Définition (Espérance conditionnelle).

$$\mathbb{E}\left[g(X)|Y=y\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)p_{X|Y}(x|y) & \textit{cas discret} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)\,dx & \textit{cas continue} \end{cases}$$

Définition. *Soit X une variable aléatoire, on définit fonction génératrice des moments M_X pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx}p(x) & \textit{si } X \textit{ est discrète, de loi } p(x) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx & \textit{si } X \textit{ est continue, de densité } f(x) \end{cases}$$

Propriété(s). *Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de fonctions génératrices de moments $M_X(t)$ et $M_Y(t)$, alors $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$*

Définition. *Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Leur fonction génératrice des moments conjoints $M_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$ est définie pour $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ par : $M = M_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(\ \vec{t}\ ) = \mathbb{E}\left[e^{t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n}\right]$*

1. *Les fonctions génératrices des moments individuelles sont calculables à partir de M*

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX_i}\right] = M(0, \ldots, 0, t_i = t, 0 \ldots, 0)$$

2. *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors : $M = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t_i)$*

Théorème.

$$\forall t_i \in (u_i, v_i) : u_i < 0 < v_i \implies \forall \vec{\alpha} : |\vec{\alpha}| = n \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r, \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha_i}\right] = \frac{\partial^r M}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}$$

Espérance	**Covariance**	**Corrélation**
$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\vert Y=y\right]\right]$	$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$	$\rho\left(X,Y\right) = \dfrac{\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)\mathrm{Var}\left(Y\right)}}$
$\mathbb{E}\left[aX\vert Y=y\right] = a\,\mathbb{E}\left[X\vert Y=y\right]$	$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = \mathrm{Cov}\left(Y,X\right)$	$\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
$\mathbb{P}\left\{X\right\} = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left\{X\vert Y=y\right\}\right]$	$\mathrm{Cov}\left(aX,Y\right) = a\,\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)$	$\rho(X,\pm X) = \pm 1$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i|Y=y\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i|Y=y\right]$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}\left(X_i, Y_j\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right) + 2\sum\sum_{i<j} \mathrm{Cov}\left(X_i, Y_i\right)$$

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X|Y\right]\mathbb{P}\left\{Y\right\} + \mathbb{E}\left[X|Y^C\right]\mathbb{P}\left\{Y^C\right\}$$

Sous l'hypothèse de variables indépendantes

$$\mathrm{Cov}\left(X,Y\right) = 0 = \rho(X,Y) \quad (\not\Longrightarrow \ X \perp Y)$$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[g_i(X_i)\right]$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right)$$

Variable Aléatoire Discrète et Continue

Nom	**Formule**	**Moment**	**Espérance (Moyenne)**	**Variance**	**Notation**
Bernoulli	$\begin{cases} P(X=1)=p \\ P(X=0)=1-p \end{cases}$		p	$p(1-p)$	
Binomiale	$P\{X=i\}=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$	$\left(pe^t+1-p\right)^n$	np	$np(1-p)$	$X \sim B(n,p)$
Binomiale négative	$P\{X=n\}=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$	$\left(\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$	$X \sim Bn(r,p)$
Poisson	$P\{X=i\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	$X \sim Po(\lambda)$
Géométrique	$P\{X=n\}=(1-p)^{n-1}p$	$\dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$X \sim Geom(p)$
Hypergéométrique	$P\{X=i\}=\dfrac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$		np	$np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$	$X \sim Hpg(n,N,m)$
Uniforme	$P\{a \leq X \leq b\}=\dfrac{b-a}{\beta-\alpha}$	$\dfrac{e^{t\beta}-e^{t\alpha}}{t(\beta-\alpha)}$	$\dfrac{\beta+\alpha}{2}$	$\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$	$X \sim Unif(\alpha,\beta)$
Normale	$P\{X \leq a\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{a-\mu}{\sigma}\right\}$	$e^{\mu t+\sigma^2t^2/2}$	μ	σ^2	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$
Exponentielle	$P\{X \leq a\}=1-e^{-\lambda a}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$X \sim Exp(\lambda)$
Gamma	$P\{T_n \leq t\}=\sum_{j=n}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!}$	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^s$	$\dfrac{s}{\lambda}$	$\dfrac{s}{\lambda^2}$	$T_n \sim Gam(n,p)$

	Discret	**Continu**
Densité conjointe	$p(x,y) = P\{X = x, Y = y\}$	$P\big\{(X,Y) \in C\big\} = \displaystyle\iint_{(x,y)\in C} f(x,y)\,dx\,dy$
Fonction de répartion conjointe	$F(a,b) = \displaystyle\sum_{\substack{x\leq a\\ y\leq b}} p(x,y)$	$F(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f(x,y)\,dy\,dx$
Densités marginales	$p_X(x) = P\{X = x\} = \displaystyle\sum_{y:p(x,y)>0} p(x,y)$	$f_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$
Distribution conjointe de plusieurs variables aléatoires	$p(n_1, n_2, \ldots, n_r) = P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r)$	$P\big\{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C\big\} = \displaystyle\int\int\cdots\int_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$
Somme de variables aléatoires indépendantes	$p_{X+Y}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_X(n-k)p_Y(k) := p_X * p_Y(n)$	$\begin{cases} F_{X+Y}(a) = P\{X + Y \leq a\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)f_Y(y)\,dy \\ f_{X+Y}(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,dy := f_X * f_Y(a) \end{cases}$
Distributions conditionnelles	$\begin{cases} p_{X\|Y}(x,y) = P\{X = x\|Y = y\} = \dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)} \\ F_{X\|Y}(x,y) = P\{X \leq x\|Y = y\} = \displaystyle\sum_{a\leq x} P_{X\|Y}(a,y) \end{cases}$	$f_{X\|Y}(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
Convolution	$p_{X+Y}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_X(n-k)p_Y(k) = p_X * p_Y(n)$	$f_{X+Y}(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)\,dy = f_X * f_Y(a)$

Théorème (Inégalité de Tchebychev/Markov). *Si X est une variable aléatoire positive, alors*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\{X > a\} \leq \frac{\mathbb{E}[X^\alpha]}{a^\alpha} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\{|X-\mu| < a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Théorème (Inégalité de unilatérale de Tchebychev). *Soit X une variable aléatoire, avec $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, alors pour tout réel $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\{X \geq \mu + a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\{X \leq \mu - a\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

Théorème (Théorème central limite).

1. *Si X_i pour $i = 1, \ldots$ sont i.i.d avec $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2. *Si X_i pour $i = 1, \ldots$ sont indépendantes avec $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \leq b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a)$$