

NOM :

QUIZ 4
MAT 1720 PROBABILITÉS

- Le quiz dure 15 minutes.
- Expliquer votre raisonnement, une réponse sans explication ne vaut rien.
- Une réponse numérique n'a pas besoin d'être simplifiée.

- (1) **(1 point)** Montrer que $\text{Cov}(X, E[Y | X]) = \text{Cov}(X, Y)$. *détailler toutes les étapes*
- (2) **(2 points)** Un groupe de n hommes et m femmes se mettent en cercle de manière aléatoire équiprobable. Déterminer l'espérance du nombre X d'hommes qui ont au moins une femme à leurs cotés. On pourra définir $A_i = \{\text{l'homme } i \text{ a une femme à côté}\}$ et commencer par exprimer $E[X]$ en fonction des A_i .

Solutions

- (1) $\text{Cov}(X, E[Y | X]) = E[XE[Y | X]] - E[X]E[E[Y | X]] = E[E[XY | X]] - E[X]E[Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \text{Cov}(X, Y)$.
- (2) On a $X = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$, donc $E[X] = \sum_{i=1}^n P[A_i]$. Pour que A_i se produise il faut et il suffit que parmi les 2 voisins (qui sont pris au hasard parmi les $m + n - 1$ autres personnes), il y a au moins une femme. Donc

$$P[A_i] = 1 - P[\text{les 2 voisins sont des hommes}] = 1 - \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{m+n-1}{2}}.$$