

# Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3  
Département Informatique  
Faculté des Sciences de Montpellier



---

## TD N°4

### Exercice 1

On considère deux symboles de prédicats  $P$  et  $Q$ , respectivement unaire et binaire, ainsi qu'un symbole de fonction  $f$  unaire. Soient les formules suivantes :

1.  $\forall x.P(f(x))$  ;
2.  $\forall x.Q(x, f(x))$  ;
3.  $\forall x.\exists y.Q(f(x), y)$  ;
4.  $\forall x, y.Q(x, y) \Rightarrow Q(f(x), f(y))$  ;
5.  $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(f(y), x)$ .

Soit l'interprétation  $I$  telle que :

- $D_I = \{0, 1, 2\}$  ;
- $I(P) = \{(0, F), (1, T), (2, T)\}$  ;
- $I(Q)(x, y) = T$  si  $x < y$ ,  $F$  sinon ;
- $I(f) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$ .

Évaluer les formules dans l'interprétation  $I$ .

### Exercice 2

On considère un symbole de prédicat  $P$  binaire, ainsi qu'un symbole de fonction  $f$  unaire. Soient les formules suivantes :

- $F_1 = \forall x.\exists y.P(x, y)$  ;
- $F_2 = \forall x.P(x, f(x))$ .

Démontrer la validité des formules suivantes ou trouver un contre-modèle :

1.  $F_1 \Rightarrow F_2$  ;
2.  $F_2 \Rightarrow F_1$ .

### Exercice 3

On considère un symbole de prédicat  $P$  binaire, deux symboles de fonction  $f$  et  $g$  unaires, et une constante  $a$ . Soient les formules suivantes :

- $g(a) = a$  ( $H_1$ ) ;
- $\forall x.g(f(x)) = g(x)$  ( $H_2$ ) ;
- $\forall x.P(x, x)$  ( $H_3$ ).

Démontrer que :  $H_1, H_2, H_3 \models P(a, g(f(a)))$ .

## Exercice 4

On considère l'ensemble d'équations  $\mathcal{E}$  suivant :

- $plus(x, o) \doteq x$  ;
- $plus(x, s(y)) \doteq s(plus(x, y))$ .

Où  $o$  est une constante,  $s$  un symbole de fonction unaire, et  $plus$  un symbole de fonction binaire.

1. Démontrer que l'équation  $plus(s(s(o)), s(s(o))) \doteq s(s(s(s(o))))$  est prouvable dans le système EQ à partir de  $\mathcal{E}$  ;
2. Peut-on démontrer l'équation  $plus(o, x) \doteq x$  à partir de  $\mathcal{E}$  ? Si oui, faire la démonstration dans EQ, sinon dire ce qu'il faudrait rajouter à  $\mathcal{E}$ .