{b\to\infty} F(a,b) = F(a,\infty) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \le b\} = \{X < \infty, Y \le b\} \\ &= \lim_{a\to\infty} F(a,b) = F(\infty,b) \end{aligned}$$

$$P\{a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2\} = F(a_2,b_2) + F(a_1,b_1) - F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1)$$
$$P\{X > a, Y > b\} = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b)$$

Soit $f(x) = f_{X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)}}$ la fonction de densité conjointe de $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, alors la densité marginale de $X_{(j)}$ est :

$$\begin{aligned} f_{X_{(j)}}(x) &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-1) fois} \underset{X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(j-1)},X_{(j+1)},\ldots,X_{(n)}}{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \cdots dx_n \\ &\overset{\underline{ou}}{=} \binom{n}{j-1, n-j, 1} \Big( \big(F(x)\big)^{j-1} \big(1 - F(x)\big)^{n-j} f(x) \Big) \end{aligned}$$

# Changement de variables multidimensionnelles

Soient des variables aléatoires conjointement continues de densité, on considère la transformation :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) &\longmapsto (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \text{ avec } \begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned} \end{aligned}$$

1. En supposant que la transformation est un bijective, alors l'on résout par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le système d'équation :

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \underset{\text{les solutions}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = h_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

2. Les fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont continument dérivables et de jacobien partout non nul :

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det\left( \left( \frac{\partial g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le n} \right) \neq 0$$

Sous ces conditions, les variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont conjointement continues et de densité :

$$\underset{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \underset{X_1,X_2,\ldots,X_n}{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \big| J(x_1, x_2, \ldots, x_n) \big|^{-1}$$

| | Discret | Continu |
|---|---|---|
| Densité conjointe | $p(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$ | $P\big\{(X,Y) \in C\big\} = \iint\limits_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$ |
| Fonction de répartion conjointe | $F(a,b) = \sum_{\substack{x\leq a\\ y\leq b}} p(x,y)$ | $F(a,b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)\,dy\,dx$ |
| Densités marginales | $p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y:p(x,y)>0} p(x,y)$ | $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ |
| Distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires | $p(n_1, n_2, \ldots, n_r) = P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r)$ | $P\big\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C\big\} = \int\int\cdots\int_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$ |
| Somme de variables aléatoires indépendantes | $p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(n-k)p_Y(k) := p_X * p_Y(n)$ | $\begin{cases} F_{X+Y}(a) = P\{X+Y \leq a\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)f_Y(y)\,dy \\ f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,dy := f_X * f_Y(a) \end{cases}$ |
| Distributions conditionnelles | $\begin{cases} p_{X\|Y}(x,y) = P\{X = x \| Y = y\} = \dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)} \\ F_{X\|Y}(x,y) = P\{X \leq x \| Y = y\} = \sum_{a\leq x} P_{X\|Y}(a,y) \end{cases}$ | $f_{X\|Y}(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ |
| Convolution | $P_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(n-k)p_Y(k) = p_X * p_Y(n)$ | $f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,dy = f_X * f_Y(a)$ |

## Variable Aléatoire Discrète et Continue

| Nom | Formule | Espérance (Moyenne) | Variance | Notation |
|---|---|---|---|---|
| Bernoulli | $\begin{cases} P(X=1)=p \\ P(X=0)=1-p \end{cases}$ | $p$ | $p(1-p)$ | |
| Binomiale | $P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $X \sim B(n,p)$ |
| Binomiale négative | $P\{X=n\}=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$ | $\frac{r}{p}$ | $\frac{r(1-p)}{p^2}$ | $X \sim Bn(r,p)$ |
| Poisson [1] | $P\{X=i\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $X \sim Po(\lambda)$ |
| Géométrique | $P\{X=n\}=(1-p)^{n-1}p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $X \sim Geom(p)$ |
| Hypergéométrique [2] | $P\{X=i\}=\frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$ | $np$ | $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$ | $X \sim Hpg(n,N,m)$ |
| Uniforme | $P\{a \leq X \leq b\}=\frac{b-a}{\beta-\alpha}$ | $\frac{\beta+\alpha}{2}$ | $\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ | $X \sim Unif(\alpha,\beta)$ |
| Normale [3] | $P\{X \leq a\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ |
| Exponentielle [4] | $P\{X \leq a\}=1-e^{-\lambda a}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $X \sim Exp(\lambda)$ |
| Gamma [5] | $P\{T_n \leq t\}=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$ | $\frac{s}{\lambda}$ | $\frac{s}{\lambda^2}$ | $T_n \sim Gam(n,p)$ |

## Fonction de densité

| Nom | Formule |
|---|---|
| Exponentielle | $f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$ |
| Gamma | $f(x)=\begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(x)} & ,x \geq 0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}$ |
| Uniforme | $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & ,\alpha<x<\beta \\ 0 & sinon \end{cases}$ |
| Normale | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad ,x \in \mathbb{R}$ |

3. Approximation poissonnienne de lois binomiales : Si $n$ est grand et si $p$ est petit, alors $B(n,p) \approx Po(\lambda)$

Processus de Poisson (3 conditions) : $P\Big(N(t)=k\Big)=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \approx e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad N(t)=\lambda t$

4. $n$ : sous-ensemble de la population, $N$ : population, $m$ : ensemble ayant une caractéristique (indistinguable entre eux)
5. Variable normale centrée réduite
6. Taux de panne : $\lambda(t)=\frac{f(t)}{(1-F(t))}$ tel que $F(t)=1-\exp\left(-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right)$
7. Fonction Gamma : $\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-y}y^{s-1}\,dy$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n)=(n-1)!$

Si $s=n$ entier, la loi gamma de paramètres $(n,\lambda)$ décrit le temps d'attente avant la n-ième apparition du phénomène. Notons $T_n$ l'heure à laquelle le n-ième événement se produit et $N(t)$ le nombre d'événements dans l'intervalle $[0,t]$