



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FICHE RÉCAPITULATIVE

Calcul I

Julien Hébert-Doutreloux

April 21, 2020

Contents

1	Les dérivées des fonctions de plusieurs variables	2
1.1	Les dérivées partielles	2
1.2	Les plans tangents et approximations linéaires	2
1.3	La règle de dérivation en chaîne	2
1.4	Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient	2
1.5	Les approximations de Taylor en deux variables	3
2	L'optimisation	3
2.1	Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables	3
2.2	L'optimisation des fonctions de plusieurs variables	4
2.3	Les multiplicateurs de Lagrange	4
2.3.1	Les fonctions de plus de deux variables	4
3	Les intégrales doubles	5
3.1	Les intégrales doubles sur des domaines généraux	5
3.2	Système de coordonnée	5
3.3	Les intégrales doubles en coordonnées polaires	6
4	Les intégrales triples	6
4.1	Les intégrales triples	6
4.2	Les intégrales triples en coordonnées cylindriques	7
4.3	Les intégrales triples en coordonnées sphériques	7
5	Code Mathematica	7
	Index	9

1 Les dérivées des fonctions de plusieurs variables

1.1 Les dérivées partielles

Théorème 1. [Clairaut] Soit une fonction f définie sur un disque D qui contient le point (a, b) . Si les fonction f_{xy} et f_{yx} sont continues sur D , alors

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

■

Gives the multiple partial derivative $D[f, \{x, n\}, \{y, m\}, \dots]$

■

1.2 Les plans tangents et approximations linéaires

Les plans tangents

Définition 1. Si f possède des dérivées partielles continues, alors l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $P(x_0, y_0, z_0)$ est

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Les approximations linéaires

Définition 2. La fonction linéaire dont le graph est ce plan tangent, à savoir

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

est appelée **linéarisation** de f en $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, et l'approximation

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{c}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{c})(x_i - c_i)$$

est appelée **approximation linéaire** de f en \vec{c} . La différentielle est

$$dw = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i$$

Théorème 2. Si les dérivées partielles f_x et f_y existent près de (a, b) et sont continues en (a, b) , alors f est différentiable en (a, b) .

1.3 La règle de dérivation en chaîne

Théorème 3 (Règle de dérivation en chaîne). Si u est une fonction différentiable de n variables x_1, x_2, \dots, x_n , et si chaque x_j est une fonction différentiable des m variables t_1, t_2, \dots, t_m , alors u est une fonction différentiable de t_1, t_2, \dots, t_m et

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

1.4 Les dérivées directionnelles et le vecteur gradient

Les dérivées directionnelles

Définition 3. La **dérivée directionnelle** (si la limite existe) de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u} = (a, b, c)$ en (x_0, y_0, z_0) est

$$f_{\vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

Définition 4. Le **vecteur gradient**, noté ∇f ou $\text{grad } f$, d'une fonction à n variables est

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

D'où la dérivée dans la direction \vec{u} , un vecteur unitaire, est

$$f_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u}$$

■ Gradient of a scalar function $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n) : \text{Grad}[f, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}]$ ou $D[f[x, y, \dots], \{\{x, y, \dots\}\}]$ ■

Les plans tangents aux surfaces de niveau

Définition 5. Soit une surface S d'équation $F(x, y, z) = k$ et $P(x_0, y_0, z_0)$, un point de S . Si $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, alors le **plan tangent à la surface de niveau** $F(x, y, z) = k$ en P est

$$\nabla F(P) \bullet (\vec{x} - P) = 0$$

Proposition 1. Soit f une fonction différentiable de n variables, et \vec{x} un point de \mathbb{R}^n . Alors,

- la dérivée directionnelle de f en \vec{x} est maximale dans la direction du gradient $\nabla f(\vec{x})$
- la taux de variation maximal de f en \vec{x} est $\|\nabla f(\vec{x})\|$
- si $\vec{u} \perp \nabla f(\vec{x})$, alors la $\nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{u} = 0$
- le gradient $\nabla f(\vec{x})$ est perpendiculaire à l'ensemble de niveau de f passant par \vec{x}

Proposition 2.

- Le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ indique la direction (possiblement, non unitaire) dans laquelle la fonction $f(x, y)$ a le plus grand taux de variation en (x_0, y_0) .
- La taux maximal vaut : $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$
- $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ est la direction perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau qui passe par (x_0, y_0)

1.5 Les approximations de Taylor en deux variables

Définition 6. [Polynôme de Taylor de degré 1 de f en (a, b)]

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Définition 7. [Polynôme de Taylor de degré 2 de f en (a, b)]

$$Q(x, y) = L(x, y) + \frac{1}{2!} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2!} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

2 L'optimisation

2.1 Les valeurs extrêmes des fonctions de deux variables

Définition 8. (Matrice Hessienne) La matrice Hessienne d'une fonction f à n variables est la matrice carrée d'ordre n notée $\nabla^2 f$ telle que l'élément $(\nabla^2 f)_{ij} = f_{x_i x_j}$:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

■ La matrice Hessienne : `MatrixForm[D[f[x, y, ...], {{x, y, ...}}, {{x, y, ...}}]]` ■

Définition 9. [Point critique] Soit f une fonction à n variables et $P = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, un point. Le point P est un point critique si $\nabla f(P) = \vec{0}$.

Théorème 4. [Test des dérivées premières] Si f possède un maximum (resp. minimum) local en (a, b) et si les dérivées partielles du premiers ordre de f existent, alors $\nabla f(a, b) = \vec{0}$.

Les maximums et minimum absolus

Théorème 5. [Bornes atteintes] Si f est continu sur un compact K , alors f atteint son maximum (resp. son minimum) absolu en au moins un point de K . Autrement dit,

$$\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : f(\vec{x}_1) = \inf_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\} \quad \text{et} \quad f(\vec{x}_2) = \sup_{\vec{x} \in K} \{f(\vec{x})\}$$

2.2 L'optimisation des fonctions de plusieurs variables

Définition 10. Un point critique \vec{a} est un point de selle de la fonction f si, dans toute boule ouverte $B_\varepsilon(\vec{a})$, il existe des points \vec{x}_1 et \vec{x}_2 tels que $f(\vec{x}_1) < f(\vec{a}) < f(\vec{x}_2)$.

Le signe d'une matrice

Théorème 6. [Critère de Sylvester] Soit A une matrice symétrique inversible

- Si $\alpha_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, alors A est définie positive.
- Si $\beta_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$, alors A est définie négative.

■ Calculer les mineurs principaux d'une matrice :

```
submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice][[1 ;; d, 1 ;; d]]
mineur[matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
{x, y, z} = {0, 1, 2}
For[i = 1, i < 4, i++, Print[mineur[matrice, i]]]
```

où d le numéro de la colonne du i ème élément de la diagonale principale. ■

Théorème 7. Conditions suffisantes du deuxième ordre pour un problème d'optimisation sans contraintes

- si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est définie positive (resp. négative), alors f possède un minimum (resp. un maximum) local en \vec{a} .
- si $\nabla^2 f(\vec{a})$ est indéfini alors \vec{a} est un point de selle de f

■ Exemple de résolution pour trouver les points critique ;

```
F[x_, y_, z_] := x^3 - x y + y^2 + z^2
gradient = Grad[F[x, y, z], {x, y, z}]
Solve[Resolve[{gradient == mu Grad[x x + y y + z z, {x, y, z}] &&
  x x + y y + z z == 1}, {mu, x, y, z}, Reals]]
```

■

2.3 Les multiplicateurs de Lagrange

2.3.1 Les fonctions de plus de deux variables

Théorème 8.

a) Résoudre le système de $m + n$ équations à $m + n$ inconnues

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) &= k_1 \\ g_2(\vec{x}) &= k_2 \\ &\vdots \\ g_m(\vec{x}) &= k_m \end{aligned}$$

b) Évaluer la fonction f en tous les points critiques trouvés à l'étape a) pour déterminer la nature de ses points (minimum ou maximum)

Théorème 9. Si f est continue sur un domaine S compact dans \mathbb{R}^n , alors f admet un minimum absolu et un maximum absolu et des points \vec{x}_1 et \vec{x}_2 de S .

$$\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S : \inf_{\vec{x} \in S} f = f(\vec{x}_1) \quad \text{et} \quad \sup_{\vec{x} \in S} f = f(\vec{x}_2)$$

3 Les intégrales doubles

Définition 11. Si $f(x, y) \geq 0$, alors le volume V du solide au-dessus du rectangle R et sous la surface $z = f(x, y)$ est

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Définition 12. Selon l'ordre d'intégration, les intégrales itérées sont ;

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Théorème 10. Si f est continue sur le rectangle $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Si on suppose que f est bornée sur R , que f est discontinue sur un nombre fini de courbes lisses et que les intégrales itérées existent.

3.1 Les intégrales doubles sur des domaines généraux

Définition 13. Si f est continue sur une région D de type I,

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Définition 14. Si f est continue sur une région D de type II,

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Proposition 3. Si on intègre la fonction constante $f(x, y) = 1$ sur une région D , on obtient l'aire de D , car le volume sous $f(x, y) = 1$ au-dessus de D est égal à l'aire de D ;

$$\iint_D 1 dA = A(D)$$

3.2 Système de coordonnées

Définition 15. Le passage du système cartésien au système polaire est donné par les relations suivantes;

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Définition 16. Le passage du système cartésien au système cylindrique est donné par les relations suivantes;

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

Définition 17. Le passage du système cartésien au système sphérique est donné par les relations suivantes;

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

3.3 Les intégrales doubles en coordonnées polaires

Définition 18. Si f est continue sur un rectangle polaire R défini par $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Si f est continue sur région polaire de la forme

$$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

4 Les intégrales triples

4.1 Les intégrales triples

Théorème 11. Si f est continue sur le rectangle $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, alors

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Définition 19. Une région solide E est dite de type 1 si elle est située entre les graphes de deux fonctions continues de x et y ,

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Définition 20. Si la projection D de E dans le plan xy est une région de type I, alors

$$E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Définition 21. Si D est une région de type II, alors

$$E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Définition 22. Une région solide E est de type 2 si elle est de la forme

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

Définition 23. Une région solide E est de type 3 si elle est de la forme

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Proposition 4. Soit la fonction $f(x, y, z) = 1$ pour tout points de E , alors l'intégrale triple représente le volume de E ,

$$V(E) = \iiint_E dV$$

4.2 Les intégrales triples en coordonnées cylindriques

Définition 24.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{u_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dx dr d\theta$$

4.3 Les intégrales triples en coordonnées sphériques

Définition 25.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Aussi,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta, \phi)}^{g_2(\theta, \phi)} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

où E est un coin sphérique défini par

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

5 Code Mathematica

Méthode pour trouver et déterminer les extremums locaux d'une fonction à plusieurs variables.

```
Quit[]
(*Trouvez les maximums locaux, les minimums locaux et
les points de selle de la fonction. Si vous disposez d'un logiciel
le permettant, tracez le graphe de la fonction en choisissant un
domaine et un point de vue qui révèlent toutes les caractéris-
tiques importantes de la fonction. *)

submatrix[matrice_, d_] := Take[matrice[[1 ;; d, ;; d]]];
mineur [matrice_, d_] := Det[submatrix[matrice, d]]
Syvelster[matrice_] := For[i = 1, i < Length[matrice]+1, i++, Print[Evaluate@mineur[matrice, i]]]

%%
5.1.16
Panel[Grid[{
  {f := x y Exp[-(x^2 + y^2)/2]},
  {solu = Reduce@Resolve[Grad[f, {x, y}] == 0]},
  {mathess = D[f, {{x, y}}, {{x, y}}];},
  {MatrixForm@mathess},
  {ContourPlot[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}],
   Plot3D[f, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]},
  {{x, y} = {-1, 1}};},
  {Syvelster[mathess]}}]]

%%
5.1.20
Panel[Grid[{
  {f := Sin[x] Sin[y]},
```



```

{solu = Reduce@Resolve[Grad[f, {x, y}] == 0,
  {x, y} \[Element] ImplicitRegion[-Pi <= x <= Pi && -Pi <= y <= Pi , {x, y}]]},
{mathess = D[f, {{x, y}}, {{x, y}}];},
{MatrixForm@mathess},
{ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}],
  Plot3D[Sin[x] Sin[y], {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi, Pi}]},
{{x, y} = {0, 0};},
{Syvelster[mathess]}}]]

```

Méthode pour calculer des volumes bornée par des surfaces

```

R = ImplicitRegion[x x + y y <= z && x x + y y <= 25 && z <= 25, {x, y, z}]
RegionBoundary[R]
DiscretizeRegion[R, MeshQualityGoal -> "Maximal"]
Volume[R]
RegionMeasure[R, 3]

```

Index

A

Aire 5

B

Bornes atteintes 4

C

Critère de Sylvester 4

Cylindrique 5

D

Derivative 2

Domaine de type 1 6

Domaine de type 1.I 6

Domaine de type 1.II 6

Domaine de type 2 6

Domaine de type 3 6

Domaine de type I 5

Domaine de type II 5

Dérivée directionnelle 2

G

Gradient 3

I

Intégrales doubles en polaire 6

Intégrales itérées 5

Intégrales triples en cylindrique 7

Intégrales triples en sphérique 7

M

Matrice Hessienne 3

Multiplicateur de Lagrange 4

O

Optimization avec contrainte 4

P

Point critique 3

Polaire 5

Polynôme de Taylor 3

S

Sphérique 5

Sylvester 4

Système de coordonnées 5

T

Taux de variation maximal 3

Test des dérivées premières 3

Théorème de Clairaut 2

Théorème de Fubini 5

Théorème de Fubini pour les intégrales triples 6

Théorème des valeurs extrêmes 5

V

Vecteur gradient 3

Volume 5, 6