

# Методы оптимизации. Семинар 5. Выпуклые множества.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

2 октября 2025г

## Definition

Множество  $S \subset \mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $x_1, x_2 \in S$  и любого числа  $\theta \in [0, 1]$ , точка  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$  также принадлежит  $S$ .

Если мы берем любые две точки внутри множества и соединяем их отрезком, то весь этот отрезок лежит внутри множества.

# Примеры выпуклых множеств

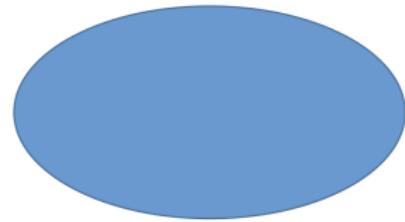


Рис.: Пример выпуклого множества.



Рис.: Пример не выпуклого множества.

# Афинные множества

## Definition

Множество  $S \subset \mathbb{R}^n$  называется *аффинным*, если для любых двух точек  $x_1, x_2 \in S$  и любого числа  $\theta \in \mathbb{R}$ , точка  $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$  также принадлежит  $S$ .

## Proposition

*Любое аффинное множество является выпуклым.*

В аффинном множестве, выбрав две точки, мы ожидаем, что не только отрезок между ними, но и вся прямая, соединяющая эти точки, принадлежит этому множеству, в отличие от определения выпуклости.

# Докажем по определению

## Example (Полуплоскость)

Пусть  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , тогда полуплоскость  $\{x \mid a^T x \geq b\}$  выпукла.

## Example (Гиперплоскость)

Пусть  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , тогда гиперплоскость  $\{x \mid a^T x = b\}$  афинное множество.

## Example (Шар по норме)

Пусть  $\|\cdot\|$  — норма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  и  $c \in \mathbb{R}^n$ . Тогда шар  $\overline{B}(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| \leq r\}$  является выпуклым множеством.

В частности, шары в матричных нормах  $\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$  (норма Фробениуса) и  $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$  (Спектральная норма) также являются выпуклыми.

## Example (Сфера)

Пусть  $\|\cdot\|$  — норма в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  и  $c \in \mathbb{R}^n$ . Является ли сфера  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| = r\}$  выпуклым множеством?

## Докажем по определению

### Example (Множество положительно полуопределеных матриц)

Множество всех положительно полуопределенных матриц размера  $n \times n$ , определяемое как

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, z^T X z \geq 0, \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

является выпуклым множеством. Аналогично, множество положительно определенных матриц  $\mathcal{S}_{++}^n$  тоже выпуклое.

### Example

Является ли множество  $M = \{x \in \mathbb{R}_{++}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1\}$  выпуклым?

# Афинная функция

## Definition

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *афинной*, если найдутся  $b \in \mathbb{R}^m$  и  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  такие, что  $f(x) = Ax + b$ .

# Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

- ① **Пересечение:** Пусть  $\{S_i\}_{i \in I}$  - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение  $\cap_{i \in I} S_i$  также является выпуклым.
- ② **Линейная комбинация:** Пусть  $S_1, S_2$  — выпуклые множества и  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , тогда линейная комбинация  $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  также является выпуклым множеством.

# Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

- ① **Пересечение:** Пусть  $\{S_i\}_{i \in I}$  — семейство выпуклых множеств, тогда пересечение  $\bigcap_{i \in I} S_i$  также является выпуклым.
- ② **Линейная комбинация:** Пусть  $S_1, S_2$  — выпуклые множества и  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , тогда линейная комбинация  $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  также является выпуклым множеством.
- ③ **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть  $S$  — выпуклое множество,  $f$  — афинная функция, тогда  $f(S)$  также является выпуклым множеством.
- ④ **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть  $S$  — выпуклое множество,  $f$  — афинная функция, тогда  $f^{-1}(S)$  также является выпуклым множеством.

# Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

- ① **Пересечение:** Пусть  $\{S_i\}_{i \in I}$  — семейство выпуклых множеств, тогда пересечение  $\bigcap_{i \in I} S_i$  также является выпуклым.
- ② **Линейная комбинация:** Пусть  $S_1, S_2$  — выпуклые множества и  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , тогда линейная комбинация  $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$  также является выпуклым множеством.
- ③ **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть  $S$  — выпуклое множество,  $f$  — афинная функция, тогда  $f(S)$  также является выпуклым множеством.
- ④ **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть  $S$  — выпуклое множество,  $f$  — афинная функция, тогда  $f^{-1}(S)$  также является выпуклым множеством.
- ⑤ **Декартово произведение:** Пусть  $S_1, S_2, \dots, S_n$  — выпуклые множества, тогда декартово произведение  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  также выпукло.

## Докажем через сохранение выпуклости

### Example (Многогранник)

Многогранником называется множество точек в  $\mathbb{R}^n$ , задающееся системой линейных равенств и неравенств:  $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Cx = d\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  и  $d \in \mathbb{R}^k$ .

### Example (Ограниченные полиномы)

Докажите, что множество  $\{a \in \mathbb{R}^k | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 \forall t : \alpha \leq t \leq \beta\}$ ,

где

$p(t) = a_1 + a_2 t + \dots + a_k t^{k-1}$ , является выпуклым.

# Докажем через афинные функции

## Example

Докажите, что множество  $S = \{x | \|Ax + b\| \leq c^T x + d\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  и  $c, d \in \mathbb{R}^n$ , выпукло.

# Докажем через афинные функции

## Example (Гиперболический конус)

Пусть  $P \in \mathcal{S}_+^n$  и  $c \in \mathbb{R}^n$ , тогда множество

$$K = \{x | x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$$

является выпуклым.

## Доказательство.

Как мы уже знаем, множество  $L = \{(x, t) | \|x\| \leq t\}$  является выпуклым.

Воспользуемся фактом, что  $\forall P \in \mathcal{S}_+^n \exists Q \in \mathcal{S}_+^n : P = Q^2$ , поэтому наше множество  $K$  переписывается следующим образом:

$K = \{x | \|Qx\| \leq c^T x\}$ . Заметим, что  $K = f^{-1}(L)$ , где  $f(x) = (Qx, c^T x)$  - афинная функция. Поэтому  $K$  выпукла как прообраз выпуклого множества при афинном преобразовании. □

# Докажем через афинные функции

## Example

Рассмотрим множество  $C = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n \succ B\}$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Докажите, что  $C$  выпукло.

Доказательство.

Рассмотрим афинную функцию  $f(x) = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n - B$ ,  
тогда

$C = f^{-1}(S_{++}^n)$ . Поэтому  $C$  выпукла как прообраз выпуклого  
множества.



# Конусы

## Definition

Множество  $C$  называется конусом, если для любых  $c \in C$  и  $\theta \geq 0$  точка  $\theta c$  также принадлежит  $C$ .

Если взять любую точку из конуса, то отрезок по направлению из 0 до этой точки можно сколь угодно продлить в этом конусе.

Примеры: любое линейное подпространство, прямая через начало координат, луч из начала координат.

## Proposition

Условие: для любых  $c_1, c_2 \in C$ ,  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$  выполнено

$$\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C,$$

равносильно тому, что множество является выпуклым конусом.

# Свойства конусов

Любой конус обязательно содержит 0.

## Proposition

*Пересечение любого семейства (выпуклых) конусов сохраняет свойство быть (выпуклым) конусом.*

# Примеры конусов

## Example

Множество  $C = \{(x, t) \in R^{n+1} : \|x\| \leq t\}$  является выпуклым конусом.

## Example

Множество положительно полуопределенных матриц  $S_+^n$  является выпуклым конусом

## Example

Гиперплоскости  $\{x \mid a^T x = 0\}$  и полуплоскости  $\{x \mid a^T x \geq 0\}$ , проходящие через 0, являются выпуклыми конусами. В частности, их пересечения тоже выпуклые конусы.

# Выпуклая комбинация

## Definition

Выпуклой комбинацией точек  $x_1, \dots, x_k$  называется любая точка вида

$$\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k,$$

где  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  и  $0 \leq \theta_i \leq 1$  для всех  $i$ .

## Proposition

Если  $S$  является выпуклым множеством и  $x_1, \dots, x_k \in S$ , то любая выпуклая комбинация точек  $x_1, \dots, x_k$  также принадлежит  $S$ .

# Доказательство

## Доказательство.

Доказательство проведем индукцией по  $k$ .

База при  $k = 2$  верна. Пусть утверждение верно для  $k - 1$ .

Переход: рассмотрим  $x_1, \dots, x_k \in S$  и пусть  $\theta_1, \dots, \theta_k$  таковы, что  $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$  и  $0 \leq \theta_i \leq 1$ . Если  $\theta_k = 1$ , то утверждение очевидно. В противном случае перепишем комбинацию:

$$\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k = (1 - \theta_k) \left( \frac{\theta_1}{1 - \theta_k} x_1 + \dots + \frac{\theta_{k-1}}{1 - \theta_k} x_{k-1} \right) + \theta_k x_k,$$

где каждое слагаемое  $\frac{\theta_i}{1 - \theta_k}$  лежит в интервале  $[0, 1]$ , а их сумма равна 1. По предположению индукции и определению выпуклого множества, утверждение верно для  $k$ . □

# Выпуклая оболочка

## Definition

*Выпуклой оболочкой* множества  $S$  называется наименьшее по включению выпуклое множество  $T$ , содержащее  $S$ . То есть, это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих  $S$ . Обычно выпуклую оболочку обозначают  $\text{conv } S$ .

Выпуклая оболочка является выпуклым множеством.

## Theorem

Выпуклая оболочка множества  $S$  равна множеству всех выпуклых комбинаций элементов  $S$ , то есть

$$\text{conv } S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{ \theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid \theta_1 + \dots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1, x_i \in S \}.$$

Множество  $S$  является выпуклым тогда и только тогда, когда  $S = \text{conv } S$ .

# Доказательство теоремы

## Доказательство.

Пусть  $x$  — произвольная выпуклая комбинация элементов  $S$ . Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества  $\text{conv } S$ , тк  $S \subset \text{conv } S$ . Поэтому  $x \in \text{conv } S$ , то есть выполняется вложение справа налево.

# Доказательство теоремы

## Доказательство.

Пусть  $x$  — произвольная выпуклая комбинация элементов  $S$ . Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества  $\text{conv } S$ , тк  $S \subset \text{conv } S$ . Поэтому  $x \in \text{conv } S$ , то есть выполняется вложение справа налево.

Докажем вложение в обратную сторону. Заметим, что

$\cup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid \theta_1 + \dots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1\}$  является выпуклым множеством, так как если  $x$  и  $y$  выпуклые комбинации  $S$ , то  $\theta x + (1 - \theta)y$  является выпуклой комбинацией большей размерности для  $\theta \in [0, 1]$ . Поэтому вложение выполняется. Значит эти множества равны. □

# Пример на выпуклую оболочку

## Example

Чему равна  $\text{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ ?

# Пример на выпуклую оболочку

## Example

Чему равна  $\text{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ ?

Для начала докажем вложение слева направо. Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1$ . Покажем, что след матрицы  $xx^T$  равен 1:

$$\text{Tr}(xx^T) = \text{Tr}(x^T x) = \|x\|_2^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим матрицу  $A \in \{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$ . По вышедоказанной теореме мы имеем, что

$A = \theta_1 x_1 x_1^T + \theta_2 x_2 x_2^T + \dots + \theta_n x_n x_n^T$ , где  $\theta_i \geq 0$ ,  $\|x_i\|_2 = 1$  и  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = 1$ . Поэтому, используя линейность следа, мы получаем  $\text{Tr}(A) = 1$ .

## Пример на выпуклую оболочку

Далее докажем вложение справа налево. Пусть  $A \in \mathcal{S}_+^n$  и  $\text{Tr}(A) = 1$ . Матрица  $A$  симметрична, значит у нее есть базис из собственных векторов. Применяя спектральное разложение мы получаем, что  $A = S^T(\lambda_1, \dots, \lambda_n)S$ , где  $S$  - ортогональная матрица. Заметим, что

$$\begin{aligned}\text{Tr}(S^T(\lambda_1, \dots, \lambda_n)S) &= \text{Tr}(SS^T(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \\ \text{Tr}((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.\end{aligned}$$

Из спектрального разложения мы делаем вывод, что  $A = \lambda_1 s_1 s_1^T + \lambda_2 s_2 s_2^T + \dots + \lambda_n s_n s_n^T$ , где  $s_i$  - соответствующие нормированные собственные вектора. Это завершает доказательство.

# Другие оболочки

## Definition

Конической оболочкой множества  $C$  называется множество

$$\cup_{k=1}^{\infty} \{ \theta_1 c_1 + \dots + \theta_k c_k \mid c_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \dots, k \}.$$

Коническая оболочка является выпуклым конусом.

## Definition

Аффинной оболочкой  $\text{aff } S$  множества  $S$  называется множество

$$\text{aff } S := \cup_{k=1}^{\infty} \{ \theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k \mid \theta_1 + \dots + \theta_k = 1, x_i \in S, i = 1, \dots, k \}.$$

Аффинная оболочка  $\text{aff } S$  любого мн-ва  $S$  может быть представлена как сумма единственного линейного подпространства  $L_S$  и представителя  $y \in \text{aff } S$ , то есть  $\text{aff } S = L_S + y$ .

# Теорема Каратеодори

Для любого множества  $S$  можно определить его размерность как  $\dim S = \dim \text{aff } S = \dim L_S$ .

## Theorem

Пусть дано множество  $S$  и  $\dim \text{conv } S = d$ . Тогда любой элемент  $\text{conv } S$  представляется как выпуклая комбинация не более чем  $d + 1$  точки множества  $S$ .

# Теоремы отделимости

## Theorem (Теорема об отделимости)

Пусть  $S$  и  $T$  - непересекающиеся непустые выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда найдутся  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $b \in \mathbb{R}$  такие, что  $\forall x \in S: a^T x \leq b$  и  $\forall y \in T: a^T y \geq b$ .

То есть любые два непересекающиеся выпуклых множества можно разделить гиперплоскостью.

## Theorem (Теорема о строгой отделимости)

Пусть  $S$  и  $T$  - непересекающиеся непустые выпуклые множества в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $S$  - компакт, а  $T$  - замкнуто. Тогда найдутся  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  и  $b \in \mathbb{R}$  такие, что  $\sup_{x \in S} a^T x < b < \inf_{y \in T} a^T y$ .

# Лемма Фаркаша

## Theorem

Рассмотрим систему строгих неравенств  $Ax < b$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ :  $\lambda^T A = 0$ ,  $\lambda \geq 0$  и  $\lambda^T b \leq 0$ .

**Hint.** Рассмотреть отделимость множеств  $\{b - Ax | x \in \mathbb{R}^m\}$  и  $\{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\}$ .

Неразрешимость линейного неравенства от  $x$ , который лежит в  $m$ -мерном пространстве, сводится к разрешимости системы равенств и неравенств от переменной из  $n$ -мерного пространства.