# Методы оптимизации. Семинар 4. Выпуклые множества.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

23 сентября 2024г

# Выпуклые множества

**Definition**

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in [0, 1]$, точка $\theta x_1 + (1 - \theta) x_2$ также принадлежит $S$.

Если мы берем любые две точки внутри множества и соединяем их отрезком, то весь этот отрезок лежит внутри множества.

# Примеры выпуклых множеств

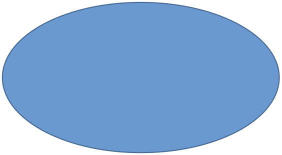

Рис.: Пример выпуклого множества.

Рис.: Пример не выпуклого множества.

# Афинные множества

**Definition**

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *афинным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in \mathbb{R}$, точка $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ также принадлежит $S$.

**Proposition**

*Любое афинное множество является выпуклым.*

В афинном множестве, выбрав две точки, мы ожидаем, что не только отрезок между ними, но и вся прямая, соединяющая эти точки, принадлежит этому множеству, в отличие от определения выпуклости.

# Докажем по определению

**Example (Полуплоскость)**

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда полуплоскость $\{x \mid a^T x \geq b\}$ выпукла.

**Example (Гиперплоскость)**

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда гиперплоскость $\{x \mid a^T x = b\}$ является афинным множеством.

## Example (Шар по норме)

Пусть $\| \cdot \|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда шар $\overline{B}(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| \leq r\}$ является выпуклым множеством.

В частности, шары в матричных нормах $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$ (норма Фробениуса) и $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ (Спектральная норма) также являются выпуклыми.

## Example (Сфера)

Пусть $\| \cdot \|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| = r\}$ НЕ является выпуклым множеством.

**Example (Множество положительно полуопределенных матриц)**

Множество всех положительно полуопределенных матриц размера $n \times n$, определяемое как

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T,\ z^T X z \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

является выпуклым множеством.

**Example**

Докажите, что множество $M = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} | x_1 x_2 \geq 1\}$ является выпуклым.

# Афинная функция

**Definition**

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *афинной*, если найдутся $b \in \mathbb{R}^m$ и $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что $f(x) = Ax + b$.

# Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть $S_1$, $S_2$ — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.

# Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть $S_1$, $S_2$ — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть $S$ — выпуклое множество, $f$ — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть $S$ — выпуклое множество, $f$ — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i\in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть $S_1$, $S_2$ — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть $S$ — выпуклое множество, $f$ — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть $S$ — выпуклое множество, $f$ — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.
5. **Декартово произведение:** Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ — выпуклые множества, тогда декартово произведение $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ также выпукло.

# Докажем через сохранение выпуклости

## Example (Многогранник)

Многогранником называется множество точек в $\mathbb{R}^n$, задающееся системой линейных равенств и неравенств: $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Cx = d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ и $d \in \mathbb{R}^k$.

## Example (Ограниченные полиномы)

Докажите, что множество $\{a \in \mathbb{R}^k | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 \forall t : \alpha \leq t \leq \beta\}$, где
$p(t) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_k t^{k-1}$, является выпуклым.

# Докажем через афинные функции

**Example**

Докажите, что множество $S = \{x | \|Ax + b\| \leq c^T x + d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $c, d \in \mathbb{R}^n$, выпукло.

# Докажем через афинные функции

**Example (Гиперболический конус)**

Пусть $P \in \mathcal{S}^n_+$ и $c \in \mathbb{R}^n$, тогда множество

$$K = \{x | x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$$

является выпуклым.

**Доказательство.**

Как мы уже знаем, множество $L = \{(x, t) | \|x\| \leq t\}$ является выпуклым.
Воспользуемся фактом, что $\forall P \in \mathcal{S}^n_+ \ \exists Q \in \mathcal{S}^n_+ : P = Q^2$, поэтому наше множество $K$ переписывается следующим образом:
$K = \{x | \|Qx\| \leq c^T x\}$. Заметим, что $K = f^{-1}(L)$, где $f(x) = (Qx, c^T x)$ - афинная функция. Поэтому $K$ выпукла как прообраз выпуклого множества при афинном преобразовании. $\square$

# Докажем через афинные функции

**Example**

Рассмотрим множество $C = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \succ B\}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Докажите, что $C$ выпукло.

**Доказательство.**

Рассмотрим афинную функцию $f(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n - B$, тогда
$C = f^{-1}(\mathcal{S}^n_{++})$. Поэтому $C$ выпукла как прообраз выпуклого множества. $\square$

# Выпуклая комбинация

**Definition**

*Выпуклой комбинацией* точек $x_1, \ldots, x_k$ называется любая точка вида

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k,$$

где $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \le \theta_i \le 1$ для всех $i$.

**Proposition**

*Если $S$ является выпуклым множеством и $x_1, \ldots, x_k \in S$, то любая выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_k$ также принадлежит $S$.*

## Доказательство.

Доказательство проведем индукцией по $k$.
База при $k = 2$ верна. Пусть утверждение верно для $k - 1$.
Переход: рассмотрим $x_1, \ldots, x_k \in S$ и пусть $\theta_1, \ldots, \theta_k$ таковы, что $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \leq \theta_i \leq 1$. Если $\theta_k = 1$, то утверждение очевидно.
В противном случае перепишем комбинацию:

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k = (1 - \theta_k) \left( \frac{\theta_1}{1 - \theta_k} x_1 + \ldots + \frac{\theta_{k-1}}{1 - \theta_k} x_{k-1} \right) + \theta_k x_k,$$

где каждое слагаемое $\frac{\theta_i}{1-\theta_k}$ лежит в интервале $[0, 1]$, а их сумма равна 1. По предположению индукции и определению выпуклого множества, утверждение верно для $k$. $\square$

# Выпуклая оболочка

**Definition**

*Выпуклой оболочкой* множества $S$ называется наименьшее по включению выпуклое множество $T$, содержащее $S$. То есть, это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $S$. Обычно выпуклую оболочку обозначают $\operatorname{conv} S$.

Выпуклая оболочка является выпуклым множеством.

# Связи

**Theorem**

*Выпуклая оболочка множества $S$ равна множеству всех выпуклых комбинаций элементов $S$, то есть*
$\operatorname{conv} S = \cup_{k\in\mathbb{N}}\{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1, x_i \in S\}$.

# Доказательство теоремы

**Доказательство.**

Пусть $x$ — произвольная выпуклая комбинация элементов $S$. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение слева направо.

**Доказательство.**

Пусть $x$ — произвольная выпуклая комбинация элементов $S$. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение слева направо.
Докажем вложение в обратную сторону. Заметим, что $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1\}$ является выпуклым множеством, так как если $x$ и $y$ выпуклые комбинации $S$, то $\theta x + (1 - \theta) y$ является выпуклой комбинацией большей размерности для $\theta \in [0, 1]$. Поэтому вложение выполняется. Значит эти множества равны. $\square$

# Пример на выпуклую оболочку

## Example

Покажите, что $\mathrm{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\} = \{A \in \mathcal{S}^n_+ |\ \mathrm{Tr}(A) = 1\}$.

# Пример на выпуклую оболочку

**Example**

Покажите, что $\text{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\} = \{A \in \mathcal{S}_+^n | \operatorname{Tr}(A) = 1\}$.

Для начала докажем вложение слева направо. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1$. Покажем, что след матрицы $xx^T$ равен 1:

$$\operatorname{Tr}(xx^T) = \operatorname{Tr}(x^T x) = \|x\|_2^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим матрицу $A \in \{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$. По вышедоказанной теореме мы имеем, что $A = \theta_1 x_1 x_1^T + \theta_2 x_2 x_2^T + \ldots + \theta_n x_n x_n^T$, где $\theta_i \geq 0$, $\|x_i\|_2 = 1$ и $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 1$. Поэтому, используя линейность следа, мы получаем $\operatorname{Tr}(A) = 1$.

# Пример на выпуклую оболочку

Далее докажем вложение справа налево. Пусть $A \in \mathcal{S}_+^n$ и $\mathrm{Tr}(A) = 1$. Матрица $A$ симметричная, значит у нее есть базис из собственных векторов. Применяя спектральное разложение мы получаем, что $A = S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S$, где $S$ - ортогональная матрица. Заметим, что

$$\mathrm{Tr}(S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S) = \mathrm{Tr}(SS^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) =$$
$$\mathrm{Tr}((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Из спектрального разложения мы делаем вывод, что $A = \lambda_1 s_1 s_1^T + \lambda_2 s_2 s_2^T + \ldots + \lambda_n s_n s_n^T$, где $s_i$ - соответствующие нормированные собственные вектора. Это завершает доказательство.

**Definition**

Множество $C$ называется *конусом*, если для любых $c \in C$ и $\theta \geq 0$ точка $\theta c$ также принадлежит $C$.

**Proposition**

*Если верно следующее условие: для любых $c_1, c_2 \in C$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ выполнено*

$$\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C,$$

*то множество является выпуклым конусом.*

## Definition

Конической оболочкой множества $C$ называется множество

$$\cup_{k=1}^{\infty}\{\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_k c_k |_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

Несложно проверить, что коническая оболочка является выпуклым конусом.

## Proposition

*Пересечение любого семейства множеств сохраняет свойство быть конусом, а также сохраняется свойство быть выпуклым конусом.*

# Примеры конусов

### Example

Множество $C = \{(x, t) \in R^{n+1} : \quad \|x\| \leq t\}$ является выпуклым конусом.

### Example

Множество положительно полуопределенных матриц $\mathcal{S}_+^n$ является выпуклым конусом

### Example

Матрица $X \in \mathcal{S}^n$ называется коположительной, если $z^T X z \geq 0$ для всех $z \geq 0$. Проверьте, что множество коположительных матриц является выпуклым конусом.

# Теоремы отделимости

**Theorem (Теорема об отделимости)**

*Пусть $S$ и $T$ - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in S \ a^T x - b \leq 0$ и $\forall y \in T \ a^T y - b \geq 0$.*

То есть любые два непересекающиеся выпуклых множества можно разделить гиперплоскостью.

**Theorem (Теорема о строгой отделимости)**

*Пусть $S$ и $T$ - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, причем $S$ - компакт, а $T$ - замкнуто. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\sup_{x \in S} a^T x < b < \inf_{y \in T} a^T y$.*

# Лемма Фаркаша

**Theorem**

*Рассмотрим систему строгих неравенств* $Ax < b$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *и* $b \in \mathbb{R}^n$. *Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется* $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$, $\lambda \geq 0$ *и* $\lambda^T b \leq 0$.

Неразрешимость линейного неравенства от $x$, который лежит в $m$-мерном пространстве, сводится к разрешимости системы равенств и неравенств от переменной из $n$-мерного пространства.

# Другие интересные примеры

**Theorem (Бесконечная выпуклая комбинация)**

*Пусть $S$ - непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset S$ и $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0,1] : \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i = 1$, тогда если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i x_i$ сходится, то точка, определяемая этим рядом, также принадлежит $S$.*

**Example (Инволюция сопряжения нормы)**

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана норма $\|.\|$. Сопряженная норма определяется следующим образом: $\|y\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} x^T y$.

1. Докажите, что $\|y\|_*$ действительно является нормой в $\mathbb{R}^n$.
2. Докажите, что для любых $x, y$

$$x^\top y \leq ||x|| \cdot ||y||_*.$$

3. Докажите, что взятие сопряжения является инволюцией, то есть $\|x\|_{**} = \|x\|$.