

Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier



TD complétude

Exercice A

Un langage du premier ordre est composé de E un symbole de prédicat binaire (noté au milieu, E comme Egalité), et s une lettre de fonction, et de \emptyset une constante. On considère l'interprétation suivante :

Domaine : $N \times N = \{(n, p) | n \in N, p \in N\}$.

$I(\emptyset) = (0, 0)$

$I(s)(n, p) = (n, p + 1)$

$I(E) = \{((n, p), (n', p))\} \subset (N \times N) \times (N \times N)$

Question A(a) Montrer que I est un modèle de

$s_0 : \forall x. \neg(s(x) E \emptyset)$

$s_j : \forall x, y. s(x) E s(y) \Rightarrow x E y$

$s_i : \forall x. \neg(x E \emptyset) \Rightarrow \exists z. x E s(z)$

Question A(b) Montrer que $I(E)$ est une relation d'équivalence. Quelles sont ses classes d'équivalence ? Quelle est la classe de (n, p) ?

Question A(c) Montrer que I satisfait les axiomes de l'égalité (réflexive, symétrique et transitive ; préservée par les symboles de fonctions et par les prédicats, cf. transparents).

Question A(d) Quel est le modèle quotient dans lequel E est interprété par l'égalité ? Les axiomes s_0, s_j, s_i sont-ils vérifiés ? Est-ce une simple coïncidence ?

Exercice B

On considère le langage contenant un prédicat binaire \leq et l'égalité. On considère les interprétations suivantes : (N, \leq) , (Z, \leq) , (Q, \leq) , (R, \leq) où \leq est interprété par \leq (et l'égalité par l'égalité). On note la théorie suivante *ThOrd* qui dit que \leq est une relation d'ordre (non stricte).

A la fin de l'exercice, seule la validité du calcul des séquents est nécessaire.

Question B(a) Ecrire les trois propriétés que doit satisfaire une relation d'ordre (réflexivité, antisymétrie, transitivité).

Question B(b) Justifiez que ces interprétations satisfont toutes les quatre les axiomes de l'ordre *ThOrd*.

Question B(c) Donner deux formules de la logique du premier ordre :

— $Q_{1 \rightarrow 2}$ vraie dans $I_1 : (N, \leq)$ et pas dans $I_2 : (Z, \leq)$

— $Q_{2 \rightarrow 1}$ vraie dans $I_2 : (Z, \leq)$ et pas dans $I_1 : (N, \leq)$

Question B(d) Donner deux formules de la logique du premier ordre :

— $Q_{1 \rightarrow 2}$ vraie dans $I_1 : (Z, \leq)$ et pas dans $I_2 : (Q, \leq)$

— $Q_{2 \rightarrow 1}$ vraie dans $I_2 : (Q, \leq)$ et pas dans $I_1 : (Z, \leq)$

Question B(e) Donner une propriété $Q_{2 \rightarrow 1}$ vraie dans $I_2 : (\mathbb{R}, \leq)$ et pas dans $I_1 : (\mathbb{Q}, \leq)$; cette propriété correspond elle à une formule de la logique du premier ordre ?

Question B(f) La théorie ThOrd est elle cohérente ? (Il n'existe pas de formule G telle que ThOrd dérive à la fois G et $\neg G$).

Question B(g) La théorie ThOrd est elle complète ? (ThOrd dérive G ou $\neg G$ pour toute formule G).

Exercice C

Un séquent du calcul propositionnel LK_0

$$H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$$

(les H_i sont appelées hypothèses du séquent et les C_j les conclusions du séquent, ce sont des formules propositionnelles) est vrai pour une interprétation I si et seulement si la formule

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p)$$

est vraie pour l'interprétation I .

On reprend le premier cours sur le calcul des séquents propositionnel :

Question C(a) Montrer que les axiomes du calcul propositionnel LK_0 sont vrais pour toute interprétation.

Question C(b) Montrer que les règles du calcul propositionnel LK_0 sont correctes (on dit aussi "valides") : si le(s) séquent(s) prémisses de la règle(s) sont vrais pour I alors le séquent conclusion est vrai pour I . Ne traitez que quelques règles.

Question C(c) Montrez que les règles du calcul propositionnel LK_0 sont réversibles (si le séquent conclusion est vrai pour I alors le(s) séquent(s) prémisses de la règle(s) sont vrais pour I). Ne traitez que quelques règles.

Question C(d) En déduire que LK_0 est complet pour la logique propositionnelle ($H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$) démontrable ssi $H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$ est vrai dans toute interprétation I).

Question C(e) En déduire qu'une formule A est universellement valide si et seulement si LK_0 démontre $\vdash A$.

Exercice D

Un séquent du calcul des prédicats

$$H_1, \dots, H_n \vdash C_1, \dots, C_p$$

(les H_i sont appelées hypothèses du séquent et les C_j les conclusions du séquent, ce sont des formules logiques du premier ordre) est vrai pour une interprétation I et une assignation ρ si et seulement si la formule

$$(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \dots \vee C_p)$$

est vraie pour l'interprétation I et l'assignation ρ . On rappelle qu'une assignation associe à chaque variable libre du séquent un élément du domaine d'interprétation (le même élément pour chaque occurrence de la variable libre, qu'elle soit à gauche ou à droite de \vdash).

Question D(a) Montrez que les axiomes de LK sont vrais pour toute interprétation et pour toute assignation.¹

1. Une assignation donne la même valeur à toutes les occurrences de la variable libre assignée, dans chaque formule du séquent ou elle apparaît libre, que cette formule soit à gauche ou à droite du signe \vdash .

Question D(b) Montrez que les règles de LK sont correctes (valides, sound)

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_c \vdash \Delta_c} R$$

On dit qu'une règle R est correcte lorsque :

si le(s) séquent(s) prémisses de la règle R sont vrais pour une interprétation I et pour toute assignation ρ de leurs variables libres²

alors le séquent conclusion est vrai pour I et pour toute assignation ρ de ses variables libres.

Attention aux quantificateurs dans le métalangage (notamment pour la règle \forall_r ou \exists_l), ils sont ainsi :

pour toute interprétation I ,

SI

(pour toute assignation ρ on a $\llbracket \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \rrbracket_\rho^I = \text{VRAI}$ et $\llbracket \Gamma_2 \vdash \Delta_2 \rrbracket_\rho^I = \text{VRAI}$)

ALORS

(pour toute assignation σ on a $\llbracket \Gamma_c \vdash \Delta_c \rrbracket_\sigma^I = \text{VRAI}$)

Remarque : une fois fixées une interprétation I et une assignation ρ chaque formule est vraie ou fausse, et on peut en partie réutiliser l'exercice précédent. Ne traiter que les règles des quantificateurs.

Question D(c) Montrer que la règle \exists_d n'est pas réversible au sens où elle peut conduire d'une formule fausse pour une interprétation I et une assignation ρ à une formule vraie pour la même interprétation et la même assignation.

Exercice E

Dans le système à la Hilbert propositionnel avec uniquement les axiomes S et K et la règle du modus ponens montrez que

Question E(a) $A \Rightarrow A$

Question E(b) si une démonstration contient les lignes $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ on peut la prolonger par la ligne $A \Rightarrow C$, en utilisant seulement les axiomes $S : (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ et $K : p \Rightarrow q \Rightarrow p$.

Exercice F

Pour le calcul des prédicats, les axiomes des déductions à la Hilbert sont des suites de formules du premier ordre, numérotées, ou tout ligne est soit un axiome soit obtenu à partir des lignes précédentes par une règle.

Les axiomes sont :

- les formules de la théorie Θ considérée (une théorie est un ensemble pas forcément fini de formules closes)
- toutes les tautologies propositionnelles instanciées par l'importe quelles formules de la logique du premier ordre (qui sont elles-mêmes dérivables à partir d'un nombre fini d'axiomes propositionnels cf. transparents)
- les axiomes des quantificateurs
 - une formule de la forme $(\exists x.G) \Rightarrow (\neg \forall x. \neg G)$ ou de $(\neg \forall x. \neg G) \Rightarrow (\exists x.G)$
 - une formule de la forme $(\forall x.H \Rightarrow G) \rightarrow (H \Rightarrow \forall x.G)$ sans x dans H
 - une formule de la forme $(\forall x.G(x)) \Rightarrow G(t/x)$ — les variables du terme t ne doivent pas être quantifiées par un quantificateur de G .

Les règles de déduction sont :

- le modus ponens : si une ligne de la déduction est de la forme $A \Rightarrow B$ et une autre ligne de la forme A , alors on peut prolonger la déduction par la ligne B
- la généralisation : si une ligne est A on peut prolonger la déduction par la ligne $\forall x.A$.

Nous avons vu le lemme de la déduction : si la théorie $\Theta \cup \{G\}$ permet de dériver H , alors la théorie Θ permet de dériver $G \Rightarrow H$.

². s'il y a deux séquents prémisses, une même variable libre doit recevoir la même assignation dans chacun des deux séquents prémisses

Question F(a) Montrer qu'il existe une déduction à la Hilbert de $A[t] \Rightarrow \exists x.A[x]$

Question F(b) Montrer que s'il existe une déduction à la Hilbert de la formule $A \Rightarrow B$, alors il en existe une de $(\forall x. A) \Rightarrow (\forall x. B)$.

Question F(c) Montrer que $(\exists x.\forall y.P(x,y)) \Rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$. On remarquera que les preuves à la Hilbert sont plus difficiles à trouver que celles du calcul des séquents (sans coupure).

Exercice G

Montrer que si une déduction à la Hilbert utilisant les axiomes T_1, \dots, T_n (en nombre fini) d'une théorie Th démontre la formule G alors le calcul des séquents démontre $T_1, \dots, T_n \vdash G$. On utilisera la complétude du calcul des séquents pour la logique propositionnelle.

Exercice H

Montrer que si le calcul des séquents démontre $T_1, \dots, T_n \vdash G$ (la disjonction des conclusions du séquent) alors il existe une déduction à la Hilbert de G dans la théorie contenant les clôtures universelles de T_1, \dots, T_n . C'est très fastidieux. On justifiera la dérivabilité des axiomes du calcul des séquents, l'affaiblissement et la contraction. On vérifiera quelques règles.

Exercice I

Question I(a) Montrez qu'une théorie cohérente Th qui n'a qu'un modèle (à isomorphisme près) est complète (pour tout G , la théorie Th démontre G ou alors elle démontre $\neg G$).

Question I(b) Montrez que si tous les modèles d'une théorie cohérente Th satisfont les mêmes formules closes, alors cette théorie est complète.

Exercice J

Soit Th une théorie dans un langage \mathcal{L} ne comportant que des formules en forme prénexe sans quantificateur existentiel.

Question J(a) Donnez des exemples de théories purement universelles (ordre, monoides, groupes,...).

Question J(b) Montrer que si \mathcal{L} ne contient ni constantes ni symbole de fonction alors tout sous ensemble $D' \subset D$ est un modèle de Th .

Question J(c) Etant donné un modèle de Th de domaine D montrer que si $D' \subset D$ contient l'interprétation des constantes du langage \mathcal{L} et est stable par l'interprétation des fonctions : pour tous d_1, \dots, d_n de D' pour tous symbole de fonction n -aire g $I(g)(d_1, \dots, d_n)$ appartient à D' . Dans ce cas, on dit D' est un sous modèle de D .

Question J(d) Donnez des exemples de sous modèle. Montrer que la condition de stabilité est essentielle, de même que le fait que les formules soient sans quantificateur existentiel dans leur forme prénexe.

Exercice K

On considère le langage \mathcal{L} qui contient un symbole de prédicat $<$, un symbole fonctionnel S et deux constantes a et b . Les axiomes de la théorie sont :

$<$ est un ordre strict total $\forall xyz (x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$ $\forall x \neg(x < x)$ $\forall xy x < y \vee y < x \vee x = y$

$\forall x x < S(x)$,

$\forall x \neg \exists y (x < y \wedge y < S(x))$

$\forall x \exists y S(y) = x$,

$\forall xy S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$,

On définit l'abréviation $S^n(z)$ ainsi : $S^0(z) = z$, $S^{n+1}(z) = S(S^n(z))$

et on appelle $\phi_n : S^n(a) \neq b \wedge S^n(b) \neq a$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Question K(a) Donner une interprétation de ce langage (notamment de $I(a)$ et $I(b)$) de domaine Z où la théorie et les ϕ_n pour $0 \leq n \leq K$ fixé soient toutes vraies.

Question K(b) Montrer qu'un ensemble de formules **fini** de formules de $T \cup \{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$ admet un modèle de domaine Z .

Question K(c) Dédurre de la question précédente qu'il existe un modèle où toutes les formules de $T \cup \{\phi_i | i \in \mathbb{N}\}$ sont vraies.

Question K(d) Donnez un tel modèle (sans oublier l'interprétation de a et de b).