NOM :

QUIZ 2
MAT 1720 PROBABILITÉS

— **Le quiz dure 20 minutes.**
— **Expliquer votre raisonnement, une réponse sans explication ne vaut rien.**
— **Une réponse numérique n'a pas besoin d'être simplifiée.**

(1) **(2 points)** On a une urne A qui contient 2 boules blanches et 18 boules noires ainsi qu'une urne B qui contient 10 boules blanches et 10 boules noires. On choisit une urne au hasard, de manière équiprobable et on retire deux boules sans remise.

— Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches ?
— Sachant que l'on a retiré 2 boules blanches, quelle est la probabilité que l'on tire de l'urne A.

(2) **(2 point)** On a une urne avec des boules numérotées de 0 à 10. On tire 2 boules et on note

$$A = \{\text{la première boule montre } 8\} \text{ et } B = \{\text{la somme des deux boules est } 10\}.$$

— On tire les deux boules sans remise. Est-ce que A et B sont indépendants ?
— On tire les deux boules avec remise. Est-ce que A et B sont indépendants ?

(3) **(1 point)** Si $P[A] > 0$, montrer que $P[A \cap B \mid A] \geq P[A \cap B \mid A \cup B]$.

Solutions

(1) Notons A, resp. B, les événements de choisir l'urne A, resp. B. Notons E l'événement que l'on tire 2 boules blanches.
- $P[E] = P[E \mid A]P[A] + P[E \mid B]P[B] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\binom{20}{2}} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}}\right)$.
- $P[A \mid E] = \frac{P[A]}{P[E]}P[E \mid A] = \frac{1/2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\binom{20}{2}}+\frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}}\right)}\frac{1}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{\binom{10}{2}+\binom{20}{2}}$.

(2) On a $P[A] = \frac{1}{11}$. Les possibilités pour sommer à 10 sont $(0,10),(1,9),\dots(10,0)$, le cas $(5,5)$ ne marche pas s'il n'y a pas remise.
- Dans ce cas $P[A \cap B] = \frac{1}{11}\frac{1}{10}$ et $P[B] = \frac{10}{11\cdot 10}$. Donc non.
- Dans ce cas $P[A \cap B] = \frac{1}{11^2}$ et $P[B] = \frac{11}{11^2}$. Donc oui.

(3) On a $P[A \cap B \mid A] = \frac{P[A\cap B]}{P[A]}$ et $P[A \cap B \mid A \cup B] = \frac{P[A\cap B]}{P[A\cup B]}$. L'inégalité est donc une conséquence de $P[A \cup B] \geq P[A]$.