



ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Proyecto: Final

CONTROL DE TRAYECTORIA PARA UN BRAZO ROBÓTICO DISEÑADO PARA MANIPULADOR MÓVIL

Alumnos

Mamani Huanca, Jhoel René
Vilcapaza Goyzueta, Denilson Jean

Curso

Sistemas de Control Avanzado

Profesor

Dr. Juan C. Cutipa Luque

23 de diciembre de 2020

Resumen

En este artículo se presenta el modelado de sistema para controlar la trayectoria del brazo robótico de 2-DOF (grados de libertad), lo que permite una relación para control cinemático de manipuladores móviles. El control preciso de un brazo robótico tiene 2 factores principales de realización, el primer factor es calcular los desplazamientos angulares deseados de las articulaciones del brazo robótico en función de la posición deseada y orientación, el segundo factor es el diseño de una ley de control eficiente y eficaz para lograr los desplazamientos angulares incluyendo una variación externa como es una masa de carga útil. El modelo matemático del brazo se expresa como la suma de los términos conocidos e inciertos al derivar la ley de control propuesta. La incertidumbre variable en el tiempo se expresa mediante una expresión FAT, que evita la necesidad de parametrización lineal del modelo matemático del brazo robótico.

Finalmente se realiza una breve comparación de resultado utilizando control adaptativo con FAT y control LQR

Palabras clave: Control adaptativo, control trayectoria, DOF, manipulación brazo robótico, Técnica de Aproximación de funciones FAT.

Índice general

1. Introducción	2
2. Procedimiento metodológico	4
2.1. Modelo del sistema de 2 grados de libertad	4
2.1.1. Modelo en espacio de estados	6
2.1.2. Simulación del modelo dinámico de brazo 2-GDL	6
2.2. Control adaptativo	8
2.3. Estabilidad	10
2.4. Control LQR para análisis de convergencia	12
2.4.1. Linealización del modelo dinámico	12
2.4.2. Fundamento de control LQR	12
2.4.3. Aplicación	13
3. Resultados	15
3.0.1. Control Adaptativo	15
3.0.2. Control LQR	19
3.0.3. Análisis de resultados	20
4. Conclusiones	22
Bibliografía	23
A. Código	24

Capítulo 1

Introducción

Los robots además de influir en el camino tecnológico a través de avances tecnológicos e investigaciones de nuevos modelados, diseños y control. Se han convertido en una parte integral de los procesos de automatización industrial. El control permite aplicaciones en misiones de robótica que han evolucionado hacia el dominio de servicios, donde se espera que los robots exploten entornos dinámicos desconocidos [2]. Este control del brazo robótico es un problema desafiante principalmente debido a una dinámica compleja e incierta [11]. Los requisitos para los controladores en los manipuladores modernos son que deben proporcionar un alto rendimiento y al mismo tiempo una robustez a la incertidumbre del modelo. Las incertidumbres resultan de la no linealidad y el acoplamiento en las articulaciones del manipulador. La solución de ecuaciones no lineales es de gran importancia para revelar las leyes internas de estos fenómenos, especialmente para algunos problemas prácticos de aplicación científica y de ingeniería. [4]

Para resolver ecuaciones dinámicas no lineales y su aplicación en control es posible aplicar métodos de control a través de redes neuronales, como en [4], donde se desarrolla una formulación del problema y presenta diseño de convergencia estabilidad de modelo ZNN. También se puede aplicar control tradicional como los enfoques de diseño de control convencionales como el derivado integral proporcional (PID) y el regulador cuadrático lineal (LQR) que tienen problemas como el engorroso ajuste de ganancia y el ajuste para la implementación en un manipulador robótico [13]. La tarea de control se vuelve complicada utilizando el enfoque PID para varios manipuladores de grado de libertad (DOF). Las técnicas de control como Computed Torque Control (CTC) , Sliding Mode Control (SMC) [10], Model Predictive Control (MPC) y H-infinity son muy prometedoras para su implementación en un manipulador de brazo robótico. El diseño de control debe ser lo suficientemente robusto para eliminar los efectos de comportamiento no lineal, complejidad y efectos de acoplamiento en la dinámica.

Una relación de aplicación de brazo robótico está basada en la movilización del robot. Existen estrategias de control cinemático del robot basada en programación lineal que se puede acoplar al control de trayectoria para el brazo robótico. En [8] se muestra un controlador basado en programación lineal, que presenta bajo costo y el robot es capaz de controlar su efector final sin chocar con obstáculos en el plano y sin violar los límites de sus articulaciones. Sin embargo, tiende a generar señales de control más abruptas que el controlador continuo basado en la pseudoinversa de la matriz jacobiana de cuerpo entero. En [7] se diseña un control adaptativo distribuido de manipuladores móviles cooperativos en red. Esta la ley de control local se adapta para contrarrestar incertidumbres. La solución diseñada es adecuada no solo para tareas de coordinación de movimiento puro, sino que también se pue-

de explotar en aquellos casos en los que se genera una cadena cinemática cerrada mediante la manipulación de objetos de varios robots.

En [1] se presenta un controlador de retroceso adaptativo para un manipulador móvil de $n + m$ grados de libertad (DOF) con el objetivo de controlar simultáneamente la velocidad de la plataforma móvil y el movimiento del efector final.

En este trabajo se realiza el modelado estable donde se diseñan adaptaciones para estimar parámetros desconocidos. Para mejorar la respuesta dinámica, el método de control de retroceso se utiliza para suprimir perturbaciones según el análisis de Lyapunov. El diseño robusto del controlador se presentará con incertidumbre de parámetro perturbación. Se proyecta una muestra de una ley de control usando métodos numéricos basado en álgebra lineal, el modelo control de trayectoria para brazo robótico será diseñado para poderse aplicar en un manipulador móvil de brazo robótico DOF. Tratándose de control de trayectoria donde la señal de referencia posee ruido, de esta manera se desarrolla los modelos de control adaptativo, Aproximación de funciones, FAT.

Capítulo 2

Procedimiento metodológico

2.1. Modelo del sistema de 2 grados de libertad

Se tiene la figura para el modelo matemático del un brazo robótico.

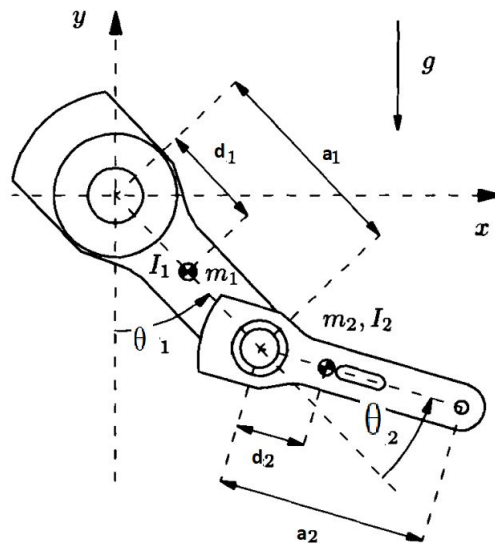


Figura 2.1: Robot de 2 grados de libertad(GDL)

Según la figura y de [12] [6] , se tiene el modelo dinámico de un brazo en general de n-GDL(grados de libertad), y sus ecuaciones derivadas.

$$I\ddot{\theta} + h + \gamma = \tau \quad (2.1)$$

Donde la matriz de inercia generalizada I y los parametros h, γ, τ se definen:

- ★ I =Matriz de inercia generalizada I de $n \times n$
- ★ $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$ el vector $n - dimensional$ de las aceleraciones centrífugas y de Coriolis. Vector h también puede expresarse como $h = c\dot{\theta}$.
- ★ $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]^T$ Vector de aceleraciones gravitacionales.
- ★ $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$ el vector de fuerzas generalizadas(torsión).

Definiendo las ecuaciones de inercia, coriolis y gravedad. Se tiene:
Matriz de inercia es la siguiente:

$$I = \sum_{i=1}^n \bar{I}_i \quad (2.2)$$

Donde matriz \bar{I}_i de $n \times n$ se determina por:

$$\bar{I}_i = m_i J_{ci}^T J_{c,i} + J_{w,i}^T I_i J_{w,i} \quad (2.3)$$

- ★ m_i = Masa del i – esimo eslabón es una cantidad escalar.
- ★ \bar{I}_i = El tensor de inercia o matriz de 3×3 del i – esimo eslabón.
- ★ $J_{w,i}, J_{c,i}$ = Son los vectores tridimensionales (matrices de $3 \times n$).

La matriz coriolis se define de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} \right) \dot{\theta}_k \quad (2.4)$$

El vector de fuerza gravitacional se define como:

$$\gamma_{ij} = - \sum_{j=1}^n m_j g^T J_{c,j}^i \quad (2.5)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Tomando la ecuación (2.1) se desarrolla el modelo dinámico para un brazo robotico de 2-GDL ($\theta = [\theta_1, \theta_2]^T$). Definiendo los jacobianos de velocidad angular y velocidad lineal (matrices de $3 \times n$).

$$J_{w,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_{w,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_{c,2} = \begin{pmatrix} -a_1 s_1 - \frac{a_2}{2} s_1^2 & -\frac{a_2}{2} s_1^2 \\ a_1 c_1 + \frac{a_2}{2} c_1^2 & \frac{a_2}{2} c_1^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad J_{c,1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{2} s_1 & 0 \\ \frac{a_1}{2} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Según la ecuación (2.2), la matriz de inercia generalizada I de 2×2 se determina por:

$$I = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Cuyos elementos son los siguientes:

$$i_{11} = \frac{m_1}{4} a_1^2 + m_2 \left(a_1^2 + \frac{a_2^2}{4} + a_1 a_2 c_2 \right) \quad (2.7)$$

$$i_{12} = i_{21} = m_2 \left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1 a_2 c_2}{2} \right) \quad (2.8)$$

$$i_{22} = m_2 \left(\frac{a_2^2}{4} \right) \quad (2.9)$$

Donde $s_i = \text{sen}\theta_i$ y $c_i = \text{cos}\theta_i$ para $i = 1, 2$. También en la expresiones mostradas, a pesar de que las matrices de inercia I_1 e I_2 de los eslabones 1 y 2, respectivamente, tengan todos los elementos no cero debido a las estructuras de $J_{w,1}$ y $J_{Jw,2}$, sólo el elemento. Usando la ecuación (2.5), se obtienen los elementos de los vectores h y γ , es decir, h_i y γ_i , respectivamente, para $i = 1, 2$ en forma vectorial $h = [h_1, h_2]^T$, de la siguiente manera:

$$h_1 = -m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 \frac{a_1 a_2}{2} s_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (2.10)$$

$$h_2 = \frac{m_2}{2} a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.11)$$

vector de fuerza gravitacional $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2]^T$, de la ecuación 2.5:

$$\gamma_1 = -m_1 g^T j_{c,1} - m_2 g^T j_{c,2} = m_1 g \frac{a_1}{2} c_1 + m_2 g \left(a_1 c_1 + \frac{a_2}{2} c_{12} \right) \quad (2.12)$$

$$\gamma_2 = -m_1 g^T j_{c,1} - m_2 g^T j_{c,2} = m_2 g \frac{a_2}{2} c_{12} \quad (2.13)$$

2.1.1. Modelo en espacio de estados

Despejando la dinámica general de un brazo robótico de $n - GDL$, ecuación (2.1):

$$\ddot{\theta} = I^{-1} (\tau - h - \gamma) \quad (2.14)$$

Para un manipulador de dos eslabones, el vector de aceleración bidimensional de articulación $\ddot{\theta}$ puede resolverse algebraicamente en la forma de la ecuación (2.14), donde la matriz de inercia y el vector asociados se dan en las ecuaciones (2.6), (2.10), (2.11), (2.12) y (2.13). La forma espacio-estado se obtiene entonces como:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= I^{-1} (\tau - h - \gamma) \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde el vector espacio-estado de cuatro dimensiones se determina por $y = [y_1, y_2]^T$, en la que los vectores bidimensionales y_1 y y_2 son $y_1 = [\theta_1, \theta_2]^T$ y $y_2 = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T$

2.1.2. Simulación del modelo dinámico de brazo 2-GDL

Utilizando el software GNU-Octave para mostrar el comportamiento de la dinámica del sistema. Las entradas para el manipulador de dos eslabones también se toman como ceros, es decir, $\tau_1 = \tau_2 = 0$, y los valores iniciales del vector de estado es $y(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, junto con el valor de g como $g = 9,81$. La integración numérica se realiza mediante *ODE45* de GNU-Octave. Los resultados de simulación se presentan:

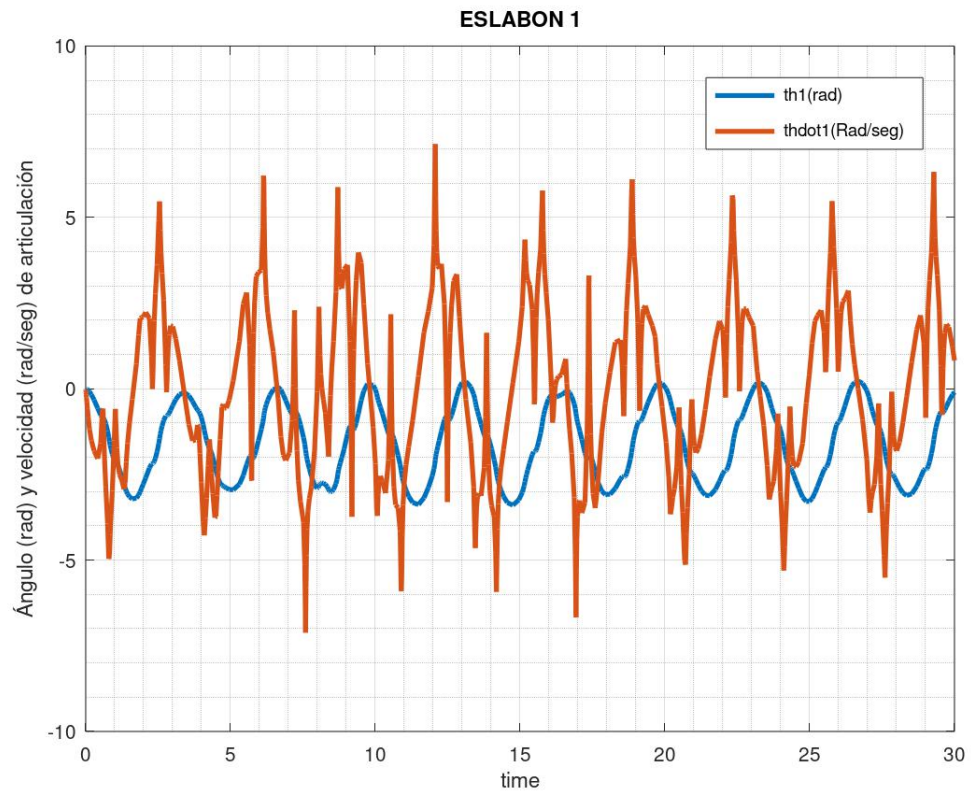


Figura 2.2: Resultado de simulación para el manipulador para el primer eslabón

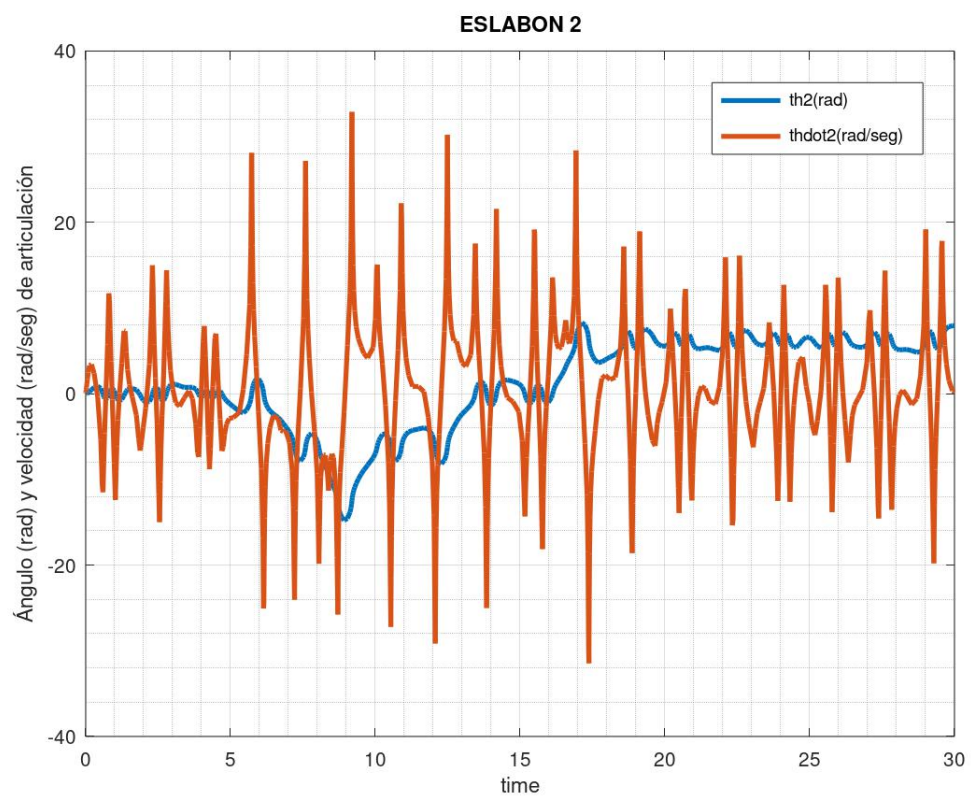


Figura 2.3: Resultado de simulación para el manipulador para el segundo eslabón

Como se observa en las Figuras (2.2) y (2.3) se puede ver que el primer eslabón esta

oscilando la posición angular, eso provoca algunos cambios en la velocidad angular del eslabón, esto también ocurre en el segundo eslabón pero con la diferencia que la posición angular no varía mucho por que ese desplazamiento ocasionado por el primer eslabón no afecta directamente. Como se observa en las imágenes, no existe una ley de control τ que realice la manipulación del brazo, es por eso que se ven las oscilaciones de las estructuras.

2.2. Control adaptativo

En este apartado se presenta el control adaptativo basado en la técnica de aproximación de funciones. Se presentará en detalle la estrategia de control adaptativo y su ley de control para compensar la carga útil variable en el tiempo desconocida.

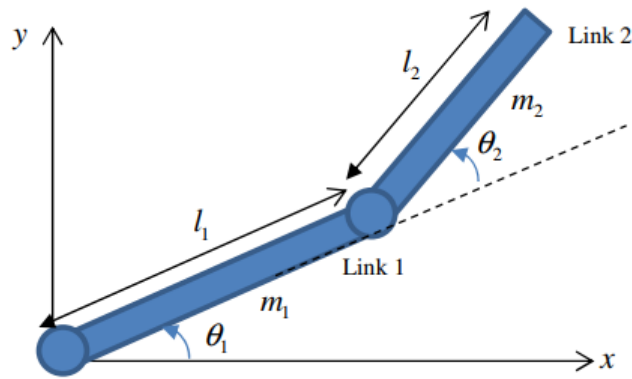


Figura 2.4: 2 DOF Brazo robótico

La dinámica de brazo robótico de N grados de libertad puede ser representado utilizando Lagrange por:

$$M(q)\ddot{q}(t) + C(q, \dot{q})\dot{q}(t) + G(q) = \tau \quad (2.16)$$

Para el brazo robótico 2-DOF mostrado en la figura (2.4) $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $G(q)$ pueden ser denotados como $M_2(q)$, $C_2(q, \dot{q})$ y $G_2(q)$ respectivamente.

Dado que la carga útil desconocida variable en el tiempo es transportada por el efector final en el segundo eslabón, su masa se considera como parte de la masa del eslabón 2. Por lo tanto, la masa incierta, $m_2(t)$ se puede factorizar a partir de la inercia, coriolis y matrices centrífugas, y vector gravitacional expresando $M_2(q)$, $C_2(q, \dot{q})$ y $G_2(q)$ como:

$$M_2(q) = M_{m1}(q) + m_2(t)P_m(q), \quad (2.17)$$

$$C_2(q, \dot{q}) = m_2(t)P_c(q, \dot{q}), \quad (2.18)$$

$$G_2(q) = G_{m1}(q) + m_2(t)P_g(q) \quad (2.19)$$

y

$$q = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

$$M_{m_1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m_1l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{m_1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_1gl_1\cos\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_m(q) = \begin{pmatrix} l_1^2 + \frac{1}{3}l_2^2 + l_1l_2\cos\theta_2 & \frac{1}{3}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2\cos\theta_2 \\ \frac{1}{3}l_2^2 + \frac{1}{2}l_1l_2\cos\theta_2 & \frac{1}{3}l_2^2 \end{pmatrix},$$

$$P_g(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gl_1\cos\theta_1 + \frac{1}{2}gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{1}{2}gl_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix},$$

$$P_c(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l_1l_2(\sin\theta_2)\dot{\theta}_2 - l_1l_2(\sin\theta_2)\dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{2}(\sin\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y l_i es la longitud del i -ésimo link, m_1 es la masa del primer link, g es la aceleración de la gravedad, θ_i , $\dot{\theta}_i$ y $\ddot{\theta}_i$ son desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular del i -ésimo link respectivamente.

Recordemos que $m_2(t)$ representa la masa total del link 2 y la carga útil incierta, ya que la carga útil desconocida variable en el tiempo se considera como un parte del link 2.

Las siguientes propiedades se utilizan para la derivación de la ley de control adaptativo:

- ★ La matriz de inercia, $M_2(q)$, es una matriz definida positiva simétrica.
- ★ **Propiedad 1.-** $M_2(q)$, $C_2(q, \dot{q})$ y $G_2(q)$ son lineales en términos de un conjunto adecuadamente seleccionado de parámetros del robot.

Por lo tanto, podemos escribir

$$M_2(q) + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\beta \quad (2.20)$$

$$\beta \in \mathbb{R}^k, Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

Consideramos el problema de seguimiento de trayectoria para el sistema con parámetros que varían en el tiempo.

Sea el vector error tracking. Error de seguimiento de la articulación:

$$e_q(t) = q(t) - q_d(t) \quad (2.21)$$

Considerando $q_d(t)$ como vector de la trayectoria deseada. Asumiendo que $q_d(t)$ es dos veces diferenciable de forma continua. Y sea $e = \dot{e}_q + \lambda e_q$, el error de velocidad de referencia.

Teorema 1.- Para el robot manipulador descrito por Eq. (2.16) con las variaciones de modelado, la salida del sistema sigue la trayectoria de movimiento deseada $q_d(t)$ si se aplica el siguiente par de control.

τ , está dada por:

$$\tau = \hat{M}_2(q)\ddot{q}_r + \hat{C}_2(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}_2(q) - Ke \quad (2.22)$$

Donde K es matriz diagonal definida positiva 2×2 , $\hat{M}_2(q)$, $\hat{C}_2(q, \dot{q})$ y $\hat{G}_2(q)$ son estimaciones de $M_2(q)$, $C_2(q, \dot{q})$ y $G_2(q)$ respectivamente. De la ecuación (2.16).

$$\hat{M}_2(q) = M_{m1}(q) + \hat{m}_2(t)P_m(q), \quad (2.23)$$

$$\hat{C}_2(q, \dot{q}) = \hat{m}_2(t)P_c(q, \dot{q}), \quad (2.24)$$

$$\hat{G}_2(q) = G_{m1}(q) + \hat{m}_2(t)P_g(q) \quad (2.25)$$

Se observa que solo $m_2(t)$ es desconocido y contribuye a las incertidumbres en las matrices $\hat{M}_2(q)$, $\hat{C}_2(q, \dot{q})$ y $\hat{G}_2(q)$. Elegimos la ley entonces:

$$\dot{\hat{W}}_{m_2} = -Q_{m_2}[Z_{m_2}e^T P_m(q)\ddot{q}_r + Z_{m_2}e^T P_c(q, \dot{q})\dot{q}_r + Z_{m_2}e^T P_g(q)] \quad (2.26)$$

Donde \hat{W}_{m_2} el vector de la función de ponderación constante de la representación FAT que se va a estimar, Z_{m_2} es el vector de la función de base variable en el tiempo (time - varying) de la representación FAT que se puede elegir y Q_{m_2} es la matriz de ganancia adaptativa, dará lugar al error de velocidad de referencia e . Siendo también e_q el error de seguimiento, y \dot{e}_q es el error de seguimiento de la velocidad de la articulación que convergen asintóticamente a cero a medida que el tiempo, t se acerca al infinito. La prueba de estabilidad para la estrategia de control propuesta (2.22) y su ley de actualización (2.26) se describirán en la siguiente sección.

2.3. Estabilidad

Sustituyendo la ley de control (2.22) en el modelo matemático del robot manipulador en (2.16) se obtiene

$$M_2(q)\ddot{q} + C_2(q, \dot{q})\dot{q} + G_2(q) = \hat{M}_2(q)\ddot{q}_r + \hat{C}_2(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}_2(q) - Ke \quad (2.27)$$

de aquí:

$$M_2(q)(\ddot{q} - \ddot{q}_r) + C_2(q, \dot{q})\dot{q} = [\hat{M}_2(q) - M_2(q)]\ddot{q}_r + [\hat{C}_2(q, \dot{q}) - C_2(q, \dot{q})]\dot{q}_r + \hat{G}_2(q) - G_2(q) - Ke \quad (2.28)$$

Utilizando (2.18), (2.19) Y (2.20) y reemplazando $\dot{q} - \dot{q}_r$ por e . La ecuación (2.23) resulta:

$$M(q)\dot{e} + C(q, \dot{q})e = \tilde{m}_2[P_m(q)\ddot{q}_r + P_c(q, \dot{q})\dot{q}_r + P_g(q)] - Ke \quad (2.29)$$

\tilde{m}_2 es el error de estimación que representa la diferencia entre la carga útil real, $m_2(t)$, $m_2(t)$ y su estimación $\hat{m}_2(t)$, donde $\tilde{m}_2(t) = \hat{m}_2(t) - m_2(t)$. La carga útil real e incierta, $m_2(t)$ y $\hat{m}_2(t)$, se pueden expresar utilizando FAT en términos de multiplicación de la función de ponderación constante desconocida y la función de base variable en el tiempo (time -varying) seleccionada, que se puede describir como:

$$m_2 = W_{m_2}Z_{m_2} + \varepsilon_{m_2}, \quad (2.30)$$

$$\hat{m}_2 = \hat{W}_{m_2}Z_{m_2} \quad (2.31)$$

W_{m_2} es un vector $1 \times n_b$ del valor real de la función de ponderación, Z_{m_2} es un vector $n_b \times 1$ de la función base, es vector $1 \times n_b$ de la función de ponderación estimada, n_b es el

número de la función base en la representación FAT y ε_{m_2} son las matrices de error de aproximación que se supone que son cero. La representación FAT, $\hat{W}_{m_2} Z_{m_2}$ se puede elegir como cualquier función ortonormal, como la serie Taylor, la serie Fourier, las funciones de Bessel y los polinomios de Lagrange.

La denotación: $\widetilde{W}_{m_2} = \hat{W}_{m_2} - W_{m_2}$ y sustituido en (2.29), La dinámica de error viene a ser:

$$M_2(q)\dot{e} + C_2(q, \dot{q})e = \widetilde{W}_{m_2} z_{m_2} [P_m(q)\ddot{q}_r + P_C(q, \dot{q})\dot{q}_r + P_g(q)] - Ke \quad (2.32)$$

Se define función de Lyapunov:

$$V(e, \widetilde{W}_{m_2}) = \frac{1}{2}e^T M_2(q)e + \frac{1}{2}\widetilde{W}_{m_2} Q_{m_2} \widetilde{W}_{m_2}^T \quad (2.33)$$

$$\dot{V}(e, \widetilde{W}_{m_2}) = e^T \dot{M}(q)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T \dot{M}(q)e + \widetilde{W}_{m_2} Q_{m_2} \dot{\widetilde{W}}_{m_2}^T \quad (2.34)$$

Sustituyendo la dinámica de error (2.32) en (2.34) y utilizando la propiedad simétrica de sesgo de $\dot{M}_2(q) - 2C_2(q, \dot{q})$ la derivada viene a ser:

$$\dot{V}(e, \widetilde{W}_{m_2}) = -e^T Ke + \widetilde{W}_{m_2} Q_{m_2} \dot{\widetilde{W}}_{m_2}^T + \widetilde{W}_{m_2} Z_{m_2} e [P_m(q)\ddot{q}_r + P_C(q, \dot{q})\dot{q}_r + P_g(q)] \quad (2.35)$$

Sustituyendo ley de control (2.32) en (2.34), la derivada de la función de Lyapunov puede finalmente reducirse

$$\dot{V}(e, \widetilde{W}_{m_2}) = -e^T Ke \quad (2.36)$$

Como (2.33) es positivo definido y (2.36) es semi-definido negativo, e y \widetilde{W}_{m_2} están acotados. Diferenciando (2.37)

$$\ddot{V}(e, \widetilde{W}_{m_2}) = -2e^T K \dot{e} \quad (2.37)$$

De esta última ecuación y también de la dinámica de error (2.32), se puede observar que también es acotada.

Por lo tanto, utilizando teoría de Barbalat.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{V}) = 0$$

De (2.36) esto implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} (e) = 0$. Desde $e = \dot{e}_q + \lambda e_q$, e_q y \dot{e}_q van también a converger asintóticamente a cero.

Por lo tanto, bajo la aplicación de la estrategia de control (2.22) y la ley de actualización (2.26), la trayectoria real del brazo robótico, q , tiende a q_d en un tiempo estacionario. Esto a pesar de la incertidumbre variable en el tiempo de la masa de carga útil ($m_2(t)$). En este método, se puede ver que, solo se necesita sintonizar una matriz de ganancia de adaptación en la ley de actualización, lo que conduce a la simplificación de la implementación de la ley de control.

2.4. Control LQR para análisis de convergencia

En este apartado se presenta al control LQR (Linear-quadratic regulator) basado en la minimización del funcional. Se presentará la estrategia desarrollada para analizar la convergencia de los estados del sistema robotico, con la finalidad de comparar y analizar el comportamiento de estos dos métodos de control presentados.

2.4.1. Linealización del modelo dinámico

El control LQR aplicado para esta aplicación, necesita ser linealizado utilizando así algoritmos de conversión de sistemas no lineales a lineales a través de un punto de referencia. El sistema linealizado tiene la siguiente forma, para un punto de equilibrio $X_e = (0; 0; 0; 0)$ [9]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)}{I(M+m)+(Mml^2)} & \frac{gm l^2}{I(M+m)+(Mml^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m l a}{I(M+m)+(Mml^2)} & \frac{-m g l (M+m)}{I(M+m)+(Mml^2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{I+ml^2}{I(M+m)+(Mml^2)} \\ 0 & 0 \\ \frac{ml^2}{I(M+m)+(Mml^2)} & \frac{ml}{I(M+m)+(Mml^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

2.4.2. Fundamento de control LQR

Consideramos el sistema de forma linealizada y expresada en espacio de estados. Obteniendo la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Donde se considera que el vector de estado contiene las posición y velocidades angulares de nuestro sistema modelado anteriormente. La matriz de evolución A de tamaño 4×4 , la matriz B de distribución de tamaño 4×2 , ya que esta acompañada a las señales de control. También se evalúa el control de rendimiento, que consiste en minimizar el funcional, aplicando al sistema de la siguiente manera:

$$J = \int_0^\infty (y^T(t)y(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.40)$$

Donde J es el funcional que representa el grado de convergencia de cuando se aplica el control LQR [5]. El objetivo es buscar minimizar el control de desempeño aplicado al sistema tomando la ecuación (2.44), se tiene:

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.41)$$

Donde $R = R^T > 0$ y $Q = C^T C > 0$ Siendo que el control $U = -Gx(t)$, el problema se reduce en calcular $G = R^{-1}B^T X$, donde X es determinado por la Ecuación Algebraica de Ricatti (ARE), según [3]. Se obtiene:

$$0 = -XA - A^T X - C^T C + XBR^{-1}B^T X \quad (2.42)$$

De esta manera se calcula X con la finalidad de poder definir la ley de control. De la ecuación (2.44), se puede determinar la matriz G a partir de la matriz R que depende de la

una variable denominada *cheap control*, que sirve para determinar la calidad del controlador y la convergencia de las variables usadas.

$$R = \rho I \quad (2.43)$$

$$G = (1/\rho)B^T X \quad (2.44)$$

Donde ρ es el valor que hace que el control sea mas económico haciendo $\rho \rightarrow 0^+$, de esa manera se determina la matriz de control, I es una matriz identidad, B es determinado por la dinámica del sistema.

2.4.3. Aplicación

De las ecuaciones que definen la dinámica del sistema, las ecuaciones (2.1),(2.12), (2.2), se linealiza utilizando Scilab-GNU. Utilizando la ecuación dinámica general del sistema se realiza el esquema en diagrama de bloques para generar el modelo dinámico, como se muestra en la siguiente figura(2.5) y (2.6).

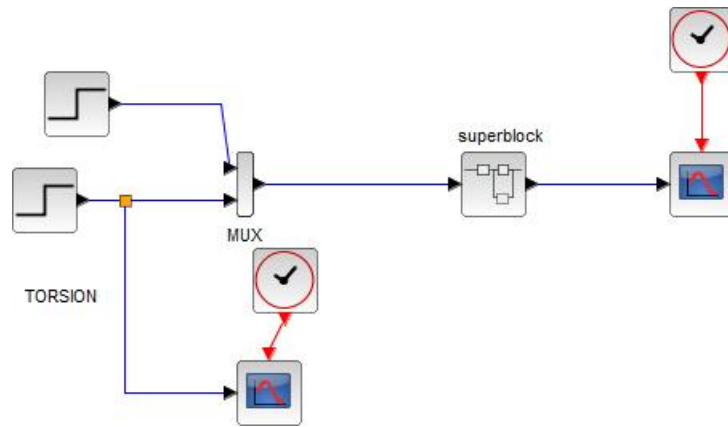


Figura 2.5: Modelo dinámico en Xcos

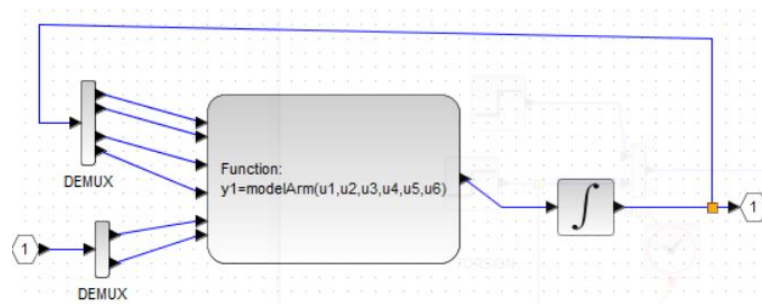


Figura 2.6: Superbloque del sistema dinámico en Xcos

Tomando la ecuación (2.4.1) y reemplazando los valores del sistema robotico donde la linealización del modelo dinámico se realiza sobre el punto de equilibrio $X_e = (0; 0; 0; 0)$, donde se reemplaza los valores y se obtiene como resultados la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,009805 & 0,000012 & 0,0197 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,08828 & -0,00068 & -0,098 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \\ 0 & 0 \\ -5 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Donde x_1, x_2, x_3, x_4 , son los estados del sistema, x_1 : Posición angular eslabón 1, x_2 : Velocidad angular eslabón 1, x_3 : Posición angular eslabón 2, x_4 : Velocidad angular eslabón 2.

Una vez obtenido el sistema linealizado se aplica los algoritmos y formulas de la ecuación (2.44), así con la finalidad de encontrar la matriz G, matriz de control.

Nota: El modelo de control LQR desarrollado es con fines analizar la convergencia frente a condiciones iniciales del modelo, además de poder comparar el grado de convergencia entre ambos controladores desarrollados.

Capítulo 3

Resultados

3.0.1. Control Adaptativo

Se ha realizado una prueba de simulación en el brazo robótico 2-DOF utilizando software Octave 5.2.0 para investigar la eficacia del método propuesto. Se requiere el brazo robótico para rastrear las trayectorias deseadas, se realizaron casos para estabilización correcta y se hacen los respectivos tracking de seguimiento.

Considerando parámetros para el brazo robótico:

- ★ $m_1 = 1$. Masa del eslabon 1
- ★ $l_1 = 1$. Longitud del eslabon 1
- ★ $l_2 = 1$ Longitud del eslabon 2
- ★ $g = 9.8$. Gravedad
- ★ $\pi = 3.14$.

Se muestra la simulación del sistema:

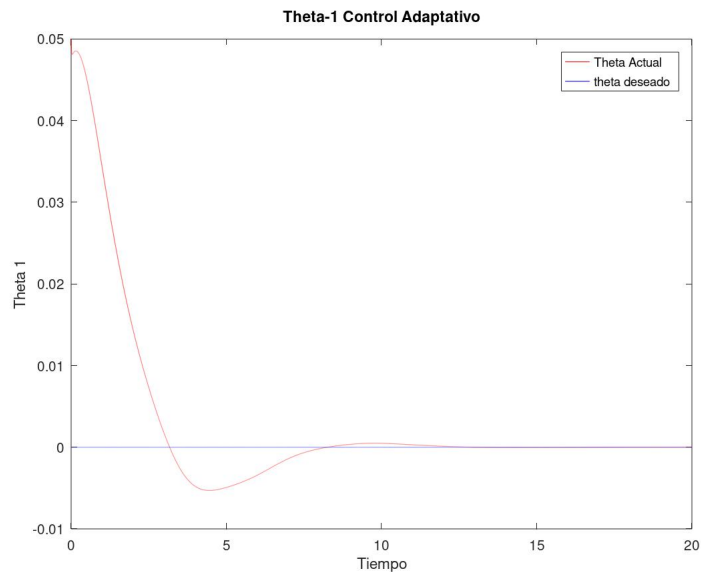


Figura 3.1: Resultado de simulación para posición angular θ_1

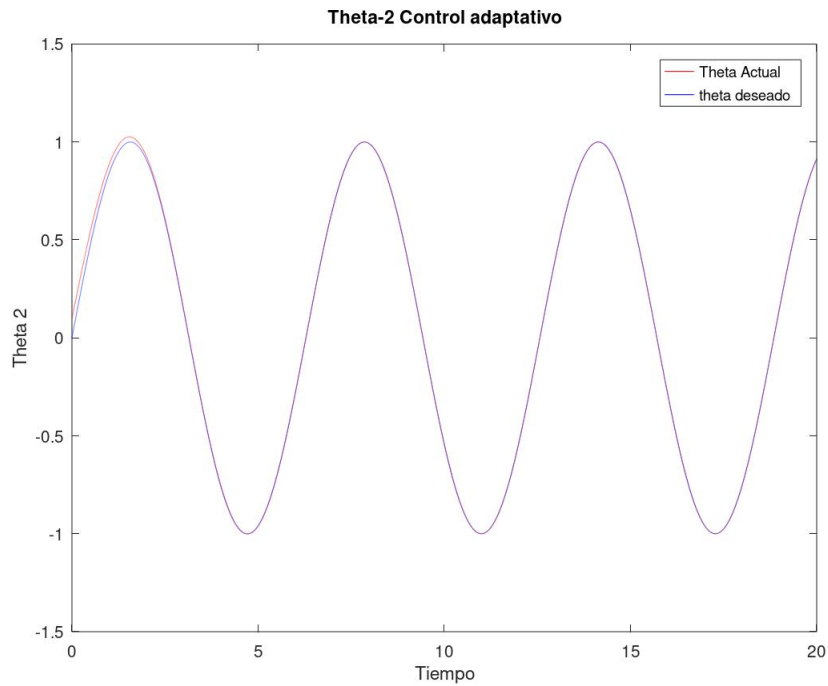


Figura 3.2: Resultado de simulación para posición angular θ_2

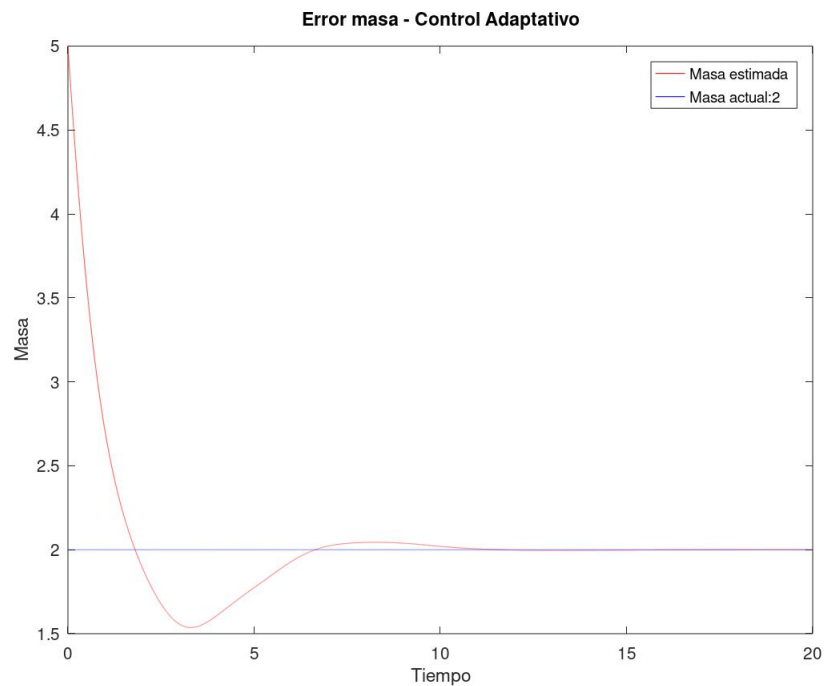


Figura 3.3: Resultado de simulación para el manipulador con masa de referencia estimada

Según las gráficas mostradas se observa la convergencia de los estados a una referencia deseada. En la figura(3.4), se observa la convergencia de la posición angular del primer eslabón donde no se considera un tracking para una trayectoria definida, así mismo esta gráfica no posee mucho valor en overshoot, por lo que sería ideal o recomendable para nuestro sistema. En la figura(3.5), en esta figura se muestra el tracking para una trayectoria deseada, en este caso senoidal, se puede ver la convergencia del estado, esto se realiza con el fin de poder añadir carga en el actuador final.

★ **Otro caso de simulación:**

Ahora realizamos otra simulación, para este caso introducimos una masa variable en el tiempo y mismos parámetros del sistema anterior.

Se muestra la simulación del sistema:

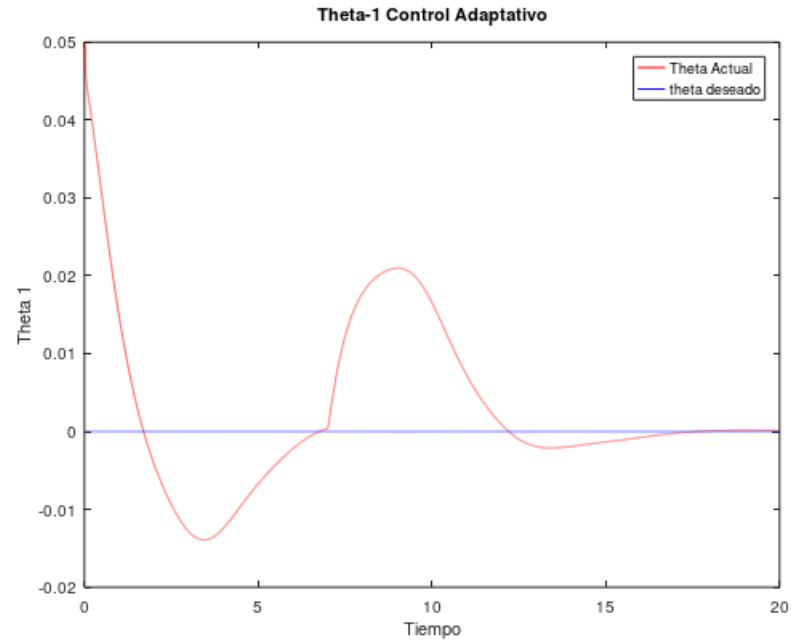


Figura 3.4: Resultado de simulación del sistema controlado para una posición angular θ_1

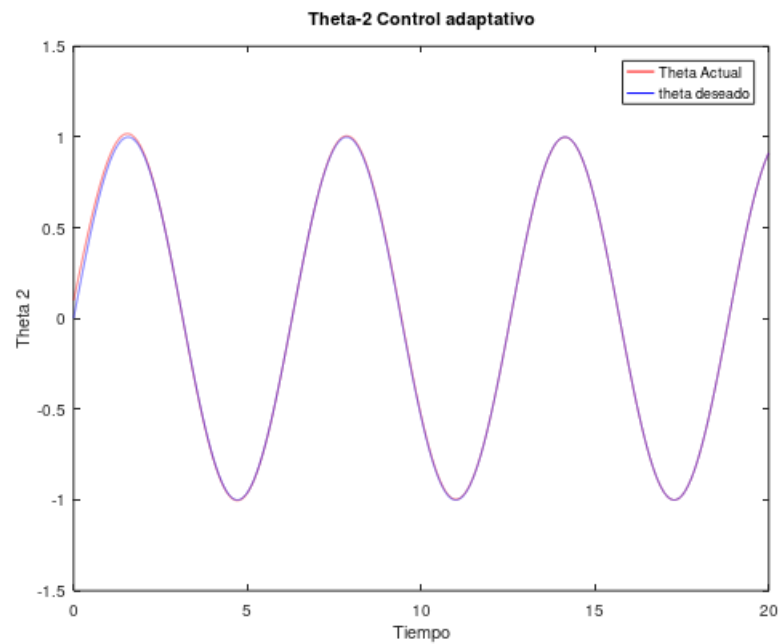


Figura 3.5: Resultado de simulación para el manipulador para posición angular θ_2

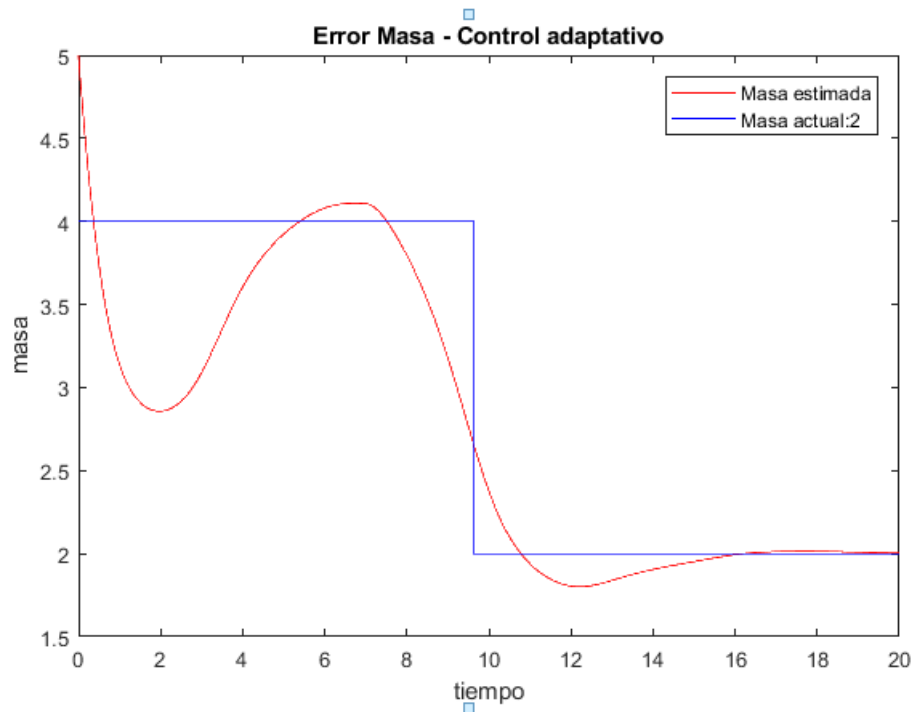


Figura 3.6: Resultado de simulación para el manipulador para cambio de masa en el tiempo

Se muestra en resultados que al variar la masa carga útil, esta se estabiliza en tiempo estacionario. Pero, hace influencia en la convergencia de los ángulos deseados para nuestro brazo robótico. En la figura (3.4) vemos que el ángulo 1, es el que será más afectado, debido a que cuando se presenta la variación de masa en tiempo instantáneo. El ángulo debe restringirse de su estabilización anterior, y cambia a la nueva estabilización, lo que hace que realice nuevamente la interpretación de adaptación. Entonces empieza a convergir desde la variación en el tiempo que se varía la carga útil.

En cambio, en la figura (3.5) se muestra el resultado para el ángulo 2. En este caso la variación no se expresa mucho, en realidad como el brazo ángulo 2 está acoplado al ángulo 1. Pasa su momento en respuesta torque a influir en el ángulo 1. Además éste ángulo es el más sensible y está modelado como tal.

3.0.2. Control LQR

Según las ecuaciones aplicadas en el modelo dinámico del brazo robotico, se toma la ecuación matricial (2.45) con la finalidad de analizar y proyectar el modelo de control usando GNU-Octave. Como el sistema es multivariable, se muestra los resultados al aplicar el control LQR, para analizar el '*cheap control*' y la convergencia.

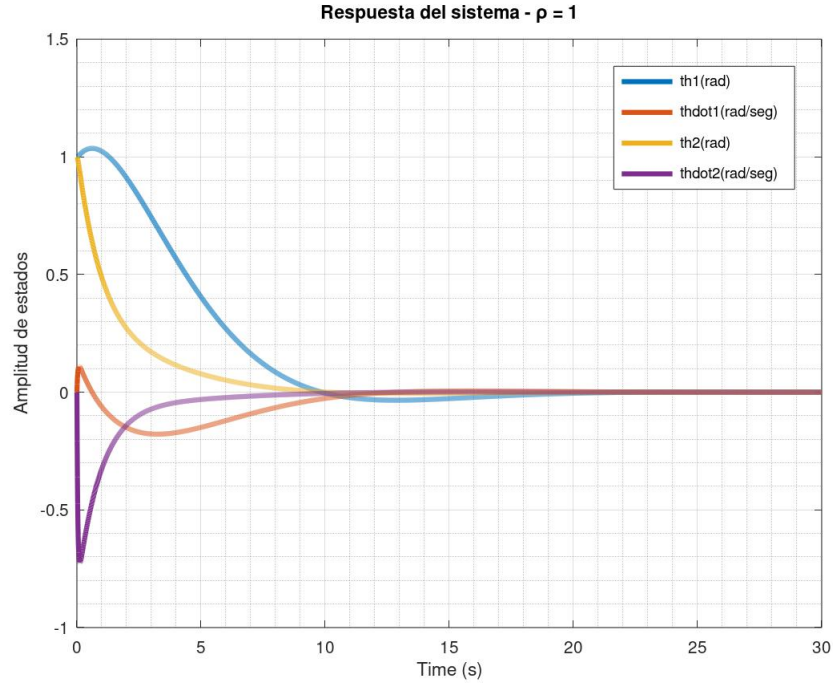


Figura 3.7: Respuesta del sistema controlado para un $\rho = 1$

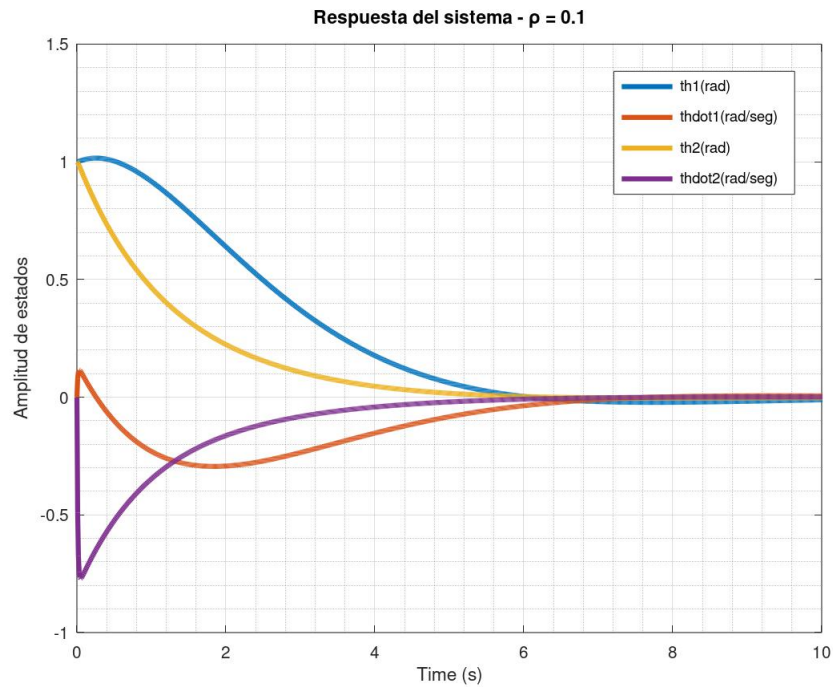


Figura 3.8: Respuesta del sistema controlado para un $\rho = 0.1$

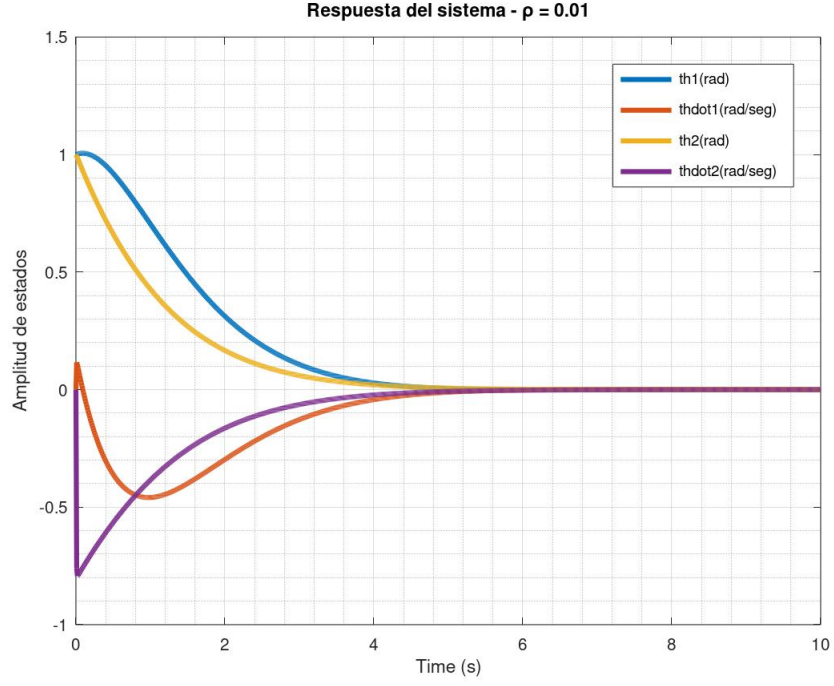


Figura 3.9: Respuesta del sistema controlado para un $\rho = 0.01$

Para la simulación se considero como condiciones iniciales lo siguiente $(1, 0, 1, 0)$ para los estados correspondientes para los estados $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$. En las figuras mostradas se ve la rapidez de la convergencia al aumentar o disminuir ρ , que determina si es 'cheap control' el modelo proyectado. Según la imágenes mostradas se observa que al aumentar el valor de ρ aumenta el tiempo para llegar al régimen permanente es mayor, pero disminuye el máximo sobrepico de los estados en la gráfica. En la figura(3.7), se puede apreciar que el tiempo para alcanzar ala convergencia es alrededor de 20 segundos para $\rho = 1$, comparando con la figura(3.9), el cual su tiempo de establecimiento es muy corto ya que el valor de $\rho = 0,01$. Los autovalores de la función de transferencia, para $\rho = 1$ son los siguientes:

$$eigenvalues = \begin{bmatrix} -29,8454 \\ -1,0007 \\ -0,2728 + 0,2443i \\ -0,2728 - 0,2443i \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

3.0.3. Análisis de resultados

Según las simulaciones graficadas, se observa que el control LQR, realiza un ajuste de sus parámetros para lograr la convergencia a un punto deseado, en esta aplicación se vio que al aumentar ρ aumentaba el tiempo de establecimiento y disminuye el máximo sobrepico, por lo cual esto aplicado a sistemas mecánicos como brazos robóticos pueden ser recomendables, ya que seguir una trayectoria definida a un tiempo de convergencia mas rápido, haciendo que ρ disminuya de valor, hace que el sistema mecánico no pueda responder a esa velocidad, ya que esta compuesto de motores, servomotores, motores lineales, que hacen que los movimientos del brazo robotico no sean tan veloces.

Asumiendo el máximo sobreimpulso como una característica importante en sistemas de brazo robotico, si se tiene un máximo sobreimpulso demasiado grande, podría ocasionar una sobrecarga en los componentes mecánicos que componen el brazo, además que no debe de existir picos de forma triangula, como efecto el *chattering*, ya que ocasionaría cambios

bruscos en estos mecanismos, así de esta manera, es recomendable no tomar una rápida convergencia. Los autovalores hallados en la igualdad (3.1), están dentro de las especificaciones de estabilidad, ya que pertenecen en el Semiplano izquierdo.

Capítulo 4

Conclusiones

El control de trayectoria de un brazo robotico es fundamental para diferentes campos de ingeniería desde el aprendizaje hasta la investigación de nuevas tecnologías de brazo robóticos con varios grados de libertad. En este proyecto se desarrolla con éxito poder controlar la trayectoria de un brazo robotico de 2-GDL, el control adaptativo desarrollado es conveniente para este tipo de sistemas mecánicos. Es importante destacar que el control desarrollado para el brazo robotico de 2-GDL, puede aceptar algunas variaciones de la planta según las características de las variaciones que posee la planta. El brazo robotico puede aumentar en grados de libertad pero eso trae consigo aumentar mas variables de control y aumentar mas variables en la planta, el sistema se vuelve mas complejo.

En este trabajo se mostró una estrategia de control adaptativo basada en FAT para compensar la carga útil incierta que varía en el tiempo en un brazo robótico plano 2-DOF. El parámetro incierto en el modelo matemático se factoriza a partir de los términos conocidos para derivar la ley de control del controlador adaptativo. La ley de actualización está diseñada en base al algoritmo FAT, que permite la estimación de funciones variables en el tiempo desconocidas sin la necesidad de parametrizar linealmente el modelo del manipulador. El diseño del controlador da como resultado solo una matriz de ganancia de adaptación que debe sintonizarse en la ley de actualización.

Los resultados de la simulación para casos de variación de masa en que la técnica de control propuesta ha sido capaz de controlar con éxito el brazo robótico para rastrear la trayectoria deseada a pesar de la incertidumbre variable en el tiempo de la carga útil que transporta.

Se realizó una breve comparación para verificar la eficacia del control que se propone, esto comparando con el control LQR y según los resultados obtenidos al usar control adaptativo se tiene ventaja con respecto a control LQR ya que este va ir cambiando y acercándose a la trayectoria deseada, a pesar de que es un brazo robotico y esta compuesto de piezas mecánicas, se considera que la convergencia de los estados no debe ser tan rápida, ya que eso ocasionaría que los motores y componentes de la estructura no respondan a tiempo, además de que no debe tener una valor grande en máximo sobreimpulso, ya que ocasionaría que los componentes mecánicos disminuyan su vida útil.

Bibliografía

- [1] Enfoque de control de retroceso adaptativo para el seguimiento de la trayectoria de los manipuladores móviles. In *2017 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. doi: 10.1109/ROBIO.2017.8324674.
- [2] V. H. Andaluz, E. R. Sásig, W. D. Chicaiza, and P. M. Velasco. Linear algebra applied to kinematic control of mobile manipulators. In *IT Convergence and Security 2017*, pages 297–306. Springer, 2018.
- [3] P. Benner, J.-R. Li, and T. Penzl. Numerical solution of large-scale lyapunov equations, riccati equations, and linear-quadratic optimal control problems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 15(9):755–777, 2008.
- [4] J. Jin. A robust zeroing neural network for solving dynamic nonlinear equations and its application to kinematic control of mobile manipulator. *Complex Intelligent Systems*, 07 2020. doi: 10.1007/s40747-020-00178-9.
- [5] R. E. Kalman et al. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. soc. mat. mexicana*, 5(2):102–119, 1960.
- [6] R. Kelly, V. S. Davila, and J. A. L. Perez. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] A. Marino. Distributed adaptive control of networked cooperative mobile manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(5):1646–1660, 2018. doi: 10.1109/TCST.2017.2720673.
- [8] J. Quiroz and B. Adorno. Whole-body kinematic control of nonholonomic mobile manipulators using linear programming, 10 2017.
- [9] J. H. C. Rojas, R. R. Serrezuela, J. A. Q. López, and K. L. R. Perdomo. Lqr hybrid approach control of a robotic arm two degrees of freedom. *International Journal of Applied Engineering Research*, 11(17):9221–9228, 2016.
- [10] M. I. U. S. A. Ajwad, J. Iqbal and A. Mehmood. A systematic review of current and emergent manipulator control approaches. pages 198–209, 12 2015.
- [11] B. K. S. A. Awjad, M. I. Ullah and J. Iqbal. A comprehensive state-of-the-art on control of industrial articulated robots. pages 499–521, 12 2014. doi: 10.1109/FIT.2016.033.
- [12] J.-J. E. Slotine, W. Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [13] M. Ullah, S. Ajwad, M. Irfan, and J. Iqbal. Mpc and h-infinity based feedback control of non-linear robotic manipulator. pages 136–141, 12 2016. doi: 10.1109/FIT.2016.033.

Apéndice A

Código

El código realizado para la presentación se encuentra en el siguiente enlace: <https://github.com/JhoelRN/Control2DOF>

Rúbrica

- b1: Identifica y recopila información relevante de investigaciones o pruebas similares.
- b2: Interpreta y relaciona las variables relevantes de la investigación, determina su valor cuantitativo y/o cualitativo con precisión.
- b3: Procesa y analiza los resultados usando los métodos y criterios apropiados.
- b4: Escoge el método científico para el desarrollo de investigaciones.

La tabla A.1 refleja la evaluación del estudiante respecto este informe y mediante entrevistas.

Tabla A.1: Rúbrica según Resultados del Estudiante

Alumno	b1	b2	b3	b4
Mamani Huanca, Jhoel René				
Vilcapaza Goyzueta, Denilson Jean				