Question 1

Soit l'application de $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T\big(p(x)\big) = x(x+1)p''(x) + (x-1)p'(x) - p(x)$.

a)

Soit le pôlynome $p(x) = ax^2 + bx + c$, l'application T est

$$\begin{aligned} T\big(p(x)\big) &= (x-1)(2ax+b) - ax^2 + 2a(x+1)x - bx - c \\ &= 3ax^2 - b - c \end{aligned}$$

b)

Par la proposition suivante,

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}, T(cu + dv) = cT(u) + dT(v) \Longleftrightarrow T \text{ est une tranformation linéaire}$$

montrons que T est une transformation linéaire.

Proof. Soit $p_1(x) = ax^2 + bx + c$,$p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T\big(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x)\big) &= (x-1)(\alpha(2ax+b) + \beta(2Ax+B)) + x(x+1)(2a\alpha + 2A\beta) \\ &\quad + \alpha\left(-\left(ax^2+bx+c\right)\right) - \beta\left(Ax^2+Bx+C\right) \\ &= 3a\alpha x^2 + 3A\beta x^2 - \alpha b - \beta B - \alpha c - \beta C \\ &= \alpha T\big(p_1(x)\big) + \beta T\big(p_2(x)\big) \end{aligned}$$

□

c)

Déterminons la matrice associée A à l'application linéaire T en considérant les polynôme de $\mathbb{P}_2$ comme des vecteurs (eg: $p_1(x) := (c, b, a)$).

$$\begin{cases} T(1) = -1 \implies (-1,0,0) \\ T(x) = -1 \implies (-1,0,0) \\ T(x^2) = 3x^2 \implies (0,0,3) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aini, l'image de T est évidente,

$$im(T) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et le noyau de T est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(T) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi, l'image et le noyau sont respectivement de dimensions 2 et 1.

d)

Par un théorème,

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2 \text{ surjective} \Longleftrightarrow \mathrm{im}(T) = \mathbb{P}_2$$

Or, la dimensions de $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ tandis que celle de $\dim(im(T)) = 2$, alors la transformation linéaire n'est pas surjective.