

# Sémantique de la logique du premier ordre

David Delahaye

Faculté des Sciences  
[David.Delahaye@lirmm.fr](mailto:David.Delahaye@lirmm.fr)

Licence L3 2023-2024

# Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

## Définitions préliminaires

- $\mathcal{V} \equiv$  ensemble de variables d'individu  $x, y$ , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \equiv$  ensemble de symboles de fonctions  $f, g$ , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} \equiv$  ensemble de symboles de prédicats  $P, Q$ , etc. ;
- $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \emptyset$  ;
- Arité (nombre d'arguments)  $m : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{N}$  :
  - ▶ Exemple : pour  $f(x, y)$  avec  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ ,  $m(f) = 2$  ;
  - ▶ Exemple : pour  $P(x, y, z)$  avec  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ ,  $m(P) = 3$ .

# Logique du premier ordre (ou calcul des prédicats)

## Termes du premier ordre

- Plus petit ensemble  $\mathcal{T}$  t.q. :
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  alors  $x \in \mathcal{T}$  ;
  - ▶ Si  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}$ .
- Les constantes sont des fonctions d'arité 0 ;
- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans nos exemples.

## Formules du premier ordre

- Plus petit ensemble  $\mathcal{F}$  t.q. :
  - ▶ Si  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $P(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{F}$  ;
  - ▶  $\perp, \top \in \mathcal{F}$  ;
  - ▶ Si  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\neg \Phi \in \mathcal{F}$  ;
  - ▶ Si  $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$  alors  $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$  ;
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\forall x. \Phi, \exists x. \Phi \in \mathcal{F}$ .

# Sémantiques

## Logique classique

- Une formule est toujours vraie ou fausse ;
- Que je puisse en démontrer la validité ou non ;
- Logique bi-valuée (vrai, faux) ;
- Logique du « tiers exclu » :  $A \vee \neg A$ .

## Logique intuitionniste ou constructive

- Une formule est vraie, fausse, ou « on ne sait pas » ;
- Si on ne sait en démontrer la validité, alors « on ne sait pas » ;
- Logique tri-valuée d'une certaine manière ;
- Le « tiers exclu » n'est pas admis dans cette logique.

# Sémantique (classique)

## Interprétation

- Une interprétation  $I$  est un ensemble non vide  $D_I$ , appelé le domaine de l'interprétation, muni d'éléments  $I(c)$  de  $D_I$  pour chaque symbole de constante (fonction d'arité 0), et d'une application  $I(P)$  de  $D_I^n$  vers  $\mathcal{B}$  pour chaque symbole de prédicat  $P$  d'arité  $n$ .

## Affectation

- Une affectation  $\rho$  est une application de  $\mathcal{V}$  vers  $D_I$  ;
- Pour toute affectation  $\rho$ ,  $\rho[v/x]$  est l'affectation envoyant chaque variable  $y$  autre que  $x$  vers  $\rho(y)$ , et  $x$  vers  $v$ .

## Remarque

- Important : dans un premier temps, nous ne considérerons que les fonctions d'arité 0 (constantes) dans la sémantique.

# Sémantique (classique)

## Termes

- Dans une interprétation  $I$ , et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  alors  $\llbracket x \rrbracket_\rho^I = \rho(x)$  ;
  - ▶ Si  $c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  d'arité 0 (constante) alors  $\llbracket c \rrbracket_\rho^I = I(c)$ .

# Sémantique (classique)

## Prédicats

- Dans une interprétation  $I$ , et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - ▶ Si  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  alors
$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_{\rho}^I = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_{\rho}^I, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\rho}^I);$$

# Sémantique (classique)

## Formules propositionnelles

- Dans une interprétation  $I$ , et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - ▶  $\llbracket \top \rrbracket_{\rho}^I = T$ ,  $\llbracket \perp \rrbracket_{\rho}^I = F$  ;
  - ▶ Si  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\llbracket \neg \Phi \rrbracket_{\rho}^I = \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I$  ;
  - ▶ Si  $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$  alors :
    - ★  $\llbracket \Phi \wedge \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \vee \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \vee_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \Rightarrow \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \Leftrightarrow \Phi' \rrbracket_{\rho}^I = \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho}^I \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_{\rho}^I$ .
  - ▶ où  $\neg_{\mathcal{B}}$ ,  $\wedge_{\mathcal{B}}$ ,  $\vee_{\mathcal{B}}$ ,  $\Rightarrow_{\mathcal{B}}$ , et  $\Leftrightarrow_{\mathcal{B}}$  sont les fonctions d'interprétation de la logique propositionnelle.



# Sémantique (classique)

## Quantificateurs

- Dans une interprétation  $I$ , et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors :
    - ★  $\llbracket \forall x. \Phi \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket'_{\rho[v/x]}$  ;
    - ★  $\llbracket \exists x. \Phi \rrbracket'_\rho = \bigvee_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket'_{\rho[v/x]}$ .
  - ▶ où  $\bigwedge$  est la conjonction distribuée et  $\bigvee$  la disjonction distribuée :
    - ★  $\bigwedge_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \wedge_{\mathcal{B}} f(v_1) \wedge_{\mathcal{B}} \dots$ , avec  $v_0, v_1, \dots \in D_I$  ;
    - ★  $\bigvee_{v \in D_I} f(v) = f(v_0) \vee_{\mathcal{B}} f(v_1) \vee_{\mathcal{B}} \dots$ , avec  $v_0, v_1, \dots \in D_I$ .

# Sémantique (classique)

## Définition

- Dans une interprétation  $I$ , et modulo l'affectation  $\rho$ , la sémantique des termes et des formules est définie par :
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  alors  $\llbracket x \rrbracket_\rho^I = \rho(x)$  ;
  - ▶ Si  $c \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  d'arité 0 (constante) alors  $\llbracket c \rrbracket_\rho^I = I(c)$  ;
  - ▶ Si  $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$  d'arité  $n$  et  $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  alors  $\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_\rho^I, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_\rho^I)$  ;
  - ▶  $\llbracket \top \rrbracket_\rho^I = T$ ,  $\llbracket \perp \rrbracket_\rho^I = F$  ;
  - ▶ Si  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors  $\llbracket \neg \Phi \rrbracket_\rho^I = \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I$  ;
  - ▶ Si  $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$  alors :
    - ★  $\llbracket \Phi \wedge \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \vee \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \vee_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \Rightarrow \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$  ;
    - ★  $\llbracket \Phi \Leftrightarrow \Phi' \rrbracket_\rho^I = \llbracket \Phi \rrbracket_\rho^I \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \Phi' \rrbracket_\rho^I$  .
  - ▶ Si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\Phi \in \mathcal{F}$  alors :
    - ★  $\llbracket \forall x. \Phi \rrbracket_\rho^I = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho[v/x]}^I$  ;
    - ★  $\llbracket \exists x. \Phi \rrbracket_\rho^I = \bigvee_{v \in D_I} \llbracket \Phi \rrbracket_{\rho[v/x]}^I$  .

# Sémantique (classique)

## Remarque

- La sémantique donnée est valable pour des formules closes ou non ;
- Si une formule  $\Phi$  est close, sa sémantique  $\llbracket \Phi \rrbracket'_\rho$  ne dépend pas de  $\rho$  ;
- Pour une formule close  $\Phi$ , sa sémantique sera donc notée  $\llbracket \Phi \rrbracket'$  ;
- Par la suite, nous ne considérerons que des formules closes.

## Vocabulaire

- Soit  $\Phi$  une formule et  $I$  une interprétation ;
- $I$  est un modèle de  $\Phi$  ou  $I$  satisfait  $\Phi$ , noté  $I \models \Phi$ , ssi  $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$  ;
- Un ensemble  $G$  de formules entraîne  $\Phi$ , noté  $G \models \Phi$ , ssi toutes les interprétations satisfaisant toutes les formules de  $G$  en même temps (les modèles de  $G$ ) sont aussi des modèles de  $\Phi$ , c'est-à-dire quand  $I \models \Phi'$  pour tout  $\Phi' \in G$  implique  $I \models \Phi$  ;
- $\Phi$  est valide ssi  $\Phi$  est vraie dans toute interprétation ( $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$  pour tout  $I$ , noté  $\models \Phi$ ), et est invalide sinon ;
- Une formule valide est aussi appelée une tautologie ;
- $\Phi$  est satisfiable ssi elle est vraie dans au moins une interprétation ( $\llbracket \Phi \rrbracket^I = T$  pour un certain  $I$ , c'est-à-dire elle a un modèle), et est insatisfiable sinon.

## Vocabulaire

- Toutes les formules valides sont satisfiables, et toutes les formules insatisfiables sont invalides ;
- Ceci divise l'espace des formules en trois catégories :
  - ▶ Les valides (toujours vraies) ;
  - ▶ Les insatisfiables (toujours fausses) ;
  - ▶ Les formules contingentes (parfois vraies, parfois fausses).
- La validité et l'insatisfiabilité se correspondent via négation :  $\Phi$  est valide ssi  $\neg\Phi$  est insatisfiable,  $\Phi$  est insatisfiable ssi  $\neg\Phi$  est valide.

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \gg \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$



# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶  $\llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I =$   
 $\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I =$   
 $I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I =$   
 $I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I =$   
 $I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$   
 $T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P) \rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶  $\llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I =$   
 $\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I =$   
 $I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I =$   
 $I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I =$   
 $I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) =$   
 $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$

# Exemples

## Modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T. \end{aligned}$$



# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \wedge_B I(P)(a_1) = \\ & T \Rightarrow_B T \wedge_B F = F. \end{aligned}$$

- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_B \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \wedge_B I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_B T \wedge_B F = F. \end{aligned}$$

- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.



# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &\llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ &I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ &I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ &T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Contre-modèle

- Soit l'interprétation  $I$  avec  $D_I = \{a_0, a_1\}$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(P) = \{(a_0, T), (a_1, F)\}$  ;
- Démontrer que  $I$  est un contre-modèle de :  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  ;
- Démonstration :
  - ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \forall x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(a_0) &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)\rho[v/x](x) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigwedge_{v \in \{a_0, a_1\}} I(P)(v) = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(a_1) = \\ T &\Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$
- La formule  $P(a) \Rightarrow \forall x.P(x)$  est donc contingente.

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \models [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]_\rho^I = \\ & [P(a)]_\rho^I \Rightarrow_B [\exists x.P(x)]_\rho^I = I(P)([a]_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \models \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \models [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]^I = [P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)]_\rho^I = \\ & [P(a)]_\rho^I \Rightarrow_B [\exists x.P(x)]_\rho^I = I(P)([a]_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} [P(x)]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)[x]_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)_\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \models \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$



# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T. \end{aligned}$$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$



# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)_\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket'_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket'_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket'_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket'_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \Rightarrow_B \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_B \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_B I(P)(a_0) \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T \vee_B \dots = T \Rightarrow_B T = T.$

# Exemples

## Validité

- Démontrer que la formule  $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$  est valide ;
- Comme on doit montrer que la formule est vraie dans toutes les interprétations, on se place dans une interprétation quelconque ;
- La seule chose que l'on sait est que  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$ , mais la valeur de  $I(P)$  en  $a_0$  est quelconque ;

- Démonstration :

- ▶ 
$$\begin{aligned} \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \Rightarrow \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho = \\ \llbracket P(a) \rrbracket'_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket'_\rho &= I(P)(\llbracket a \rrbracket'_\rho) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \\ I(P)(I(a)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]} &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \end{aligned}$$
- ▶ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :
  - ★  $I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = T ;$
  - ★  $I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \vee_{\mathcal{B}} \dots = T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T = T.$



# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F} ; \\ & \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket^I_\rho \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_\rho) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket^I_\rho = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

- $I(P)(a_0) = F$  :  $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$  ;
- $I(P)(a_0) = T$  :  $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$



## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

▷ Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

- \*  $I(P)(a_0) = F$  :  $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$  ;
- \*  $I(P)(a_0) = T$  :  $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

• Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

- $I(P)(a_0) = F$  :  $\mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F$  ;
- $I(P)(a_0) = T$  :  $\mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T =$   
 $T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} &= F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F; \\ \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;

- Démonstration :

$$\begin{aligned} \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I &= \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I &= I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) &= \\ I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) &= \mathcal{F}; \end{aligned}$$

- Deux cas selon  $I(P)(a_0)$  :

$$\star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ;$$

$$\begin{aligned} \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) &= T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ T \wedge_{\mathcal{B}} F &= F. \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$



# Exemples

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned}
 &\triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 &\quad \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\
 &\quad I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\
 &\quad I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\
 &\quad I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\
 &\triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\
 &\quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\
 &\quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\
 &\quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\
 &\quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F.
 \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

## Insatisfiabilité

- Démontrer que la formule  $P(a) \wedge \neg \exists x.P(x)$  est insatisfiable ;
- De même que précédemment, on se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0 \in D_I$  et  $I(a) = a_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket^I = \llbracket P(a) \wedge \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & \llbracket P(a) \rrbracket_\rho^I \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket \neg \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = I(P)(\llbracket a \rrbracket_\rho^I) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \llbracket \exists x.P(x) \rrbracket_\rho^I = \\ & I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)\rho[v/x](x) = \\ & I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \mathcal{F}; \\ & \triangleright \text{Deux cas selon } I(P)(a_0) : \\ & \quad \star I(P)(a_0) = F : \mathcal{F} = F \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = F ; \\ & \quad \star I(P)(a_0) = T : \mathcal{F} = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} \bigvee_{v \in D_I} I(P)(v) = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (I(P)(a_0) \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} (T \vee_{\mathcal{B}} \dots) = T \wedge_{\mathcal{B}} \neg_{\mathcal{B}} T = \\ & \quad T \wedge_{\mathcal{B}} F = F. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$



# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$



# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démontrer que la formule  $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$  est valide ;
- On se place dans une interprétation  $I$  quelconque, avec  $a_0, b_0 \in D_I$ ,  $I(a) = a_0$ , et  $I(b) = b_0$  ;
- Démonstration :

$$\begin{aligned} & \triangleright \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I = \llbracket \exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_\rho = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} \llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (\llbracket P(x) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \llbracket x \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket P(a) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} \wedge_{\mathcal{B}} \llbracket P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P) \rho[v/x](x) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket a \rrbracket^I_{\rho[v/x]}) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(\llbracket b \rrbracket^I_{\rho[v/x]})) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(I(a)) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(I(b))) = \\ & \quad \bigvee_{v \in D_I} (I(P)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) = \\ & \quad (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \\ & \quad (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots = \mathcal{F}. \end{aligned}$$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} (I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T !$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$



## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

# Exemples

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$   
 $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

$$\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T!$

## Exotisme de la logique classique

- Démonstration :

- ▶  $\mathcal{F} = (I(P)(a_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}}$

- $(I(P)(b_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(P)(a_0) \wedge_{\mathcal{B}} I(P)(b_0)) \vee_{\mathcal{B}} \dots;$

- ▶ Quatre cas selon  $I(P)(a_0)$  et  $I(P)(b_0)$  :

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = F, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} F \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = F :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} (F \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} F) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T;$

- ★  $I(P)(a_0) = T, I(P)(b_0) = T :$

- $\mathcal{F} = (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} (T \Rightarrow_{\mathcal{B}} T \wedge_{\mathcal{B}} T) \vee_{\mathcal{B}} \dots = T.$

- La formule est valide mais il n'y a aucun terme  $t$  tel que  $\llbracket t \rrbracket^I = v$  et  $\llbracket P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b) \rrbracket^I_{\rho[v/x]} = T !$



# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶  $H(x) \equiv x$  est un homme ;
- ▶  $M(x) \equiv x$  est mortel ;
- ▶  $s \equiv$  Socrate.
- ▶  $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1)$  ;
- ▶  $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2)$  ;
- ▶  $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3)$ .

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ .

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶  $H(x) \equiv x$  est un homme ;
- ▶  $M(x) \equiv x$  est mortel ;
- ▶  $s \equiv$  Socrate.

- ▶  $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x)$  ( $\mathcal{H}_1$ ) ;
- ▶  $H(s)$  ( $\mathcal{H}_2$ ) ;
- ▶  $M(s)$  ( $\mathcal{H}_3$ ).

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3$ .

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶  $H(x) \equiv x \text{ est un homme ;}$
- ▶  $M(x) \equiv x \text{ est mortel ;}$
- ▶  $s \equiv \text{Socrate.}$
  
- ▶  $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1) ;$
- ▶  $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2) ;$
- ▶  $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3).$

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3.$

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

- Valider le syllogisme d'Aristote suivant :

- ▶ Tout homme est mortel ;
- ▶ Or Socrate est un homme ;
- ▶ Donc Socrate est mortel.

- Modélisation :

- ▶  $H(x) \equiv x \text{ est un homme ;}$
- ▶  $M(x) \equiv x \text{ est mortel ;}$
- ▶  $s \equiv \text{Socrate.}$
  
- ▶  $\forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \text{ } (\mathcal{H}_1) ;$
- ▶  $H(s) \text{ } (\mathcal{H}_2) ;$
- ▶  $M(s) \text{ } (\mathcal{H}_3).$

On doit démontrer :  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \models \mathcal{H}_3.$

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = T$  :
  - \*  $\llbracket M(s) \rrbracket^I = \llbracket M(s) \rrbracket_\rho^I = I(M)(\llbracket s \rrbracket_\rho^I) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = T$  :
  - \*  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket^I = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_\rho^I =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket_{\rho[v/x]}^I)) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = T$  :
  - \*  $\llbracket H(s) \rrbracket^I = \llbracket H(s) \rrbracket_\rho^I = I(H)(\llbracket s \rrbracket_\rho^I) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - \*  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - \*  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - \* Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - \*  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).



## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_B \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_B I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_B I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_B I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_B I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).



## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
    - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
    - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
    - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
    - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

# Exemples

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).



## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho = \bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) = \bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).

## Syllogisme et conséquence logique

### • Démonstration :

- ▶ Soit  $I$  une interprétation avec  $s_0 \in D_I$  et  $I(s) = s_0$ , et telle que  $I \models \mathcal{H}_1$  et  $I \models \mathcal{H}_2$  ;
- ▶ On doit démontrer que  $I \models \mathcal{H}_3$ , à savoir que  $\llbracket M(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket M(s) \rrbracket' = \llbracket M(s) \rrbracket'_\rho = I(M)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(M)(s_0) = T$  (3).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_1$  signifie que  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket' = \llbracket \forall x. H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_\rho =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} \llbracket H(x) \Rightarrow M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} = \bigwedge_{v \in D_I} (\llbracket H(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]} \Rightarrow_{\mathcal{B}} \llbracket M(x) \rrbracket'_{\rho[v/x]}) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]}) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\llbracket x \rrbracket'_{\rho[v/x]})) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(\rho[v/x](x)) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(\rho[v/x](x))) =$   
 $\bigwedge_{v \in D_I} (I(H)(v) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(v)) = (I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0)) \wedge \dots = T$  ;
  - ★ Ce qui implique que :  $I(H)(s_0) \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$  (1).
- ▶  $I \models \mathcal{H}_2$  signifie que  $\llbracket H(s) \rrbracket' = T$  :
  - ★  $\llbracket H(s) \rrbracket' = \llbracket H(s) \rrbracket'_\rho = I(H)(\llbracket s \rrbracket'_\rho) = I(H)(s_0) = T$  (2).
- ▶ En remplaçant (2) dans (1), on obtient :  $T \Rightarrow_{\mathcal{B}} I(M)(s_0) = T$ , ce qui implique que  $I(M)(s_0) = T$  (3).