Методы оптимизации. Семинар 11.
От LP до SDP, примеры задач.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

13 ноября 2025г

Линейное программирование

Общий вид

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \ & \langle c, x\rangle \\ \textbf{s.t.} \ & Ax = b, \\ & Gx \le h. \end{aligned}$$

Стандартный вид

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \ & \langle c, x\rangle \\ \textbf{s.t.} \ & Ax = b, \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

Задачу в общем виде можно свести к стандартному

$$\underbrace{\begin{aligned}\min_x\ & \langle c, x\rangle \\ & Ax = b \\ & Gx \leq h\end{aligned}} \implies \begin{aligned}\min\ & \langle \tilde{c}, \tilde{x}\rangle \\ & \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \\ & \tilde{x} \geq 0\end{aligned}$$

$x = x^{+} - x^{-}$

$x_{+} \geq 0$

$x_{-} \geq 0$

$Ax = b$

$$\min_{x^+, x^-} \langle c, x^+\rangle - \langle c, x^-\rangle$$

$$A(x^+ - x^-) = b$$

$$G(x^+ - x^-) \leq h$$

$$\exists\ G(x^+ - x^-) + \underline{v} = h$$

$$v \geq 0$$

$$\min_{x^+, x^-, v} \langle \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{c}}, \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ v \end{pmatrix} \rangle \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ v \end{pmatrix}$$

$$x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0,\ v \geq 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & -A & 0 \\ G & -G & I \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

Дробно-линейное программирование

Example

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left[f(x) := \frac{c^\top x + d}{e^\top x + f}\right]$$
$$\textbf{s.t. } Ax = b,$$
$$Gx \le h,$$

где $\{x | e^\top x + f > 0\}$.

Задача невыпуклая, однако можно свести к LP.

Дробно-линейное программирование

$$\frac{c^T x + d}{e^T x + f} = c^T y + dz$$

Замена:

$$y = \frac{x}{e^\top x + f} \in \mathbb{R}^n, \quad z = \frac{1}{e^\top x + f} \in \mathbb{R}.$$

$$x = \frac{y}{z}$$

Эквивалентная система (почему?):

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} \ & c^\top y + dz \\ \textbf{s.t. } & Ay - bz = 0, \\ & Gy - hz \le 0, \\ & e^\top y + fz = 1, \\ & z \ge 0. \end{aligned}$$

$$Ax = b$$

$$\Downarrow$$

$$Ay - bz = 0$$

$$z > 0$$

$$x \to (y, z) \quad x = \frac{y}{z}$$

$z=0$

$\min c^T y$

$Ay=0$

$6y \leq 0$

$\underbrace{l^T y = 1}$

$\exists x_0$ – допустимая точка

$Ax_0 = b$

$6x_0 \leq h$

$x_t = x_0 + ty$

$Ax_t = Ax_0 + t\underbrace{Ay}_{0} = b$

$6x_t \leq h$

$$\min_{x_t} \frac{C^T x_t + d}{l^T x_t + f} = \frac{C^T x_0 + tC^T y + d}{l^T x_0 + \underbrace{l^T y}_{1} t + f} \geq c^T y$$

при $t \to +\infty$

$$\to \frac{C^T y}{\underbrace{l^T y}_{=1}} = \underline{C^T y}$$

$\forall x \Rightarrow (y, z)$

$\forall (y, z) \Rightarrow$ $x \cdot y$ если $z > 0$

$x_{t \to}$, если $z = 0$

$c^T y$

Сведение через двойственность

Example

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \; & f(x) := \sum_{i=1}^{r} x_{[i]} \\ \textbf{s.t. } & Ax = b, \\ & Gx \le h, \end{aligned}$$

где $x_{[i]}$ - i-ая по величине координата, то есть $x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge \dots \ge x_{[n]}$.

Сведение через двойственность

Замена

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^n} y^\top x = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$$

$$\text{s.t. } 0 \le y \le 1,$$

$$1^\top y = r.$$

$$= -\min -\langle y, x \rangle$$

$$\text{s.t. } 0 \le y \le 1,\ 1^T y = r$$

Сильная двойственность и двойственная задача (накладываем только условия $y \le 1$):

$$f(x) = \min_{t,\nu} rt + \mathbf{1}^\top \nu$$

$$\text{s.t. } t\mathbf{1} + \nu \ge x,$$

$$\nu \ge 0.$$

$$\min_{x,t,\nu} \quad rt + 1^T \nu$$

$$t1 + \nu \ge x$$

$$\nu \ge 0$$

$$Ax = b,\ Gx \le h$$

$$- \min_{y} -\langle y, x\rangle$$

$$0 \le y \le 1 \cdot v$$

$$1^T y = r \cdot t$$

$$L(y, v, t) = -\langle y, x\rangle + t(1^T y - r) + v^T(y - 1)$$

$$g(v,t) = \inf_{y \ge 0} \langle y, \underbrace{v + 1 \cdot t - x}\rangle - \langle v, 1\rangle - rt$$

Если ∃ отр. коор.

$$v + 1t - x \ge 0 \Rightarrow g(v,t) = -\langle v, 1\rangle - rt$$

$$v + 1 \cdot t - x \not\ge 0 \Rightarrow -\infty$$

$$- \max_{v,t} -\langle v, 1\rangle - rt = \min_{v,t} \langle v, 1\rangle + rt$$

$$v \ge 0$$

$$v + 1t - x \ge 0$$

Quadratic Constrained Quadratic Programming (QCQP)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ & \frac{1}{2} x^\top A_0 x + b_0^\top x + c_0 \\ \textbf{s.t.} \ & \frac{1}{2} x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

$A_i \in \mathbb{S}^n$ – необязательно неотрицательно определенные.
В частности, неравенства

- $x_i \in \{-1, 1\} \quad x_i^2 - 1 = 0,$
- $x_i \in \{0, 1\} \quad x_i^2 - x_i = 0,$
- $x_i \in \{-M, -M+1, \dots, N-1, N\}, \quad x_i = \sum_{j=1}^{N} u_j^+ - \sum_{j=1}^{M} u_j^-.$

$x_i^2 - 1 \geq 0$

$x_i^2 - 1 \leq 0$

Если все ограничения вида неравенства линейные, то задача называется просто Quadratic Programming.

LP лежит в QCQP!

Метод наименьших квадратов

Example

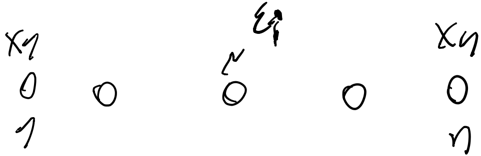
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2.$$

$$\frac{1}{2}\langle Ax-b, Ax-b\rangle = \langle \underbrace{A^TA}_{A_1}x, x\rangle - \langle \underbrace{b}_{b_1 := -b}, x\rangle + \underbrace{\langle b,b\rangle}_{c_1}$$

Составление портфеля

Предположим имеется

- n активов, куда можно вложить капитал
- $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1$ – распределение по активам
- ξ_i –случайная величина прибыли i-го актива со средним p_i и дисперсей σ_i
- Ковариация между активами задана матрицей Σ_{ij}
- Хотим среднюю прибыль не меньше α и с наименьшей дисперсией



$x_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$\mathbb{E}\,\xi_i = p_i$, $\mathbb{D}\,\xi = \sigma_i$

$\text{Profit} = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$

$x_i \xi_i$ – прибыль

$\mathbb{E}\,\text{Profit} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overbrace{\mathbb{E}\xi_i}^{p_i}$

Составление портфеля

Предположим имеется

- n активов, куда можно вложить капитал
- $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1$ – распределение по активам
- ξ_i –случайная величина прибыли i-го актива со средним p_i и дисперсей σ_i
- Ковариация между активами задана матрицей Σ_{ij}
- Хотим среднюю прибыль не меньше α и с наименьшей дисперсией

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^\top \Sigma x$$ – min дисперсии

$$\text{s.t. } x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq \alpha.$$ – огр на прибыль

$\mathbb{E}[\xi_1 x_1 + \ldots \xi_n x_n]^2$

$\mathbb{E}[\langle\vec{\xi}, x\rangle]^2$

$\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}(x^T \xi \xi^T x)$ $\boxed{\mathbb{E}\,\xi\xi^T}$

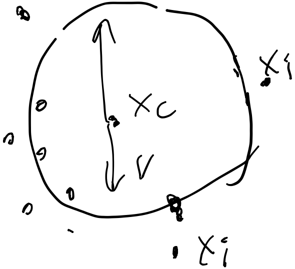
$\mathrm{Tr}(x^T \Sigma x)$

$\Sigma \succeq 0$

Приближение сферой

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^k$ – зашумленные нормальным шумом $\mathcal{N}(0, I_n\varepsilon^2)$ точки с евклидовой сферы $S_r^n(x_c) := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_c\|_2 = r\}$. То есть

$$x_i = \hat{x}_i + u_i, \quad \hat{x}_i \in S_r^n(x_c), \quad u_i \sim \mathcal{N}(0, I_n\varepsilon^2).$$



r, x_c - ?

Приближение сферой

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^k$ – зашумленные нормальным шумом $\mathcal{N}(0, I_n\varepsilon^2)$ точки с евклидовой сферы $S_r^n(x_c) := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_c\|_2 = r\}$. То есть

$$x_i = \hat{x}_i + u_i, \quad \hat{x}_i \in S_r^n(x_c), \quad u_i \sim \mathcal{N}(0, I_n\varepsilon^2).$$

Задача оптимизации

$$\min_{x_c \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^k (\|\underbrace{x_i - x_c}\|_2^2 - \underset{\checkmark}{r}^2)^2.$$

В общем случае, функция $(x^2 - y^2)^2$ невыпуклая.

Эквивалентная задача

Перепишем задачу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} (\|x_i - x_c\|_2^2 - r^2)^2 = \sum_{i=1}^{k} (\|x_i\|_2^2 - 2x_i^\top x_c + \underbrace{\|x_c\|_2^2 - r^2}_{\substack{\shortparallel \\ t}})^2.$$

Замена:

$$(x_c, r) \to (x_c, t = \|x_c\|_2^2 - r^2)$$

Получившаяся задача

$$\min_{x_c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{k} (\|x_i\|_2^2 - 2x_i^\top x_c + t)^2. \quad - \text{QP}$$

Множество решений шире, но в точке оптимума $\|x_c\|^2 \geq t$ (почему?).

$\Rightarrow -r^2 = t - \|x_c\|^2 \leq 0$

$\frac{\partial f(x_c, t)}{\partial t} = 0$ - в точке оптимума

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} (\|x_i\|^2 - 2x_i^T x_c + t)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(\|x_i\|^2 - 2x_i^T x_c + t) =$$

$$+\|x_c\|^2 - \|x_c\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2 \underbrace{(\|x_i\|^2 - 2x_i^T x_c + \|x_c\|^2}_{\|x_i - x_c\|^2}) - 2\|x_c\|^2 + 2t\right] = 0$$

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} 2\|x_i - x_c\|^2\right) - 2n\|x_c\|^2 + 2nt$$

$$t - \|x_c\|^2 = -\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i - x_c\|^2}{n}\right) \leq 0$$

$$t \leq \|x_c\|^2$$

Second-order Conic Programming

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n}\ & \langle c, x\rangle \\ \textbf{s.t. } & Ax = b \\ & \|G_i x - h_i\|_2 \le e_i^\top x + f_i, \quad i = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Последнее условие означает, что пара $(G_i x - h_i, e_i^\top x + f_i)$ лежит в конусе $K_2 = \{(y, t) | \quad \|y\|_2 \le t, t \ge 0\}$.

Выпуклые задачи QCQP лежат в SOCP!

$$\min_x \; x^T A_0 x + b^T x + c \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{t,x} \; t$$

$$A_0 \succeq 0 \qquad \underbrace{x^T A_0 x + b^T x + c}_{r} \leq t \quad ⓧ$$

x^* – решение $\quad t \geq \underbrace{x^{*T} A_0 x^* + b^T x^*}+ c$

$$\Rightarrow \exists x \quad t \geq x^T A x + b^T x + c$$

$$t < x_*^T A x_* + b^T x_* + c$$

$$\nexists x \Rightarrow t \geq x^T A x + b^T x + c$$

$$t \in [x^{*T} A x^* + b^T x^* + c, +\infty)$$

$$(*) \Rightarrow A = L^T L \qquad x^T A x + b^T x + c =$$

$$x^T L^T L x + b^T x + c$$

$$\overset{\shortparallel}{\|Lx\|_2^2} + \underbrace{b^T x + c}_{s} \; ⊜$$

$$s = \frac{(s+1)^2}{4} - \frac{(s-1)^2}{4} = \frac{s^2 + 2s + 1 - s^2 + 2s - 1}{4} = s$$

$$⊜ \; \|Lx\|^2 + \frac{(s+1)^2}{4} - \frac{(s-1)^2}{4} \leq 0$$

$$\sqrt{\|Lx\|^2 + \frac{(s+1)^2}{4}} \leq \frac{s-1}{4}$$

$$\overset{\shortparallel}{\left\| \begin{pmatrix} Lx \\ \frac{s+1}{2} \end{pmatrix} \right\|_2} \leq \frac{s-1}{4} \qquad s = b^T x + c$$

$$\underset{g}{\shortparallel} \qquad \underset{h}{\shortparallel}$$

$$\|g\|_2 \leq h$$

$$g = \begin{pmatrix} Lx \\ \frac{s+1}{2} \end{pmatrix} \quad h = \frac{s-1}{4} -$$

дорешить

Сведение через эпиграф

$$\min \max \|A_i x - b_i\|_2 \Rightarrow \min t$$

$$\max \|A_i x - b_i\|_2 \le t$$

$$\Leftrightarrow \|A x_i - b_i\|_2 \le t \ \forall i$$

Example

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} \|A_i x - b_i\|_2,$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{i=\overline{1,m}} \|A_i x - b_i\|_2.$$

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{m} \|A x_i - b_i\|_2 \Leftrightarrow \min_{t_i, x} \sum_{i=1}^{m} t_i$$

$$\|A x_i - b_i\|_2 \le t_i$$

Robust Linear Regression

Example

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) := \sup_{(A,b)\in\mathcal{A}} \|Ax - b\|_2,$$

где $\mathcal{A} = \{(A, b) |\quad \|(A - A_0, b - b_0)\|_F \leq \rho\}$.

Оценим сверху

$$f(x) \leq \|A_0 x - b_0\|_2 + \rho \left\| \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

Robust Linear Regression

- При $A_0x + b_0 = 0$ берём $(\Delta A, \Delta b) = \frac{\rho}{\sqrt{n}\|(x,1)\|_2}\mathbf{1}_m \cdot (x^T, 1)$.
- При $A_0x + b_0 \neq 0$ берём $(\Delta A, \Delta b) = uv^\top$, где $u = \rho\frac{A_0x - b_0}{\|A_0x - b_0\|_2}, v = \frac{(x,1)}{\|(x,1)\|_2}$.

Итого, эквивалентная задача

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A_0x - b_0\|_2 + \rho\left\|\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_2.$$

SemiDefinite Programming

Стандартная форма

$$
\begin{aligned}
\min_{X \in \mathbb{S}^n} \; & \langle C, X \rangle \\
\textbf{s.t.} \; & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\
& X \succeq 0.
\end{aligned}
$$

Двойственная задача

$$
\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^m} \; & \langle b, x \rangle \\
\textbf{s.t.} \; & \sum_{i=1}^{m} A_i x_i \preceq C.
\end{aligned}
$$

SOCP лежит в SDP!

Минимум спектральной нормы

Example

Пусть $A(x) := A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i x_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и требуется найти

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A(x)\|_2. = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

Theorem (Дополнение по Шуру)

Для блочной матрицы $M \in \mathbb{S}^{n+m}$ с обратимой $A \in \mathbb{S}^n$ верно

$$M = \begin{array}{c|cc} & n & m \\ \hline n & A & B \\ m & B^\top & \underset{m}{C} \end{array} \succeq 0 \iff \begin{cases} A \succ 0, \\ C - B^\top A^{-1} B \succeq 0. \end{cases}$$

$$(x\,y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \iff \inf_{x,y}\ \underbrace{x^T A x}_{} + x^T B y + y^T B^T x + y^T C y \geq 0$$

$$\nabla_x = 0 \Rightarrow A x^* = By \Rightarrow x^* = -A^{-1} B y \Rightarrow$$

x^*

$$\Rightarrow \inf_{y} y^T \left(C - B^T A^{-1} B \right) y \geq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \geq 0$$

Минимум спектральной нормы

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m; t\in\mathbb{R}} \quad t$$
$$\textbf{s.t.} \; \|A(x)\|_2^2 \le t^2.$$

Эквивалентная задача

$$\lambda_{\max}(A(x)^\top A(x)) \le t^2, t \ge 0 \Longleftrightarrow t^2 I_n \succeq A(x)^\top A(x).$$

Дополнение по Шуру

$$\begin{pmatrix} \underline{tI_n} & A(x)^\top \\ A(x) & tI_m \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Релаксация QCQP

Замена:
Введём $X = xx^\top$ - новые переменные, забирающие всю сложность.
Релаксация к SDP:

$$X = xx^T \Rightarrow \quad X \succeq xx^\top \overset{\text{Шур}}{\iff} \overbrace{\begin{pmatrix} X & x \\ x^\top & \boxed{1} \end{pmatrix}}^{Y} \succeq 0, \quad - SDP$$

$$\frac{1}{2}x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i = \frac{1}{2}\langle A_i, X\rangle + b_i^\top x + c_i.$$

Если у оптимума $\operatorname{rank}(X) = 1$, то это решение исходной задачи. Если эта задача недопустима, то и исходная тоже.

$$\langle Y, A_i \rangle = b_i \qquad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff Y[n, n] = 1$$

Conic Programming

$$\min_{x \in \mathcal{K}} \langle c, x \rangle$$
$$\textbf{s.t. } Ax = b,$$

где $\mathcal{K}$ - конус в гильбертовом пространстве.

- Экспоненциальный конус:

  $$K_{\text{exp}} = \text{cl}\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x \geq y \exp\left(\frac{z}{y}\right), y > 0\right\}.$$

  Ограничения: $\log(1 + e^x) \leq t$ и $e^x < t$.
- Степенной конус $0 < \alpha < 1$:

  $$\mathcal{P}_n^{\alpha, 1-\alpha} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \geq \sqrt{\sum_{i=3}^n x_i^2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

  Ограничения: $\|x\|_p \leq t$.