Метод внутренней точки. Самосогласованные барьеры

Методы оптимизации

Александр Безносиков

Московский физико-технический институт

7 ноября 2024

ФПМИ

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\
\text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \dots m.
\end{aligned}
$$

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m. \end{aligned}$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (g_j^+)^2(x) \right],$$

где $y^+ = \max\{y, 0\}$.

От штрафа к барьеру

- Рассмотрим следующую задачу с ограничениями:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m. \end{aligned}$$

- Задача со штрафом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \rho \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (g_j^+)^2(x) \right],$$

где $y^+ = \max\{y, 0\}$.

- Итоговое решение штрафной задачи может не удовлетворять ограничениям. **Вопрос:** как ввести штраф так, чтобы оно гарантированно было в пределах множества $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_i(x) \leq 0 \text{ для } i = 1, \ldots m\}$?

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы?

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор не непрерывен и не дифференцируем.

От штрафа к барьеру

- Топорный вариант – выставим вот такой "барьер":

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[f_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \mathbb{I}_G(x) \right],$$

где $\mathbb{I}_G(x)$ – индикаторная функция множества G:

$$\mathbb{I}_G(x) = \begin{cases} 0, & x \in G \\ +\infty, & x \notin G \end{cases}$$

- Формально все хорошо, все эквивалентно исходной задаче, **вопрос:** какие есть проблемы? Задача не стала легче с вычислительной точки зрения, индикатор не непрерывен и не дифференцируем.
- Идея: воспроизвести поведение индикатора более плавно и непрерывно.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\, G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\, G$ и для любого $i = 1, \ldots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\, G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\, G$ и для любого $i = 1, \dots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.
- Введем функцию F: 1) непрерывно дифференцируемую на $\mathrm{int}\, G$ и 2) для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F(x_i) \to +\infty$.

Барьерная функция

- Дополнительно предположим, что: 1) $\mathrm{int}\, G$ – непустое множество, 2) для любой точки $x \in G$ существует последовательность $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такая, что $x_i \to x$, 3) G – ограниченное множество, 4) для любого $x \in \mathrm{int}\, G$ и для любого $i = 1, \dots m$ следует, что $g_i(x) < 0$, 5) f непрерывно дифференцируема на G.
- Введем функцию F: 1) непрерывно дифференцируемую на $\mathrm{int}\, G$ и 2) для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F(x_i) \to +\infty$.
- Примеры:
  - Барьер Кэррола:
$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)},$$
  - Логарифмический барьер:
$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x)).$$

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}\, G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\operatorname{int} G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho} F(x)$

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}\, G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho}F(x)$
- При $\rho \to +\infty$, следует, что $\frac{1}{\rho}F(x) \to 0$ на $\mathrm{int}\, G$.

Барьерная функция

- Физика более менее уже вырисовывается: F это непрерывный дифференцируемый «индикатор», который при приближении к ∂G улетает на бесконечность. Осталось только разобраться с тем, что честный индикатор на $\mathrm{int}\, G$ равен 0. **Вопрос:** идеи?
- Введем параметр $\rho > 0$ и рассмотрим и модифицируем значение F следующим образом: $\frac{1}{\rho}F(x)$
- При $\rho \to +\infty$, следует, что $\frac{1}{\rho}F(x) \to 0$ на $\mathrm{int}\, G$.
- Итого рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left[F_\rho(x) = f(x) + \frac{1}{\rho} F(x) \right].$$

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$.
- $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему?

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\text{int}\, G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\text{int}\, G$.
- $\{x_i\} \in \text{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему? F_ρ определена только на $\text{int}\, G$.

Барьерная задача

- F_ρ – непрерывно дифференцируемая на $\operatorname{int} G$. Следует из того, что F непрерывно дифференцируемая на $\operatorname{int} G$.
- $\{x_i\} \in \operatorname{int} G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$ (граница множества G), выполнено $F_\rho(x_i) \to +\infty$. Следует из непрерывности f и определения F.
- Формально задача $\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x)$ – это задача с ограничениями. **Вопрос:** почему? F_ρ определена только на $\operatorname{int} G$. Но это не проблема: пусть мы стартуем из $x^0 \in \operatorname{int} G$ и можем гарантировать, что метод минимизации $F_\rho(x)$ выдает точки x^k такие, что $F_\rho(x^k) \leq F_\rho(x^0)$. А мы знаем, что $F_\rho \to \infty$ при приближении к ∂G, а значит в какой-то момент, приближаясь к границе, F_ρ будет больше $F_\rho(x^0)$. Получаем, что x^k остается в $\operatorname{int} G$. Это означает, что задача с ограничениями превращается в безусловную, потому что ограничения «не чувствуются».

Свойства барьерной задачи

Чуть более формально последнее утверждение с предыдущего слайда.

Свойство барьерной задачи

Для любого $\rho > 0$ функция $F_\rho(x)$ принимает минимум на $\mathrm{int}\, G$. А множества вида

$$U = \{x \in \mathrm{int}\, G \mid F_\rho(x) \leq a\}$$

являются компактами для любого a.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать?

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможны две опции: $x \in \mathrm{int}\, G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \mathrm{int}\, G$.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможны две опции: $x \in \mathrm{int}G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \mathrm{int}G$. Но на $\mathrm{int}G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \leq a$.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможны две опции: $x \in \mathrm{int}G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \mathrm{int}G$. Но на $\mathrm{int}G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \leq a$.
- Ограниченность U следует из ограниченности G.

Доказательство

- Чтобы показать замкнутость U, рассмотрим последовательность $\{x_i\} \in U$, сходящуюся к x. **Вопрос:** что нужно доказать? $x \in U$. Возможны две опции: $x \in \text{int} G$ или ∂G? Если $x \in \partial G$, то $F_\rho(x_i) \to F_\rho(x) = \infty$, что невозможно, так как $F_\rho(x_i) \leq a$. Значит $x \in \text{int} G$. Но на $\text{int} G$ функция F_ρ непрерывна, откуда следует необходимое, нужно только перейти к пределу в $F_\rho(x_i) \leq a$.
- Ограниченность U следует из ограниченности G.
- F_ρ непрерывна на компакте U, тогда она принимает минимальное значение на нем (теорема Вейерштрасса). Но по определению U, этот минимум на U будет минимумом и на $\text{int} G$.

Свойства решений барьерной задачи

Свойство решений барьерной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что $\overline{\text{int}\, G} = G$ (замыкание $\text{int}\, G$). Тогда для любого $e > 0$ существует $\rho(e) > 0$ такое, что множество решений барьерной задачи X^*_ρ для любых $\rho \geq \rho(e)$ содержится в

$$X^*_e = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* \; : \; \|x - x^*\|_2 \leq e\},$$

где X^* – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

Свойства решений барьерной задачи

Свойство решений барьерной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что $\overline{\mathrm{int}G} = G$ (замыкание $\mathrm{int}G$). Тогда для любого $e > 0$ существует $\rho(e) > 0$ такое, что множество решений барьерной задачи X_ρ^* для любых $\rho \geq \rho(e)$ содержится в

$$X_e^* = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* \; : \; \|x - x^*\|_2 \leq e\},$$

где X^* – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

- X^* непустое, так как G замкнутое и ограниченное, а f непрерывна на этом компакте.
- То, что X_ρ^* непустое, доказали в первом свойстве.

Доказательство

- От противного:

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X^*_e, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X^*_e.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему?

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \text{int}G$, G есть замыкание $\text{int}G$.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \mathrm{int}\, G$, G есть замыкание $\mathrm{int}\, G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему?

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X^*_e, т.е. существуют $x^*_i \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X^*_e.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}^*_i \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}^*_i \in \mathrm{int}\, G$, G есть замыкание $\mathrm{int}\, G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера i, $\tilde{x}^*$ начнут попадать в X^*_e.

Доказательство

- От противного: пусть существует некоторое $e > 0$ и последовательность $\{\rho_i\} \to \infty$, что $X^*(\rho_i)$ не содержится в X_e^*, т.е. существуют $x_i^* \in X^*(\rho_i)$ не лежащие в X_e^*.
- Так как G ограничено, то $X^*(\rho_i)$ ограничено. По теореме Больцана-Вейрштрасса из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\tilde{x}_i^* \to \tilde{x}^*$. Посмотрим, что мы можем сказать про $\tilde{x}^*$.
- Отметим, что предел $\tilde{x}^*$ лежит в G. **Вопрос:** почему? $\tilde{x}_i^* \in \mathrm{int}\, G$, G есть замыкание $\mathrm{int}\, G$.
- Также $\tilde{x}^*$ не должен лежать в X^*. **Вопрос:** почему? Иначе, начиная с некоторого номера i, $\tilde{x}^*$ начнут попадать в X_e^*.
- Так как $\tilde{x}^*$ вне X^*, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(\tilde{x}^*) > f(x^*) + \delta,$$

где $x^* \in X^* \subseteq G$.

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\mathrm{int}\, G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \mathrm{int}\, G$, что
$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\operatorname{int} G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \operatorname{int} G$, что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(\tilde{x}_i^*) = \min_{x_i \in \operatorname{int} G} F_{\rho_i}(x_i) \leq F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

Доказательство

- С другой стороны: так как G есть замыкание $\mathrm{int}\, G$, а f непрерывна на G, то можно найти такую точку $\tilde{x} \in \mathrm{int}\, G$, что

$$f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

- Тогда

$$f(\tilde{x}_i^*) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}_i^*) = F_{\rho_i}(\tilde{x}_i^*) = \min_{x_i \in \mathrm{int}\, G} F_{\rho_i}(x_i) \leq F_{\rho_i}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x})$$

- Мы уже показывали, что F_ρ принимает свое минимальное значение (а значит ограничено снизу) на $\mathrm{int}\, G$. Аналогично, можно показать, что $F(x) \geq F^* > -\infty$ на $\mathrm{int}\, G$. Поэтому

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i} F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i} F^*.$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \le f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i}F^*.$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i}F^*.$$

- Функция f непрерывна на G. Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}).$$

Доказательство

- С предыдущего слайда:

$$f(\tilde{x}_i^*) \leq f(\tilde{x}) + \frac{1}{\rho_i}F(\tilde{x}) - \frac{1}{\rho_i}F^*.$$

- Функция f непрерывна на G. Переходим к пределу в неравенстве:

$$f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}).$$

- Но

$$f(x^*) + \delta < f(\tilde{x}^*) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x^*) + \frac{\delta}{2}.$$

Противоречие.

Итог по барьерам на данный момент

- По факту условная задача превращена в безусловную.
- Увеличение ρ помогает лучше аппроксимировать поведение честной индикаторной функции, а значит приближает нас к исходной задаче.
- Решение всегда удовлетворяет ограничениям.
- Более того, так как в процессе оптимизации мы не выходим за G, то можно сказать, что мы всегда «внутри», поэтому метод решающий задачу с барьером называется метод внутренней точки.
- В общем случае все. Как и для штрафов – выбираем, какое-то ρ пытаемся решить задачу с барьером. Далее можно попробовать увеличить ρ.

Итог по барьерам на данный момент

- По факту условная задача превращена в безусловную.
- Увеличение ρ помогает лучше аппроксимировать поведение честной индикаторной функции, а значит приближает нас к исходной задаче.
- Решение всегда удовлетворяет ограничениям.
- Более того, так как в процессе оптимизации мы не выходим за G, то можно сказать, что мы всегда «внутри», поэтому метод решающий задачу с барьером называется метод внутренней точки.
- В общем случае все. Как и для штрафов – выбираем, какое-то ρ пытаемся решить задачу с барьером. Далее можно попробовать увеличить ρ.
- Далее рассмотрим фундаментальные азы теории вокруг барьеров, которая сильно продвинула вперед науку в этой области.

Самосогласованная функция

Самосогласованная функция

Выпуклая трижды непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}\, G$ функция называется самосогласованной, если выполнены следующие условия

- $\left|\frac{d^3}{dt^3} F(x+th)\right| \leq 2[h^T \nabla^2 F(x) h]^{3/2}$ для любых $x \in \mathrm{int}\, G$ и $h \in \mathbb{R}^d$;
- Для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}\, G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$, выполнено «барьерное» свойство: $F(x_i) \to +\infty$.

Самосогласованная функция: примеры

- Квадратичная функция с симметричной положительно полуопределенной матрицей:
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c,$$
является самосогласованной на $\mathbb{R}^d$.
- Отрицательный логарифм:
$$f(x) = -\ln(x),$$
является самосогласованным на $\mathbb{R}_+$.
- Отрицательный логарифм квадратичной функции $g(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$:
$$f(x) = -\ln(-g(x))$$
является самосогласованным на $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) < 0\}$.

Самосогласованная функция: операции сохраняющие

- Сумма двух самосогласованных функций (F_1 на $\mathrm{int}\, G_1$ и F_2 на $\mathrm{int}\, G_2$):
$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x),$$
где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$, также является самосогласованной.
- Аффинное преобразование аргумента сохраняет самосогласованность: если $F(x)$ самосогласована на $\mathrm{int}\, G$, тогда
$$\tilde{F}(x) = F(Ax + b)$$
самосогласована на $\mathrm{int}\, \tilde{G} = \{x \mid Ax + b \in \mathrm{int}\, G\}$.

Самосогласованный барьер

Самосогласованный барьер

Функция F является ν-самосогласованным барьером (ν всегда ≥ 1) на множестве $\text{int}\, G$, если

- F самосогласована на $\text{int}\, G$;
- Выполнено условие: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 F(x) h}$ для любых $x \in \text{int}\, G$ и $h \in \mathbb{R}^d$.

- Пример – логарифмический барьер от лилейных ограничений:
$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} - \ln(b_i - a_i^T x),$$
где $\{b_i - a_i^T x\}$ удовлетворяют условию Слейтера, является m-самосогласованным барьером на $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$

Задача

- То с чего начинали:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \; f(x),$$
$$\text{s.t.} \;\; g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m.$$

Только пусть теперь все функции f и g_i выпуклые на G.

Задача

- То с чего начинали:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad f(x),$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m.$$

Только пусть теперь все функции f и g_i выпуклые на G.

- Переформулируем в форме эпиграфа:

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}} \quad t,$$
$$\text{s.t.} \quad g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m$$
$$f(x) - t \leq 0.$$

Задача остается выпуклой (эпиграф выпуклый тогда и только тогда, когда функция выпукла). Добавилась линейность целевой функции.

Задача

- Поэтому будем рассматривать задачу вида:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots m, \end{aligned}$$

  с выпуклыми функциями g_i.

Общий случай метода

Сначала посмотрим на общую схему, которая подойдет для любой задачи.

Алгоритм 1 Метод внутренней точки (общий случай)

Вход: стартовая точка $x^0 \in \operatorname{int} G$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k > \rho_{k-1}$

3: С помощью некоторого метода решить численно задачу безусловной оптимизации с целевой функцией F_{ρ_k} и стартовой точкой x_k. Гарантировать, что выход метода x_{k+1} будет близок к реальному решению $x^*(\rho_k)$.

4: **end for**

Выход: x^K

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и ν-самосогласованных барьеров.
- Чем меньше ν тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

- Теперь перейдем к частному случаю линейной целевой функции и ν-самосогласованных барьеров.
- Чем меньше ν тем лучше барьер и как увидим далее – быстрее сходится метод.

Линейная целевая функция и самосогласованный барьер

Введем дополнительные объекты:

- $\Phi_\rho(x) = \rho F_\rho(x) = \rho c^T x + F(x)$
- $\lambda(\Phi_\rho, x) = \sqrt{[\nabla \Phi_\rho(x)]^T [\nabla^2 \Phi_\rho(x)]^{-1} \nabla \Phi_\rho(x)}$

Алгоритм 2 Метод внутренней точки (частный случай)

Вход: параметры $e_1, e_2 \in (0;1)$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, стартовая точка $x^0 \in \operatorname{int} G$ такая, что $\lambda(\Phi_{\rho_{-1}}, x^0) \le e_1$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k = \left(1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}\right) \rho_{k-1}$

3: Сделать шаг демпфированного метода Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{1 + \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)} [\nabla^2 \Phi_{\rho_k}(x^k)]^{-1} \nabla \Phi_{\rho_k}(x^k)$$

(возможно, понадобится больше одного шага метода Ньютона, но при правильном соотношении e_1 и e_2 достаточно ровно одного)

4: **end for**

Выход: x^K

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем x^0 так, что он сразу близок к $x^*(\rho)$. Это можно сделать, например, запустив демпфированный метод Ньютона на большое число итераций.

Линейная целевая функция

Введем дополнительные объекты:

- С помощью хитрого критерия (ньютоновского декремента): $\lambda(\Phi_\rho, x)$ мы измеряем «близость» x к $x^*(\rho)$.
- для положительно определенной матрицы $\nabla^2\Phi_\rho(x)$ декремент представляет собой некоторую модификацию критерия вида $\|\nabla\Phi_\rho(x)\|_2$, но по норме, индуцированной матрицей.
- Мы задаем x^0 так, что он сразу близок к $x^*(\rho)$. Это можно сделать, например, запустив демпфированный метод Ньютона на большое число итераций.
- Далее мы увеличиваем ρ. И оказывается, что теперь достаточно только одного шага Ньютона, чтобы снова гарантированно быть близко к $x^*(\rho)$, а точнее $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq e_1$. А дальше зацикливаем. Осталось только показать, что и правда $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq e_1$.

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\nabla \Phi_\rho(x)\|_{H^{-1}(x)} = \|\rho c + \nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)}$$

Доказательство

Еще одно обозначение: $H(x) = \nabla^2 \Phi_\rho(x) = \nabla^2 F(x)$, и уже знакомая нам норма, индуцированная положительно определенной матрицей: $\|x\|_A^2 = x^T A x$.

Сразу из определения самосогласованного барьера следует, что $H(x)$ положительно полуопределена, но можно показать и, что положительно определена.

- В новых обозначениях:

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \|\nabla \Phi_\rho(x)\|_{H^{-1}(x)} = \|\rho c + \nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)}$$

- Попробуем оценить $\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)$ через $\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k)$, т.е. насколько ухудшает ситуацию увеличение ρ (здесь используем просто неравенство треугольника):

$$\begin{aligned}\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) &= \|\rho_k c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \\ &\le \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1}) c\|_{H^{-1}(x^k)}\end{aligned}$$

Доказательство

- Продолжаем с предыдущего слайда (просто подставляем ρ_k через ρ_{k-1}):

$$
\begin{aligned}
\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) &\leq \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} + \|(\rho_k - \rho_{k-1}) c\|_{H^{-1}(x^k)} \\
&= \lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) + \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-1}} \|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \\
&\leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}} \|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}
\end{aligned}
$$

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$.

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованного барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T H(x) h}$.

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1}c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1}c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованного барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}(x)\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x)\nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x)\nabla F(x)}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованного барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}(x)\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x)\nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x)\nabla F(x)}$$
В силу симметричности $H(x)$ получаем
$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$

Доказательство

- Нужно оценить $\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)}$:
$$\lambda(\Phi_{\rho_{k-1}}, x^k) = \|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1$$
- Неравенство треугольника:
$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \|\nabla F(x^k)\|_{H^{-1}(x^k)}$$
- Из определения самосогласованного барьера для любого h: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T H(x) h}$. В том числе для $h = H^{-1}(x)\nabla F(x)$:
$$[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) \nabla F(x) \leq \sqrt{\nu}\sqrt{[\nabla F(x)]^T H^{-T}(x) \nabla F(x)}$$
В силу симметричности $H(x)$ получаем
$$\|\nabla F(x)\|_{H^{-1}(x)} \leq \sqrt{\nu}$$
- Итого:
$$\|\rho_{k-1} c\|_{H^{-1}(x^k)} \leq e_1 + \sqrt{\nu}$$

Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

- Функция Φ_{ρ_k} является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера). Один шаг демпфированного метода Ньютона дает:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}.$$

Доказательство

- Объединяем результаты:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k) \leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}(e_1 + \sqrt{\nu}).$$

- Функция Φ_{ρ_k} является самосогласованной, как сумма двух самосогласованных (линейной и самосогласованного барьера). Один шаг демпфированного метода Ньютона дает:

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq \frac{2\lambda^2(\Phi_{\rho_k}, x^k)}{1 - \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)}.$$

В частности, если $e_1 = 0,05$ и $e_2 = 0,08$, то

$$\lambda(\Phi_{\rho_k}, x^{k+1}) \leq 0,05 = e_1.$$

Что и требовалось.

Доказательство

- Мы всегда близко к текущему $x^*(\rho)$.
- Уже знаем, что увеличение ρ влечет за собой приближение к исходной задаче.
- Осталось понять, как быстро приближаемся к решению исходной задачи с увеличением ρ.

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как $x = x^*(\rho)$, то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

Доказательство

- Разберем упрощенный случай: пусть мы не просто близки к решению, пусть $x = x^*(\rho)$, также остановимся на случае логарифмических барьеров с линейными функциями в качестве ограничений:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T x).$$

- Так как $x = x^*(\rho)$, то по условию оптимальности:

$$\nabla \Phi_\rho(x) = \rho c + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i - a_i^T x} = 0.$$

- Возьмем скалярное произведение с $(x - x^*)$:

$$\rho c^T (x - x^*) = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^T (x^* - x)}{b_i - a_i^T x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i^T x}{b_i - a_i^T x} = m$$

Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера $\nu = m$):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

Доказательство

- В итоге (пользуясь, что для нашего барьера $\nu = m$):

$$f(x) - f(x^*) = c^T(x - x^*) = \frac{m}{\rho} = \frac{\nu}{\rho}$$

- Так как ρ увеличивается линейно, то и к решению мы приближаемся линейно.
- В общем случае справедлива следующая теорема.

Сходимость

Сходимость метода внутренней точки

Пусть с помощью метода внутренней точки решается задача оптимизации с линейной целевой функцией и выпуклыми ограничениями вида неравенств, при этом используются ν-самосогласованные барьеры. Тогда чтобы достичь ε решения $(f(x) - f(x^*) \leq \varepsilon)$, необходимо

$$K = \mathcal{O}\left(\sqrt{\nu}\log\frac{\nu}{\varepsilon\rho_0}\right) \text{ итераций метода.}$$

Итого

- Метод внутренней точки – хорошая альтернатива методу барьеров, которая дополнительно гарантирует соблюдение ограничений.
- Для выпуклых задач метод внутренней точки обладает фундаментальной теорией и сильными гарантиями сходимости.