Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Calcul I

Julien Hébert-Doutreloux

April 21, 2020

Contents

1 Les dérivées des fonctions de plusieurs variables **2**
1.1 Les dérivées partielles . . . 2
1.2 Les plans tangents et approximations linéaires . . . 2
1.3 La règle de dérivation en chaîne . . . 2
1.4 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient . . . 2
1.5 Les approximations de Taylor en deux variables . . . 3

2 L'optimisation **3**
2.1 Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables . . . 3
2.2 L'optimisation des fonctions de plusieurs variables . . . 4

3 Les intégrales doubles **4**
3.1 Les intégrales doubles sur des domaines généraux . . . 5
3.2 Système de coordonnée . . . 5
3.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires . . . 5

4 Les intégrales triples **5**
4.1 Les intégrales triples . . . 5
4.2 Les intégrales triples en coordonnées cylindriques . . . 6
4.3 Les intégrales triples en coordonnées sphériques . . . 6

5 Code Mathematica **7**

Index **8**

1 Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

1.1 Les dérivées partielles

Théorème 1. *[Clairaut] Soit une fonction f définie sur un disque D qui contient le point (a,b). Si les fonction f_{xy} et f_{yx} sont continues sur D, alors*

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

■ Gives the multiple partial derivative `D[f,{x,n},{y,m},...]` ■

1.2 Les plans tangents et approximations linéaires

Les plans tangents

Définition 1. *Si f possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Les approximations linéaires

Définition 2. *La fonction linéaire dont le graph est ce plan tangent, à savoir*

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

*est appelée **linéarisation** de f en $\vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, et l'approximation*

$$f(\vec{x}) \approxeq f(\vec{c}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\vec{c})(x_i - c_i)$$

*est appelée **approximation linéaire** de f en $\vec{c}$. La différentielle est*

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i$$

Théorème 2. *Si les dérivées partielles f_x et f_y existent près de (a,b) et sont continues en (a,b), alors f est différentiable en (a,b).*

1.3 La règle de dérivation en chaîne

Théorème 3 (Règle de dérivation en chaîne)**.** *Si u est une fonction différentiable de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, et si chaque x_j est une fonction différentiable des m variables $t_1, t_2, ..., t_m$, alors u est une foncition différentiable de $t_1, t_2, ..., t_m$ et*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_i}$$

1.4 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Les dérivées directionnelles

Définition 3. *La **dérivée directionnelle** (si la limite existe) de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a,b,c)$ en (x_0, y_0, z_0) est*

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Définition 4. *Le* ***vecteur gradient****, noté* ∇f *ou* grad f, d'une fonction à n variables est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

D'où la dérivée dans la direction $\vec{u}$, un vecteur unitaire, est

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u}$$

■ Gradient of a scalar function $(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial_n)$: `Grad[f,{x_1,x_2,...,x_n}]` ou `D[f[x, y,...], {{x, y,...}}]` ■

Les plans tangents aux surfaces de niveau

Définition 5. *Soit une surface S d'équation $F(x, y, z) = k$ et $P(x_0, y_0, z_0)$, un point de S. Si $\nabla F(P) \neq \vec{O}$, alors le* ***plan tangent à la surface de niveau*** *$F(x, y, z) = k$ en P est*

$$\nabla F(P) \bullet (\vec{x} - P) = 0$$

Proposition 1. *Soit f une fonction différentiable de n variables, et $\vec{x}$ un point de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

- *la dérivée directionnelle de f en $\vec{x}$ est maximale dans la direction du gradient $\nabla f(\vec{x})$*
- *la taux de variation maximal de f en $\vec{x}$ est $||\nabla f(\vec{x})||$*
- *si $\vec{u} \perp \nabla f(\vec{x})$, alors la $\nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u} = 0$*
- *le gradient $\nabla f(\vec{x})$ est perpendiculaire à l'ensemble de niveau de f passant par $\vec{x}$*

Proposition 2.

- *Le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction (possiblement, non unitaire) dans laquelle la fonction $f(x, y)$ a le plus grand taux de variation en (x_0, y_0).*
- *La taux maximal vaut : $||\nabla f(x_0, y_0)||$*
- *$\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ est la direction perpendiculaire à la tengente à la courbe de niveau qui passe par (x_0, y_0)*

1.5 Les approximations de Taylor en deux variables

Définition 6. *[Polynôme de Taylor de degré 1 de f en (a, b)]*

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Définition 7. *[Polynôme de Taylor de degré 2 de f en (a, b)]*

$$Q(x, y) = L(x, y) + \frac{1}{2!} f_x x(a, b)(x - a)^2 + f_x y(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2!} f_y y(a, b)(y - b)^2$$

2 L'optimisation

2.1 Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables

Définition 8. *(Matrice Hessienne) La matrice Hessienne d'une fonction f à n variables est la matrice carrée d'ordre n notée $\nabla^2 f$ telle que l'élément $(\nabla^2 f)_{ij} = f_{x_i x_j}$:*

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

■ Le matrice Hessienne : `MatrixForm[D[f[x, y,...], {{x, y,...}}, {{x, y,...}}]]` ■

Définition 9. *[Point critique] Soit f une fonction à n variables et $P = (c_1, c_2, ..., c_n)$, un point. Le point P est un point critique si $\nabla f(P) = \vec{O}$.*

Théorème 4. *[Test des dérivées premières] Si f possède un maximum (resp. minimum) local en (a, b) et si les dérivées partielles du premiers ordre de f existent, alors $\nabla f(a, b) = \vec{O}$.*

Les maximums et minimum absolus

Théorème 5. *[Bornes atteintes] Si f est continu sur un compact K, alors f atteint sont maximum (resp. sont minimum) absolus en au moins un points de K. Autrement dit,*

$$\exists \vec{x}_1, \vec{x}_1 \in K : f(\vec{x}_1) = \inf_{\vec{x} \in K}\{f(\vec{x})\} \quad et \quad f(\vec{x})_2 = \sup_{\vec{x} \in K}\{f(\vec{x})\}$$

2.2 L'optimisation des fonctions de plusieurs variables

Définition 10. *Un point critique $\vec{a}$ est un point de selle de la fonction $f$si, dans toute boule ouverte $B_\varepsilon(\vec{a})$, il existe des points $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ tels que $f(\vec{x}_1) < f(x) < f(\vec{x}_2)$.*

Le signe d'une matrice

Théorème 6. *[Critère de Sylvester] Soit A une matrice symétrique inversible*

- *Si $\alpha_j > 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$, alors A est définie positive.*
- *Si $\beta_j > 0$ pour $j = 1, 2, ..., n$, alors A est définie négative.*

■ Calculer les mineurs principaux d'une matrice :

```
submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice[[1 ;; d, 1 ;; d]]]
mineur[matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
{x, y, z} = {0, 1, 2}
For[i = 1, i < 4, i++, Print[mineur[matrice, i]]]
```

où `d` le numéro de la colonne du ième élément de la diagonale principale. ■

Théorème 7. *Conditions suffisantes du deuxièmes ordre pour un problème d'optimisation sans contraintes*

- *si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est définie positive (resp. négative), alors f possède un minimum (resp. un maximum) local en $\vec{a}$.*
- *si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est indéfiniem alors $\vec{a}$ est un point de selle de f*

■ Exemple de résolution pour trouver les points critique ;

```
F[x_, y_, z_] := x^3 - x y + y^2 + z^2 gradient = Grad[F[x, y, z], {x, y, z}]
Solve[Resolve[{gradient == mu Grad[x x + y y + z z, {x, y, z}] &&
 x x + y y + z z == 1}, {mu, x, y, z}, Reals]]
```

■

3 Les intégrales doubles

Définition 11. *Si $f(x, y) \geq 0$, alors le volume V du solide au-dessus du rectangle R et sous la surface $z = f(x, y)$ est*

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Définition 12. *Selon l'ordre d'intégration, les intégrales itérées sont ;*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \tag{1}$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \tag{2}$$

Théorème 8. *Si f est continue sur le rectangle $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, alors*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Si on suppose que f est bornée sur R, que f est discontinue sur un nombre fini de courbes lisses et que les intégrales itérées existent.

3.1 Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Définition 13. *Si f est continue sur un région D de type I,*

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Définition 14. *Si f est continue une région D de type II,*

$$D = \{(x,y) | c \leq y \leq c, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Proposition 3. *Si on intègre la fonction constante $f(x,y) = 1$ sur une région D, on obtient l'aire de D, car le volume sous $f(x,y) = 1$ au-dessus de D est égal à l'aire de D;*

$$\iint\limits_D 1\, dA = A(D)$$

3.2 Système de coordonnée

Définition 15. *Le passage du système cartésien au système polaire est donné par les relations suivantes;*

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Définition 16. *Le passage du système cartésien au système cylindrique est donné par les relations suivantes;*

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Définition 17. *Le passage du système cartésien au système sphérique est donné par les relations suivantes;*

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

3.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Définition 18. *Si f est continue sur un rectangle polaire R défini par $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, alors*

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

Si f est continue sur région polaire de la forme

$$D = \{(r,\theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

4 Les intégrales triples

4.1 Les intégrales triples

Théorème 9. *Si f est contniue sur le rectangle $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$, alors*

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Définition 19. *Une région solide E est dite de type 1 si elle est située entre les graphes de deux fonctions continues de x et y,*

$$E = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Définition 20. *Si la projection D de E dans le plan xy est une région de type I, alors*

$$E = \{(x,y,z)|a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Définition 21. *Si D est une région de type II, alors*

$$E = \{(x,y,z)|c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

Définition 22. *Une région solide E est de type 2 si elle est de la forme*

$$E = \{(x,y,z)|(y,z) \in D, u_1(y,z) \leq z \leq u_2(y,z)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$

Définition 23. *Une région solide E est de type 3 si elle est de la forme*

$$E = \{(x,y,z)|(x,z) \in D, u_1(x,z) \leq z \leq u_2(x,z)\}$$

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$

Proposition 4. *Soit la fonction $f(x,y,z) = 1$ pour tout points de E, alors l'intégrale triple représente le volume de E,*

$$V(E) = \iiint\limits_E dV$$

4.2 Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition 24.

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dx\,dr\,d\theta$$

4.3 Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Définition 25.

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \{(\rho,\theta,\phi)|a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Aussi,

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \left\{(\rho,\theta,\phi)|\alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta,\phi) \leq \rho \leq g_2(\theta,\phi)\right\}$$

5 Code Mathematica

■ Méthode pour calculer des volumes bornée par des régions ;

```
R = ImplicitRegion[x x + y y <= z && x x + y y <= 25 && z <= 25, {x, y, z}]
RegionBoundary[R]
DiscretizeRegion[R, MeshQualityGoal -> "Maximal"]
Volume[R]
RegionMeasure[R, 3]
```

■

Index

A
Aire . . . 5

B
Bornes atteintes . . . 4

C
Critère de Sylvester . . . 4
Cylindrique . . . 5

D
Derivative . . . 2
Domaine de type 1 . . . 6
Domaine de type 1.I . . . 6
Domaine de type 1.II . . . 6
Domaine de type 2 . . . 6
Domaine de type 3 . . . 6
Domaine de type I . . . 5
Domaine de type II . . . 5
Dérivée directionnelle . . . 2

G
Gradient . . . 3

I
Intégrales doubles en polaire . . . 5
Intégrales itérées . . . 4
Intégrales triples en cylindrique . . . 6
Intégrales triples en sphérique . . . 6

M
Matrice Hessienne . . . 3

O
Optimization avec contrainte . . . 4

P
Point critique . . . 3
Polaire . . . 5
Polynôme de Taylor . . . 3

S
Sphérique . . . 5
Sylvester . . . 4
Système de coordonnée . . . 5

T
Taux de variation maximal . . . 3
Test des dérivées premières . . . 3
Théorème de Clairaut . . . 2
Théorème de Fubini . . . 4
Théorème de Fubini pour les intégrales triples . . . 5

V
Vecteur gradient . . . 3
Volume . . . 4–7