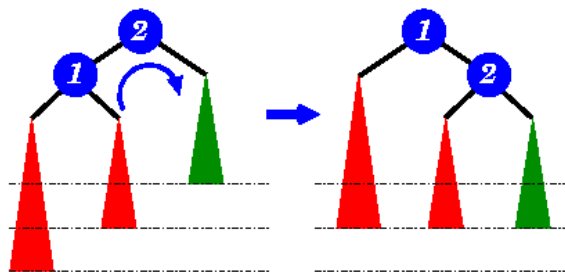


Capítulo

11

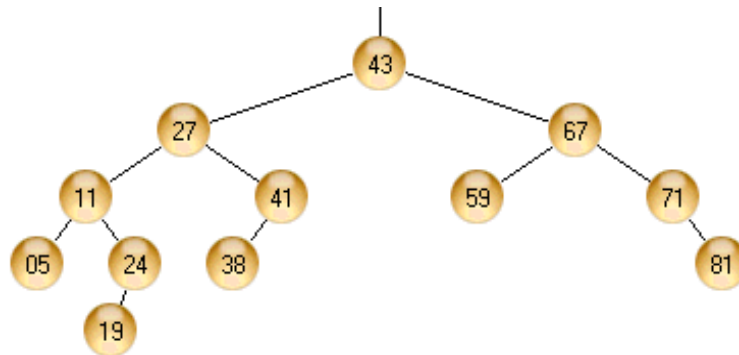
AVL



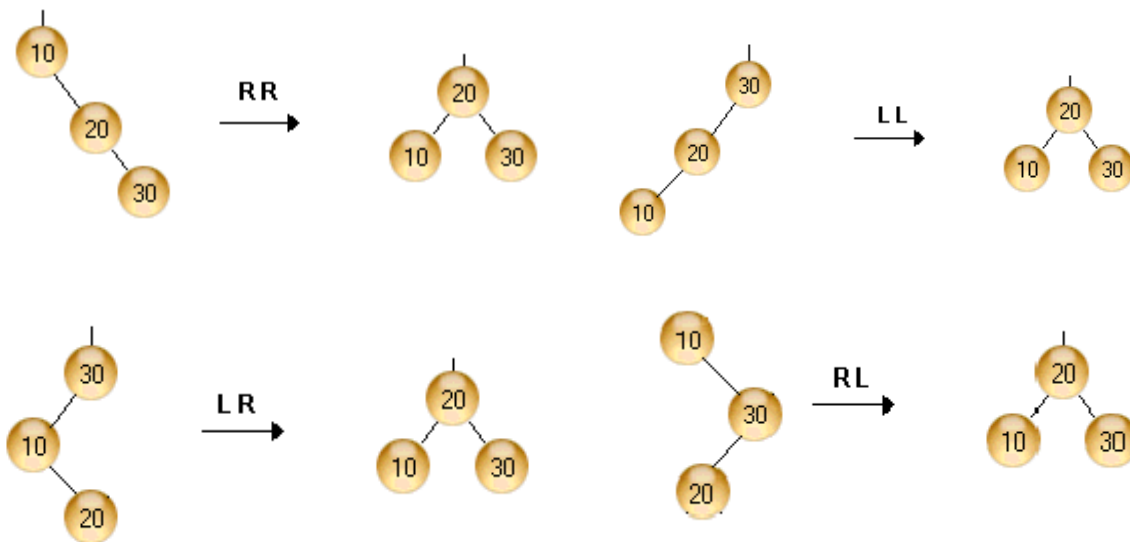
AVL

A **AVL** (Adelson Velskii Landis – 1962) , foi criada pelos matemáticos russos: **Georgy Maximovich Adelson-Velsky** e **Evgenii Mikhailovich Landis**. É uma árvore **altamente balanceada**, isto é, nas inserções e inclusões, procura-se executar uma rotina de balanceamento tal que as alturas das subárvores esquerda e subárvores direita tenham alturas bem próximas.

A figura abaixo ilustra uma árvore AVL balanceada.



Na Inserção e Remoção utiliza-se um processo de balanceamento que pode ser de 4 tipos. O Balanceamento RR, LL, LR e RL que serão explicados mais tarde. A seguir descreve-se estes 4 tipos de balanceamento ilustrando um processo simbólico de rotação.

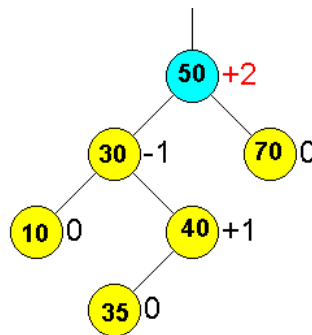


O fator de balanceamento é um coeficiente que servirá para verificar se uma AVL está ou não balanceada. O cálculo deste fator é feito nó a nó fazendo a diferença da altura da sub árvore esquerda (h_E) do nó com a altura da sub árvore direita (h_D).

$$\text{Genericamente : } FB = h_E - h_D$$

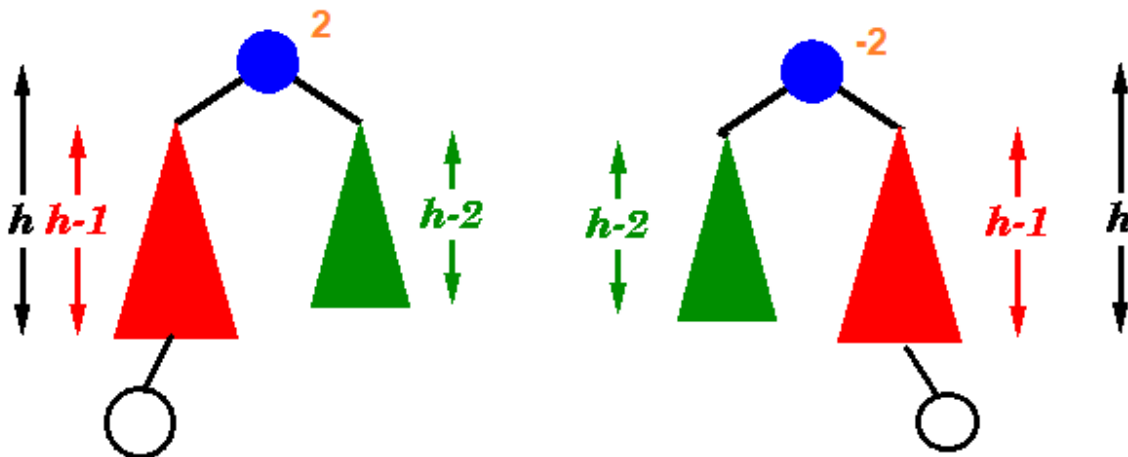
Na figura abaixo pode-se observar que os fatores de balanceamento estão representados pelos números à esquerda dos nós. Por exemplo, no caso da raiz, $h_E = 3$ e $h_D = 1$, logo $FB = 3 - 1 = +2$.

De uma forma geral os nós folhas tem sempre o fator de balanceamento iguais a 0, pois as sub árvores esquerda e direita são nulas.



Quando Balancear ?

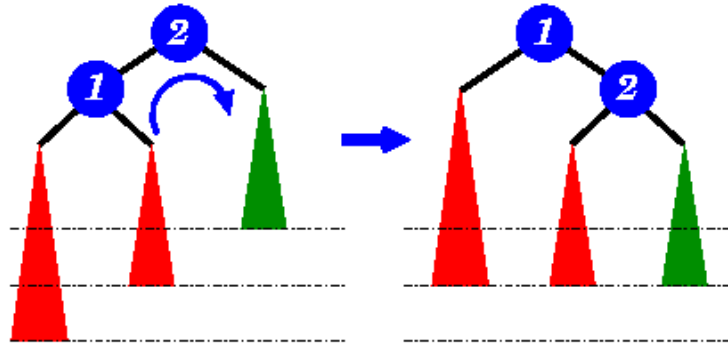
Deve-se balancear sempre que existir um fator de balanceamento igual a +2 ou -2. Caso existam mais de um nó com o fator de balanceamento +2 ou -2, deve-se sempre balancear o nó com o nível mais alto.



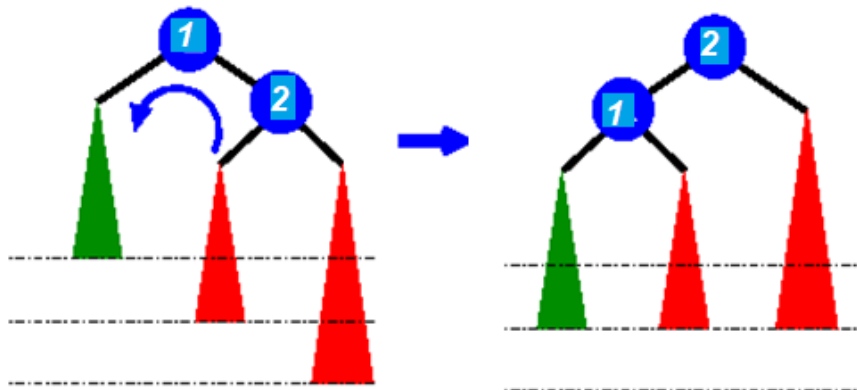
Como Balancear ?

A ideia é aplicar rotações até que elimine os fatores de balanceamento -2 ou 2.

Rotação Righth



Rotação Leftt

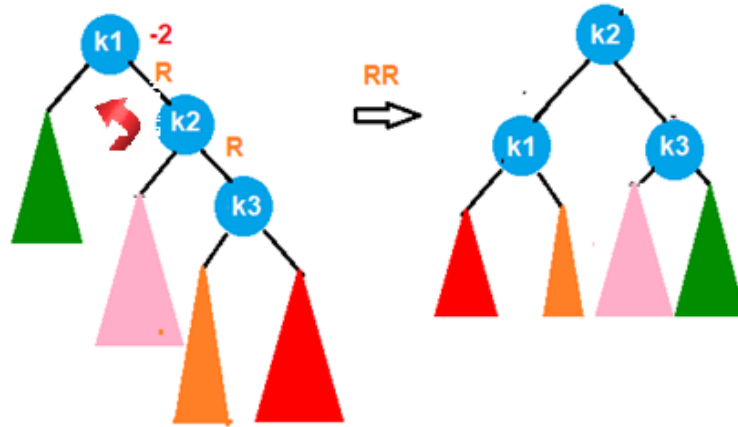


Os balanceamentos são feitos utilizando-se os processos de rotação RR, LL, RL e LR vistos anteriormente.

Tipos de Balanceamento

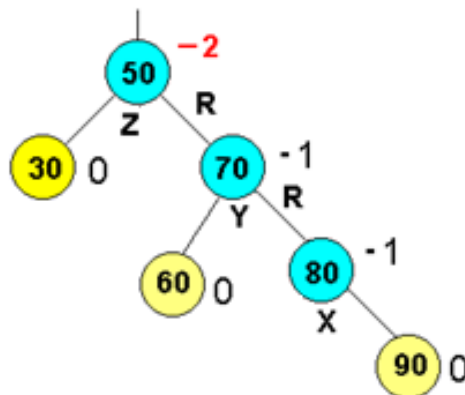
Balanceamento : RR (Direita Direita)

A figura a seguir ilustra, genericamente o balanceamento RR, supondo as chaves $k1 < k2 < k3$.

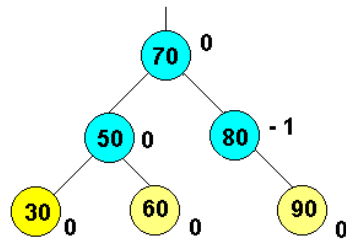


Executa uma rotação simples à esquerda

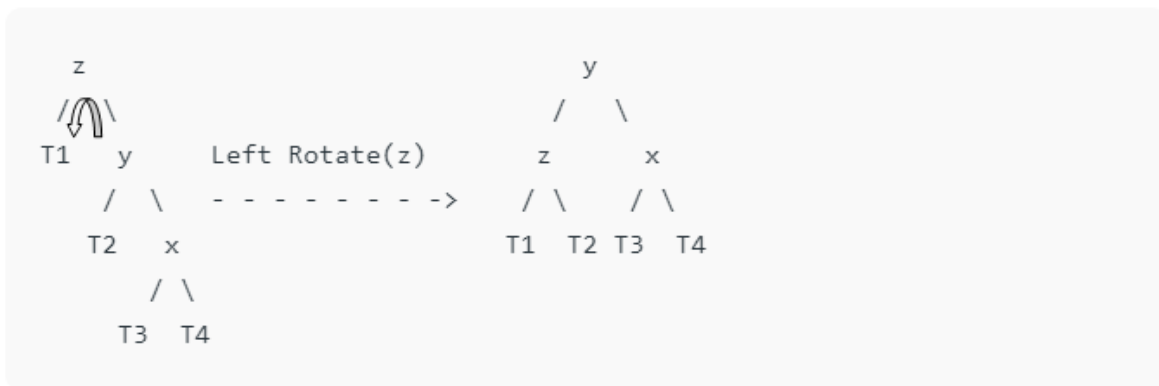
Suponha na figura abaixo que a última célula a ser inserida foi a célula cuja chave é 90. Pode-se observar que na figura abaixo, o nó em cuja chave é 50, tem fator de balanceamento +2, logo deve-se executar o balanceamento. O Balanceamento é dito RR pois a última chave a ser inserida (90) está na subárvore direita do nó de fator de balanceamento e em seguida na subárvore direita do nó filho do nó de fator de balanceamento - 2 .



A figura a seguir ilustra o resultado final deste balanceamento.



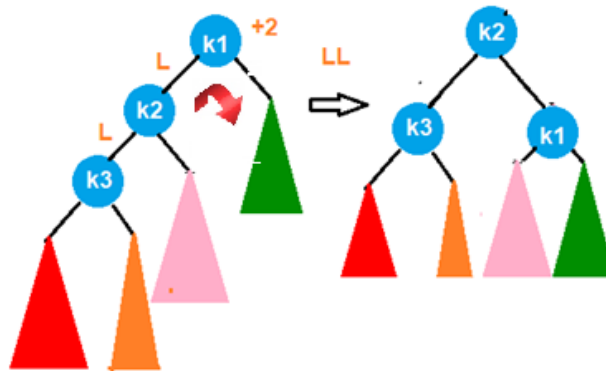
O balanceamento RR, de forma genérica, é feito com uma rotação simples à ESQUERDA do nó Z, da seguinte forma :



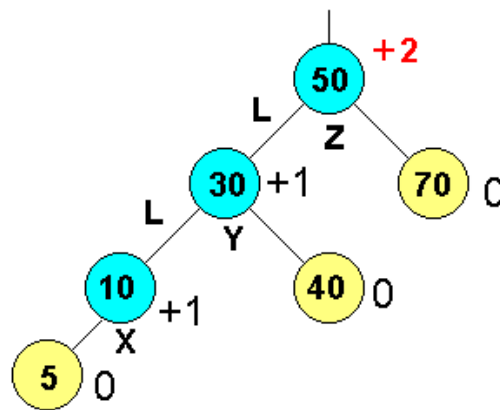
T1, T2 e T3, são sub árvores genéricas.

Balanceamento : LL (Esquerda Esquerda)

A figura a seguir ilustra, genericamente o balanceamento RR, supondo as chaves $k1 > k2 > k3$.

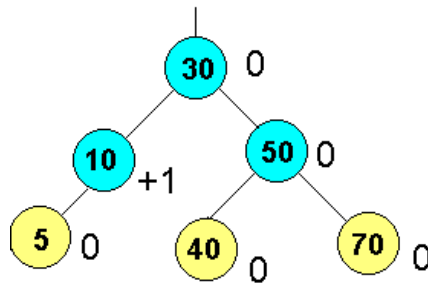


Executa uma rotação simples à direita



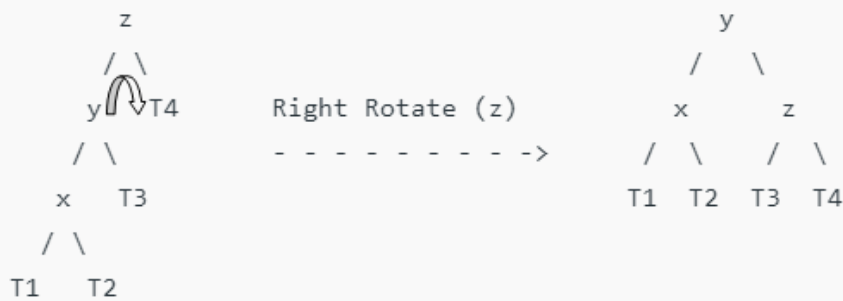
Suponha na figura abaixo que a última célula a ser inserida foi a célula cuja chave é 5. Pode-se observar que na figura abaixo, o nó em cuja chave é 50, tem fator de balanceamento +2, logo deve-se executar o balanceamento. O Balanceamento é dito LL pois a última chave a ser inserida (5) está na subárvore esquerda do nó de fator de balanceamento e em seguida na subárvore esquerda do nó filho do nó de fator de balanceamento + 2 .

A figura abaixo ilustra o resultado deste balanceamento.



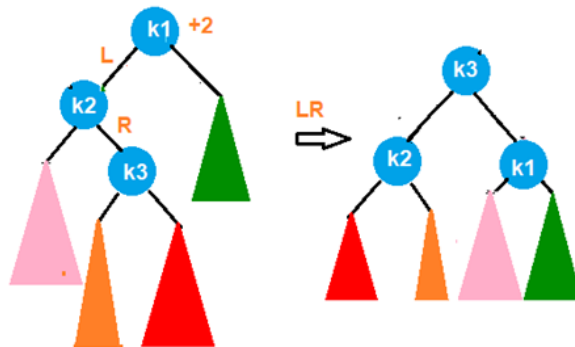
O balanceamento LL, de forma genérica, é feito com uma rotação simples à DIREITA do nó de fator Z, da seguinte forma :

T1, T2, T3 and T4 are subtrees.



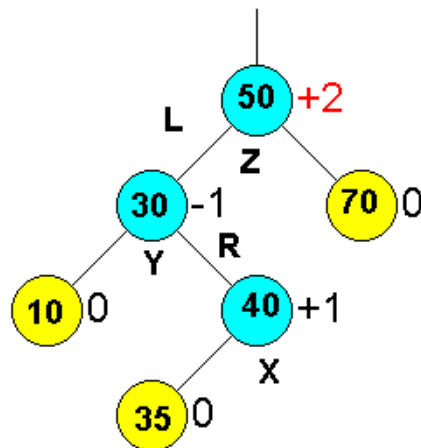
Balanceamento : LR (Esquerda e Direita)

A figura a seguir ilustra, genericamente o balanceamento RR, supondo as chaves $k1 > k2 < k3$.

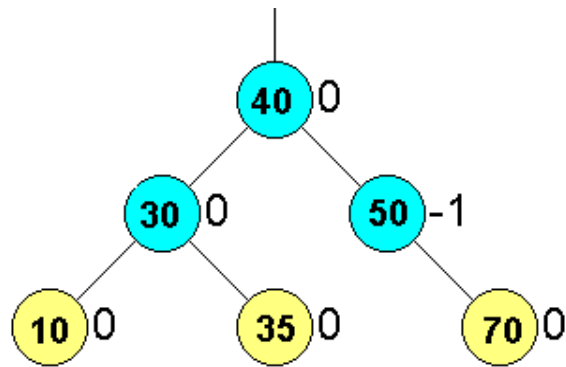


Executa uma rotação à esquerda e em seguida à direita

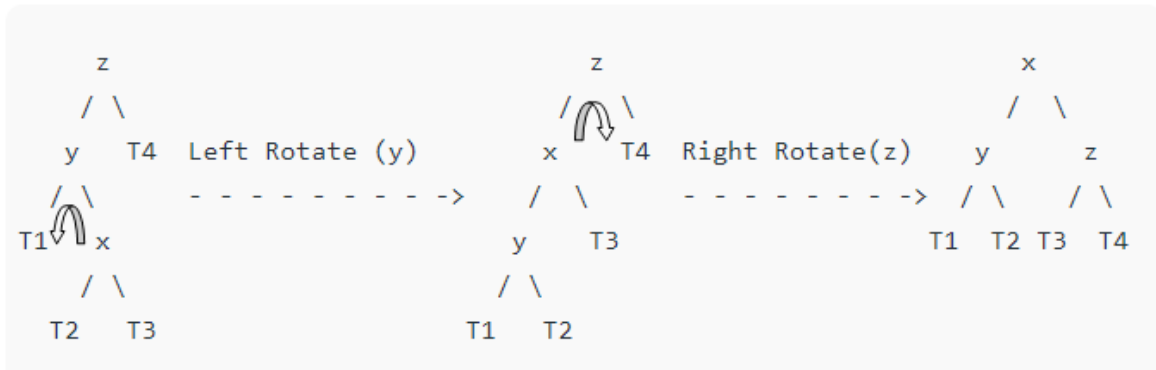
Suponha na figura abaixo que a última célula a ser inserida foi a célula cuja chave é 35. Pode-se observar que na figura abaixo, o nó cuja chave é 50, tem fator de balanceamento +2, logo deve-se executar o balanceamento. O Balanceamento é dito LR pois a última chave a ser inserida está na subárvore esquerda do nó de fator de balanceamento e em seguida na subárvore direita do nó filho do nó de fator de balanceamento + 2 .



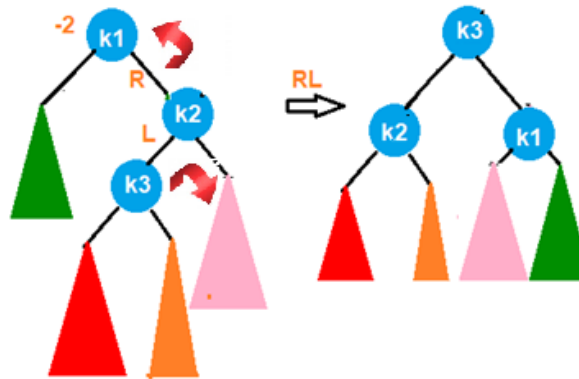
A figura abaixo ilustra o resultado deste balanceamento.



O balanceamento LR, de forma genérica, é feito com uma rotação à ESQUERDA do nó Y e, em seguida, uma rotação à DIREITA do nó Z, da seguinte forma :

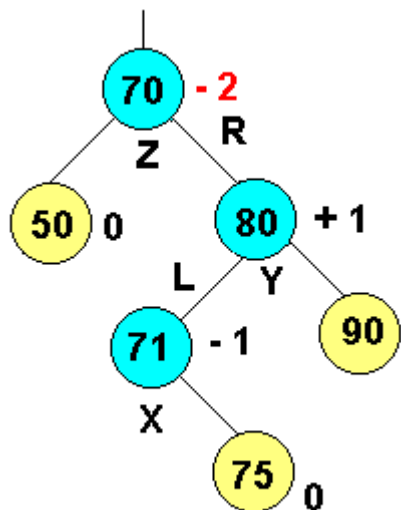


A figura a seguir ilustra, genericamente o balanceamento RR, supondo as chaves $k_1 < k_2 < k_3$.

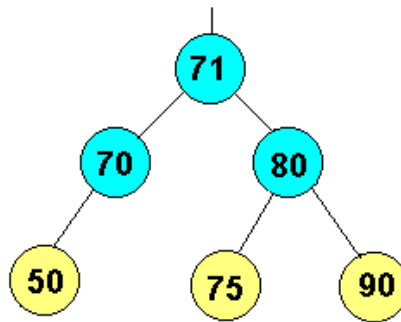


Executa uma rotação à direita e em seguida à esquerda

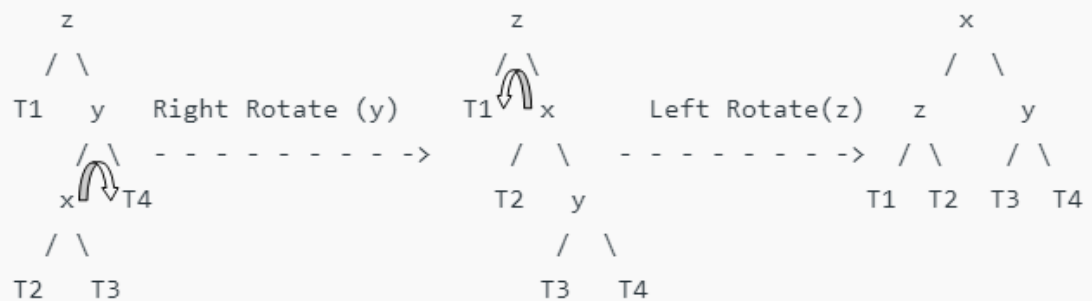
Suponha na figura abaixo que a última célula a ser inserida foi a célula cuja chave é 75. Pode-se observar que na figura abaixo, o nó cuja chave é 70, tem fator de balanceamento +2, logo deve-se executar o balanceamento. O Balanceamento é dito RL pois a última chave a ser inserida (75) está na subárvore direita do nó de fator de balanceamento + 2 (70) e em seguida na subárvore esquerda do nó filho do nó de fator de balanceamento + 2 (80) .



A figura abaixo ilustra o resultado deste balanceamento.



O balanceamento RL, de forma genérica, é feito com uma rotação à DIREITA do nó Y e, em seguida, uma rotação à ESQUERDA do nó Z, da seguinte forma :



Link do applet de AVL

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>

Criar uma AVL 10, 20, 30, 25, 33, 11 e 60.

A primeira célula será sempre a raiz. Logo a raiz será a célula de chave 10, $FB=0$. A figura 6.4 (a) ilustra este procedimento. A segunda chave a ser inserida é a chave 20, maior que a chave da raiz, então insere como filho direito da raiz. Corrigindo os FBs. A figura 6.4 (b) ilustra este procedimento. A terceira chave a ser inserida é a chave 30. Pode-se observar na figura 6.5 (c) que a chave 30 deve ser inserida como filho direito da chave 20. Corrigindo os FBs. Temos que balancear, pois existe um nó com $FB=-2$. No caso é um balanceamento RR.

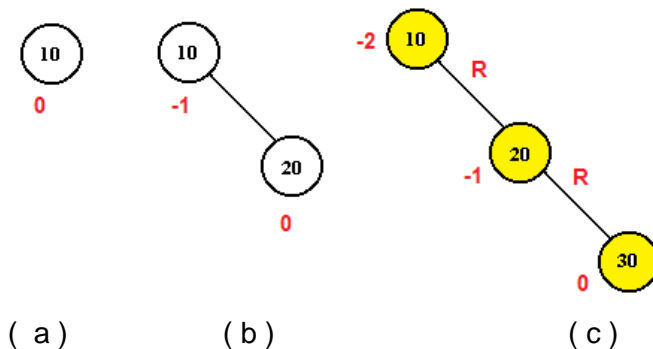
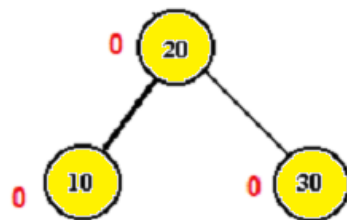


Figura 6.4 - Inserção das chaves 10, 20 e 30.

A figura a seguir ilustra a AVL após o balanceamento.



A próxima chave é a chave 25 que na hierarquia da árvore anterior deverá ser inserida como filho esquerdo da chave 30. A figura 6.4 (d) ilustra a inserção da chave 25. A figura 6.4 (e) ilustra a correção dos FBs.

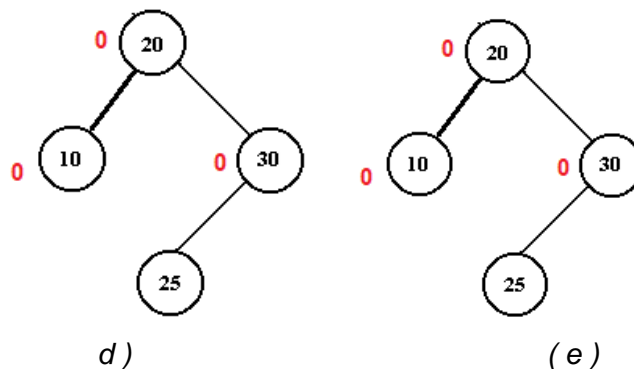


Figura 6.4 (d) e (e) - Inserção da chave 25.

A próxima chave a ser inserida é a chave 33, que na hierarquia da árvore anterior deverá ser inserida como filho direito da chave 30. A figura 6.4 (f) ilustra a inserção da chave 33 com as correções dos FBs.

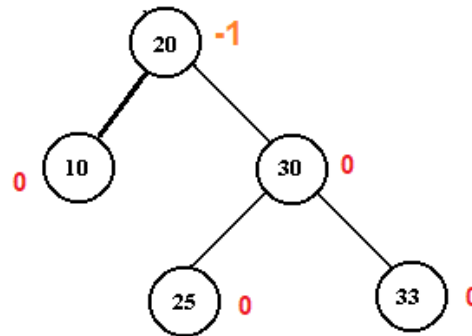


Figura 6.4 (f) - Inserção da chave 33 .

A próxima chave a ser inserida é a chave 60, que na hierarquia da árvore anterior deverá ser inserida como filho direito da chave 33. A figura 6.4 (g) ilustra a inserção da chave 60 com as correções dos FBs. Temos que balancear, pois existe um nó com FB=-2. No caso é um balanceamento RR.

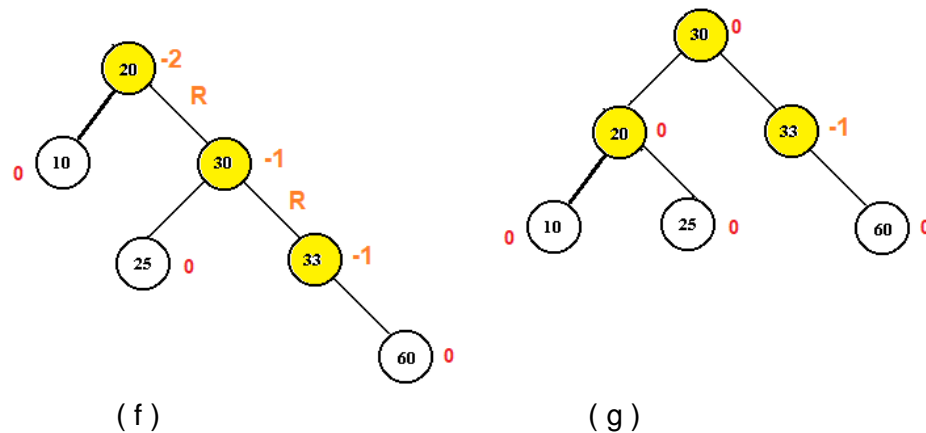


Figura 6.4 - Inserção da chave 60 (f) e o balanceamento RR (g) .

A figura 6.4 (f) ilustra a inserção da chave 60, com as correções dos FBs, e (g) após o balanceamento RR.

Exercícios

1. Construir uma AVL com as chaves 10, 20, 30 , 5, 3, 50, 40, 70, 60 e 90
2. Construir uma AVL com as chaves PSC, INF, ENG, QUI, MAT, LET, MED, ECO e ADM

Bibliografia

1. HOROWITZ, E. ; SAHNI, Sartaj. Fundamental of Data Structures in Pascal. New York, Computer Science Press, 1994.
2. ZIVIANI, N. *Projeto de Algoritmos com Implementação em Pascal e C*. 4ª ed. São Paulo: Pioneira, 1999.
3. Folk, Michael J. & Zoelik, Bill, *File Structures*, Addison-Wesley , 1992 (2ª Edition);
4. Tharp, Alan j., *File organization and Processing*, John Wiley & Sons, Inc., 1988;
5. AHO, A. V. ; HOPCROFT, John E. Data Structures and Algorithms. Massachusetts: Addison Wesley, 1983;