MAT1720 – INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS – HIVER 2020
EXAMEN INTRA

Enseignant : Thomas Davignon
Date : lundi 17 février 2020
Heure : 13h 30
Salles : B-3240, B-3250, Pavillon Jean-Brillant.

Durée :	*1h 50*
Consignes :	*Documentation/calculatrice non-permise.*
	Répondre dans les cahiers prévus à cet effet. *Écrire proprement. Justifier ses démarches.* *Identifiez clairement tous les cahiers utilisés.*
	Le questionnaire est imprimé recto-verso. *Le questionnaire ne sera pas corrigé.*

Rappel de formules

Avec la convention que $0^0 = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \qquad r \neq 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n.$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Question 1 (6 points). *Vrai ou faux. Répondez dans le cahier d'examen. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.*

1. *(1 point)* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} n^{-k}\binom{n}{k} = e$.

2. *(1 point)* Soient E et F sont deux événements tels que $\mathbb{P}\{E \cap F\} = 0$. Alors, $\mathbb{P}\{E \cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\}$.

3. *(1 point)* Soient A, B deux événements avec $0 < \mathbb{P}\{A\}, \mathbb{P}\{B\} < 1$, et $\mathbb{P}\{A \mid B\} < \mathbb{P}\{A \mid B^c\}$. Alors, $\mathbb{P}\{A \mid B\} < \mathbb{P}\{A\}$.

4. *(1 point)* On suppose que X est une variable aléatoire quelconque avec fonction de répartition F. Alors on a toujours $\mathbb{P}\left\{X^2 \leq x\right\} = F(\sqrt{x})$.

5. *(1 point)* Si X est une variable aléatoire de loi binomiale (n, p), $n - X$ est une variable aléatoire de loi binomiale $(n, 1-p)$.

6. *(1 point)* Si X est une variable aléatoire géométrique, et que $m, n \in \mathbb{N}$, les événements $\{X > m + n\}$ et $\{X > m\}$ sont indépendants.

Question 2 (6 points)**.** Axel, Bénédicte et Claude vont voire *Cats* au cinéma Beaubien. La salle compte deux sections de 4 rangées de 5 sièges de part et d'autre de l'allée centrale.
Au moment d'acheter leurs billets, il ne reste que 3 places disponibles

(a) *(1 point)* Combien y a-t-il de façons pour 37 personnes de s'asseoir dans une salle de 40 places ?

(b) *(2 points)* Soit $C = \{\text{Il reste trois places ensemble dans la même rangée.}\}$. Trouver $\mathbb{P}\{C\}$.

(c) *(1 point)* Soit $B = \{\text{Axel, Bénédicte ou Claude est assis au bout d'une rangée.}\}$. Trouver $\mathbb{P}\{B \mid C\}$.

(d)

Question 3 (6 points)**.** Monica, Chandler et Joey vont visiter une maison en banlieue de New-York. On définit les événements suivants :

— $M = \{$Monica aime la maison.$\}$
— $C = \{$Chandler aime la maison.$\}$
— $J = \{$Joey aime la maison.$\}$

La probabilité que tout le monde aime la maison est de 0. La probabilité que personne aime la maison est de 1/2. Pour chaque personne, la probabilité qu'il ou elle aime la maison est de 1/4.

(a) *(2 points)* Écrire l'événement {Au moins une personne aime la maison} en fonction des événemenst M, C et J.

(b) *(4 points)* Pendant la visite, Joey boude et il ne parle pas à Monica ni à Chandler – donc J est indépendant de C et de M. Calculer $\mathbb{P}\{M \cap C\}$ et déduire si M et C sont indépendants. Si non, est-ce que Monica et Chandler ont plus tendance à s'entendre que Monica et Joey ?

Question 4 (10 points)**.** Thomas est passionné par l'astronomie, et il aime beaucoup observer les astres à l'aide de son télescope. Cependant, il y parvient rarement, parce que d'une part, la météo est rarement coopérante, mais aussi parce qu'il est très occupé.
En moyenne, les conditions d'observation seront favorables avec une probabilité de $1/5$. Mais, indépendamment des conditions, Thomas doit se lever tôt le lendemain 5 soirs sur 7. Pour une soirée choisie aléatoirement :

— si les conditions sont favorables et que Thomas n'a pas à se lever tôt le lendemain, il sortira faire de l'observation ;
— si les conditions sont favorables et qu'il doit se lever tôt le lendemain, il sortira quand même faire de l'observation avec probabilité $1/2$.
— si les conditions ne sont pas favorables, il ne sortira pas faire de l'observation.

On définit les événements suivants :

— $F = \{\text{Les conditions sont favorables}\}$;
— $L = \{\text{Thomas doit se lever tôt le lendemain}\}$;
— $S = \{\text{Thomas est sorti faire de l'observation.}\}$;

(a) *(1 point)* Calculer $\mathbb{P}\{F \cap L\}$ et $\mathbb{P}\{F \setminus L\}$.

(b) *(4 points)* Quelle est la probabilité que Thomas sortira faire de l'observation ?

(c) *(2 points)* Expliquer pourquoi $L \cap S = L \cap F \cap S$. Déduire que $\mathbb{P}\{L \mid S\} = \mathbb{P}\{L \cap F \mid S\}$.

(d) *(2 points)* Sachant que Thomas est sorti faire de l'observation, quelle est la probabilité qu'il devait se lever tôt le lendemain (et qu'il est maintenant très fatigué) ?

(e) *(1 points)* En moyenne combien de fois par année Thomas sort-il son télescope si on assume que tous les soirs d'une année (non-bissextile) sont indépendants ?

Question 5 (7 points)**.** Soit X une variable aléatoire de distribution de Poisson avec paramètre $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire de distribution de Poisson avec paramètre $\mu > 0$.
On a aussi que, pour toute paire $k, l \geq 0$, les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = l\}$ sont indépendants.

(a) *(4 points)* Soit $Z = X + Y$. Montrer que

$$\mathbb{P}\{Z = n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{X = k\}\,\mathbb{P}\{Y = n - k\}.$$

(b) *(3 points)* Déduire que Z suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.