$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

$$\text{s.t. } g_i(x) \le 0 \qquad i = 1..m$$

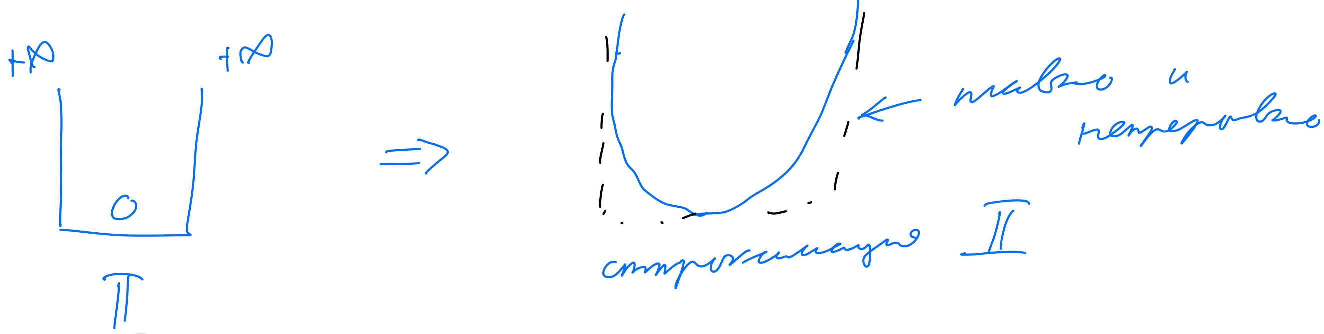
На прошлом занятии:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + \underbrace{\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{m} \{g_i(x)\}_+^2}_{\text{штраф}}$$

Идея — не выходить

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) + \underbrace{\mathbb{I}(x)}_{\text{индикатор}}$$

$$\mathbb{I}(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ удовл. огр.} \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$



Предположения: G — мн-во x выполнены ограничения

1) $\operatorname{int} G$ — непусто
2) $\forall x \in G \quad \exists \{x_i\} \subset \operatorname{int} G : x_i \to x$
3) G — ограничено
4) $\forall x \in \operatorname{int} G \quad g_i(x) < 0 \quad \forall i = 1..m$
5) f — непрерывна

Введем объект F барьер

- непрерывна на $\operatorname{int} G$
- $\forall \{x_i\} \in \operatorname{int} G : \; x_i \to x \in \partial G$

  $$F(x_i) \to +\infty$$

основная идея

<u>Пример:</u>

- барьер Кэррола:

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

- логарифмический барьер

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x))$$

Доп. идея – добавить коэфф:

$$\frac{1}{\rho} F(x)$$

$\rho \to +\infty$ $\quad \frac{1}{\rho} F(x) \to 0 \quad x \in \operatorname{int} G$

Итог: барьерная задача

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} F_\rho(x) := f(x) + \frac{1}{\rho} F(x)$$

Св-ва:

- F – непрер на $\operatorname{int} G \Rightarrow F_\rho$ – непрер. на $\operatorname{int} G$
- $\min F_\rho$ – задача с ограничениями

не нужны

$x^0 \in \operatorname{int} G$ $\quad$ запустим метод

$$\Downarrow$$

$x^k: \; F_\rho(x^k) \le F_\rho(x^0)$

$F_\rho(x_i) \to +\infty \qquad x_i \to x \in \partial G$

$x^k \in \operatorname{int} G$ мы не выйдем за пределы $\operatorname{int} G$

Более формально

Свойство барьерной задачи

Для любого $\rho > 0$ функция $F_\rho(x)$ принимает минимум на $\operatorname{int} G$. А множества вида

$$U = \{x \in \operatorname{int} G \mid F_\rho(x) \le a\}$$

являются компактами для любого a.

Док-во:

1) U – замкнутое и ограниченное.

- замкнутость

$\{x_i\} \in U \qquad x_i \to x \overset{?}{\in} U$

$x \in \operatorname{int} G$ либо $x \in \partial G$ либо $x \notin G$

$x \in \partial G$?

непрер.

$F_\rho(x_i) \longrightarrow F_\rho(x) = +\infty$

невозможно $\quad F_\rho(x_i) \le a$

$x \notin G$? Аналогично невозможно

$x \in U \qquad U$ – замкнуто

- U – ограничено? да, G – ограничено

U – компакт

2) $F_\rho(x)$ – непрерывная на U функция

т. Вейерштр.

$F_\rho(x)$ принимает мин. значение на U

Минимум на U – минимум на $\operatorname{int} G$

- Вывод: решение $F_\rho(x)$ вдали от границы ограничений

Свойство решений барьерной задачи

Дополнительно к тому, что уже предположено добавим, что $\overline{\mathrm{int}G} = G$ (замыкание $\mathrm{int}G$). Тогда для любого $e > 0$ существует $\rho(e) > 0$ такое, что множество решений барьерной задачи X^*_ρ для любых $\rho \geq \rho(e)$ содержится в

$$X^*_e = \{x \in G \mid \exists x^* \in X^* \ : \ \|x - x^*\|_2 \leq e\},$$

где X^* – множество решение исходной задачи оптимизации с ограничениями вида неравенств.

- увеличение ρ не портит решение

Теория частного случая

Самосогласованная функция

Выпуклая трижды непрерывно дифференцируемая на $\mathrm{int}G$ функция называется самосогласованной, если выполнены следующие условия

- $\left|\frac{d^3}{dt^3}F(x+th)\right| \leq 2[h^T\nabla^2 F(x)h]^{3/2}$ для любых $x \in \mathrm{int}G$ и $h \in \mathbb{R}^d$;
- Для любой последовательности $\{x_i\} \in \mathrm{int}G$ такой, что $x_i \to x \in \partial G$, выполнено «барьерное» свойство: $F(x_i) \to +\infty$.

Примеры

- $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx + c$

  самосогласованная на $\mathbb{R}^d$

- $f(x) = -\ln(x)$

  самосогласованная R_+

- $f(x) = -\ln(-g(x))$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx + C$

  самосогласованная $g(x) < 0$

- сумма самосогласованных – самосогласованная

  $F_1(x)$ на $\mathrm{int}\, G_1$ $\quad F_2(x)$ на $\mathrm{int}\, G_2$

  $\alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$ – самос. на $\mathrm{int}\, G_1 \cap \mathrm{int}\, G_2$

  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$

- аффинные преобр. сохраняют самосогл.

  $F(x)$ — самосогл. на $\operatorname{int} G$

  $\tilde F(x) = F(Ax+b)$ самосогласов.

  $\operatorname{int} \tilde G = \{x \mid Ax+b \in \operatorname{int} G\}$

Самосогласованный барьер

Функция F является ν-самосогласованным барьером (ν всегда ≥ 1) на множестве $\operatorname{int} G$, если

- F самосогласована на $\operatorname{int} G$;
- Выполнено условие: $|h^T \nabla F(x)| \leq \sqrt{\nu}\sqrt{h^T \nabla^2 F(x) h}$ для любых $x \in \operatorname{int} G$ и $h \in \mathbb{R}^d$.

Пример:

лог. барьер от ограничений линейных ($a_i^T x \leq b_i$)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} -\ln\left(-(a_i^T x - b)\right)$$

самосогл. барьер $\nu = m$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leq 0$$

f, g_i — выпуклые на G

$$\Downarrow$$

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}} t$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leq 0$$
$$f(x) - t \leq 0$$

выпуклое

Перепишем (новые переменные)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} c^T x$$ ← линейная, как выше

$$\text{s.t. } g_i(x) \le 0$$

всегда в $\operatorname{int} G$

Алгоритм 1 Метод внутренней точки (общий случай)

Вход: стартовая точка $x^0 \in \operatorname{int} G$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k > \rho_{k-1}$

3: С помощью некоторого метода решить численно задачу безусловной оптимизации с целевой функцией F_{ρ_k} и стартовой точкой x_k. Гарантировать, что выход метода x_{k+1} будет близок к реальному решению $x^*(\rho_k)$.

4: **end for**

Выход: x^K

$$\Phi_\rho(x) = \rho F_\rho(x) = \rho c^T x + F(x)$$

$$\lambda(\Phi_\rho, x) = \sqrt{(\nabla \Phi_\rho(x))^T \left(\nabla^2 \Phi_\rho(x)\right)^{-1} (\nabla \Phi_\rho(x))}$$

Алгоритм 2 Метод внутренней точки (частный случай)

Вход: параметры $e_1, e_2 \in (0;1)$, стартовое значение параметра $\rho_{-1} > 0$, стартовая точка $x^0 \in \operatorname{int} G$ такая, что $\lambda(\Phi_{\rho_{-1}}, x^0) \le e_1$, количество итераций K

1: **for** $k = 0, 1, \ldots, K-1$ **do**

2: Увеличить $\rho_k = \left(1 + \frac{e_2}{\sqrt{\nu}}\right) \rho_{k-1}$

3: Сделать шаг демпфированного метода Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{1 + \lambda(\Phi_{\rho_k}, x^k)} [\nabla^2 \Phi_{\rho_k}(x^k)]^{-1} \nabla \Phi_{\rho_k}(x^k)$$

(возможно, понадобится больше одного шага метода Ньютона, но при правильном соотношении e_1 и e_2 достаточно ровно одного)

4: **end for**

- λ — критерий сходимости около $\|\nabla \Phi\|$

Суть:

1) Мы изначально нашли хорошее решение (точн. e_1) x^0 для $F_{\rho^{-1}}$ $(\varphi_{\rho^{-1}})$ по норме $\|\nabla F_\rho\|$ $(\|\nabla \varphi_\rho\|)$

2) Правильное увеличение ρ (линейное), завис. от ν

3) Всего одна итерация метода Ньютона и мы в хорошем решении новой F_ρ (φ_ρ)

Докажем, что $\lambda(\varphi_{\rho^k}, x^{k+1}) \leq e_1$ хорошее

новое ρ новый x

Мы знаем $\lambda(\varphi_{\rho^{k-1}}, x^k) \leq e_1$

Док-во:

$$\lambda(\varphi_\rho, x) = \|\nabla \varphi_\rho(x)\|_{(\nabla^2 \varphi_\rho(x))^{-1}}$$

норма от матрицы

$$\sqrt{(\nabla\varphi_\rho(x))^T (\nabla^2 \varphi_\rho(x))^{-1} (\nabla \varphi_\rho(x))}$$

можно показать, что $\nabla^2 \varphi_\rho \succ 0$

На сколько $\rho^{k-1} \to \rho^k$ портит стационарное

$$\lambda(\varphi_{\rho^k}, x^{(k)}) = \|\nabla \varphi_{\rho^k}(x^{(k)})\|_{(\nabla^2 \varphi_{\rho^k}(x^{(k)}))^{-1}}$$

$$= \|\rho_k c + \nabla F(x^{(k)})\|_{\dots}$$

$$\leq \underbrace{\|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^{(k)})\|_{\dots}}_{\leq e_1} + \underbrace{\|(\rho_{k-1} - \rho_k) c\|_{\dots}}_{?}$$

$$\leq e_1 + \underbrace{\frac{|\rho_{k-1} - \rho_k|}{\rho_{k-1}}}_{\frac{e_2}{\sqrt{J}}} \|\rho_{k-1} c\|_{\dots}$$

$$\leq e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{J}} \|\rho_{k-1} c\|_{\dots} \leq ?$$

$$\|\rho_{k-1} c + \nabla F(x^{(k)})\|_{\dots} \leq e_1$$

$$\|\rho_{k-1} c\|_{\dots} \leq e_1 + \underbrace{\overbrace{\|\nabla F(x^{(k)})\|_{\dots}}^{= \sqrt{A}}}_{}$$

$$\leq$$

$$\|\nabla F(x^{(k)})\|_{(\nabla^2 \varphi_{\rho^k}(x^{(k)}))^{-1}} = \sqrt{A}$$

$$= \sqrt{(\nabla F)^T (\nabla^2 \varphi)^{-1} \nabla F} = \sqrt{A}$$

самосогласованность

$$\leq \left(\sqrt{J} \sqrt{(\nabla F)^T \cancel{\nabla^2 \varphi^{-1}} \cancel{\nabla^2 \varphi} \nabla^2 \varphi^{-1} \nabla F}\right)^{1/2}$$

$$h = \nabla^2 \varphi^{-1} \nabla F$$

$$\sqrt{A} \le \left(\sqrt{J}\sqrt{A}\right)^{1/2}$$

$$A^{1/4} \le J^{1/4}$$

$$\sqrt{A} \le \sqrt{J}$$

$$\le \quad e_1 + \sqrt{J}$$

$$\lambda\left(\varphi_{\rho^k}, x^{(k)}\right) \le e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{J}}\left(e_1 + \sqrt{J}\right)$$

$$= e_1 + \left(e_2 + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{J}}\right)$$

доп. ошибка $\rho^{k-1} \to \rho^k$

Справедливо для одной итерации Ньютона

$$\lambda\left(\varphi_{\rho^k}, x^{(k+1)}\right) \le \frac{2\lambda^2\left(\varphi_{\rho^k}; x^{(k)}\right)}{1 - \lambda\left(\varphi_{\rho^k}, x^{(k)}\right)}$$

старт. точка

$e_1 = 0{,}05 \qquad e_2 = 0{,}08$

$$\lambda\left(\varphi_{\rho^k}, x^{(k+1)}\right) \le 0{,}05 = e_1 \quad \blacksquare$$

Последний вопрос — сколько раз увеличить ρ?

$$x^{k+1} = x^*(\rho^k)$$

← идеальное решение на каждой итер

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\left(-a_i^T x + b\right)$$

для применения

$$\nabla \varphi_\rho(x^*(\rho^{(k)})) = 0 = \rho c + \nabla F(x^{(k+1)})$$

$$\underbrace{\nabla \varphi_\rho(x^*(\rho^{(k)}))}_{\cdot (x^{(k+1)} - x^*)} \quad x^*(\rho^{(k)}) = x^{(k+1)}$$

$$= \rho c + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i - a_i^T x^{(k+1)}} = 0$$

x^* — решение задачи оптим.

$$\rho c^T x^{(k+1)} - \rho c^T x^* + \sum \frac{a_i x^{(k+1)} - \overbrace{a_i x^*}^{\le b}}{b_i - a_i^T x^{k+1}} = 0$$

$$\rho c^T x^{(k+1)} - \rho c^T x^* - m = 0$$

$$\underbrace{f(x^{(k+1)})}_{c^T x^{(k+1)}} - f(x^*) = \frac{m}{\rho} = \nu = \frac{\nu}{\rho}$$

$$\boxed{f(x^{(k+1)}) - f(x^*) = \frac{\nu}{\rho}}$$

линейная ск. сх.

ρ растет линей $\left(1 + \frac{c_2}{\sqrt{\nu}}\right)$

Сходимость метода внутренней точки

Пусть с помощью метода внутренней точки решается задача оптимизации с линейной целевой функцией и выпуклыми ограничениями вида неравенств, при этом используются ν-самосогласованные барьеры. Тогда чтобы достичь ε решения $(f(x) - f(x^*) \le \varepsilon)$, необходимо

$$K = \mathcal{O}\left(\sqrt{\nu} \log \frac{\nu}{\varepsilon \rho_0}\right) \text{ итераций метода.}$$

$\sim \sqrt{m}$ кол-во ограничений