Sémantique des fonctions et égalité

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2022-2023

Logique du premier ordre (syntaxe)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{N}$:
  - Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $m(f) = 2$;
  - Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (syntaxe)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
  - Si $f \in \mathcal{S_F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $P \in \mathcal{S_P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Sémantique

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Affectation

- Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I ;
- Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

Sémantique

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $c \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![c]\!]^I_\rho = I(c)$;
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]^I_\rho)$;
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_\mathcal{B}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_\mathcal{B} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Sémantique des fonctions

Interprétation

- Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'une application $I(f)$ de D_I^n vers D_I pour chaque symbole de fonction d'arité n, et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Sémantique

Fonctions

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(f)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]^I_\rho)$;

Sémantique (résumé)

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes est définie par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(f)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]^I_\rho)$.

Sémantique (résumé)

Définition

- Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des formules est définie par :
  - Si $P \in \mathcal{S_P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_n]\!]^I_\rho)$;
  - $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_{\mathcal{B}}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$;
    - $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T.$

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in\{a_0\}}[\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T)\}$;
- Démontrer que I est un modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) = I(P)(a_0, a_0) = T$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$ $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) = I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) = T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$ $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}}[\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x. P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x. P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x. P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}}[\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$ $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $I(P)(a_0, I(f)(a_0))\wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0)\wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$ $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x. P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v\in\{a_0,b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

Exemples

Contre-modèle

- Soit l'interprétation I avec $D_I = \{a_0, b_0\}$, $I(f) = \{(a_0, a_0), (b_0, b_0)\}$, et $I(P) = \{((a_0, a_0), T), ((b_0, b_0), F), ((a_0, b_0), F), ((b_0, a_0), F)\}$;
- Démontrer que I est un contre-modèle de : $\forall x.P(x, f(x))$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I = [\![\forall x.P(x, f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} [\![P(x, f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x]}) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(\rho[v/x](x), I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x]})) =$
    $\bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in \{a_0, b_0\}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $I(P)(a_0, I(f)(a_0)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, I(f)(b_0)) = I(P)(a_0, a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0, b_0) =$
    $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F$.

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $\llbracket \forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x)) \rrbracket^I = \llbracket \forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x)) \rrbracket^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket \exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x)) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \bigvee_{v' \in D_I} \llbracket P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x)) \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \bigvee_{v' \in D_I} \llbracket P(x,y) \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(x,f(x)) \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \bigvee_{v' \in D_I} I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]}, \llbracket y \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]}, \llbracket f(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \bigvee_{v' \in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} \bigvee_{v' \in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} ((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v \in D_I} (T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v \in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]},[\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]},[\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$ $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$ $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$ $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$ $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$ $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$ $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$ $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$ $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$ $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} ((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} (T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} ((I(P)(v, I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} (T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]},[\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]},[\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} [\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} [\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} \bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} ((I(P)(v, I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I} (T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Exemples

Validité

- Démontrer que la formule $\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))$ est valide ;
- On se place dans une interprétation quelconque où l'on ne sait rien sur D_I, $I(f)$, et $I(P)$;
- Démonstration :
  - $[\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I = [\![\forall x.\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_\rho =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}[\![\exists y.P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y) \Rightarrow P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I}[\![P(x,y)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![P(x,f(x))]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]} =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![y]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}}$
    $I(P)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}, [\![f(x)]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]}) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)([\![x]\!]^I_{\rho[v/x][v'/y]})) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}\bigvee_{v'\in D_I} I(P)(v,v') \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v, I(f)(v)) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}((I(P)(v,I(f)(v)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(v,I(f)(v))) \vee_{\mathcal{B}} \ldots) =$
    $\bigwedge_{v\in D_I}(T \vee_{\mathcal{B}} \ldots) = \bigwedge_{v\in D_I} T = T.$

Égalité

Syntaxe

- C'est un prédicat binaire, noté de manière infixe ;
- $s \doteq t$, où s et t sont des termes.

Sémantique

- $[\![s \doteq t]\!]^I_\rho = ([\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho)$;
- Où « $=$ » est l'égalité sur D_I ;
- Ne pas confondre la syntaxe et la sémantique :
  - « $\doteq$ » $\equiv$ égalité syntaxique ;
  - « $=$ » $\equiv$ égalité sémantique.

Égalité

Syntaxe

- C'est un prédicat binaire, noté de manière infixe ;
- $s \doteq t$, où s et t sont des termes.

Sémantique

- $[\![s \doteq t]\!]^I_\rho = ([\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho)$;
- Où « $=$ » est l'égalité sur D_I ;
- Ne pas confondre la syntaxe et la sémantique :
  - « $\doteq$ » $\equiv$ égalité syntaxique ;
  - « $=$ » $\equiv$ égalité sémantique.

Logique équationnelle

Équations : syntaxe

- Équation $\equiv$ paire de termes notée $s \doteq t$;
- Les termes s et t ne sont pas forcément clos ;
- Mais la quantification sur les variables libres est implicite ;
- $s \doteq t \equiv \forall \vec{x}.s \doteq t$, où $\vec{x} = FV(s) \cup FV(t)$;
- Exemple : $x + 0 \doteq x \equiv \forall x.x + 0 \doteq x$.

Logique équationnelle

Équations : sémantique

- Soit $s \doteq t$ une équation et I une interprétation ;
- I est un modèle de $s \doteq t$ ou I satisfait $s \doteq t$, noté $I \models s \doteq t$, ssi pour toute affectation ρ, $[\![s]\!]^I_\rho = [\![t]\!]^I_\rho$;
- Un ensemble $\mathcal{E}$ d'équations entraîne $s \doteq t$, noté $\mathcal{E} \models s \doteq t$, ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les équations de $\mathcal{E}$ en même temps (les modèles de $\mathcal{E}$) sont aussi des modèles de $s \doteq t$, c'est-à-dire quand $I \models s' \doteq t'$ pour tout $s' \doteq t' \in \mathcal{E}$ implique $I \models s \doteq t$.

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « $+$ » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « + » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Exemple

Conséquence logique

- Démontrer que : $x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x \models 0 + x \doteq x$, où 0 est une constante et « $+$ » est un symbole de fonction binaire noté de manière infixe ;
- Démonstration :
  - Soit I une interprétation telle que $I \models x + 0 \doteq x$ et $I \models x + y \doteq y + x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ :
    - $[\![x + 0]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$ (1) ;
    - $[\![x + y]\!]^I_\rho = [\![y + x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(\rho(x), \rho(y)) = I(+)(\rho(y), \rho(x))$ (2).
  - On doit démontrer que $I \models 0 + x \doteq x$, c'est-à-dire pour toute affectation ρ, $[\![0 + x]\!]^I_\rho = [\![x]\!]^I_\rho$, c.-à-d. $I(+)(I(0), \rho(x)) = \rho(x)$:
    - $I(+)(I(0), \rho(x)) = I(+)(\rho(x), I(0))$, selon (2) ;
    - Puis, $I(+)(\rho(x), I(0)) = \rho(x)$, selon (1).

Substitution

Définition

- Une substitution σ est une application de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{T}$;
- Elle se définit par récurrence structurelle comme suit :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $\sigma(x) = \sigma(x)$;
  - Si $f \in \mathcal{S_F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Exemple

- Soit la substitution σ telle que $\sigma(x) = a$ et $\sigma(y) = f(b)$, où a et b sont des constantes, et f un symbole de fonction unaire ;
- $\sigma(f(x, y)) = f(a, f(b))$.

Position et substitution

Position

- Une position est un élément de $(\mathbb{N} - \{0\})^*$;
- Étant donné un terme t, le terme $t|_p$ désigne le terme à la position p et se définit par récurrence structurelle sur les positions :
  - Si $p = \epsilon$, $t|_\epsilon = t$;
  - Si $p = i \cdot p'$ et $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, où l'on a $i \leq n$ et où p' est une position, alors $t|_{i \cdot p'} = t_i|_{p'}$.
- Exemples : si $t = f(x, g(y, z))$, $t|_\epsilon = f(x, g(y, z))$, $t|_1 = x$, $t|_2 = g(y, z)$, $t|_{21} = y$, $t|_{22} = z$.

Substitution à une position donnée

- La notation $t[u]_p$ désigne la substitution de u au terme $t|_p$ dans t ;
- Exemple : si $t = f(x, g(y, z))$, $t[h(a)]_{21} = f(x, g(h(a), z))$.

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \quad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Règles

$$\frac{s \doteq t \in \mathcal{E}}{s \doteq t}\ \text{ax} \qquad \frac{}{s \doteq s}\ \text{refl}$$

$$\frac{s \doteq t}{t \doteq s}\ \text{sym} \qquad \frac{s \doteq t \qquad t \doteq u}{s \doteq u}\ \text{trans}$$

$$\frac{s \doteq t}{\sigma(s) \doteq \sigma(t)}\ \text{subst} \qquad \frac{s \doteq t}{u[s]_p \doteq u[t]_p}\ \text{cont}$$

Système de preuve pour la logique équationnelle (EQ)

Arbre de preuve (arbre de dérivation)

- On part de l'équation initiale à démontrer ;
- On applique les règles en raisonnement abductif (raisonnement arrière), c'est-à-dire que l'on part de ce qu'on veut montrer pour aller vers les hypothèses/axiomes) ;
- On construit ainsi un arbre dont le séquent est la racine et les branches sont créées par les différentes prémisses des règles de déduction ;
- Dans une branche, on s'arrête lorsqu'on atteint une règle axiomatique, qui devient ainsi une feuille de l'arbre ;
- Un arbre de preuve est un arbre dont toutes les branches se terminent par une règle axiomatique (on parle alors de branche close).

Propriétés

Prouvabilité

- $s \doteq t$ est prouvable dans EQ à partir de $\mathcal{E}$, noté $\mathcal{E} \vdash_{\text{EQ}} s \doteq t$, ssi il existe une dérivation dans EQ se terminant sur $s \doteq t$ à partir de $\mathcal{E}$.

Théorème d'adéquation (Birkhoff, 1933)

- Correction : Si $\mathcal{E} \vdash_{\text{EQ}} s \doteq t$ alors $\mathcal{E} \models s \doteq t$;
- Complétude : Si $\mathcal{E} \models s \doteq t$ alors $\mathcal{E} \vdash_{\text{EQ}} s \doteq t$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathsf{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}
$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathsf{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\ \text{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}}{0 + x \doteq x + 0}\,\text{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\,\text{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}\,\mathrm{ax}}{0 + x \doteq x + 0}\,\mathrm{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}}{0 + x \doteq x}\,\mathrm{trans}$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.

Exemple de preuve

Exemple précédent

- $\mathcal{E} = x + 0 \doteq x, x + y \doteq y + x$;
- On veut démontrer que $\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{EQ}} 0 + x \doteq x$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x + y \doteq y + x \in \mathcal{E}}{x + y \doteq y + x}\,\mathrm{ax}}{0 + x \doteq x + 0}\,\mathrm{subst} \qquad \dfrac{x + 0 \doteq x \in \mathcal{E}}{x + 0 \doteq x}\,\mathrm{ax}}{0 + x \doteq x}\,\mathrm{trans}
$$

- Pour la règle subst, σ est telle que $\sigma(x) = 0$ et $\sigma(y) = x$.