HAI504I TD 7 preuves et modèles : autour du théorème de complétude

Un séquent est une expression

$$H_1, \ldots, H_n \vdash C_1, \ldots, C_p$$

où les H_i sont appelées hypothèses du séquent et les C_j les conclusions du séquent. Un séquent est vrai pour une interprétation I et une assignation ρ si et seulement si la formule

$$(H_1 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow (C_1 \vee \cdots \vee C_p)$$

est vraie pour l'interpretation I et l'assignation ρ. On rappelle qu'une assignation associe à chaque variable libre un élément du domaine d'interprétation.

Une règle du calcul des séquents est dite valide (ou correcte, "sound") si étant donnée une interprétation I lorsque le ou les séquents prémisses (ceux qui sont au dessus de la règle) sont vrais pour I et pour toute assignation, alors le séquent conclusion (celui qui est au dessous de la règle) est vrai pour I et pour toute assignation.

Une règle du calcul des séquents est dite réversible si lorsque le séquent conclusion est valide pour une interprétation et une assignation alors il en est de même de tous les séquents premisses.

Exo A Montrer que les règles $\Rightarrow_r$ et $\Rightarrow_l$ du calcul des séquents sont 1) valides et 2) réversibles.

Exo B Montrer que la règle de coupure est valide. Est-elle réversible ?

Exo C Montrer que les règles $\exists_r$ et $\exists_g$ sont valides. Sont-elles réversibles ?

Exo D Montrer que si $A, B, C \vdash U$ est un séquent démontrable et si, pour toute interprétation I et pour toute assignation ρ si $[\![A]\!]^I_\rho = [\![B]\!]^I_\rho = [\![C]\!]^I_\rho = \top$ alors $[\![U]\!]^I_\rho = \top$.

Exo E Une théorie $\mathcal{T}$ est un ensemble de formules closes possiblement infini. On dit qu'une formule close G est conséquence de $\mathcal{T}$ lorsqu'il existe des formules $T_1, \ldots, T_p$ de $\mathcal{T}$ telles que $T_1, \ldots, T_p \vdash G$ est dérivable dans le calcul des séquents.

Une théorie $\mathcal{T}$ est dite "de Henkin" lorsqu'elle est

- cohérente ($\mathcal{T} \not\vdash \bot$),
- complète (pour toute formule close F on a $\mathcal{T} \vdash F$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg F$)
- avec témoins de Henkin (pour toute formule $F[x]$ a une variable libre x si $\mathcal{T} \vdash \exists x.F[x]$ alors $\mathcal{T} \vdash F[c_F]$ où c_F est une constante associée à F, son témoin de Henkin.

On considère l'interprétation $\mathcal{H}$ définie en cours :

- Domaine : $|\mathcal{H}$ les termes clos (sans variables, à partir des constantes du langage et des constantes de Henkin),
- Les fonctions sont interprétées par elles-mêmes $\mathcal{H}(f)(t_1, \ldots, t_p) = f(t_1, \ldots, t_p)$
- Les prédicats sont interprétés par la prouvabilité dans $\mathcal{T}$: $\mathcal{H}(R)(t_1, \ldots, t_n) = \top$ si et seulement $\mathcal{T} \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$.

Montrer par induction sur la formule F que $\mathcal{H} \models F$ si et seulement si $\mathcal{T} \vdash F$ (le cas de $F = \forall x.G$ a été traité en cours).

Exo F Montrer que notre présentation théorème de complétude permet d'affirmer que tout séquent dérivable avec la règle de coupure est aussi dérivable sans la règle de coupure. On ne demande pas de rédiger un argument précis, mais de comprendre pourquoi, en réfléchissant sur l'exercice E et sur le théorème de complétude.