Théorème de Complétude

HAI504I Logique du premier ordre
Logique II Christian Retoré

mise à jour : 10 novembre 2023

1. Deux notions de vérité

$\vdash G$ la formule G est valide / démontrable dans u !n système de preuves (calcul des séquents ou autre)

$\mathcal{M} \models G$ la formule G est vraie dans l'interprétation (ou dans la $\mathcal{L}$-structure) $\mathcal{M}$

Démontrable $\rightarrow$ vraie dans toute $\mathcal{L}$-structure / interprétation (heureusement !)

2. Complétude

Un objectif majeur du cours est de mettre en rapport ces deux notions centrales déjà présentée :
— les preuves (calcul des séquents, ou autres)
— les modèles (ou interprétations)

Vrai dans tout modèle $\leftrightarrow$ Démontrable :

> **Théorème de complétude (Gödel, 1929) : $X_1, ..., X_n \vdash C$ est démontrable (par exemple dans le calcul des séquents) si et seulement si toute interprétation qui rend $X_1, ..., X_n$ vrais rend C vraie.**

Ce qui est dessus s'appelle la complétude forte. La complétude simple est le même théorème sans les $X_1, \ldots, X_n$.

3. Compléments

Afin de présenter le théorème de complétude,
quelques compléments : ‘

- Rappels interprétations / modèles / $\mathcal{L}$-structure
- Modèles égalitaires
- Théories / axiomes
- Déductions à la Hilbert

4. Interprétations

Si on omet le formalisme $[\![\cdots]\!]^I_{[d/x;d'/y,\cdots]}$, c'est simple et naturel :

$A \wedge B$ est vraie dans I quand
A est vrai ET B est vrai dans I

$A \Rightarrow B$ est vraie dans I quand
SI A est vrai dans I ALORS B est vrai dans I

$\forall x.A[x]$ vrai dans I quand
pour toute valeur d du domaine $A[d/x]$ vraie dans I

$\exists x.A[x]$ vrai dans I quand
s'il existe une valeur d du domaine telle que $A[d/x]$ vraie dans I

5. Théories / axiomes

On considère un langage du premier ordre $\mathcal{L}$.

Une théorie est un ensemble pas forcément fini
de formules closes de $\mathcal{L}$.

Une interprétation (domaine, interprétation des prédicats et des symboles de fonction) s'appelle aussi une $\mathcal{L}$-structure.
Pour "Toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont vraies." on peut aussi dire :

$\mathcal{L}$ est un modèle de $\mathcal{T}$.

L'interprétation $\mathcal{L}$ valide $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est satisfaite dans $\mathcal{L}$.

6. Conséquence logique et incohérence

Une théorie $\mathcal{T}$ st dite <u>contradictoire</u> ou <u>insatistiable</u> s'il n'existe pas de $\mathcal{L}$-structure dans laquelle elle soit satisfaite. Dans le cas contraire, $\mathcal{T}$ est dite consistante.

Une formule close C est conséquence sémantique d'une théorie $\mathcal{T}$ si et seulement si toute $\mathcal{L}$-structure satisfaisant toutes les formules de $\mathcal{T}$ satisfait C.

Si C est conséquence sémantique de C' et réciproquement, on dit que C et C' sont sémantiquement équivalentes.

Si on remplace dans une formule une sous formule par une sous formule qui lui est équivalente, les formules obtenues sont équivalentes.

7. Modèles égalitaires.... ou pas

On note E l'égalité.

Première approche : "E" est un prédicat spécial interprété par l'égalité

Deuxième approche "E" est un prédicat binaire satisfaisant les axiomes suivants TE :

- $\forall x.xEx$
- $\forall x, y.xEy \Rightarrow y = x$
- $\forall x, y, z.xEy \wedge yEz \Rightarrow xEz$
- pour tout symbole f de fonction p-aire :
  $\forall x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots y_p. [\wedge_{1 \leq i \leq p} \, x_i E y_i] \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_p) E f(y_1, \ldots, y_p)$
- pour tout prédicat p-aire :
  $\forall x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots y_p. [R(x_1, \ldots, x_p) \wedge (\wedge_{1 \leq i \leq p} (x_i E y_i)] \Rightarrow R(y_1, \ldots, y_p)$

8. Modèle quotient

Soit $\mathcal{T}$ une théorie . Soit $\mathcal{T} \cup ET$ la théorie obtenue en ajoutant les axiomes de l'égalité.

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} \models ET$ et F une formule à n variables libres, si $a_i I(E) b_i$ pour tout i entre 1 et n alors :

$$\mathcal{M} \models F[a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n] \quad ssi \quad \mathcal{M} \models F[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n]$$

(les éléments de D équivalents par E ont les mêmes propriétés)

Comme l'interprétation $I(E)$ de E est une relation d'équivalence, et on peut considérer le modèle quotient I^q dont les éléments sont les classes d'équivalence modulo $I(E)$ en posant

$$(cl(a_1), \ldots, cl(a_n)) \in I^q(R) \quad ssi \quad (a_1, \ldots, a_n) \in I(R)$$

$I^q(f)(cl(a_1), \ldots, cl(a_n)) = cl(I(f)(a_1, \ldots, a_n))$ — c'est le "=" du modéle.

9. Modèle égalitaire ou non... c'est pareil

1) Une théorie $\mathcal{T}$ avec un prédicat E admet un modèle $\mathcal{M}^{eq}$ où $I(E)$ est l'égalité dans le modèle c.-à-d. $I(E) = \{(x,x) | x \in D\}$.

si et seulement si

2) $\mathcal{T} \cup ET$ admet un modèle $\mathcal{M}$ (où E est interprétée par une relation d'équivalence compatible avec le langage, pas forcément par l'égalité).

<u>Justification :</u> 1) => 2) le modèle égalitaire M^{eq} de $\mathcal{T}$ 1) convient aussi pour 2) : c'est un modèles de $\mathcal{T} \cup ET$ (car l'égalité satisfait les axiomes de l'égalité.

2) => 1) on obtient un modèle égalitaire de $\mathcal{T}$ en quotientant par $I(E)$ le modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T} \cup ET$. On a $aI(E)b$ ssi $cl(a) = cl(b)$. $\square$

10. Démonstrations formelles à la Hilbert

Une démonstration de la formule ϕ dans une théorie $\mathcal{T}$ est une suite **finie** de n formules $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \phi_n$ dont la dernière est $\phi_n = \phi$ et dont chaque ligne ϕ_i, $i \leq n$ est soit

- une formule de $\mathcal{T}$: $\phi_i \in \mathcal{T}$
- un instance d'un axiome propositionnel
- une instance d'un axiome de quantification
- une formule $\phi_i = C$ obtenue par modus ponens à partir de 2 lignes déjà obtenues $\phi_k = A \Rightarrow C$, $\phi_j = A$ avec $j < i$ et $k < i$
- une formule $\phi_i = \forall x.C$ obtenue par généralisation à partir de $\phi_j = C$ avec $j < c$.

11. Un axiome est :

— une instance d'une tautologie du calcul propositionnel — une instance s'obtient en remplaçant une variable propositionnelle par une formule du premier ordre. On peut aussi dire que ces axiomes s'obtiennent tous à partir des axiomes du calcul propositionnel.

— une formule de la forme $(\exists x.G) \Rightarrow (\neg\forall x.\neg G)$ ou $(\neg\forall x.\neg G) \Rightarrow (\exists x.G)$

— une formule de la forme $(\forall x.H \Rightarrow G) \rightarrow (H \Rightarrow \forall x.G)$ sans x dans H

— une formule de la forme $(\forall x.G[x]) \Rightarrow G[t/x]$ — les variables du terme t ne doivent pas être quantifiées par un quantificateur de G.

12. Les tautologies du calcul propositionnels

s'obtiennent toutes par modus ponens à partir des axiomes suivant :

- $S = (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $K = p \Rightarrow q \Rightarrow r$
- $I = p \Rightarrow p$ (se déduit de K et S)
- $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $p \Rightarrow q \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$
- $p \Rightarrow (p \vee q)$
- $q \Rightarrow (p \vee q)$
- $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$

13. Conséquence et cohérence

Une formule est conséquence de la théorie $\mathcal{T}$ lorsque $\mathcal{T} \vdash C$ c.-à-d.il existe une démonstration formelle de conclusion C à partir de $\mathcal{T}$.

Une théorie $\mathcal{T}$ est cohérente lorsqu'il n'y a pas de formule G telle que
$\mathcal{T} \vdash G$ et $\mathcal{T} \vdash \neg G$.

Si C est conséquence de $\mathcal{T}$ alors $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \mathcal{T} \cup C$.
En effet, les axiomes sont vrais dans $\mathcal{M}$, les formules de $\mathcal{T}$ aussi, et la vérité est préservée par les règles de déduction.

On peut clore une théorie par déduction : il suffit d'ajouter à $\mathcal{T}$ toutes les conséquences de $\mathcal{T}$ et on notera $\mathcal{T}^+$ le résultat.

On en déduit que $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}^+$

14. Propriétés : finitude

Si $\mathcal{T} \vdash G$ alors il existe un sous ensemble fini $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ de formules de $\mathcal{T}$ tel que $\mathcal{T}_0 \vdash G$.

Justification : Propriété importante mais... évidente ! $\square$

En particulier si n'est pas cohérente, c'est-à-dire $\mathcal{T} \vdash \perp$ alors $\mathcal{T}$ contient une théorie finie incohérente $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ avec $\mathcal{T}_0 \vdash \perp$.

15. Union filtrante de théories

Si on a un ensemble de théories $\mathcal{T}_i, i \in I$ tel que pour deux théories $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j$ il existe $\mathcal{T}_k \supset \mathcal{T}_i \cup \mathcal{T}_j$ (union filtrante) et que chaque $\mathcal{T}_i$ est cohérente alors $\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est une théorie cohérente.

<u>Justification :</u> En effet, s'il y a une contradiction, elle est entre nombre fini de formules $G_1, \ldots, G_n$ de $\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i$. Chacune de ces formules G_i est dans une théorie $\mathcal{T}_{j_i}$. A cause de la propriété d'union filtrante, en procédent deux par deux, l'union de ces théories $\mathcal{T}_{j_i}$ est incluse dans l'une des $\mathcal{T}_k$. Les formules $\mathcal{T}_{j_i}$ sont donc toutes dans $\mathcal{T}_k$ et sont contradictoires, qui contredit que $\mathcal{T}_k$ soit cohérente. $\square$

16. Lemme de la déduction

(*) $\mathcal{T} \cup \{H\} \vdash G$ si et seulement si $\mathcal{T} \vdash H \Rightarrow G$ (**)

Justification : (**) entraîne (*) est évident par modus ponens $\square$

17. Lemme de la déduction suite

Justification (suite): voyons maintenant que (*) entraine (**)
étant donnée une preuve (suite de formules) $G1, \ldots, G_n = G$ utilisant H
transformons la
en une preuve $H \Rightarrow G_1, \ldots, H \Rightarrow G_n = G$ n'utilisant pas H
en intercalant si besoin quelques lignes entre $H \Rightarrow G_i$ et $H \Rightarrow G_{i+1}$

Si $G_i = H$ on a $H \Rightarrow H$ tautologie.

Si G_i tautologie, $H \Rightarrow G_i$ aussi.

Si G_i est un axiome (quantificateur) ou une formule de $\mathcal{T}$
on place la tautologie $G_i \Rightarrow (H \Rightarrow G_i)$ entre $H \Rightarrow G_{i-1}$ et $H \Rightarrow G_i$
on écrit G_i qui est un axiome ou une formule de $\mathcal{T}$
et par modus ponens on obtient $H \Rightarrow G_i$ $\square$

18. Lemme de la déduction — fin

Justification (suite et fin):

Si G_i est obtenu par modus ponens à partir
— de G_j avec $j < i$
— et de $G_k = G_j \Rightarrow G_i$ avec $k < i$
on a $H \Rightarrow G_j$ et $H \Rightarrow G_j \Rightarrow G_i$

on insère l'axiome $S : (H \Rightarrow G_j \Rightarrow G_i) \Rightarrow (H \Rightarrow G_j) \Rightarrow (H \Rightarrow G_i)$ et avec deux modus ponens, on obtient $H \Rightarrow G_i$.

Si $G_i = \forall x.G_j$ obtenu par généralisation à partir de G_j avec $j < i$
on a déjà $H \Rightarrow G_j$ sur une ligne précédente
par généralisation cette ligne donne $\forall x.H \Rightarrow G_j$
On insère l'axiome $(\forall x.(H \Rightarrow G_j)) \Rightarrow (H \Rightarrow G_j)$
— H close donc sans x —
et on conclut par modus ponens.

$\square$

19. Une conséquence simple mais utile

$\mathcal{T} \vdash G$ si et seulement si $\mathcal{T} \cup \{\neg G\}$ non cohérente.

Justification : Facile :

Si $\mathcal{T} \vdash G$ alors $\mathcal{T} \cup \{\neg G\}$ démontre G et $\neg G$.

Réciproquement, si $\mathcal{T} \cup \{\neg G\}$ incohérente, $\mathcal{T} \cup \{\neg G\}$ démontre n'importe quelle formule notamment G. D'après le lemme de la déduction, $\mathcal{T} \vdash \neg G \Rightarrow G$ et comme $(\neg G \Rightarrow G) \Rightarrow G$ est une tautologie, on obtient $\mathcal{T} \vdash G$ par modus ponens. $\square$

20. Séquents et systèmes déductifs à la Hilbert

Systèmes déductifs LK et Hilbert équivalents au sens où

LK démontre G à partir de la théorie finie $\mathcal{T}_0 = H_1, \ldots, H_n$

si et seulement si

Il existe une démonstration formelle à la Hilbert de G dans T.

Justification :
C'est un exercice assez simple mais long... (ne traiter que quelques cas)

les axiomes sont dérivables dans le calcul des séquents, et les deux règles, modus ponens et généralisation aussi

réciproquement les règles du calcul des séquents sont dérivables dans un systèmes à la Hilbert

$\square$

21. Séquents et systèmes déductifs à la Hilbert

Pourquoi voir les deux formalismes, s'ils sont équivalents ?

Le calcul des séquents a de bonnes propriétés, qui font qu'il est parfait pour la recherche de preuves surtout sans axiomes propres, règles d'égalité, et si les hypothèses sont en nombre fini.

Mais certaines logiques sont décrites par des axiomes à la Hilbert n'ont pas de calcul des séquents....
— logiques temporelles (GL : LTL ou CTL)
— croyances/connaissances (IA : jeux, SMA)

Définir éfinir une logique par des axiomes à Hilbert, est assez simple : par exemple, $G \Rightarrow \Diamond G$ si G est vraie alors il est possible que G soit vraie.

22. Complétude

Vrai dans tout modèle $\sim$ Démontrable.

> **Théorème de complétude (Gödel, 1929) :** $X_1, ..., X_n \vdash C$ **est démontrable (par exemple dans le calcul des séquents) si et seulement si toute interprétation qui rend** $X_1, ..., X_n$ **vrais rend** C **vraie.**

Ce qui est dessus s'appelle la complétude forte. La complétude simple est le même théorème sans les $X_1, \ldots, X_n$.

23. Soundness / validité

SEQUENTS : si pour une interprétation donnée et pour toute assignation des variables libres les séquents prémisses de la règles sont vrais, alors le séquent conclusion est vrai pour cette intérprétation et pour toute assignation des variables libres (il peut y en avoir en moins).
— Il est judicieux vérifier la correction d'une partie des règles pour s'en convaincre.

HILBERT : Si pour une interprétation donnée les formules de la théorie utilisées dans une démonstration à la Hilbert sont vraies, alors la conclusion de la démonstration est vraie alors la conclusion de la démonstration est vraie pour toute assignation des variables libres restantes, s'il en reste.
— C'est plus évident. Les axiomes sont vrais, les formules de la théorie sont supposées vraies, et la généralisation tout comme le modus ponens préservent la vérité.

24. Model existence lemma

<u>Model Existence Lemma :</u> Si un ensemble de formules est cohérent (c.-à-d.consistent, c.-à-d.s'il ne démontre pas $\perp$) alors il admet un modèle — et donc un modèle égalitaire, cf. premiers transparents.

On procède ainsi :

1. on part d'un ensemble cohérent de formules, une théorie $\mathcal{T}$
2. on complète cette théorie en une théorie de Henkin $\bar{\mathcal{T}}$
   — pour tout F soit $\mathcal{T} \vdash F$ soit $\mathcal{T} \vdash \neg F$
   — avec des témoins de Henkin pour les formules existentielles
3. on construit un modèle dont le domaine est constitué
   des termes de la syntaxe (attention c'est source de confusion)
4. G vrai dans ce modèle SSI G démontrable dans $\bar{\mathcal{T}}$
5. ce modèle satisfait donc toute formule de $\bar{\mathcal{T}}$
   et donc a fortiori toute formule de $\mathcal{T}$

25. Model existence lemma $\Rightarrow$ complétude

La contraposée (équivalente) du Model Existence Lemma s'exprime en termes d'insatisfiabilité et d'incohérence :

> **<u>Contraposée du MEL</u> Si un ensemble de formules n'admet pas de modèle (insatisfiable) alors cet ensemble de formules entraîne $\perp$ (dans le calcul des séquents, ou par résolution).**

Si une formule F est vraie dans tout modèle alors sa négation $\neg F$ n'est vraie dans aucun modèle et donc, par la contraposée du Model Existence Lemma, $\neg F \vdash \perp$ est démontrable. On notera que la résolution est bien adaptée pour dériver une contradiction.

26. Un peu de vocabulaire

Une **théorie** $\mathcal{T}$ sur un langage $\mathcal{L}$
est un ensemble <u>pas forcément fini</u> de formules closes de ce langage.

F **est une conséquence d'une théorie** $\mathcal{T}$, notation abusive $\mathcal{T} \vdash F$,
s'il existe une démonstration du séquent
$T_1, \ldots, T_n \vdash F$ avec $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{T}$ (fini)
(ou de $\vdash F$ à partir de $\vdash T_1$, $\vdash T_2$,..., et $\vdash T_n$).

Une théorie sur un langage $\mathcal{L}$ est dite **cohérente**
s'il n'existe pas de formule F telle que $\mathcal{T} \vdash F$ et $\mathcal{T} \vdash \neg F$.

Une théorie est dite **complète**,
si pour toute formule close on a $\mathcal{T} \vdash F$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg F$.

Vocabulaire : certains auteurs ne distinguent pas $\mathcal{T}$ cohérente ($\mathcal{T} \nvdash \perp$, notion syntaxique) de $\mathcal{T}$ consistante ($\mathcal{T}$ admet un modèle, notion sémantique) ; ce n'est pas grave, ces deux notions sont en fait équivalentes, cela découlera du théorème de complétude.

27. Témoins de Henkin et théorie de Henkin

Une théorie admet des témoins de Henkin
si pour toute formule à une variable libre $F[v]$
il existe une constante c telle que $(\exists v.\ F[v]) \Rightarrow F[c]$

Une **théorie de Henkin** est une théorie
– cohérente,
– complète,
– et qui possède des témoins de Henkin.

28. Toute théorie de Henkin admet un modèle

On considère un modèle $\mathcal{H}$ dont les éléments sont les **termes clos** (construits à partir des constantes à l'aide des fonctions comme $f(g(a,b),a)$ où a et b sont des constantes).
Attention : les termes de la syntaxe sont des éléments du modèle !

On interprète constantes et fonctions par elles-mêmes :

$$I(c) = c \qquad I(f)(t_1,t_2) = f(t_1,t_2) \qquad etc.$$

L'interprétation d'un symboles de prédicat n-aire R est définie ainsi :

$I(R)(t_1,...,t_n) = 1$ si et seulement si $\mathcal{T} \vdash R(t_1,...,t_n)$.

Nous allons vérifier par induction sur la construction de la formule F que F est vraie dans $\mathcal{H}$ si et seulement si $\mathcal{T} \vdash F$.

29. "vrai dans $\mathcal{H}$" $\Leftrightarrow$ "démontrable"

On procède par induction sur la formule.

Le cas de base (une formule atomique) est vrai par construction.

Traitons le cas d'une formule de la forme $\forall x F$
<u>Si $\mathcal{T} \vdash \forall x F$ alors $\forall x F$ est vrai dans $\mathcal{H}$.</u>
Preuve : Si $\mathcal{T} \vdash \forall x F$ alors pour tout terme t ($\forall t \in \mathcal{H}$) on a $\mathcal{T} \vdash F[t/x]$,
comme cette formule contient moins de connecteurs,
par hypothèse d'induction $F[t/x]$ est vraie dans $\mathcal{H}$.
Comme $F[t/x]$ est vrai dans $\mathcal{H}$ pour tout élément de $\mathcal{H}$,
et par définition de $I(\forall x F)$ dans un modèle, $\forall x F$ est vraie dans $\mathcal{H}$.
<u>Si $\forall x F$ est vrai dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{T} \vdash \forall x F$.</u>
Preuve : On va montrer la contraposée.
SI $\mathcal{T} \nvdash \forall x F$ comme $\mathcal{T}$ est complète, on a $\mathcal{T} \vdash \neg\forall x F$.
Donc $\mathcal{T} \vdash \exists x \neg F$, et il y a une constante c
telle que $\mathcal{T} \vdash (\exists x \neg F) \Rightarrow \neg F[c]$ et donc $\mathcal{T} \vdash \neg F[c]$.
Comme $\mathcal{T}$ est cohérente $\mathcal{T} \nvdash F[c]$
et par hypothèse d'induction, $F[c]$ est fausse dans $\mathcal{H}$
et donc $\forall x.F$ est faux dans $\mathcal{H}$.

30. "vrai dans $\mathcal{H}$" $\Leftrightarrow$ "démontrable"

On procède par induction sur la formule.
Traitons le cas d'une formule de la forme $\neg F$

Si $\mathcal{T} \vdash \neg F$ alors $\neg F$ est vrai dans $\mathcal{H}$.
Preuve : Si $\mathcal{T} \vdash \neg F$ alors $\mathcal{T} \nvdash F$ car $\mathcal{T}$ cohérente.
comme F contient moins de connecteurs,
par hypothèse d'induction F n'est pas vraie dans $\mathcal{H}$.
et donc $\neg F$ est vraie dans $\mathcal{H}$.

Si $\neg F$ est vrai dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{T} \vdash \neg F$.
Preuve : Si $\neg F$ est vrai dans $\mathcal{H}$ alors F est fausse dans $\mathcal{H}$.
Comme F est plus petite que $\neg F$ on peut lui appliquer l'hypothèse d'induction, et donc $\mathcal{T} \nvdash F$, mais comme $\mathcal{T}$ est complète on a $\mathcal{T} \vdash \neg F$.

31. "vrai dans $\mathcal{H}$" $\Leftrightarrow$ "démontrable"

On procède par induction sur la formule.
Traitons le cas d'une formule de la forme $F \wedge G$

Si $\mathcal{T} \vdash F \wedge G$ alors $F \wedge G$ est vraie dans $\mathcal{H}$.
Preuve : Si $\mathcal{T} \vdash F \wedge G$ alors $\mathcal{T} \vdash F$ et $\mathcal{T} \vdash G$.
comme F et G contiennent moins de connecteurs,
par hypothèse d'induction F et G sont vraies dans $\mathcal{H}$.
et donc $F \wedge G$ est vraie dans $\mathcal{H}$.

Si $F \wedge G$ est vraie dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{T} \vdash F \wedge G$.
Preuve : si $F \wedge G$ est vraie dans $\mathcal{H}$, alors F et G sont vraies dans $\mathcal{H}$
comme F et G sont plus petites que $F \wedge G$ on peut leur appliquer l'hypothèse d'induction, donc $\mathcal{T} \vdash F$ et $\mathcal{T} \vdash G$ et donc $\mathcal{T} \vdash F \wedge G$.

Cela clos la preuve par induction, car les autres cas ($\exists, \vee, \Rightarrow$) s'expriment en fonction des cas traités ($\forall, \neg, \wedge$).

32. Existence de modèle pour une théorie de Henkin

On voit que toute formule de $\mathcal{T}$ est vraie dans $\mathcal{H}$ car $\mathcal{T} \vdash F$ pour toute formule $F \in \mathcal{T}$.

33. Théorie cohérente $\to$ théorie de Henkin

Toute théorie cohérente $\mathcal{T}$ sur un langage $\mathcal{L}$ peut être étendue en une théorie de Henkin $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ sur un langage $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$.

Soit $\mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}$ étendu
par une infinité dénombrable de constante c_i
et soit F_n une énumération des formules closes sur le langage $\mathcal{L}'$
(cf. rappels énumération).

On construit une suite de théories $\mathcal{T}_n$ avec $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$ sur $\mathcal{L}'$ telles que :
— $\mathcal{T}_n$ est cohérente.
— $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$
— $\mathcal{T}_n$ contient un nombre fini de formules en plus de $\mathcal{T}_0$.
— $F_n \in \mathcal{T}_n$ or $\neg F_n \in \mathcal{T}_n$

La théorie de Henkin étendant $\mathcal{T}$ sera $\cup \mathcal{T}_n$.

34. Théorie cohérente $\rightarrow$ théorie de Henkin

A partir de notre énumération des formules closes de $\mathcal{L}'$ on définit une suite G_n de formules closes :
— si $\mathcal{T}_n \cup \{F_{n+1}\}$ est cohérente, alors $G_{n+1} = F_{n+1}$
— si $\mathcal{T}_n \cup \{F_{n+1}\}$ n'est pas cohérente,
comme $\mathcal{T}_n$ est cohérente, on a $\mathcal{T} \vdash \neg F_n$ et on pose $G_n = \neg F_n$

$\mathcal{T}_{n+1}$ est défini à partir de $\mathcal{T}_n$ ainsi :

si G_{n+1} est de la forme $\exists v H[v]$ avec $H[v]$ à une seule variable libre v
alors $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T} \cup \{G_{n+1}, H[c_{n+1}]\}$
sinon $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{G_{n+1}\}$

35. $\mathcal{T}_{n+1}$ est cohérente

Si G_n n'est pas de la forme $\exists v H[v]$
alors $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T} \cup \{G_{n+1}\}$ est cohérent par construction.
si G_n est de la forme $\exists v H[v]$
alors $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\exists v.H[v], H[c_n/v]\}$
Montrons que $\mathcal{T}_{n+1}$ est cohérente par l'absurde.
Si $\mathcal{T}_n \cup \{\exists v.H[v], H[c_n/v]\}$ n'est pas cohérente
comme $\mathcal{T}_n \cup \{\exists v.H[v]\}$ est cohérente par construction,
c'est que $\mathcal{T}_n, \{\exists v.H[v]\} \vdash \neg H[c_n/v]$.
Comme c_n n'apparait pas dans $\mathcal{T}_n$ ni dans $\exists v.H[v]$
on a d'après R ci-dessous $\mathcal{T}_n \cup \{\exists v.H[v]\} \vdash \forall x.\neg H[x] \vdash \neg(\exists x.H[x])$,
ce qui n'est pas possible car $\mathcal{T}_n \cup \{\exists v.H[v]\}$ est cohérente.

Remarque R : si $\mathcal{T}^* \vdash F[c/v]$ avec $F[v]$
à une seule variable libre v et et que ni $\mathcal{T}^*$ ni $F[v]$
ne contiennent la constante c alors $\mathcal{T}^* \vdash \forall x.F[x]$.
Evident en calcul des séquents, la restriction sur le $\forall$ est satisfaite.

36. Théorie cohérente $\rightarrow$ théorie de Henkin

$\mathcal{T}^+ = \bigcup_n \mathcal{T}_n$ est une théorie de Henkin :

$\mathcal{T}^+$ cohérente : toute incohérence repose sur un nombre **fini** N de formules, qui sont toutes incluses dans l'un des $\mathcal{T}_N$ et chaque $\mathcal{T}_n$ est cohérente ;

$\mathcal{T}^+$ complète par construction, car $\mathcal{T}^+$ contient toute formule close de $\mathcal{L}'$ ou sa négation

$\mathcal{L}'$ contient les témoins de Henkin pour toute formule existentielle et l'implication est conséquence de $\mathcal{T}^+$

37. Existence d'un modèle, fin

Récapitulons ce que nous avons montré :

Soit une théorie cohérente $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{L}$,
on peut étendre son langage en $\mathcal{L}'$
et compléter $\mathcal{T}$ en une théorie de Henkin $\mathcal{T}^+$.
Cette théorie $\mathcal{T}^+$ admet un modèle I.
Ce modèle I satisfait toutes les formules de $\mathcal{T}^+$
et donc a fortiori toutes les formules de $\mathcal{T}$.

Ce qui démontre le Model Existence Lemma :

Toute théorie cohérente admet au moins un modèle.

38. Complétude

Si $\mathcal{T}$ est une théorie cohérente
et si F est une formule vraie dans tout modèle de $\mathcal{T}$
alors $\mathcal{T} \vdash F$.

En effet, si $\mathcal{T} \nvdash F$ alors $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$
est cohérente et a un modèle,
qui est un modèle de $\mathcal{T}$ ne satisfaisant pas F.

39. Modèle égalitaire...ou pas

Nous avons montrer que toute théorie cohérente $\mathcal{T}$ admet un modèle...

Mais si $\mathcal{T}$ utilise l'égalité ce modèle n'est pas forcément égalitaire !

Si on ajoute à cette théorie $\mathcal{T}$ les axiomes de l'égalité la théorie obtenue $\mathcal{T}^=$ reste cohérente.

$\mathcal{T}^=$ admet donc un modèle, et son quotient comme défini précédemment est un modèle égalitaire de $\mathcal{T}$.

40. Validité, cohérence et complétude

On sait que les axiomes du calcul des prédicats sont vraies
et que les règles préservent la vérité.
(pour tout système déductif : Hilbert, séquents, déduction naturelle,...)

Remarque : (1) $\mathcal{T}$ consistante si et seulement si $\mathcal{T}$ cohérente (2)

Justification : (2)$\Rightarrow$(1) $\mathcal{T}$ cohérente entraîne $\mathcal{T}$ consistante :
c'est le *model existence lemma* vu précédemment.

2) Supposons que $\mathcal{T}$ ne soit pas cohérente.
On a des preuves de $\mathcal{T} \vdash H$ et de $\mathcal{T} \vdash \neg H$ et donc de $\mathcal{T} \vdash \perp$.
Et comme les règles préservent la vérité, dans tout modèle I de $\mathcal{T}$
$I(\perp)$ serait **vrai** ! ! ! ! C'est impossible, $\mathcal{T}$ n'a donc pas de modèle.

$\square$

41. Compacité du calcul des prédicats

Si toute partie finie d'une théorie $\mathcal{T}$ admet un modèle.
Alors $\mathcal{T}$ toute entière admet un modèle.

Toute partie finie de $\mathcal{T}$ est cohérente
donc $\mathcal{T}$ est cohérente
(une incohérence est une preuve de $\perp$
qui n'utilise qu'un nombre fini de formules de $\mathcal{T}$).
Comme $\mathcal{T}$ est cohérente, elle admet un modèle.

42. Axiomatisable, finiment axiomatisable

Soit χ une propriété que les $\mathcal{L}$-structures peuvent avoir ou non.

Cette propriété χ st dite axiomatisable s'il existe une théorie telle que $\mathcal{M}$ satisfait χ si et seulement si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$.

Cette propriété χ est dite finiment axiomatisable s'il existe une (1) formule θ (une conjonction finie de formule est une formule) telle que $\mathcal{M}$ satisfait χ si et seulement si $\mathcal{M} \models \theta$.

Une propriété est finiment axiomatisable si et seulement si sa négation est finiment axiomatisable.

43. Isomorphismes et équivalence élémentaire

Deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont isomorphes s'il existe une bijection g de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ telle que pour tout prédicat R $\mathcal{M} \models R(d_1, \ldots, d_n)$ si et seulement si $\mathcal{N} \models R(gd_1, \ldots, gd_n)$ et pour tout symbole fonctionnel f $gf^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_n) = f^{\mathcal{N}}(gd_1, \ldots, gd_n)$.

Deux $\mathcal{L}$-structures isomorphes satisfont les mêmes formules closes.

Deux $\mathcal{L}$-structures sont dites élémentairement équivalentes si et seulement si elles satisfont les mêmes formules closes.

Deux structures peuvent être élémentairement équivalentes sans être isomorphes (par exemple $(Q, <)$ et $(R, <)$.

44. Conséquence de la compacité

On considère la formule F_n : il y a au moins n éléments distincts

$$F_n : \exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$

La notion "la $\mathcal{L}$-structure est finie" n'est pas axiomatisable. Si c'était axiomatisable par une formule $\mathcal{T}$, considérons la théorie $\mathcal{T} \cup \{F_n | n \in N\}$.
Toute partie finie est est cohérente.
Par compacité nous aurions un modèle ayant plus de 0,1,2,3,... éléments et **fini** ! ! !

45. Arithmétique de Peano

$$\forall x \quad \neg(sx = 0)$$
$$\forall x \quad (x = 0 \vee \exists y\,(x = s(y)))$$
$$\forall x \quad \forall y(sx = sy \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x \quad (x + 0 = x)$$
$$\forall x \forall y \quad (x + sy = s(x + y))$$

$$\forall x \quad (x \cdot 0 = 0)$$
$$\forall x \forall y \quad (x \cdot sy = (x \cdot y) + x)$$

Pour toute formule $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ à n + 1 variables libres,

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad (\phi\,(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge (\forall x\,(\phi\,(y, x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \phi\,(sy, x_1, \ldots, x_n))))$$
$$\Rightarrow \forall x\; \phi\,(x, x_1, \ldots, x_n)$$

46. Des modèles étranges de PA

On peut définir $x \leq y$ par $\exists z.x + z = y$

Et on peut considérer la formule $F_n : \exists x.s^n(0) \leq x$.

Toute partie finie de PA avec les F_n à un modèle

Compacité..... donc :

Il existes des modèles de l'arithmétique avec des entiers infinis !!!!
(et toutes les propriétés de PA sont vraies dans ces modèles)
par ex. les entiers infinis ont une décomposition en facteurs premiers
"tout comme les entiers normaux" etc.

47. Théories complètes, sémantiquement

$\mathcal{T}$ est sémantiquement complète si $\mathcal{T}$ est consistante
et si (1) tous les modèles de $\mathcal{T}$ sont élémentairement équivalents.

THEOREME : $\mathcal{T}$ est sémantiquement complète si $\mathcal{T}$ est consistante
et si (2) pour toute formule close G l'une des deux formules G ou $\neg G$
est conséquence sémantique de $\mathcal{T}$

Si (2) est faux, alors on peut trouver deux modèles qui satisfont $\mathcal{T}$, un qui satisfait G l'autre qui satisfait $\neg G$. Ces deux modèles ne sont donc pas élémentairement équivalents.

Si (1) est faux, on peut trouver deux modèles de $\mathcal{T}$ qui ne sont pas élémentairement équivalent, c'est-à-dire une formule close H vraie dans l'un et fausse dans l'autre. Donc ni H ni $\neg H$ n'est conséquence de $\mathcal{T}$.

48. Théorème de Lowenheim Skolem

Théorème de Lowenheim Skolem "descendant" : Tout modèle infini d'une théorie contient un sous modèle dénombrable qui lui est élémentairement équivalent

Justification : Un peu comme la construction du modèle de Henkin, mais dans le modèle.
On ajoute comme équivalence entre les termes celles qui sont vraies dans le modèle (en plus de celles qui sont vraies dans T). On quotiente on choisi un élément de M par classe.
On ajoute les formules vraies dans M ; elles ne posent pas de problème puisque le quotient identifie des termes dont les interprétation dans M sont égales.
(On peut aussi partir de la théorie de M.) $\square$

49. Paradoxe de Skolem

On peut faire des modèles dénombrables de toute théorie ayant un modèle infini.

Donc il y a un modèle dénombrable de la théorie des ensembles ! ! !

Théorie des ensemble : unique prédicat $\in$, binaire, et tout individu est un ensemble, par ex. $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Pourtant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable ! ! !

— Modèle dénombrable : bijection entre le domaine et $\mathbb{N}$ externe.
— $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dénombrable : bijection à l'intérieur du modèle entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ Pas définissable.

Dans le modèle dénombrable n'existent que les ensembles dont on on peut parler par des formules du langage, lesquelles sont dénombrables.