

Paper reading for Voronoi Diagram in The Laguerre Geometry and its Applications

問題定義

本問題想要在 *Laguerre geometry* 上求出 *Voronoi diagram*。

將一個三維空間的點 (x, y, z) 對應到歐氏平面上是一個半徑為 $|z|$ 且圓心為 (x, y) 的圓，而且此圓的旋轉方向是根據 z 的正負值，則稱為 *Laguerre geometry*。

在二維空間的一圓 $C_i = C_i(Q_i; r_i)$ ，其中圓心為 $Q_i = (x_i, y_i)$ ，半徑為 r_i 。 C_i 和 $P = (x, y)$ 之間的距離 $d_L(C_i, P)$ 之定義如下：

$$d_L^2(C_i, P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 \quad (1)$$

因此，在 *Laguerre geometry* 上 n 個圓 $C_i = C_i(Q_i; r_i) (Q_i = (x_i, y_i))$ 的 *Voronoi polygons* 的定義如下：

$$V(C_i) = \cap_i \{P \in R^2 | d_L^2(C_i, P) \leq d_L^2(C_j, P)\} \quad (2)$$

求出所有的 *Voronoi polygons*，就是我們要的 *Voronoi diagram*。

方法說明

假設一個 set $S = C_i(Q_i; r_i) | i = 1, 2, \dots, n$ ，我們要把 S 分成兩個 subsets L 和 R 。也就是說，根據所有 Q_i 的 x 座標大小找出中位數 m ，再來分成兩個 subsets 如下式子：

$$L = \{Q_i | x_i < m\}, R = \{Q_i | x_i \geq m\}$$

分好之後， L 和 R 各自畫出它們的 *Voronoi diagram*，再把兩個 *Voronoi diagram* 合併起來。

合併兩個 *Voronoi diagram* 之前，需要先找出兩者之間的 *dividing line*。*Dividing line* 是由兩個 *rays* 和多個 *line segments* 組成，所以第一個問題是要如何找出那兩個 *rays*。

一開始先建出 L 和 R 的 *convex hulls*，它們的 *convex hulls* 分別是 $CH(L)$ 和 $CH(R)$ ，然後再建出 $L \cup R$ 的 *convex hulls* $CH(L \cup R)$ 。把 $CH(L \cup R)$ 和另外兩個 *convex hulls* 做比較，就會發現有新的兩個 *line segments* 連接著 $CH(L)$ 和 $CH(R)$ 。之後就從那兩個 *line segments* 求出兩個 *rays*。

從新生的 *line segments* 的特性觀察，發現有特性稱為 *degenerate*。所謂的 *degenerate*，是指新的 *convex hull edges* 與相鄰的舊的 *convex hull edges* 都在同一線上，如下面 Figure 1 所示：

明顯地，某些新舊 *convex hull edges* 都在 l 線上。上圖 Figure 1 上面實線部份，就是沒有 *degenerate* 特性的例子。

從這兩條 *rays* 往圖形內部延伸，並且不斷地去做順時鐘方向和逆時鐘方向去調整，直到兩個 *rays* 連在一起，就形成我們要的 *dividing line*。

例子 時間複雜度分析