Nom :

Sujet A — HAI504I Logique du premier ordre

Licence Informatique
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier
Université de Montpellier

Épreuve de contrôle continu du 20 octobre 2023 — durée 1 heure

Le seul document autorisé est l'aide-mémoire (fourni en fin de sujet). L'examen dure 2h. Le barème est donné à titre indicatif, et pourra être légèrement modifié au vu des copies rendues. Le sujet comporte 2 pages (hors aide-mémoire) et il y a 5 exercices.

Il est recommandé de lire attentivement tout *le sujet avant de commencer à le traiter.*

On répondra sur le sujet.

Exercice A.1

Lisez attentivement ce qui est demandé avant de répondre aux questions de cet exercice. Pour chacune des “preuves" suivantes de LK dire si elle est correcte ou non, puis :

— Si vous pensez que la preuve est correcte, dites le, et cela suffit.

— Sinon, c'est-à-dire si vous pensez que la preuve n'est pas correcte, dites :

(i). pourquoi la preuve n'est pas correcte

(ii). puis, dites si vous pensez que la formule est démontrable ou non, et :

— si vous pensez que la formule est démontrable en donner une preuve dans LK,

— et sinon donner une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

Question A.1.a

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(x)}\,ax}{\exists x.P(x) \vdash P(x)}\,\exists l}{\exists x.P(x) \vdash \forall x.P(x)}\,\forall r}{\vdash (\exists x.P(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x))}\Rightarrow r$$

Question A.1.b

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(x) \vdash P(u)}\,ax}{\exists x.P(x) \vdash P(u)}\,\exists l}{\exists x.P(x) \vdash \exists u.P(u)}\,\exists r}{\vdash (\exists x.P(x)) \Rightarrow (\exists u.P(u))}\Rightarrow r$$

Question A.1.c

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P(x) \vdash P(x)}\ ax}{\exists x.P(x) \vdash P(x)}\ \exists l}{\exists x.P(x) \vdash \exists x.P(x)}\ \exists r}{\vdash (\exists x.P(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x))}\ \Rightarrow r$$

Question A.1.d

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P(x) \vdash P(x)}\ ax}{\forall x.P(x) \vdash P(x)}\ \forall l}{\forall x.P(x) \vdash \exists x.P(x)}\ \exists r}{\vdash (\forall x.P(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x))}\ \Rightarrow r$$

Exercice A.2

Soit la formule :

$$H : (\exists x.(P(x) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow (\forall x.(P(x) \Rightarrow P(x)))$$

Question A.2.a Pensez vous que la formule H ci-dessus soit valide ?

H valide H non valide — rayer la réponse qui ne vous convient pas.

Question A.2.b Cette question dépend de votre réponse à la question précédente :

— Si vous avez répondu "H" valide

(i). montrez que H est valide en raisonnant dans une interprétation quelconque,

(ii). puis donnez une preuve formelle de $\vdash H$ dans le calcul des séquents LK.

— Si vous avez répondu "H non valide" donnez une interprétation dans laquelle H est fausse.

Exercice A.3

On considère les deux formules suivantes sur le langage défini par P unique prédicat, unaire.

$$G : (\exists x.\ P(x)) \Rightarrow P(x) \qquad\qquad H : \forall x.\ P(x) \Rightarrow P(x)$$

Question A.3.a Dessinez l'arbre de chacune des deux formules, en faisant des formules propres si elle ne le sont pas.

Exercice A.4

Soit la formule $M = \forall x.\exists y.\ \texttt{inf}(x, y)$.

Question A.4.a Exprimer la valeur de vérité $[\![M]\!]^I$ de la formule M dans une interprétation I de domaine D en fonction de l'interprétation du prédicat binaire $\texttt{inf}$ (notée $I(\texttt{inf})$) et des opérations booléennes (notées $\bigvee_{d\in D} \cdots$, $\bigwedge_{e\in D} \cdots$).

Question A.4.b On considère l'interprétation I suivante :
domaine $D = \{0, 1\}$, $I(\texttt{inf}) = \{(0, 1)\}$.

(i). Quelle est votre intuition ? $[\![M]\!]^I = 1$ $\qquad [\![M]\!]^I = 0$
rayez la réponse qui ne vous convient pas.

(ii). Vérifiez par le calcul que votre intuition ci-dessus est juste.

Question A.4.c On considère l'interprétation J suivante :
domaine $\mathbb{N}$, $J(\texttt{inf}) = \{(x, y) \mid x < y\}$.

(i). $[\![M]\!]^J = 1$ $\qquad$ $[\![M]\!]^J = 0$

rayez la réponse qui ne vous convient pas.

(ii). Vérifiez par le calcul que votre intuition ci-dessus est juste.

Exercice A.5

On considère la phrase suivante, que l'on souhaite modéliser en logique du premier ordre :

A Si aucun étudiant ne réussit le CC1 alors le CC1 est difficile ou Paul n'a pas révisé.

Question A.5.a Préciser le langage du premier ordre dont vous aller vous servir : constantes, fonctions, propositions, prédicats, ...avec arités si besoin,...ainsi que leur signification.

Question A.5.b Donner une formule logique associée à la phrase A.

Question A.5.c Dessiner l'arborescence syntaxique de la formule associée à la phrase A.

Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence Informatique (L3)
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

Aide-mémoire

Ce document est le seul autorisé lors des examens de HAI504I. Il doit être reprographié et utilisé en l'état, et en particulier, aucune note manuscrite ne doit y être ajoutée.

Syntaxe de la logique du premier ordre

Soient $\mathcal{V}$ l'ensemble de variables d'individu, $\mathcal{S_F}$ l'ensemble de symboles de fonctions, et $\mathcal{S_P}$ l'ensemble de symboles de prédicats, tels que $\mathcal{S_F} \cap \mathcal{S_P} = \emptyset$.

Les termes du premier ordre sont le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
— Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
— Si $f \in \mathcal{S_F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
Les constantes sont des fonctions d'arité 0.

Les formules du premier ordre sont le plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
— Si $P \in \mathcal{S_P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
— $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
— Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
— Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
— Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Les connecteurs $\wedge$, $\vee$, et $\Leftrightarrow$ associent à gauche, tandis que le connecteur $\Rightarrow$ associe à droite. Pour les connecteurs, on a la précédence : $\neg \succ \wedge \succ \vee \succ \Rightarrow \succ \Leftrightarrow$. La portée d'un quantificateur va jusqu'à la parenthèse fermante de la formule du quantificateur ; si la formule du quantificateur n'est pas parenthésée, la portée du quantificateur va jusqu'à la fin de la formule.

Sémantique de la logique du premier ordre

Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'une application $I(f)$ de D_I^n vers D_I pour chaque symbole de fonction f d'arité n ou d'un élément $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de fonction c d'arité 0 (constante), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I. Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes est définie par :
— Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
— Si $f \in \mathcal{S_F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(f)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
Si $f \in \mathcal{S_F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![f]\!]^I_\rho = I(f)$.

Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des formules est définie par :

— Si $P \in \mathcal{S_P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;

— $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;

— Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_{\mathcal{B}}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;

— Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :

  — $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.

— Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :

  — $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$, $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Règles de preuve du calcul des séquents (système LK)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \mathsf{ax} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \mathsf{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \mathsf{cont_{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathsf{cont_{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\ \forall_{\mathsf{left}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\ \exists_{\mathsf{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists_{\mathsf{right}}$$

Fonctions de skolémisation et herbrandisation

— Si Φ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$;

— $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$;

— $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$;

— $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$;

— $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$;

— $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = h(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(\forall x.\Phi)$;

— $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(\exists x.\Phi)$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.

— Ensuite, une fois le calcul terminé :

  — Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(s(\Phi))$;

  — Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\exists x_n.h(\Phi)$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(h(\Phi))$.