

# Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence Informatique  
Département Informatique  
Faculté des Sciences de Montpellier  
Université de Montpellier



---

## TD N°1

### Exercice 1

On considère deux symboles de prédicats  $P$  et  $Q$ , respectivement unaire et binaire, ainsi que deux constantes  $a$  et  $b$ .

Soient les formules suivantes :

1.  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  ;
2.  $\forall x.P(x) \wedge a$  ;
3.  $\forall x.P(P(x))$  ;
4.  $\forall P.\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$  ;
5.  $\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x, a)$ .

Parmi les formules précédentes, dire si elles sont bien formées ou non. Pour les formules mal formées, proposer une correction.

### Exercice 2

Soient les formules suivantes :

- $A \equiv \forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$  ;
- $B \equiv (\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists y.Q(x, y)$  ;
- $C \equiv \forall x.\exists y.Q(x, y) \wedge \exists x.\neg Q(y, x)$ .

1. Parenthéser les formules  $A$ ,  $B$ , et  $C$  au maximum de manière à lever toutes les ambiguïtés liées à la portée par défaut des quantificateurs.
2. Dessiner les arbres syntaxiques des formules  $A$ ,  $B$ , et  $C$ .
3. Sur l'arborescence syntaxique, donner l'algorithme que permet de dire si une occurrence de variable est libre ou liée.
4. Pour chaque formule  $A$ ,  $B$ , et  $C$ , dire :
  - Quelles sont les variables libres, liées, et libres et liées à la fois ;
  - Si la formule est close.
5. Pour chaque formule  $A$ ,  $B$ , et  $C$ , dire si la formule est propre ou non. Pour les formules non propres, effectuer les renommages nécessaires pour obtenir des formules propres.

### Exercice 3

En utilisant la structure inductive des formules, définir (par induction) les fonctions suivantes :

1. Profondeur d'une formule (profondeur de son arbre syntaxique) ;
2. Nombre de connecteurs d'une formule ;
3. Nombre de quantificateurs d'une formule ;
4. Nombre de sous-formules d'une formule.

## Exercice 4

Formaliser les énoncés suivants (au préalable, donner les constantes et symboles de prédicats utilisés pour la formalisation) ;

1. Les chiens et les oiseaux sont des animaux domestiques ;
2. Toby est un chien qui aime les enfants ;
3. Les oiseaux n'aiment pas les chiens ;
4. Serge aime tous les animaux domestiques sauf les chiens ;
5. Tous les enfants n'ont pas peur des chiens ;
6. Certains chiens aiment les enfants ;
7. Certains chiens aiment les enfants et réciproquement ;
8. Les enfants aiment certains chiens.

## Exercice 5

Formaliser la phrase : « Il n'est pas nécessaire d'être un bon musicien pour être un bon danseur ».

## Exercice 6

Soit l'énoncé suivant :

« Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout.  
Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème. »

Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ? Nous verrons plus tard comment formaliser le raisonnement associé.