



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FICHE DE NOTE

## Probabilités

*Julien Hébert-Doutreloux*

May 8, 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Chapitre 1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Chapitre 2</b>	<b>3</b>

# 1 Analyse combinatoire

**Théorème 1** (Principe de multiplication). *Soit  $r$  le nombre d'expérience à réaliser tel que pour chaque expérience il y a  $n_i$  possibilités avec  $i = 1, 2, 3, \dots, r$  alors le total des possibilités est donné par*

$$\prod_i^r n_i \quad (1)$$

**Définition 1** (Permutation). *On appelle permutation un arrangement de  $n$  objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.*

**Théorème 2.** *Le nombre de permutations de  $n$  objets discernables est  $n!$ .*

**Théorème 3** (Permutations d'objets partiellement indiscernables). *Le nombre de permutations de  $n$  objets dont  $n_1$  sont indiscernables entre eux,  $n_2$  sont indiscernables entre eux, ...,  $n_r$  sont indiscernables entre eux est donné par :*

**Remarque.** *Une permutation de  $n$  objets est un arrangement de ces objets considérés tous en même temps. Dans certains cas, on peut faire un arrangement de  $r$  objets choisis parmi  $n$ , avec ou sans répétition.*

1. *Permutation sans répétition,*

$$A_r^n := \frac{n!}{(n-1)!}$$

2. *Permutation avec répétition,*

$$n \cdot n \cdots n = n^r$$

**Définition 2** (Coefficient binomial). *Toute disposition de  $r$  objets choisis sans répétition dans un ensemble qui en contient  $n$  est appelé combinaison de  $r$  objets pris parmi  $n$ . On note le coefficient binomial par*

$$\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2)$$

**Théorème 4.**  $\binom{n}{r}$  est le nombre de combinaisons de  $r$  objets pris parmi  $n$ .

**Remarque.**  $\binom{n}{r}$  est nombre de façons de choisir  $r$  objets sans répétition dans un ensemble qui en contient  $n$ . Les cas particuliers,

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n \quad , \quad \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n-1} = n$$

**Théorème 5** (Théorème du binôme).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (3)$$

*Quelques s'identités remarquables*

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= 3x^2y + x^3 + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^4y + x^5 + 5xy^4 + y^5 \\ (x+y)^6 &= 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^5y + x^6 + 6xy^5 + y^6 \\ (x+y)^7 &= 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7x^6y + x^7 + 7xy^6 + y^7 \\ (x+y)^8 &= 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8x^7y + x^8 + 8xy^7 + y^8 \\ (x+y)^9 &= 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9x^8y + x^9 + 9xy^8 + y^9 \end{aligned}$$

**Lemme 6.**

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r} \quad (4)$$

**Définition 3** (Coefficients multinomiaux). Soit  $n_1, n_2, \dots, n_r$  des entiers positifs tels que  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ . On définit le coefficients multinomiaux par

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} = \sum_{i=1}^r n_i \cdot \left( \prod_{i=1}^r (n_i)! \right)^{-1} \quad (5)$$

**Théorème 7** (Formule du multinôme de Newton).

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \dots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \dots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \dots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \cdot \sum_{i=1}^r n_i \cdot \left( \prod_{i=1}^r (n_i)! \right)^{-1} \right\} \\ &= \sum_{\substack{(n_1, n_2, \dots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \dots + n_r = n}} \left\{ \sum_{i=1}^r n_i \cdot \prod_{i=1}^r \frac{x_i^{n_i}}{(n_i)!} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

**Théorème 8.** Il y a  $\binom{n+r-1}{r-1}$  vecteurs  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

## 2 Axiomes de probabilités

**Définition 4** (Ensemble fondamental). L'ensemble des résultats possibles d'une expérience est appelé ensemble fondamental et est noté  $S$ .

**Définition 5** (Événement). Tout sous-ensemble  $E$  de  $S$  est appelé événement.

**Remarque.**

1. L'événement  $\{a\}$  contenant un seul élément de  $S$  est appelé événement élémentaire.
2. L'ensemble vide noté  $\emptyset$  et  $S$  sont des événements. Le premier est appelé événement impossible, alors que le deuxième est appelé événement certain.

**Définition 6.** Si un résultat de l'expérience est contenu dans  $E$ , on dit que  $E$  est réalisé.