Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence Informatique (L3)
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

Aide-mémoire

Ce document est le seul autorisé lors des examens de HAI504I. Il doit être reprographié et utilisé en l'état, et en particulier, aucune note manuscrite ne doit y être ajoutée.

Syntaxe de la logique du premier ordre

Soient $\mathcal{V}$ l'ensemble de variables d'individu, $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ l'ensemble de symboles de fonctions, et $\mathcal{S}_\mathcal{P}$ l'ensemble de symboles de prédicats, tels que $\mathcal{S}_\mathcal{F} \cap \mathcal{S}_\mathcal{P} = \emptyset$.

Les termes du premier ordre sont le plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
- Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
- Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$.

Les constantes sont des fonctions d'arité 0.

Les formules du premier ordre sont le plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
- Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}$;
- $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
- Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
- Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
- Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Les connecteurs $\wedge$, $\vee$, et $\Leftrightarrow$ associent à gauche, tandis que le connecteur $\Rightarrow$ associe à droite. Pour les connecteurs, on a la précédence : $\neg \succ \wedge \succ \vee \succ \Rightarrow \succ \Leftrightarrow$. La portée d'un quantificateur va jusqu'à la parenthèse fermante de la formule du quantificateur ; si la formule du quantificateur n'est pas parenthésée, la portée du quantificateur va jusqu'à la fin de la formule.

Sémantique de la logique du premier ordre

Une interprétation I est un ensemble non vide D_I, appelé le domaine de l'interprétation, muni d'une application $I(f)$ de D_I^n vers D_I pour chaque symbole de fonction f d'arité n ou d'un élément $I(c)$ de D_I pour chaque symbole de fonction c d'arité 0 (constante), et d'une application $I(P)$ de D_I^n vers $\mathcal{B}$ pour chaque symbole de prédicat P d'arité n.

Une affectation ρ est une application de $\mathcal{V}$ vers D_I. Pour toute affectation ρ, $\rho[v/x]$ est l'affectation envoyant chaque variable y autre que x vers $\rho(y)$, et x vers v.

Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des termes est définie par :
- Si $x \in \mathcal{V}$ alors $[\![x]\!]^I_\rho = \rho(x)$;
- Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![f(t_1, \dots, t_n)]\!]^I_\rho = I(f)([\![t_1]\!]^I_\rho, \dots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
  Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité 0 (constante) alors $[\![f]\!]^I_\rho = I(f)$.

Dans une interprétation I, et modulo l'affectation ρ, la sémantique des formules est définie par :

- Si $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $[\![P(t_1, \ldots, t_n)]\!]^I_\rho = I(P)([\![t_1]\!]^I_\rho, \ldots, [\![t_1]\!]^I_\rho)$;
- $[\![\top]\!]^I_\rho = T$, $[\![\bot]\!]^I_\rho = F$;
- Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]^I_\rho = \neg_{\mathcal{B}}[\![\Phi]\!]^I_\rho$;
- Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
  - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \vee \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \vee_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$, $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]^I_\rho = [\![\Phi]\!]^I_\rho \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]^I_\rho$.
- Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors :
  - $[\![\forall x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$, $[\![\exists x.\Phi]\!]^I_\rho = \bigvee_{v \in D_I} [\![\Phi]\!]^I_{\rho[v/x]}$.

Règles de preuve du calcul des séquents (système LK)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ \mathsf{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, B}\ \mathsf{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \mathsf{cont_{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ \mathsf{cont_{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\ \Rightarrow_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\mathsf{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\mathsf{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.A(x) \vdash \Delta}\ \forall_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall_{\mathsf{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.A(x) \vdash \Delta}\ \exists_{\mathsf{left}},\ x \notin \Gamma, \Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists_{\mathsf{right}}$$

Fonctions de skolémisation et herbrandisation

- Si Φ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$;
- $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$;
- $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$;
- $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$;
- $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$;
- $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = h(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(\forall x.\Phi)$;
- $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(\exists x.\Phi)$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.
- Ensuite, une fois le calcul terminé :
  - Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(s(\Phi))$;
  - Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\exists x_n.h(\Phi)$, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = FV(h(\Phi))$.