Examen de selección 2023

Matemática

1. ¿Cuántos números del 1000 al 2023 son PESI con 84?
2. Demuestre que para cualquier $n \geq 6$ podemos encontrar un hexágono convexo que puede ser dividido en n triángulos congruentes.
3. Dado un conjunto de 5 números enteros, demuestra que siempre tiene como mínimo un subconjunto no vacío tal que la suma de sus elementos es múltiplo de 5.
4. ¿Cuántos numeros enteros positivos menores que $2^{16} + 2^{15}$ se pueden expresar como la suma de cinco potencias positivas de 2, todas diferentes entre sí?
5. Richi tiene 101 monedas, ubicadas en una fila. Cada moneda es de 10, 20 o 50 céntimos. Se sabe que no hay un grupo de monedas consecutivas cuya suma sea de 60 céntimos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas de 50 céntimos que puede tener Richi?
6. Sea ABC un triángulo equilátero de lado 48 y Q un punto del lado AB tal que $BQ = 26$. Si P es un punto en el interior del triángulo ABC tal que $PA^2 + PC^2 = PB^2$,determine el menor valor entero que puede tomar la longitud del segmento PQ.
7. Inicialmente tenemos un número conformado por 1997 nueves en su representación decimal así:

$$\underbrace{999\ldots999}_{\text{1997 9's}}$$

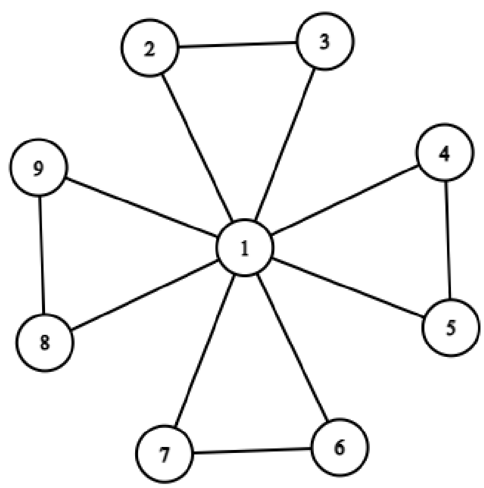
escrito en una pizarra. En cada minuto, se escoge un número de la pizarra y es factorizado en 2 factores, y se borra el número escogido. Cada factor (independientemente) es aumentado o disminuido por 2, y los dos números resultantes son escritos en la pizarra. Por ejemplo si tenemos el número 24 podemos borrarlo para luego factorizarlo en 3 x 8, luego aumentar el factor 3 en 2 y disminuir el factor 8 en 2, quedando en la pizarra los numeros 5 y 6. Con esto, ¿es posible que en algún momento todos los números en la pizarra sean iguales a 9?

8. Se tiene un pantano con piedras enumeradas del 1 al 14 de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

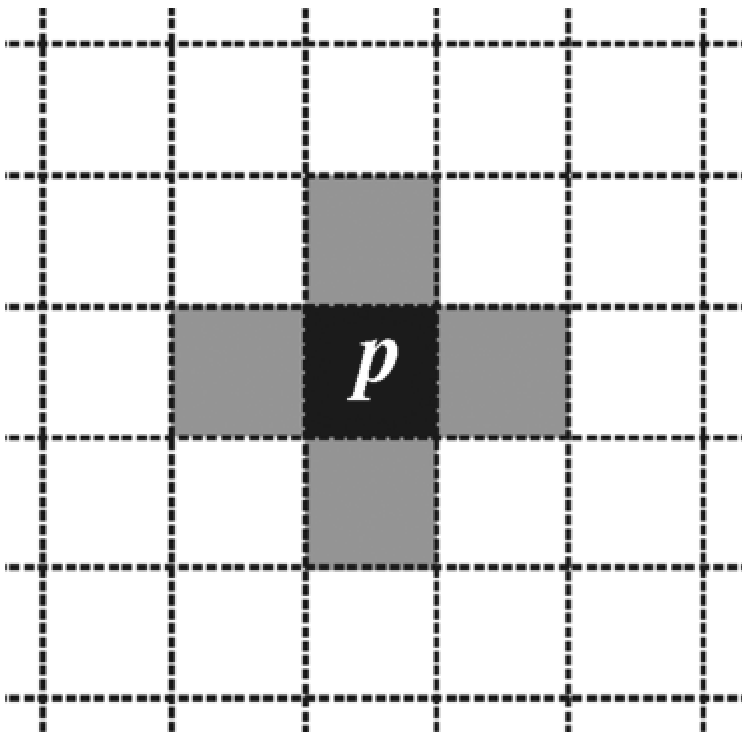
Pepe The Frog puede saltar desde una piedra enumerada n hacia una piedra $n-2$ o hacia una piedra $2n$ sin saliste del pantano, Pepe puede pasar sobre una misma piedra más de una vez. ¿Como máximo por cuantas piedras diferentes puede pasar Pepe en una secuencia de saltos si él puede escoger libremente su piedra inicial?

9. Pandora es un planeta con 9 continentes, algunas de las cuales esán unidas por puentes naturales como se muestra en la siguiente figura (los círculos son los continentes y las líneas son los puentes):



Dado el cambio climatico 4 puentes se destruirán inevitablemente. ¿En cuantos escenarios luego de que se destruyan los 4 puentes, aún se puede viajar desde cualquier contienente a otro?

10. Korhal ubicada en el sector Koprulu es un lugar en el que se desafia las leyes del tiempo y el espacio ya que tiene un terreno infinito. En la metrópolis de Korhal se tienen edificios distribuidos en una cuadricula infinita (en cada cuadricula hay un edificio). Según la constitución de Korhal la altura de cada edificio debe ser igual a el promedio de las alturas de los edificios vecinos (norte, sur, este, oeste). Por ejemplo en la figura el edificio que esta en p tendra la altura promedio de los edificios sombreados.



Probar que para cumplir la constitución de Korhal todos los edificios tienen que tener la misma altura.

Algoritmia

1. Dado un arreglo a de n elementos, imprime cualquier valor que aparece 3 o más veces, o imprime -1 si no existe dicho valor.

   Entrada:

La primera linea contiene el valor de n $(1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5)$, la longitud del arreglo.

La segunda linea contiene n enteros $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ $(1 \leq a_i \leq n)$, los elementos del arreglo.

Salida:

Imprime cualquier valor que aparezca 3 veces o más en el arreglo a, o imprime -1 si no existe dicho valor.

Ejemplos:

Entrada:

```
6
2 1 2 1 2 1
```

Salida:

```
2
```

Entrada:

```
7
1 2 3 2 3 1 4
```

Salida:

```
-1
```

2. Dado N rectángulos, cada uno representados por 2 puntos: la esquina inferior izquierda (X_1, Y_1) y la esquina superior derecha (X_2, Y_2). Halle el área compartida por todos los rectángulos

   Entrada:

   La primera línea contiene el valor de N $(1 \leq N \leq 2 \cdot 10^5)$, la cantidad de rectángulos.

Las siguientes N líneas contendrá 4 números enteros X_1, Y_1, X_2, Y_2 $(-10^4 \leq X_1, Y_1, X_2, Y_2 \leq 10^4)$, los lados del rectangulo serán paralelos a los ejes X e Y

Salida:

Imprime un entero, el área compartida por todos los rectángulos.

Ejemplos:

Entrada:

```
4
0 0 10 10
-1 -1 2 2
-10 0 2 100
-10 -10 10 10
```

Salida:

```
4
```

Entrada:

```
7
0 0 2 3
1 2 3 4
0 0 5 5
0 0 1000 1000
-1000 -1000 -500 -500
-2000 -2000 0 0
-1000 -1000 1000 1000
```

Salida:

```
0
```

3. Tú y un amigo están jugando al siguiente juego:
   - Tu amigo elige un entero positivo X.
   - Tú tienes que entregar una lista de enteros positivos $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_k, (y_i \geq 1)$ tal que cumple:

$$(y_1 + 1) \cdot (y_2 + 1) \cdot (y_3 + 1) \cdots (y_k + 1) = X$$

y obtienes K puntos. Escribe un programa que te permita calcular el máximo K posible.

Entrada:

La primera línea contiene el valor de X $(1 \leq X \leq 10^9)$, el número elegido por tu amigo.

Salida:

Imprime un entero K, el máximo números de puntos posibles que puedes obtener.

Ejemplos:

Entrada:

```
360
```

Salida:

```
6
```

Entrada:

```
46
```

Salida:

```
2
```

4. Se tiene una barra de acero de longitud entera L metros en la cual se colocan N hormigas en diferentes posiciones enteras $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ donde a_i es la posicion de la i-esima hormiga, las hormigas empiezan a moverse en distintas direcciones hacia los extremos de la barra con velocidad de $1\ m/s$.
Dichas direcciones son $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$ donde d_i es la direccion de la i-esima hormiga , aqui d_i puede ser igual a 0 o 1 donde 0 indica que se mueve hacia la

izquierda y 1 se mueve hacia la derecha.
Si dos hormigas se chocan estas cambian de dirección hacia el lado opuesto.

Se le pide encontrar el tiempo en el cual la última hormiga abandona la barra.

Entrada:

La primera línea contiene el valor de n, L $(1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5, 1 \leq L \leq 10^9)$, la cantidad de hormigas y la longitud de la barra respectivamente.

La segunda línea contiene n enteros $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ $(1 \leq a_i \leq L)$.

La tercera línea contiene n enteros $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ $(0 \leq d_i \leq 1)$

Salida:

Imprime un entero, tiempo en el cual la ultima hormiga abandona la barra.

Ejemplos:

Entrada:

```
1 10
3
0
```

Salida:

```
3
```

Entrada:

```
1 10
3
1
```

Salida:

```
8
```

Entrada:

```
4 2023
1899 2 899 901
1 0 1 0
```

Salida:

```
1125
```

5. La *similitud* de dos cadenas de caracteres se define como la longitud de la subsecuencia común más larga. Es decir, la subcadena más larga que se puede obtener de ambas cadenas tras eliminar algunos caracteres, posiblemente 0, y manteniendo su orden.
   Ejemplo:

   - La similitud de las cadenas UNIUNI y UNOUNU es 4, ya que tienen subsecuencias comunes de longitud 4, UNUN, pero ninguna subsecuencia común de longitud 5.
   - La similitud de las cadenas NUOIO y IUNOO es 3, ya que tienen subsecuencias comunes de longitud 3, UOO y NOO, pero ninguna subsecuencia común de longitud 4.
   - La similitud de las cadenas UUUOOO y UUNIUOONO es 6, ya que tienen subsecuencias comunes de longitud 6, UUUOOO, pero ninguna subsecuencia común de longitud 7.

   Se le da una cadena s que consta de las letras U, N, I, O . Necesita encontrar otra cadena que solo contenga estas cuatro letras con la misma longitud que s, y que la similitud con s sea la menor posible.

   Entrada:

   La primera línea contiene el valor de n $(1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5)$, la longitud de la cadena.

   La segunda línea contiene una cadena s de longitud n que consta solamente de letras U, N, I, O.

   Salida:

Imprime una cadena de longitud n tal que su similitud con s sea minima. Si existen varias cadenas con mínima similitud, imprimir cualquiera de ellas.

Ejemplos:

Entrada:

```
5
UNION
```

Salida:

```
OIIUU
```

Explicación:

La similitud de ambas cadenas es 1 y es la mínima posible, pues no existe alguna cadena que tenga similitud 0 con “UNION”.

Entrada:

```
6
UNIUNI
```

Salida:

```
OOOOOO
```

Explicación:

La similitud de ambas cadenas es 0 y es la mínima posible.

Entrada:

```
14
NNIIINUUUNOOOO
```

Salida:

OOOUUUUUUUUUUU