Université de Montréal

Fiche Récapitulative

Calcul II

Julien Hébert-Doutreloux

April 13, 2020

Contents

1 Les dérivées et les intégrales des fonctions vectorielles

1.1 Les règles de dérivations

Théorème 1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des fonctions dérivables, c est un scalaire et f est une fonction réelle, alors,*

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)+\vec{v}(t)] = \vec{u}\,'(t)+\vec{v}\,'(t) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}[c\vec{u}(t)] = c\vec{u}\,'(t) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{u}(t)] = f'(t)\vec{u}(t)+f(t)\vec{u}\,'(t) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\bullet\vec{v}(t)] = \vec{u}\,'(t)\bullet\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\bullet\vec{v}\,'(t) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)] = \vec{u}\,'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}\,'(t) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\vec{u}\big(f(t)\big)\Big] = f'(t)\vec{u}\,'\big(f(t)\big) \tag{6}$$

1.2 La longueur d'arc et la courbure

Théorème 2. *Soit C une courbe paramétrée par $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a\le t\le b$, où f et g ont des dérivées continues sur $[a,b]$, et C est parcourue une seule fois lorsque t varie de a à b. Alors, la longueur de C est*

$$L=\int_a^b \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt$$

$$L=\int_a^b \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dz}{dt}\Big)^2}\,dt$$

$$L=\int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||^2\,dt$$

1.3 L'abscisse curviligne

Définition 1. *L'abcisse curviligne s de C est définie par*

$$s(t)=\int_a^t ||\vec{r}\,'(u)||^2\,du=\int_a^t \sqrt{\Big(\frac{dx}{du}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{du}\Big)^2+\Big(\frac{dz}{du}\Big)^2}\,du$$

$$\frac{ds}{dt}=||\vec{r}\,'(t)||$$

1.4 La courbure

Définition 2. *Si C est une courbe lisse définie par la fonction vectorielle $\vec{r}$, son vecteur tangent unitaire $\vec{T}(t)$ est donné par*

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$$

et $\vec{T}(t)$ indique la direction de la courbe.

Définition 3. *La courbure d'une courbe est*

$$\kappa=\Big|\Big|\frac{d\vec{T}}{ds}\Big|\Big|,\quad \kappa(t)=\frac{||\vec{T}\,'(t)||}{||\vec{r}\,'(t)||},$$

où $\vec{T}$ est le vecteur tangent unitaire. La courbure est la norme du taux de variation du vecteur tangent unitaire par rapport à l'abcisse curviligne.

Théorème 3. *La courbure de la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}$ est*

$$\kappa(t)=\frac{||\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)||}{||\vec{r}\,'(t)||^3}$$

1.5 Les vecteurs normal et binormal

Définition 4. *Si $\vec{r}'$ est lisse, on définit le vecteur normal unitaire principal $\vec{N}(t)$ (ou la normal unitaire) par*

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||}$$

Définition 5. *Le vecteur binormal $\vec{B}(t)$ est définit par*

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) : \vec{B} \perp \vec{T} \perp \vec{N}$$

Définition 6. *Le plan normal de C en P est la plan déterminé apr le vecteur normal $\vec{N}$ et le vecteur binormal $\vec{B}$ en un point P d'une courbe C*

Définition 7. *Le plan osculateur dee C en P est la plan déterminé apr le vecteur tangent unitaire $\vec{T}$ et le vecteur normal $\vec{N}$ en un point P d'une courbe C*

2 Les intégrales curvilignes et l'analyse vectorielle dans le plan

2.1 Les champs vectoriels

Définition 8. *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$)). Un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$)) est une fonction $\vec{F}$ qui, à chaque point $(x, y) \in D$ (resp. $(x, y, z) \in D$)), associe un vecteur à deux (resp. trois) dimensions $\vec{F}(x, y)$ (resp. $\vec{F}(x, y, z)$).*

Définition 9. *Un champ de gradients, noté ∇f est un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ qui associe un vecteur en chaque point où les dérivées partielles sont définies.*

$$\nabla f(\vec{x}) = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, ..., \partial f/\partial x_n)$$

2.2 Les intégrales curvilignes

Définition 10. *Si f est définie sur une courbe lisse et paramétré C, alors l'intégrale curviligne de f le long de C est*

$$\int_C f(\vec{x})\,ds = \int_a^b f\big(\vec{x}(t)\big)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b f\big(\vec{r}(t)\big)||\vec{r}\,'(t)||\,dt$$

où $\vec{x}(t) = \vec{r}(t)$

Définition 11. *L'intégrale curviligne par rapport à l'abcisse curviligne est définit*

$$\int_C \sum_{i=1}^{n} f(\vec{x})\,dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f\big(\vec{x}(t)\big)x_i'\,dt$$

2.3 Les intégrales curvilignes de champs vectoriels

Définition 12. *Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel continue défini sur une courbe lisse C paramétrée par une fonction vectorielle $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Alors l'intégrale curviligne de $\vec{F}$ le long de C est*

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \bullet \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_C \vec{F} \bullet \vec{T}\,ds$$

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{où } \vec{F} = (P, Q, R)$$

2.4 Le théorème fondamental des intégrales curvilignes

Théorème 4. *Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral affirme que*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

où F est continue sur $[a, b]$.

Théorème 5. *Soit une courbe lisse C paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Soit une fonction différentiable de deux ou trois variables dont le vecteur gradient ∇f est continue sur C. Alors,*

$$\int_C \nabla f \bullet d\vec{r} = f\big(\vec{r}(b)\big) - f\big(\vec{r}(a)\big)$$

Définition 13. *Un champ vectoriel est dite consesrvatif si $\vec{F} = \nabla f$*

2.5 L'indépendance du chemin

Définition 14. *L'intégrale curviligne* $\int_C \vec{F} \bullet \, d\vec{r}$ *est indépendant du chemin si*

$$\forall C_1, C_2 \subset D : \int_{C_1} \vec{F} \bullet \, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \bullet \, d\vec{r}$$

où $\vec{F}$ *est un champ vectoriel continue sur un domaine* D*. L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel conservatif est indépendante du chemin. Sur une courbe fermée telle que* $\forall C_1, C_2, C_1 \cup C_2$ *fermé* $\iff \vec{r}(a) = \vec{r}(b)$*, l'intégrale curviligne sur un champ vectoriel conservatif est nulle.*

Théorème 6.

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} \text{ est indépendante du chemin dans } D \iff \forall C_{fermé} \subset D, \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$$

Définition 15. *Une région ouverte sont telle que*

$$\forall p \in D, \exists \delta > 0 : Disque(p, \delta) \subset D$$

Définition 16.

$$\forall p, q \in D, \exists C \subset D \implies p, q \in C$$

Théorème 7. *Soit un champ vectoriel* $\vec{F}$ *continu sur un domaine ouvert et connexe* D*. Si* $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ *est indépendante du chemin dans* D*, alors* $\vec{F}$ *est un champ vectoriel conservatif sur* D*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction* f *telle que* $\nabla f = \vec{F}$*.*

Théorème 8. *Si* $\vec{F} = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$*, un champ vectoriel conservatif tel que* $PetQ$ *ont des dérivées partielle premières continues sur un domaine* D*, alors en tout point de* D *on a*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

La réciproque n'est vrai que pour sur une courbe simple (qui ne se coupe pas).

Théorème 9. *Soit un champ vectoriel* $\vec{F} = (P, Q)$ *défini sur un domnain simplement connexe* D*. Supposant que* $PetQ$ *ont des dérivées partielles premières continues et que*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Alors, $\vec{F}$ *est conservatif.*

2.6 Le théorème de Green

Définition 17. *Soit une région* D *dont la frontière est une courbe* C *fermée. L'orientation positive est défini comme le parcours en fait dans le sens antihoraire (généralement). L'intérieur de la région* D *se trouve à gauche lorsque* C *est parcourue.*

Théorème 10. *Soit* C *une courbe plane fermée simple, lisse par morceaux et orientée dans le sens positif, et soit* D *la région délimitée par* C*. Si* P *et* Q *ont des dérivées partielle premières continues sur un domaine qui contient* D*, alors*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Le théorème de Green donne alors les formules suivantes pour l'aire de D

$$A = \oint_C x\,dy = \oint_C y\ dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

3 Les intégrales de surface et l'analyse vectorielle dans l'espace

3.1 Les surfaces paramétrées et leurs aires

Définition 18. *Une surface paramétrée, noté S est l'ensemble de tous les points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que*

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (u, v) \in D$$

où $\vec{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ est une fonction vectorielle aux équations paramétriques de S définie sur la région D.

3.1.1 Les plans tangents

Définition 19. *L'équation paramétrique du plan est*

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_0 + u\vec{r}'_u + v\vec{r}'_v$$

ou

$$(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \bullet (\overrightarrow{r_p - r_0}) \qquad \textit{avec} \begin{cases} P_0 = \vec{r}(u_0, v_0) \\ \vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \\ r_p - r_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \end{cases}$$

ou $\vec{r}'_u$ et $\vec{r}'_v$ sont les fonctions vectorielles dont les composantes sont respectivement dérivée par rapport à u et v

3.1.2 L'aire d'une' surface paramétrée

Définition 20. *Si une surface lisse S est paramétrée par la fonction vectorielle*

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

et si S est parcourue une seule fois lorsque (u, v) balaie le domaine D des paramètres, alors l'aire de la surface S est,

$$A(S) = \iint_D ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\, dA,$$

où

$$\vec{r}_u = \Big(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\Big) \quad \vec{r}_v = \Big(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\Big)$$

3.1.3 L'aire des graphes de fonctions de deux variables

Définition 21. *La formulaire de l'aire d'une surface d'équation $z = f(x, y)$ est*

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\, dA$$

3.2 Les intégrales de surface

3.2.1 Les surfaces paramétrées

Définition 22. *Soit S une surface paramétrée par*

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in D$$

Si les composantes sont continues et si $\vec{r}_u$ et $\vec{r}_v$ sont non nuls et non parallèles en tout point de D, alors l'intégrale de surface de f sur S est

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f\big(\vec{r}(u, v)\big)||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\, dA$$

3.2.2 Les graphes de fonctions de deux variables

Définition 23. *Soit une surface S d'équation $z = g(x, y)$ comme une surface d'équations paramétriques*

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

Alors l'intégrale de surface est

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f\big(x, y, g(x, y)\big)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

3.2.3 Les surfaces orientées

Définition 24. *Une surface S qui possède en chaque point (sauf peut-être sur sa frontière) un plan tangent. (Il existe donc deux vecteurs unitaires $n_1 = -n_2$) Une surface S est orientable si on peut choisir un vecteur normal en chaque points (x, y, z) de sorte de façon que $\vec{n}$ varie continûment sur S. Par convention $\vec{n}$ pointe vers les $z > 0$. (cote positive) La direction normal à une surface de niveau est la direction du gradient.*

3.2.4 Les intégrales de surface de champs vectoriels

Définition 25. *Soit $\vec{F}$ un champs vectoriel continu défini sur une surface S orientée par un vecteur normal unitaire $\vec{n}$, alors l'intégrale de surface $\vec{F}$ sur S (flux de $\vec{F}$ à travers S) est*

$$\iint\limits_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$$

Où $dS = ||\vec{r}_u \times \vec{r}_v||\, dA$.

$$\iint\limits_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint\limits_D \vec{F} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dA$$

Si la surface S est un graphe $z = g(x, y)$, on peut considérer x et y comme des paramètres. Si $\vec{F} = (P, Q, R)$, alors

$$\iint\limits_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iint\limits_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

3.3 Le rotationnel et la divergence

3.3.1 Le rotationnel

Définition 26. *Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ et si toutes dérivées partielles de P, de Q et de R existent, alors le rotationnel de $\vec{F}$, noté* rot $\vec{F}$*, est le champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ défini par*

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Autrement,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F}$$

Théorème 11. *Soit une fonction f de trois variables possède des dérivées secondes partielles continues, alors*

$$\text{rot } (\nabla f) = \vec{0}$$

Théorème 12. *Si $\vec{F}$ est conservatif, alors* rot $\vec{F} = \vec{0}$.

Théorème 13. *Si $\vec{F}$ est un champ vectoriel défini sur tout $\mathbb{R}^3$ dont les fonctions composantes ont des dérivées partielles continues, et si* rot $\vec{F} = \vec{0}$*, alors $\vec{F}$ est un champ vectoriel conservatif.*

3.3.2 La divergence

Définition 27. *Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ et si $\partial P/\partial x, \partial Q/\partial y, \partial R/\partial z$ existent, alors la divergence de $\vec{F}$ est la fonction de trois variables définie par*

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Autrement,

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \bullet \vec{F}$$

Théorème 14. *Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ et si P, Q, R ont des dérivées partielles secondes continues, alors*

$$\text{div rot } \vec{F} = 0$$

3.3.3 Le laplacien

Définition 28. *Si f est une fonction de trois variable, le laplacien de f est*

$$\text{div } (\nabla f) = \nabla \bullet (\nabla f) = \nabla^2 = \nabla \bullet \nabla = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

L'équation de Laplace est

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Si $\vec{F} = (P, Q, R)$ est un champ vectoriel, alors le laplacien de $\vec{F}$

$$\nabla^2 \vec{F} = \left(\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R\right)$$

3.3.4 Les formes vectorielles du théorème de Green

Théorème 15. *En considèrant $\vec{F} = (P, Q, 0)$, alors la formule du théorème d Green s'exprime sous forme vectorielle*

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_D (\text{rot } \vec{F}) \bullet \vec{k}\, dA$$

Aussi,

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_D \text{div } F(x, y)\, dA$$

3.4 Le théorème de Stoke

Théorème 16 (Stokes)**.** *Soit S, une surface lisse par morceaux orientée et bornée par un courbe frontière C lisse par morceaux, fermée et simple, et orientée positivement par rapport à S. Soit un champ vectoriel $\vec{F}$ dont les composantes ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte dans $\mathbb{R}^3$ qui contient S. Alors,*

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \bullet d\vec{S}$$

La courbe frontière est aussi noté ∂S, alors,

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \bullet d\vec{S} \oint_{\partial S} \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

3.5 Le théorème de flux-divergence

Théorème 17 (Flux-divergence)**.** *Soit une région solide simple E et S la surface frontière de E, orientés positivement (vers l'extérieur). Soit un champ vectoriel $\vec{F}$ dont les fonctions composantes ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte qui contient E. Alors,*

$$\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{S} = \iiint_E \text{div } \vec{F}\, dV$$

Index