Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Analyse I

Julien Hébert-Doutreloux

April 17, 2020

Contents

1 Les nombre réels

Théorème 1. *Les nombres réels sont ordonné tel que*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a + b \geq 0$$

$$a \in \mathbb{R}, \begin{cases} a < 0 \\ a = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Théorème 2. *Soit* $\mathbb{R} \supset E \neq \emptyset$,
E borné supérieurement (resp. inférieurement) possède un supremum (resp. infimum) dans $\mathbb{R}$

Proposition 1. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}, x > 0, x < y \implies \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $nx > y$

Définition 1.

$$x \in \mathbb{R}, |x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$$

$$x, y \in \mathbb{R}, |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|$$

2 Les intervalles

Définition 2. *I est un intervalle $\subset \mathbb{R}$ si lorsque* $x, y \in I : x < y \implies \forall z \in \mathbb{R} : x < z < y$ *est dans I*

Définition 3. *I est borné s'il possède un* $\sup I = b$ *et un* $\inf I = a$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$

Définition 4.

- *Non-borné sup. :* $\sup I \notin \mathbb{R}$
- *Non-borné inf. :* $\inf I \notin \mathbb{R}$
- *Non-borné :*

Définition 5. *Voisinage centré en $x \in \mathbb{R}$ de rayon $\delta > 0$: $V(x, \delta)$ est l'intervalle ouvert*

$$(x - \delta, x + \delta)$$

Définition 6. *Voisinage pointé... :* $V'(x, \delta) = V(x, \delta) \backslash \{x\}$

3 Les points

Définition 7. *Un point $a \in E \subset \mathbb{R}$ est un point intérieur de E si*

$$\exists \delta_{>0} : V(a, \delta) \subset E$$

Définition 8. *Un point $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $E \subset \mathbb{R}$ si*

$$\forall \delta_{>0} : V'(a, \delta) \cap E \neq \emptyset$$

Remarque : $a \notin E \nRightarrow a \notin E'$

Définition 9. *Un point $a \in \mathbb{R}$ est un point adhérent de $E \subset \mathbb{R}$ si,*

$$\forall \delta_{>0}, V(a, \delta) \cap E \neq \emptyset$$

Remarque:

$$a \in \bar{E} \implies a \in E'$$

$$a \in E \implies a \in \bar{E}$$

4 Les ensembles

Définition 10. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, l'ensemble de ses point intérieur noté int E est tel que*

$$int\ E = \{x \in E | \exists \delta_{>0}, V(x, \delta) \subset E\}$$
$$int\ E \subset E \subset \mathbb{R}$$

Remarque: int E est un ouvert

Définition 11. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, l'ensemble de ses point d'accumulation noté E' est tel que*

$$E' = \{x \in E | \forall \delta_{>0}, V'(x, \delta) \cap E \neq \emptyset\}$$
$$E' \subset \mathbb{R} \supset E$$

Remarque : "Ensemble dérivé de E"

$$E\ fini \implies E' = \emptyset$$
$$E\ infini \not\Rightarrow E' = \emptyset$$

Définition 12. *Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ ouvert \iff int\ E = E$$
$$E \subset int\ E \subset E \subset \mathbb{R}$$

Définition 13. *Ensemble fermé Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ fermé \iff E' \subset E$$

Définition 14. *Soit $E \subset \mathbb{R}$,*

$$E\ compact \iff E\ fermé\ et\ borné$$

Ensemble compact si tout recouvrement ouvert de E possède un sous-recouvrement fini.

Définition 15. *Recouvrement ouvert Ensemble O : collection d'ensemble ouvert*

$$\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

tel que

$$\mathbb{R} \supset E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

Théorème 3. *Soit O un recouvrement ouvert de $E \subset \mathbb{R}$*

$$O' \subset O$$

sera appelé sous-recouvrement fini si O' est lui même un recouvrement ouvert de E et qu'il contient un nombre fini d'éléments.

Définition 16. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, la frontière de E noté $Fr\ E = fr\ E = \bar{E} \backslash \{int\ E\}$*

$$\bar{E} \backslash \{int\ E\} \subset fr\ E \subset \bar{E} \backslash \{int\ E\}$$

5 Les théorème

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Tout ensemble borné et infini possède un point d'accumulation.*

Théorème 5 (Heine-Borel)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$, un recouvrement ouvert de E est un ensemble O d'ensemble ouvert*

$$\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

tel que

$$\mathbb{R} \supset E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

Théorème 6 (Densité des nombres réels)**.** *Soit $a < b$ deux nombres réels (resp. irrationels) dans les réels, alors*

$$\exists x \in \mathbb{Q}\ (resp.\ \mathbb{Q}^C) : a < x < b$$

Théorème 7 (Corolaire)**.** *Soit $a < b$ deux nombres réels, alors il existe un nombre infini de rationnels (resp. irrationels) entre a et b.*

6 Les propriétés

Ouvert/Fermé/Compact

Proposition 2 ($\bigcup\bigcap$ ouvert)**.** *Soit* $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble ouvert*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ *ouvert*
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} O_\lambda$ *ouvert si* $|\Lambda| < \infty$

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 3 ($\bigcup\bigcap$ fermé)**.** *Soit* $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble fermé*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ *fermé fermé si* $|\Lambda| < \infty$
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} F_\lambda$ *fermé*

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 4 ($\bigcup\bigcap$ compact)**.** *Soit* $\{K_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$*, une collection d'ensemble compact*

- $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *compact si* $|\Lambda| < \infty$
- $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{n} K_\lambda$ *compact si* $|\Lambda| < \infty$

(i.e) Un nombre fini d'ensemble

Proposition 5. • $\emptyset$ *ouvert*

- A, B *ouverts* $\implies \begin{cases} A \cup B \text{ ouvert} \\ A \cap B \text{ ouvert} \end{cases}$
- E *ouvert* $\iff E^C$ *fermé*
- E *fermé* $\iff E' \subset E$
- E *compact* $\implies \sup E \in E$
- F *fermé*, E *compact* : $F \subset E \subset \mathbb{R} \implies F$ *compact*
- *Soit* $E \subset \mathbb{R}$
  - *int* $E = \bigcup\limits_{O\subset E} O$
    (L'intérieur d'un ensemble E est la réunion de tous les ensembles ouvert contenue dans E)
  - *int E ouvert*
  - *int E plus grand ouvert contenue dans E*

Adhérence/Accumulation/Intérieur

Proposition 6. • $\bar{E} = E \cup E'$

- $(\bar{E}) = int\ (E^C)$
- $\bar{E}$ *fermé*
- $A, B \subset \mathbb{R}$,

- $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} \implies \bar{A} \cup \bar{B}$
- $int\ (A \cap B) = int\ (A) \cap int\ (B)$
- $int\ (A \cup B) = int\ (A) \cup int\ (B)$

- *Soit* $A \subset \mathbb{R}_{\neq \emptyset}$,
  - $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ *la distance* x *de* A
  - $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$
  - A *fermé et* $d(x, A) = 0 \implies x \in A$

Proposition 7 (Supremum/Infimum). *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *non-vide et borné,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists x, y \in E : \begin{cases} \sup E - \varepsilon < x \leq \sup E \\ \inf E \geq x < \inf E + \varepsilon \end{cases}$$

7 Suites numériques

a) Limite d'une suite et suite bornée

Définition 17. *Une suite de nombres réels est une fonction de domain* $\mathbb{N}$ *et de champ (ou image) un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$

Définition 18. *La suite* $\{x_n\}$ *converge (ou tend) vers la limite* x *si,*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists N : n > N \implies |x_n - x| < \varepsilon$$

Notation : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ou* $x_n \longrightarrow x$

Théorème 8 (Unicité). *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n\to\infty} x_n = y$*, alors* $x = y$

Définition 19. *Une suite est bornée supérieurement si,*

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| < M$$

Une suite est bornée inférieurment si,

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| > m$$

Théorème 9. *Toute suite convergent est bornée*

b) Opération sur les limites

Théorème 10. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$,

1. $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$
2. $\lim_{n\to\infty} k \cdot x_n = k \cdot x, k \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, y \neq 0$

Théorème 11. *Soit* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$*. Si* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *pour tout entier positif* n*, alors* $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Théorème 12. *Un point* x_0 *est un point d'accumulation d'un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *si et seulement si il existe une suite* $\{x_n\}$ *d'éléments de* E*,* $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Théorème 13.

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \pm\infty$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = \mp\infty \implies \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = -\infty$
4. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
5. $\lim_{n\to\infty} x_n > 0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \implies \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \pm\infty$

Théorème 14. *Soit $\{x_n\}$ une suite telle que $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L \in \mathbb{R}$$

a) $L < 1 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

b) $L > 1 \implies \lim_{n\to\infty} |x_n| = \pm\infty$

c) Sous-suites et suites monotones

Définition 20. *Soit $\{x_n\}$ une suite quelconque d'entiers positifs telle que $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ On appelle la suite $\{x_{n_k}\}$ une sous-suite de la suite $\{x_n\}$.*

Théorème 15. *Soit $\{x_n\}$ une suite convergente. Toute sous-suite de $\{x_n\}$ converge et a la même limite que la suite $\{x_n\}$.*

Théorème 16 (Corollaire)**.** *Si une suite $\{x_n\}$ possède deux sous-suites qui convergent vers différentes valeurs, la suite $\{x_n\}$ diverge.*

Théorème 17. *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Définition 21. *Une suite $\{x_n\}$ est dite croissante (resp. décroissante) si $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Si pour tout entier positif n, $x_n < x_{n+1}$, la suite $\{x_n\}$ est dite strictement croissante. Si pour tout entier positif n, $x_n > x_{n+1}$, la suite $\{x_n\}$ est dite strictement décroissante. Une suite qui a une des ces propriétés est dite monotone*

Théorème 18. *Toute suite monotone bornée possède une limite (à partir d'un certain rang N).*

Théorème 19. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est compact $\iff$ toute suite $\{x_n\}$ d'éléments de E contient une sous-suite qui converge vers un élément de E.*

d) Suites de Cauchy

Définition 22. *Une suite $\{x_n\}$ est appelée suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon_{>0}, \exists N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N} : \forall n > N \;\wedge\; \forall k \in \mathbb{N}, |x_{n+k} - X_n| < \varepsilon$$

ou pour tout couple d'entiers $n, m > N, |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Théorème 20. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 21. *Une suite convergente $\iff$ elle est de Cauchy.*

e) Limite supérieure et limite inférieure

Définition 23. *Un nombre réel x est appelé valeur d'adhérence d'une suite $\{x_n\}$ s'il existe une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge vers x.*

Théorème 22. *Soit $\{x_n\}$ une suite bornée et*

$$A = \{x \mid \exists \{x_{n_k}\} \in \{x_n\} : \{x_{n_k}\} \longrightarrow x\}$$

L'ensemble A est non vide, borné et fermé.

Définition 24. *On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) d'une suite bornée $\{x_n\}$ la plus petite borne supérieure (resp. la plus grande borne inférieure) de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite.*

Index