Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°1

Exercice 1

On considère deux symboles de prédicats P et Q, respectivement unaire et binaire, ainsi que deux constantes a et b.

Soient les formules suivantes :

1. $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \land P(b)$;
2. $\forall x.P(x) \land a$;
3. $\forall x.P(P(x))$;
4. $\forall P.\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$;
5. $\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x, a)$.

Parmi les formules précédentes, dire si elles sont bien formées ou non. Pour les formules mal formées, proposer une correction.

Exercice 2

Soient les formules suivantes :
- $A \equiv \forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$;
- $B \equiv (\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$;
- $C \equiv \forall x.\exists y.Q(x, y) \land \exists x.\neg Q(y, x)$.

1. Parenthéser les formules A, B, et C au maximum de manière à lever toutes les ambiguïtés liées à la portée par défaut des quantificateurs.
2. Dessiner les arbres syntaxiques des formules A, B, et C.
3. Sur l'arborescence syntaxique, donner l'algorithme que permet de dire si une occurrence de variable est libre ou liée.
4. Pour chaque formule A, B, et C, dire :
   - quelles sont les variables libres, liées, et libres et liées à la fois ;
   - si la formule est close.
5. Pour chaque formule A, B, et C, dire si la formule est propre ou non. Pour les formules non propres, effectuer les renommages nécessaires pour obtenir des formules propres.

Exercice 3

En utilisant la structure inductive des formules, définir (par induction) les fonctions suivantes :

1. Profondeur d'une formule (profondeur de son arbre syntaxique) ;
2. Nombre de connecteurs d'une formule ;
3. Nombre de quantificateurs d'une formule ;
4. Nombre de sous-formules d'une formule.

Exercice 4

Un graphe orienté sans arête multiple peut se voir comme un prédicat binaire qui décrit un arc (arête orientée) $x \to y$ par $R(x, y)$ (souvent noté xRy quand R est binaire). Un chemin est une suite finie de sommets avec un arc de chaque sommet au suivant, et la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. Exprimez les propriétés suivantes d'un graphe G sans arête multiple dans le langage dont le seul prédicat est R (correspondant à une arête d'un graphe sans arête multiple), et si vous pensez que ce n'est pas possible, dites pourquoi.

1. G contient un chemin de longueur 1 de x à y.
2. G contient un chemin de longueur au plus deux de x à y.
3. G contient un chemin de longueur au plus trois de x à y .
4. GH contient un chemin de x à y.
5. Le graphe G est un graphe simple c'est-à-dire non orienté et sans boucle.
6. Le graphe G est simple et connexe.
7. Le graphe G est simple et c'est une clique (tous les sommets sont reliés deux à deux).
8. Le graphe G est simple et biparti (il existe une partition du graphe en deux ensembles de sommets telle qu'il n'y a pas d'arête entre deux éléments de la même partie).

Exercice 5

Formalisation de phrases, comme on en trouve dans une base de données, en faisant attention aux ambiguïtés ("un X" peut signifier, au moins un X, exactement un X, et même tout X...) et de portée des quantificateurs (un rond est relié à chaque carré). On spécifiera le langage utilisé. On pourra réfléchir à "typer" les prédicats binaires, ternaires etc. par des axiomes. Pour exprimez certaines phrases, on a besoin d'un prédicat particulier en plus, quel est-il ?

1. Il y a au moins une UE.
2. Il y a au moins un étudiant.
3. Toute UE utilise au moins une salle pour au moins un créneau.
4. Toute UE a au moins un inscrit. (2 interprétations, une plus naturelle que l'autre).
5. Tout étudiant est inscrit à au moins un cours. (2 interprétations, une plus naturelle que l'autre).
6. Tout étudiant est inscrit à au plus 2 cours.
7. Tout étudiant est inscrit à au moins 2 cours.
8. Toute UE utilise la même salle pour chacun de ses créneaux.
9. Pour une salle et un créneau donnés, il y a au plus une UE.
10. Pour un créneau et un étudiant donnés, il y a au plus une UE suivie par cet étudiant sur ce créneau.

Exercice 6

Soit l'énoncé suivant :

« Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout.
Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème. »

Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ? Nous verrons plus tard comment formaliser le raisonnement associé.