Exemple 1.2.5

Combien de codes alphanumériques (formés de chiffres et de lettres) de longueur 3 peut-on former si les répétitions ne sont pas permises ?

Solution

```
Permutations[{"L","L","L","C","C","C"},{3,3}];
%//TableForm
L L L
L L C
L C L
L C C
C L L
C L C
C C L
C C C
```

$$\begin{array}{r} 26\cdot25\cdot24 \\ 26\cdot25\cdot10 \\ 26\cdot10\cdot25 \\ 26\cdot10\cdot\ 9 \\ +\ 10\cdot26\cdot25 \\ 10\cdot26\cdot\ 9 \\ 10\cdot\ 9\cdot26 \\ 10\cdot\ 9\cdot\ 8 \\ \hline 42\,840 \end{array}$$

Exemple 1.3.8

Trouvez le nombre d'anagrammes du mot *PATATAS*.

Solution

```
In[44]:= Characters["PATATAS"];
m= Permutations[%];
%[[1;;5]]// TableForm
Length[m]
Out[46]//TableForm=
P A T A T A S
P A T A T S A
P A T A A T S
P A T A A S T
P A T A S T A
Out[47]= 420
```

Soit $P\,A_1\,T_1\,A_2\,T_3\,A_3\,S$ une chaîne de 7 caractères dont ayant trois A, deux T, un P et un S. Par le théorème 1.3.7,

$$\text{nombre d'anagrame} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420$$

Exemple 1.3.9

M. Jones va disposer 11 livres différents sur un rayon de sa bibliothèque. Cinq d'entre eux sont des livres de mathématiques, quatre de chimie et deux de physique. Les livres traitant du même sujet sont indiscernables.

Solution

```
livre={{M,M,M,M,M},
{C,C,C,C},
{P,P}};
Multinomial[5,4,2]
Out[51]= 6930
ReplacePart[livre,1->M];
Flatten[%];
m=Permutations[%];
%[[5;;10]]//TableForm
Out[188]//TableForm=
M C C P C P C
M C C P P C C
M C P C C C P
M C P C C P C
M C P C P C C
M C P P C C C
Length[m]
Out[189]= 105
```

Soit M_a, C_b, P_c tels que $a = 1, \cdots 5$, $b = 1, \cdots, 4$ et $c = 1, 2$. En considérant le groupe de livre de mathématique comme un seul livre, alors par le théorème 1.3.7 il y a ,

$$\frac{7!}{1! \cdot 4! \cdot 2!} = 165$$

arrangements possibles. Il y a sinon 6930 arrangement sans tenir compte du groupe de livre de mathématique.

Exemple 1.4.3

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ?

Solution

```
Binomial[7, 3]*Binomial[5, 2]
350
```

Soit 3 hommes parmis 7 et soit 2 femmes 5, par le principe de multiplication il y a

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$$

arrangements possibles.

Exemple 1.5.4

Combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble à 3 éléments ? Répondez à la question en donnant la liste des sous-ensembles de l'ensemble $A = \{a, b, c\}$.

Solution

```
In[305]:= A=Characters["abc"];
Subsets[A]//TableForm
Length[%]
Out[306]//TableForm=
a
b
c
a b
a c
b c
a b c
Out[307]= 8
```

L'ensemble des parties de l'ensemble A est

{}		
a		
b		
c		
a	b	
a	c	
b	c	
a	b	c

Il y en a 8. Avec r objet parmis 3 pour $r = 0, 1, 2, 3$, la formule du binôme le retrouve ce résultat.

$$\sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

Exemple 1.6.3

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = \sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=2}} \binom{2}{n_1,n_2,n_3} x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$$

Solution

```
In[122]:=
triplet={n1,n2,n3}
    triplet /.FindInstance[
              Total[triplet]==2,triplet,
              NonNegativeIntegers,10
              ]//TableForm
P = x1 + x2 + x3
ExpandAll[P^2]
Out[123]//TableForm=
0 0 2
0 1 1
0 2 0
1 0 1
1 1 0
2 0 0
Out[124]= x1^2 + 2x2x1 + 2x3x1 + x2^2 + x3^2 + 2x2x3
```

Par la formule,

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n &= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\cdots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \left\{\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n_1}}{(n_i)!}\right\}\\ &= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\cdots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \left\{n \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i^{n_1}}{(n_i)!}\right\}\end{aligned}$$

Considérons le tableau suivant où chaque ligne sont les solutions possibles tels que $n_1+n_2+n_3=2$

n_1	n_2	n_3
0	0	2
0	1	1
0	2	0
1	0	1
1	1	0
2	0	0

Appliquons la formule ci-dessus,

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2 = \quad & 2\left(\frac{x_1^0}{0!}\cdot\frac{x_2^0}{0!}\cdot\frac{x_3^2}{2!}\right)\\ &+2\left(\frac{x_1^0}{1!}\cdot\frac{x_2^1}{1!}\cdot\frac{x_3^1}{1!}\right)\\ &+2\left(\frac{x_1^0}{0!}\cdot\frac{x_2^2}{2!}\cdot\frac{x_3^0}{0!}\right)\\ &+2\left(\frac{x_1^1}{1!}\cdot\frac{x_2^0}{0!}\cdot\frac{x_3^1}{1!}\right)\\ &+2\left(\frac{x_1^1}{1!}\cdot\frac{x_2^1}{1!}\cdot\frac{x_3^0}{0!}\right)\\ &+2\left(\frac{x_1^2}{2!}\cdot\frac{x_2^0}{0!}\cdot\frac{x_3^0}{0!}\right)\\ =\ & x_1^2+2x_2x_1+2x_3x_1+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1

Trouver une expression simple pour les événements suivants;

a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^C)$

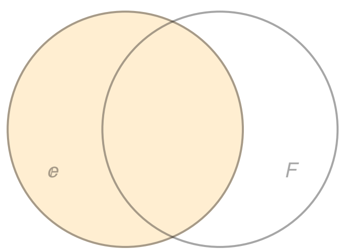
b) $(E \cap F) \cup (E \cap F^C)$

c) $(E \cup F) \cup (E \cup F^C)$

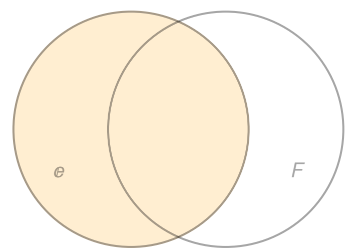
d) $(E \cap F) \cap (E \cap F^C)$

Solution

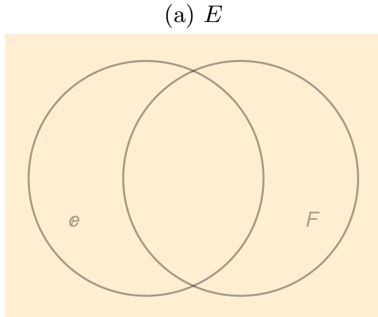
```
statement={
   "(E||F) && (E||\[Not]F)",
   "(E&&F) || (E&&\[Not]F)",
   "(E||F) || (E||\[Not]F)",
   "(E&&F) && (E&&\[Not]F)"}
For[i=1,i<=Length[statement],i++,Print[
WolframAlpha["Venn diagram "<>statement[[i]],
   IncludePods->"VennDiagram",
   AppearanceElements->{"Pods"},
   TimeConstraint->{20,Automatic,Automatic,Automatic},
   PodStates->{"MinimalForms__Text notation","MinimalForms__More"}]
   ]
  ]
```



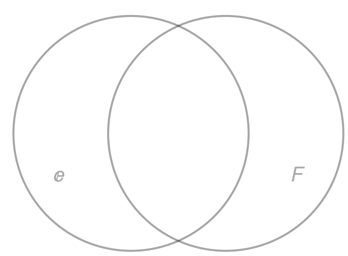
(a) E



(b) E



(c) S



(d) $\emptyset$

Diagramme de Venn