Université de Montréal

Fiche Solution

Analyse I

Julien Hébert-Doutreloux

April 19, 2020

4.10.5

a) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage $V(x_0, \delta)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $f(x) > \varepsilon$ pour tout $x \in D \cap V(x_0, \delta)$. *De même, pour $f(x_0) < 0$, montrer qu'il existe un voisinage $V(x_0, \delta)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que $f(x) < -\varepsilon$ pour tout $x \in D \cap V(x_0, \delta)$ (solution analogue).*

Solution

Remarquons les différents comportements d'une fonction continue dans un voisinage relativement proche de $f(x_0)$.

1. $\leftarrow\rightarrow$: Constant
2. $\nearrow\searrow$: Croissant-Décroissant
3. $\searrow\nearrow$: Décroissant-Croissant
4. $\searrow\searrow$: Décroissant-Décroissant
5. $\nearrow\nearrow$: Croissant-Croissant

Les cas 1 et 3 sont triviaux puisqu'il existe un petit voisinage tel que pour tout $f(x) \in f\big(V(x_0, \delta)\big), f(x) > 0$.
En particuliers, $f(x) > f(x_0)/2 = \varepsilon > 0$.
Pour les autres cas, le cas 2 se résout de manière similaire au cas 4 et au cas 5.

Sans perdre de généralité f Croissant-Décroissant et $f(x_0) > 0$

$$\begin{cases} \nearrow \implies \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0), x > y \implies f(y) > f(x) \\ \searrow \implies \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in D \cap (x_0, x_0 + \delta_2), x > y \implies f(y) < f(x) \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ on a,

$$V(x_0, \delta) \subset (x_0 - \delta_1, x_0) \cup \{x_0\} \cup (x_0, x_0 + \delta_2)$$

tel que f croît sur l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et décroît sur l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$.
Par le théorème de valeurs intermédiaire, $(f(x_0 - \delta) \neq f(x_0))$:

$$\forall y \in f([x_0 - \delta, x_0]), \exists c_1 \in (x_0 - \delta, x_0) : f(c_1) = y < f(x_0)$$

Ainsi, il existe une préimage c_1 (resp. c_2) tel que l'image est strictement supérieure à zero et strictement inférieure à $f(x_0)$, car la fonction croît (*resp. décroît*) sur l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0]$ (*resp.* $[x_0, x_0 + \delta]$) jusqu'à (*resp. de*) x_0 où la fonction est strictement positive. Donc, en redéfinissant $\delta = \min\{c_1, c_2\}$ on a

$$\forall x \in D \cap V(x_0, \delta), f(x) > \min\{f(c_1), f(c_2)\} = \varepsilon$$

b) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $h(r) = 0$ pour tout nombre rationnel r. Montrer que $h(x) = 0$ pour tout nombre réel x.

Solution

Puisque h est continue, alors pour toute suite $\{x_n\}$ qui converge vers x_0 avec $x_n \in \mathbb{R}$ pour chaque n, la suite $\{h(x_n)\}$ converge vers $h(x_0)$.
En particuliers, par la densité des nombre irrationnel (*resp. rationnel*) dans les réels.

$$\exists (y_n) \in \mathbb{Q}^C : \forall n \in \mathbb{N}, y_n \neq r, \lim_{n\to\infty} y_n = r$$

$$\exists (x_n) \in \mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq r, \lim_{n\to\infty} x_n = r$$

En supposant que $\lim_{n\to\infty} h(y_n) \neq 0$ on contredit la condition de continuité de h puisqu'il existerait deux suites (x_n) et (y_x) telles que $\lim_{n\to\infty} h(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} h(y_n)$. Pour que h soit une fonction continue, il est donc nécéssaire que la $\lim_{n\to\infty} h(y_n) = 0 = h(r)$ pour toute suite convergente.

c) Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre rationnel. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout nombre réel x.

Solution

En définissant la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, on se retrouve dans la situation de l'exercice précédant.

4.10.8

a) Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe un nombre $c \in [0, 2\pi]$ tel que $f(c) = f(c + \pi)$.

Solution

Considérons $h : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (thm. *algèbre de fonction continue*) définie par $h(x) = f(x) - f(x + \pi)$. Alors,

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - f(\pi) \\ h(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) \end{cases}$$

Par trichotomie des nombres réels,

$$h(0) > h(\pi) \quad (1)$$

$$h(0) = h(\pi) \quad (2)$$

$$h(0) < h(\pi) \quad (3)$$

Sachant que $h(0) + h(\pi) = 0$, alors de (1) et (3),

$$h(0)h(\pi) < 0$$

En particuliers, h étant continue sur $[0, \pi]$ et respectant : $h(0) \neq h(\pi)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [0, \pi] : 0 = h(c) = f(c) - f(c + \pi)$$

De (2), l'existence d'un $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = f(c + \pi)$ est triviale, $c = 0$ et/ou $c = \pi$.

4.8.1.2

a) Montrer que la fonction $f : (a,1) \longrightarrow \mathbb{R}, 0 < a < 1$ définie par $f(x) = 1/x$, est uniformément continue sur $(a,1)$.

Utilisons le fait que f est continue en tout point sauf en $x = 0$. Puisque $a > 0$, alors $(a,1) \subset [a/2,1] = E$.

Par un théorème toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. Ainsi, f est uniformément continue sur E et par conséquent l'est aussi sur $(a,1)$.

b) Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est uniformément continue sur $(0,\infty)$.

Par définition, f est uniformément continue sur E si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in (0,\infty)$ et $0 \leq |x-y| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f(y)\big| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \left|\frac{\delta(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|
\end{aligned}$$

Si $a \in (0,1), a^2 < a < 1 \implies a < 1 + a^2$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$.

Sinon, $a \in [1,\infty), 1 \leq a < a^2 \implies a < a^2 + 1$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$

En particuliers, $\forall a \in (0,\infty), \frac{a}{1+a^2} < 1$. Alors,

$$\delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| < 2\delta$$

En posant, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in (0,\infty), |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < 2\delta = \varepsilon$$

Donc, la fonction f est uniformément continue sur $(0,\infty)$.

3.8.11

Montrer que si $|r| < 1$, alors

$$\frac{1}{(1-r)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n$$

Solution

Remarquons que si $|r| \geq 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge.
Posons $A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$, qui est absolument convergente pour $|r| < 1$. En utilisant le théorème relatif au produit de Cauchy:

> Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ qui converge absolument et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ qui converge. Posons $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$. Le produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ converge vers $A \cdot B$

Supposons, $a_n = b_n = r^n$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est absolument convergente, alors elle est simplement convergente. Par définition du produit de Cauchy,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} r^k \cdot r^{n-k}$$

Par un changement d'indice,

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n+1} r^{k-1} \cdot r^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} r^n \\ &= (n+1)r^n \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)r^n = A \cdot B = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\right)^2 = \frac{1}{(1-r)^2}$$

3.8.14

Montrer par un contre-exemple que le développement décimal d'un nombre réel n'est pas unique.

Solution

Soit le développement de 1 comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9 * 10^n} \longrightarrow 1 \quad et \quad 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{10^n} \longrightarrow 1$$

4.8.10.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

Considérons la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x) - x$. Ainsi,

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - 0 \implies 0 \leq h(0) \leq 1 \\ h(1) = f(1) - 1 \implies -1 \leq h(1) \leq 0 \end{cases}$$

En particuliers, si $h(1) < 0 < h(0)$, par le théorème des valeurs intémédiaires,

$$0 \in [f(1), f(0)], \exists c \in [0,1] : h(c) = f(c) - c = 0$$

Pour les cas $h(0) = 0$ et/ou $h(1) = 0$, alors la valeur de c est /vidente (0 et/ou 1)

4.8.13.

Soit une fonction continue $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonction bornées et uniformément continues. Montrer que la fonction produit (usuel) $f \cdot g$ est aussi uniformément continue. Est-ce toujours vras si les fonctions sont non-bornées.

Solution

Par hypothèse que f et g sont bornées :

$$\exists M_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D, \big|f(x)\big| \leq M_1 \tag{4}$$
$$\exists M_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in D, \big|g(x)\big| \leq M_2 \tag{5}$$

Par hypothèse que f et g sont sont uniformément continues :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in D, |x-y| < \delta_1 \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon_1 \tag{6}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in D, |x-y| < \delta_2 \implies \big|g(x) - g(y)\big| < \varepsilon_2 \tag{7}$$

Considérons la fonction continue (*thm* sur produit de fonction continu) $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x)g(x)$. Montrons que h est uniformément continue:

Définissons $M = \max\{M_1, M_2\}$ et considérons $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 := \frac{\epsilon}{2M}$

$$\begin{aligned}\big|h(x) - h(y)\big| &= \big|f(x)g(x) - f(y)g(y)\big| \\ &= \big|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)\big| \\ &= \big|f(x)\big(g(x) - g(y)\big) + g(y)\big(f(x) - f(y)\big)\big|\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}&\leq \big|f(x)\big(g(x) - g(y)\big)\big| + \big|g(y)\big(f(x) - f(y)\big)\big| \\ &= \big|f(x)\big| \cdot \big|\big(g(x) - g(y)\big)\big| + \big|g(y)\big| \cdot \big|\big(f(x) - f(y)\big)\big|\end{aligned}$$

Par (1) et (2),

$$\leq M_1 \cdot \big|\big(g(x) - g(y)\big)\big| + M_2 \cdot \big|\big(f(x) - f(y)\big)\big|$$

Par (3) et (4),

$$\begin{aligned}&< M_1 \cdot \varepsilon_2 + M_2 \cdot \varepsilon_1 \\ &< 2M(\frac{\epsilon}{2M}) = \epsilon\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction h satisfait la définition de continuité uniforme,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_{(\epsilon)} > 0 : \forall x, y \in D, |x-y| < \delta \implies \big|h(x) - h(y)\big| < \epsilon$$

Ce n'est pas toutes les fonctions continues qui par le produit avec une autre fonction continue sont uniformément continues. Le carré de la fonction identité en est un exemple (contre-exemple).

4.8.14.

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est dit *lipschitzienne* s'il existe un nomber réel $K > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer qu'une telle fonction est uniformément continue sur I, Toutes les fonctions uniformément continues sur I sont-elles lipschitziennes ?

Solution

Puisque $K > 0$ est un nombre fixe et $|x - y| < \delta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq K\delta$$

Posons $\varepsilon = K\delta$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in I, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

La réciproque est généralement fausse $(e.g\ f(x) := \sqrt{x})$

4.8.15.

Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

est uniformément continue sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

Solution

Par définition, f est uniformément continue sur E si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$$

Soit $x, y \in (0, \infty)$ et $0 \leq |x-y| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f(y)\big| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x^2-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \left|\frac{\delta(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\
&\leq \delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|
\end{aligned}$$

Si $a \in (0,1), a^2 < a < 1 \implies a < 1 + a^2$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$.

Sinon, $a \in [1, \infty), 1 \leq a < a^2 \implies a < a^2 + 1$. Ainsi, $\frac{a}{1+a^2} < 1$

En particuliers, $\forall a \in (0, \infty), \frac{a}{1+a^2} < 1$. Alors,

$$\delta\left|\frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| < 2\delta$$

En posant, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 : \forall x, y \in (0, \infty), |x-y| < \delta \implies \big|f(x) - f(y)\big| < 2\delta = \varepsilon$$

Donc, la fonction f est uniformément continue sur $(0, \infty)$.

4.8.17.

Un véhicul se rend en une heure d'une point A à un point B distants de $D > 0$ kilomètres. En faisant les hypothèses nécessaires, montrer qu'il existe deux points du trajet distants de $D/2$ kilomètres où le véhicule passe a une demie-heure d'intervalle. *Suggestion* : Considérer $d(s)$ la distance parcourue du temps 0 au temps $s \in [0, 1]$ et définir

$$h(t) = d(t + 1/2) - d(t) - D/2$$

Solution

Puisque h dépend du temps, alors elle est par hypothèse continue (la téléportation est impossible).

$$\begin{cases} h(0) = d(0 + 1/2) - d(0) - D/2 = d(1/2) - D/2 \\ h(1/2) = d(1/2 + 1/2) - d(1/2) - D/2 = D/2 - d(1/2) \end{cases}$$

Par trichotomie des nombres réels,

$$h(0) > h(1/2) \tag{8}$$
$$h(0) = h(1/2) \tag{9}$$
$$h(0) < h(1/2) \tag{10}$$

Sachant que $h(0) + h(1/2) = 0$, alors de (1) et (3),

$$h(0)h(1/2) < 0$$

En particuliers, h étant continue sur $[0, 1/2]$ et respectant : $h(0) \neq h(1/2)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists c \in [0, 1/2] : 0 = h(c) = d(c + 1/2) - d(c) - D/2$$

De (2), l'existence d'un $c \in [0, 1/2]$ tel que $h(c) = h(c + 1/2)$ est triviale, $c = 0$ et/ou $c = 1/2$.

4.8.20.

Soit une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow [m, M]$ avec $[a, b] \subseteq [m, M]$, où on définit $[a, b] : m = \inf\{f : x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f : x \in [a, b]\}$ pour $-\infty < a < b < +\infty$. Montrer qu'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

En supposant que $a \neq b$,

$$[a, b] \subseteq [m, M] \implies m \leq a < b \leq M \tag{11}$$

De même, par le codomaine de f on a pour tout $x \in [a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M \tag{12}$$

Par la continuité de f si $m = \inf\{f : x \in [a, b]\}$, alors il existe un point α de $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$ et respectivement si $M = \sup\{f : x \in [a, b]\}$, alors il existe un point β de $[a, b]$ tel que $f(\beta) = M$.
Considérons la fonction $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = f(x) - x$. Sans perdre de généralité posons $\alpha < \beta$

$$\begin{cases} h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = m - \alpha \leq m - a \leq 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - \beta = M - \beta \geq M - b \geq 0 \end{cases}$$

En particuliers, $h(\alpha)h(\beta) < 0$ puisque $h(\alpha) < 0 < h(\beta)$, alors par le théorème des valeurs absolue,

$$0 \in [h(\alpha), h(\beta)], \exists c \in [a, b] : h(c) = f(c) - c = 0$$

Les cas $h(\alpha) = 0$ et $h(\beta) = 0$ sont évident ($c = m$ ou $c = M$).

4.8.8.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < +\infty$, une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = 0$.

Solution

Remarquons que $f(a) \neq 0 \neq f(b)$ puisque $f(a)f(b) < 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\forall y \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a, b) : f(c) = y$$

5.9.14.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction constante.

Solution

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 &\implies 0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \\
&\implies 0 \leq \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{x \to y} |x - y| = 0 \\
&\implies 0 \leq \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 0
\end{aligned}$$

Par trichotomie, la dérivée en tout point est nulle, par conséquent la primitive est une fonction constante.

5.9.16.

Évaluer la limite suivante:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

où $e^x = \exp(x)$ pour tout nombre réel x.

Solution

Soit les fonction $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions lisses sur l'intervalle $I = (-\pi/2, -\pi/2)$ respectivement définie par $f(x) = e^x - e^{\sin x}$ et par $g(x) = x - \sin x$. Par continuité, $f(0) \implies \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et similairement pour $g(x)$. Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right] \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Par la règle de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \stackrel{?}{=} L$$

Ainsi, les dérivées tertiaires sont $f'''(x) = e^x - e^{\sin(x)}\cos^3(x) + e^{\sin(x)}\cos(x) + 3e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)$ et $g'''(x) = \cos(x)$ tels que leurs primitive (de même pour les primitives de leurs primitves "primitive seconde") évalué $x = 0$ étaient nulles d'où l'utilisation triples de la règle de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}\cos^3(x) + e^{\sin(x)}\cos(x) + 3e^{\sin(x)}\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)} = 0$$

La limite du quotient est donc nulle.

5.9.17.

Un développement limité de Taylor est utile pour approcher une valeur prise par une fonction qui n'est pas un polynôme. En utilisant la méthode présentée dans les notes de cours pour approcher le nombre d'Euler e, calculer une valeur approchée de $sin(1)$ avec une erreur inférieure à 10^{-5}.

Solution

Soit $f(x) = \sin(x)$ une fonction $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Approximons $\sin(1)$ avec une erreur $R(1) < 10^{-5}$. Le terme d'erreur est déterminer par le reste de Lagrange (McLaurin) :

$$R_n(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

Puisque $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$, alors $f^{(n+1)}(1) < 1$. Négligeons $(x - x_0)^{n+1}$, alors

$$R_n(1) < \frac{1}{(n+1)!} \implies R_8(1) < \frac{1}{9!} < \frac{1}{10^5}$$

La formule de Taylor (McLaurin),

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x)^k$$

Ainsi, à l'ordre $n = 8$ l'approxiamtion de $\sin 1$ est:

$$f(1) = \sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!}$$

5.9.21.

Déterminer, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$$

sur tout $x \in \mathbb{R}$

Solution

Par la valeur absolue,

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^3)^{-1} & \text{si } x < 0 \\ (1+x^3)^{-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi, la dérivée de f est,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2(1-x^3)^{-2} & \text{si } x < 0 \\ -3x^2(1+x^3)^{-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La dérivé existe car

$$0 = \lim_{x \to 0^-} 3x^2(1-x^3)^{-2} = \lim_{x \to 0} -3x^2(1-x^3)^{-2} = 0$$

5.9.26.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert qui contient $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in (0, 1)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

Solution

Posons O l'intervalle ouvert tel que $[0, 1] \subsetneq O$, alors Puisque f est différentiable sur O, $f(0) = 0$ et que $f'(0) = f(1)$, alors,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f(1) \in \mathbb{R}$$

Par consèquent, la fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \in (0, 1], \\ f(1) & x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0, 1]$ car préalablement continue sur $(0, 1]$ et

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = f(1) = g(0)$$

Donc continue en $x = 0$. La fonction g est aussi diffèrentiable sur l'ouvert $(0, 1)$ car sur $(0, 1)$

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)$$

un quotient de fonction continue différentiable sur $(0, 1)$.

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)/x - g(0)}{x - 0} = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)/x - f(1)}{\lim_{x\to 0} x - 0} = \frac{0}{\lim_{x\to 0} x - 0} = 0$$

Par le théorème des accroissement finis,

$$\exists c \in (0, 1) : g'(c) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{g(1) - g(0)}{1} = \frac{f(1)/1 - f(1)}{1} = 0$$

Puisque $c \in (0, 1)$, alors $c > 0$ donc,

$$g'(c) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{x}\Big)\Big|_{x=c} = \frac{f'(c)}{c} - \frac{f(c)}{c^2} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

5.9.29.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et dérivable deux fois sur (a, b) telle que $f^{(2)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Montrer qu'on a $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

Solution

Supposons le contraire. Soit il existe un point $d \in (a, b) : f(d) = 0$. Alors, par le théorème de Rolle,

$$\exists c_1 \in (a, d), \exists c_2 \in (d, b) : \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = f'(c_1) = 0 \text{ et } \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f(c_2) = 0$$

Puisque f est $C^2(1, b)$ et que $f(c_1) = f(c_2) = 0$, alors par le théorème de Rolle,

$$\exists c_3 \in (c_1, c_2) : \frac{f'(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = f''(c_3) = 0$$

Or cela contredit que $f^{(2)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$ puisqu'il existe un point $c_3 \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$ telle que la dérivée seconde est nulle. Donc, il n'existe pas de point $d \in (a, b)$ tel que $f(d) = 0$

5.9.7.

Soit une fonction $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur l'intervalle (a, b) pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que si la dérivée f' est bornée, alors f est uniformément continue.

Solution

Alternative

Soit $x, y \in (a, b)$ telle que sans perdre de généralité $x < y$. Par le théorème de la moyenne,

$$\exists c \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{x - y} = f'(c)$$

Par hypothèse, $\exists M \in \mathbb{R}_{>0} : \forall z \in (a, b), |f'(z)| < M$, alors

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| < M$$

En particuliers, la fonction est lipschitzienne,

$$\forall x, y \in (a, b), |f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Par conséquent, la fonction est uniformément continue.

5.9.8.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) pour $-\infty < a < b < +\infty$, telle que $|f'(x)| < 1$ pour tout $x \in (a, b)$. Montrer qu'il existe un seul point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Solution

Considérons la fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur les mêmes intervalle que f et définie par $g(x) = f(x) - x$. Puisque $a \leq f(x) \leq b$,

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$0 \in \mathbb{R}, \exists c \in [a, b] : g(c) = f(c) - c = 0$$

Montrons l'unicité du point vérifiant l'égalité ci-dessus.

$$g(x) = f(x) - x \implies g'(x) = f'(x) - 1$$

Par hypothèse, $|f'(x)| < 1$, alors $g'(x) < 1 - 1 = 0$ pour tout $x \in (a, b)$. En particuliers, la vitesse d'accroissement de g est strictement négative donc la fonction se doit d'être injective (donc bijective sur son image) sur l'intervalle $[a, b]$ sans quoi il existerait deux point ayant la même image et donc par le théorème de Rolle un point e où la dérivé de g en ce point serai nulle, il y aurai ainsi une contradiction.

Question 1

Déterminer si les séries suivantes convergent et justifier.

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-\pi}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

a) Solution

Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2/\sqrt[3]{n}-4}$ qui converge par le critère de Riemann (la *p-series* avec $3/2 = p > 1$). Par comparaison,

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2-\pi} \leq \frac{1}{2/\sqrt[3]{n}-4} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-\pi} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2/\sqrt[3]{n}-4}$$

la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-\pi}$ converge.

b) Solution

Par le critère de D'Alembert,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n^n}{(n+1)^n} \right| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{(n+1)} \right|^n \longrightarrow \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

la série converge absolument.

Question 2

Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ est uniformément continue.

Solution

Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}$ (sans quoi elle ne peut pas être uniformément continue). Remarquons aussi que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\frac{x}{(1 + x^2)^2}$$

Par une suite d'inégalité,

$$-2 < -2\frac{(1 + x)^2}{(1 + x^2)^2} < -\frac{2x}{(1 + x^2)} < 2\frac{(1 + x)^2}{(1 + x^2)^2} < 2$$

la $|f'(x)| \leq 2$
Par un exercice,

***

5.9.7.

Soit une fonction $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est dérivable sur l'intervalle (a, b) pour $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que si la dérivée f' est bornée, alors f est uniformément continue.

Solution

Alternative

Soit $x, y \in (a, b)$ telle que sans perdre de généralité $x < y$. Par le théorème de la moyenne,

$$\exists c \in (x, y) : \frac{f(y) - f(x)}{x - y} = f'(c)$$

Par hypothèse, $\exists M \in \mathbb{R}_{>0} : \forall z \in (a, b), |f'(z)| < M$, alors

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| < M$$

En particuliers, la fonction est lipschitzienne,

$$\forall x, y \in (a, b), |f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Par conséquent, la fonction est uniformément continue.

***

La fonction f est uniformément continue.

Question 3

Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2\pi)$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c) = f(c + \pi)$

Solution

Considérons la fonction $h : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $h(x) = f(x) - f(x + \pi)$ telle que

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - f(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) \\ h(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) \end{cases}$$

Par trichotomie, $\begin{cases} f(0) - f(\pi) < 0 & (1) \\ f(0) - f(\pi) = 0 & (2) \\ f(0) - f(\pi) > 0 & (3) \end{cases}$, le cas (2) est évident ($c = 0$ ou $c = \pi$). Pour le cas (1), on a que $h(0) = f(0) - f(\pi) < 0 \implies h(\pi) = -h(0) > 0$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaire,

$$\exists c \in (0, \pi) : h(c) = f(c) - f(c + \pi) = 0 \implies f(c) = f(c + \pi)$$

Similairement pour le cas (2). Ce qui conclut la preuve.

Question 2

Soit une fonction $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2}$$

pour $-1 < x < 1$. Déterminer:

a) le valeurs de $f(x)$ en $x = -1, 1$ pour que f soit continue en ces points

b) les points $x \in (-1, 1)$ où $|f|$ est dérivable

a) Solution

Si f est continue en $x = \pm 1$, alors

$$\lim_{x \to \pm 1} f(x) = f(\lim_{x \to \pm 1} x) = f(\pm 1)$$

Ainsi la limite pour $x = -1$ est

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(\pi x)}{1 - x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Par la règle de L'Hospital (en posant $h(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = 1 - x^2$),

$$\lim_{x \to -1} \frac{h(x)}{g(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x \to -1} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{\pi \cos(\pi x)}{2x} = -\frac{\pi}{2}$$

Et similairement en $x = 1$ où la limite est $\frac{\pi}{2}$. Ainsi les valeurs pour que f soit continue en $x = \pm 1$ sont $\pm \frac{\pi}{2}$.

b) Solution

Puisque $\forall x \in (-1, 1), 1 - x^2 > 0$, alors la fonction $|f|$ s'exprime par

$$|f|(x) = \begin{cases} \frac{-sin(\pi x)}{1-x^2} & x \in (-1, 0) \\ \frac{sin(\pi x)}{1-x^2} & x \in [0, -1) \end{cases}$$

Cette fonction est respectivement différentiable sur ses parties, le seul points problématique est en $x = 0$.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0^-} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-\sin(\pi x)}{1-x^2} - 0}{x - 0} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Par la règle de L'Hospital, on trouve que la limite est $-\pi$. De manière analogue on trouve la limite lorsque $x \to 0^+$, mais cette dernière diffère puisqu'elle tends vers π. Ainsi, puisqu'il y a deux limites diffèrentes, la fonction n'est pas différentiable en $x = 0$, mais l'est en tout autre point de l'intveralle $(-1, 1)$.

Question 3

Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $(0,1)$ qui sont telles que $g(0) \neq f(0) = 0$ et $f(1) \neq g(1) = 0$. Montrer qu'il existe des nombres $c, d \in (0,1)$ tels que

a) $f(c) = g(c)$

b) $f'(d)g(d) = -f(d)g'(d)$

a) Solution

Considérons la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction défini par

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

On a

$$\begin{cases} h(0) = f(0) - g(0) = -g(0) \leq 0 \\ h(1) = f(1) - g(1) = f(1) \geq 0 \end{cases}$$

Puisque f et g sont des fonctions continues sur $[0,1]$ et différentiable sur $(0,1)$, alors il en est de même pour h. Dans les cas où $h(0) = 0$ ou $h(1) = 0$ sont par hypothèse pas possible. Sinon, par le théorème de valeurs

$$h(0)h(1) < 0 \implies \exists c \in (0,1) : h(c) = f(c) - h(c)$$

b) Solution

Considérons la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$h(x) = f(x)g(x)$$

Puisque f et g sont des fonctions continues sur $[0,1]$ et différentiable sur $(0,1)$, alors il en est de même pour h. Par le théorème de Rolle,

$$h(0) = h(1) = 0 \implies \exists d \in (0,1) : \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(d) = 0$$

Ainsi, par les régles de dérivée en chaines,

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Donc, $h'(d) = 0 \implies f'(d)g(d) = -f(d)g'(d)$