Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°5

Exercice 1

On considère deux symboles de prédicat P et Q unaires, un symbole de prédicat R binaire, et un symbole de prédicat S ternaire.

Mettre en forme prénexe les formules suivantes (si la formule initiale n'est pas polie, la mettre sous forme polie au préalable) :

1. $(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists y.P(y)$;
2. $(\forall x.\exists y.R(x,y)) \Rightarrow \exists x.\forall y.R(x,y)$;
3. $(\exists x.\forall y.R(x,y)) \Rightarrow \forall x.\exists y.R(x,y)$;
4. $(P(x) \Rightarrow \forall x.Q(x)) \Rightarrow ((\exists x.P(x)) \Rightarrow \forall x.Q(x))$;
5. $(\exists x.\forall y.(\exists z.S(x,y,z)) \wedge R(x,y)) \Rightarrow \exists y.(\forall x.S(x,y,z)) \wedge \exists x.R(x,y)$.

Exercice 2

On considère deux formules Φ et Φ', où x n'est pas libre dans Φ'.

Démontrer les formules suivantes en utilisant le système LK :

1. $((\forall x.\Phi) \Rightarrow \Phi') \Rightarrow \exists x.\Phi \Rightarrow \Phi'$;
2. $(\exists x.\Phi \Rightarrow \Phi') \Rightarrow (\forall x.\Phi) \Rightarrow \Phi'$.

Exercice 3

On considère deux symboles de prédicat P et Q unaires.

Démontrer la formule suivante en utilisant le système LK :

— $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \Rightarrow \exists x.Q(x)$.

Mettre cette formule sous forme prénexe et démontrer la formule obtenue en utilisant le système LK (pour voir si la validité de la formule a été préservée par la transformation).

Exercice 4

On considère deux symboles de prédicat P et Q unaires, et un symbole de prédicat R binaire.

Clausifier (c'est-à-dire skolémiser, puis mettre en forme clausale) les formules suivantes :

1. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.\forall x.R(x,y)$;
2. $(\exists x.\forall y.R(x,y)) \Rightarrow \forall y.\exists x.R(x,y)$;
3. $((\exists x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee \forall y.P(y)) \wedge \forall x.\exists y.Q(y) \Rightarrow P(x)$.

Exercice 5

On considère deux symboles de prédicat P et Q unaires.

On considère la formule valide suivante :

— $F = (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \Rightarrow \exists x.Q(x)$.

1. Herbrandiser la formule F et démontrer la formule obtenue en utilisant le système LK (pour voir si la validité de la formule a été préservée par la transformation) ;
2. Skolémiser la formule $\neg F$ et démontrer la négation de la formule obtenue en utilisant le système LK (pour voir si l'insatisfiabilité de la formule a été préservée par la transformation).

Exercice 6

On considère trois symboles de fonction f, g et h, respectivement unaire, binaire et ternaire, ainsi que deux constantes a et b.

Donner le mgu des ensembles de formules suivants, s'il existe, en appliquant l'algorithme de Robinson :

1. $\{g(f(x), f(y)), g(f(f(a)), f(z))\}$;
2. $\{h(x, f(a), x), h(h(a, b, y), f(y), h(a, b, a))\}$;
3. $\{g(y, f(f(x))), g(f(a), y)\}$;
4. $\{h(a, x, f(x)), h(a, y, y)\}$;
5. $\{g(x, g(y, z)), g(g(a, b), x), g(x, g(a, z))\}$;