De la logique propositionnelle à la logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Licence L3 2023-2024

Limites de la logique propositionnelle

Problèmes d'expressivité

- L'« atome » est la variable propositionnelle, qui est indécomposable ;
- Comment rendre compte de points communs entre propositions ?
  « Marie dort » et « Pierre ne dort pas » ;
- Comment représenter le partage d'entités ?
  « Pierre ne dort pas » et « Pierre regarde Marie ».

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables d'individu x, y, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$ ensemble de symboles de fonctions f, g, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$ ensemble de symboles de prédicats P, Q, etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$;
- Arité (nombre d'arguments) $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \to \mathbb{N}$:
  - Exemple : pour $f(x, y)$ avec $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $m(f) = 2$;
  - Exemple : pour $P(x, y, z)$ avec $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$, $m(P) = 3$.

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{T}$ t.q. :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $x \in \mathcal{T}$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}$.
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\forall x.\Phi, \exists x.\Phi \in \mathcal{F}$.

Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

Associativité et précédence des connecteurs

- Inchangées par rapport à la logique propositionnelle.

Notation pointée pour les quantificateurs

- La portée d'un quantificateur va jusqu'à la parenthèse fermante de la formule du quantificateur ;
- Si la formule du quantificateur n'est pas parenthésée, la portée du quantificateur va jusqu'à la fin de la formule ;
- Donc, si on veut arrêter la portée d'un quantificateur, il suffit d'utiliser des parenthèses pour limiter explicitement la portée du quantificateur ;
- Exemple :
  - $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \equiv \exists x.(P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b))$;
  - Si on veut que le $\exists$ ne porte que sur $P(x)$, on doit écrire : $(\exists x.P(x)) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$.
- Notation : $\forall x, y.\Phi \equiv \forall x.\forall y.\Phi$ (idem pour $\exists$).

Variables libres, variables liées

Définitions

- Une variable x est libre dans une formule Φ ssi il existe une occurrence de x dans Φ qui n'est sous la portée d'aucun quantificateur ;
- Une variable x est liée dans une formule Φ ssi il existe une occurrence de x dans Φ qui est sous la portée d'un quantificateur ;
- Occurrence $\equiv$ position d'un terme/formule dans une formule.

Variables libres, variables liées

Définitions

- L'ensemble des variables libres $FV(\Phi)$ et l'ensemble des variables liées $BV(\Phi)$ d'une formule Φ sont définis par récurrence structurelle par :
  - Si $x \in \mathcal{V}$ alors $FV(x) = \{x\}$, $BV(x) = \emptyset$;
  - Si $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$, $BV(f(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$;
  - Si $P \in \mathcal{S}_\mathcal{P}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ alors $FV(P(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$, $BV(P(t_1, \ldots, t_n)) = \emptyset$;
  - $FV(\top) = FV(\bot) = \emptyset$, $BV(\top) = BV(\bot) = \emptyset$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $FV(\neg\Phi) = FV(\Phi)$, $BV(\neg\Phi) = BV(\Phi)$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $FV(\Phi \wedge \Phi') = FV(\Phi \vee \Phi') = FV(\Phi \Rightarrow \Phi') = FV(\Phi \Leftrightarrow \Phi') = FV(\Phi) \cup FV(\Phi')$, $BV(\Phi \wedge \Phi') = BV(\Phi \vee \Phi') = BV(\Phi \Rightarrow \Phi') = BV(\Phi \Leftrightarrow \Phi') = BV(\Phi) \cup BV(\Phi')$;
  - Si $x \in \mathcal{V}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $FV(\forall x.\Phi) = FV(\exists x.\Phi) = FV(\Phi) \backslash \{x\}$, $BV(\forall x.\Phi) = BV(\exists x.\Phi) = BV(\Phi) \cup \{x\}$.

Variables libres, variables liées

Exemples

- y est libre dans $\forall x.P(x, y)$;
- x est liée dans $\forall x.P(x, y)$;
- Dans la formule $(\forall x.P(x, y)) \wedge (\exists z.Q(z) \vee R(t))$:
  - L'ensemble des variables libres est $\{y, t\}$;
  - L'ensemble des variables liées est $\{x, z\}$.
- Une variable peut être libre et liée à la fois (c'est-à-dire qu'elle possède une occurrence où elle est libre et une autre où elle est liée), par exemple : $(\forall x.P(x, y)) \wedge Q(x)$, où x est libre (deuxième occurrence) et liée (première occurrence) à la fois.

Variables libres, variables liées

Formule polie ou propre

- Une formule est polie ou propre si aucune variable n'est à la fois libre et liée dans cette formule, et si aucune variable liée n'est soumise à plus d'une quantification ;
- Exemples :
  - $(\forall x.P(x,y)) \wedge (\exists z.Q(z) \vee R(t))$ est une formule polie ;
  - $(\forall x.P(x,y)) \wedge Q(x)$ n'est pas une formule polie ;
  - $(\forall x.P(x,y)) \wedge \exists x.Q(x)$ n'est pas une formule polie.

Variables libres, variables liées

α-conversion

- Il est toujours possible de renommer les variables liées d'une formule (en utilisant des variables « fraîches ») sans changer la validité de cette formule ;
- Ce processus est appelé α-conversion ;
- On peut donc toujours transformer une formule non polie en une formule polie par α-conversion ;
- Exemple : $(\forall x.P(x, y)) \wedge Q(x)$ peut être transformée en $(\forall z.P(z, y)) \wedge Q(x)$, où l'occurrence liée de x a été transformée en z.

Variables libres, variables liées

Formule close

- Une formule est close ou fermée si aucune variable n'est libre dans cette formule ;
- Un énoncé est une formule close ;
- Une théorie est un ensemble d'énoncés.

Modélisation

Conditions nécessaires et suffisantes

- Dire que A est une condition nécessaire pour B signifie que pour que B soit réalisée, il faut que A le soit : $B \Rightarrow A$;
- Dire que A est une condition suffisante pour B signifie que si A est réalisée alors B le sera : $A \Rightarrow B$;
- Dire que A est une condition nécessaire et suffisante pour B signifie que A et B sont réalisées en même temps : $A \Leftrightarrow B$.

Modélisation

Conditions nécessaires et suffisantes

- Condition nécessaire : « Il est nécessaire d'avoir le permis de conduire pour conduire une voiture ».
- Modélisation :
  - $P(x) \equiv x$ a le permis de conduire ;
  - $C(x) \equiv x$ conduit une voiture.

  $\forall x . C(x) \Rightarrow P(x)$.

Modélisation

Conditions nécessaires et suffisantes

- Condition suffisante : « Il suffit qu'il neige à Montpellier pour qu'il neige à Oslo » ;
- Modélisation :
  - $N(x) \equiv$ il neige à x ;
  - $m \equiv$ Montpellier ;
  - $o \equiv$ Oslo.

$N(m) \Rightarrow N(o)$.

Modélisation

Prédicats de « typage »

- La logique du premier ordre peut être sortée (avec une ou plusieurs sortes) afin de typer les termes du premier ordre manipulés ;
- En l'absence de sortes, il faut avoir recours à des prédicats qui vont jouer ce rôle de typage ;
- Par exemple, « Les chats n'aiment pas les chiens » :
  - $Chat(x) \equiv x$ est un chat ;
  - $Chien(x) \equiv x$ est un chien ;
  - $A(x, y) \equiv x$ aime y.

  $\forall x.Chat(x) \Rightarrow \forall y.Chien(y) \Rightarrow \neg A(x, y)$.

Modélisation

Prédicats de « typage »

- Attention au connecteur utilisé pour introduire les prédicats de typage (selon qu'il s'agit d'un $\forall$ ou d'un $\exists$) ;
- « Tous les chats aiment boire du lait » :
  - $Chat(x) \equiv x$ est un chat ;
  - $B(x) \equiv x$ aime boire du lait.

  $\forall x.Chat(x) \underline{\Rightarrow} B(x)$.
- « Il existe un chat qui n'aime pas boire du lait » :
  - $Chat(x) \equiv x$ est un chat ;
  - $B(x) \equiv x$ aime boire du lait.

  $\exists x.Chat(x) \underline{\wedge} \neg B(x)$.

Modélisation

Modélisations équivalentes

- Deux formules peuvent être équivalentes (même sémantique) même si elles ne sont pas égales syntaxiquement ;
- De ce fait, deux modélisations d'un même problème peuvent être équivalentes même si elles ne sont pas syntaxiquement égales ;
- Par exemple, « Les chats n'aiment pas les chiens » :
  - $Chat(x) \equiv x$ est un chat ;
  - $Chien(x) \equiv x$ est un chien ;
  - $A(x, y) \equiv x$ aime y.

  $\forall x.Chat(x) \Rightarrow \forall y.Chien(y) \Rightarrow \neg A(x, y)$,
  $\forall x, y.Chat(x) \Rightarrow Chien(y) \Rightarrow \neg A(x, y)$,
  et $\forall x, y.Chat(x) \wedge Chien(y) \Rightarrow \neg A(x, y)$
  sont des modélisations équivalentes.