Методы оптимизации. Семинар 6. Выпуклые функции.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

9 октября 2025г

Расширеннозначные функции

Definition

Пусть U - линейное пространство, и $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ - функция, принимающая значения на всем U во множестве расширенных вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Будем называть эффективной областью определения функции f множество всех точек, в которых функция принимает конечные значения:

$$\mathrm{dom}\ f = \{x \in U : |f(x)| < +\infty\}$$

Операции с бесконечностями:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad -\infty < \alpha < +\infty,$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \alpha + \infty = +\infty, \quad \alpha - \infty = -\infty,$
3. $\forall \alpha > 0 \in \mathbb{R} : \quad \pm\alpha \cdot (+\infty) = \pm\infty, \quad \pm\alpha \cdot (-\infty) = \mp\infty.$

Если функция задана только на области определения $Q \subset U$, то удобно доопределить её за пределами Q на всем U, считая, что там функция принимает значение $+\infty$.

Выпуклые функции

Definition (Выпуклые функции)

Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Definition (Выпуклые функции)

Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется *строго выпуклой* функцией.

Выпуклые функции

Definition (Выпуклые функции)

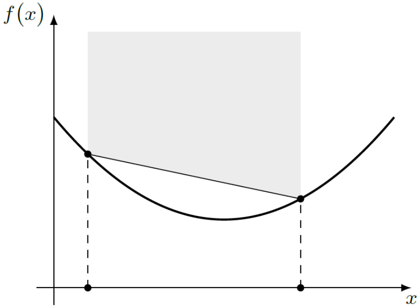
Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

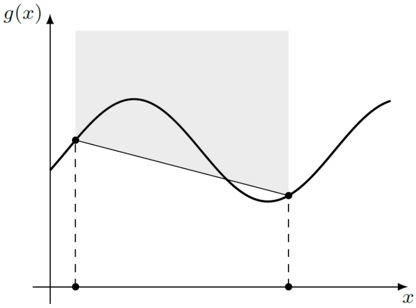
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется *строго выпуклой* функцией.

- Выпуклая функция может принимать только одно расширенное значение - $+\infty$ (или быть $f \equiv -\infty$). Поэтому введём определение *собственной функции*: $f(x) > -\infty, \forall x \in U$.
- $\forall x, y \in \operatorname{dom} f$ значение выпуклой функции f в любой точке отрезка $[x, y]$ должно быть конечным. Поэтому у выпуклых функций $\operatorname{dom} f$ — выпуклое множество.

Примеры функций





Вогнутые функции

Definition

Пусть U — линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y). \qquad (2)$$

Если это неравенство (2) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0,1)$, то функция f называется *строго вогнутой*.

- Функция f является (строго) выпуклой тогда и только тогда, когда функция $-f$ является (строго) вогнутой.
- У вогнутой функции dom f все также выпуклое множество.
- Вогнутая функция может принимать только значение $-\infty$ (или быть $f \equiv +\infty$.)

Докажем по определению

Example (Афинная функция)

Пусть в пространстве U задано (произвольное) скалярное произведение и $f : U \to \mathbb{R}$ - аффинная функция

$$f(x) = \langle a, x \rangle + b,$$

где $a \in U$ и $b \in \mathbb{R}$. Проверьте f на выпуклость/вогнутость.

Example (Норма)

Пусть в пространстве U задана (произвольная) норма $||\cdot||$. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$f(x) = ||x||.$$

Проверьте f на выпуклость/вогнутость.

Пример расширеннозначной выпуклой функции

Example

Функция индикатор множества $Q \subset U$:

$$I_Q(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases}$$

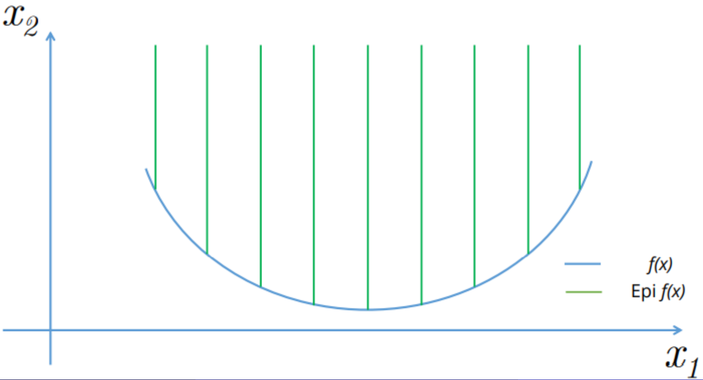
Для выпуклых множеств Q функция I_Q выпуклая.

Эпиграф

Definition

Пусть U - линейное пространство. Надграфиком (или эпиграфом) функции $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество

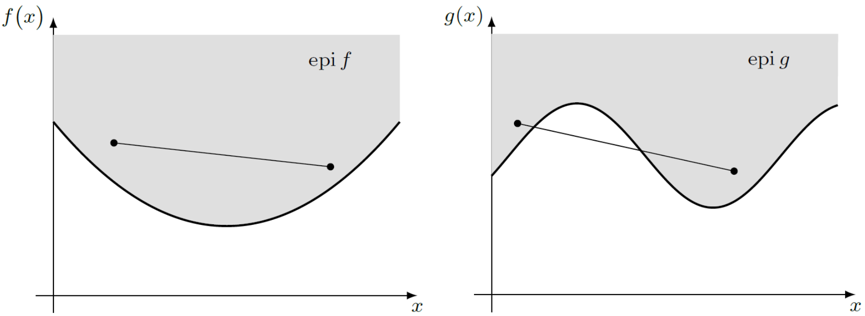
$$\operatorname{Epi} f := \left\{(x, t) \in U \times \overline{\mathbb{R}} : f(x) \leq t\right\}.$$



Следующее утверждение можно считать альтернативным определением выпуклости функции.

Theorem

Пусть U — линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда её надграфик $\operatorname{Epi} f$ является выпуклым множеством в пространстве $U \times \overline{\mathbb{R}}$.



Критерий выпуклости первого порядка

Theorem (Критерий выпуклости 1-го порядка)

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дифференцируема всюду на dom f. Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad x, y \in dom\ f. \tag{3}$$

Example

Проверьте критерий на функции $f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x_i}, x \in \mathbb{R}^n$ с dom $f = \mathbb{R}^n_{++}$.

Example

Проверьте критерий на функции $f(x) = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^n$.

Критерий выпуклости первого порядка

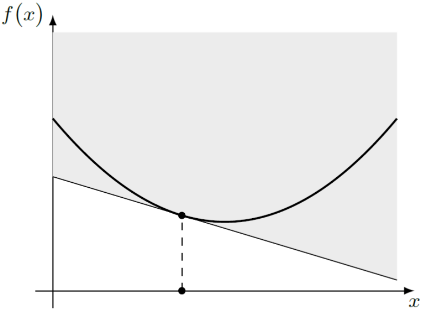


График функции $f(x)$ лежит выше касательной $f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ в любой точке dom f.

Оптимальность

Theorem (Дифференциальное условие оптимальности для выпуклой функции)

Пусть f — собственная выпуклая функция, $\mathrm{dom}\, f$ является открытым множеством, на котором f дифференцируемая, и $x^* \in \mathrm{dom}\, f$. Тогда x^* является глобальным минимумом функции f, если и только если $\nabla f(x^*) = 0$. Другими словами любая стационарная точка автоматически является глобальным минимумом функции f.

Критерий выпуклости второго порядка

Theorem (Критерий выпуклости 2-го порядка)

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дважды дифференцируема на dom f. Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$d^2 f(x)[h, h] \geq 0, \quad \forall x, h \in dom\ f.$$

В случае $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ условие имеет вид

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq 0, \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

Докажем по критериям

Example

- $f(x) = \exp(ax)$ выпукла для любого $a \in \mathbb{R}$,
- $f(x) = -\ln x$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$,
- $f(x) = x \ln x$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{+}$,
- $f(x) = -\sqrt{x}$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$
- $f(x) = x^p$ для $p \geq 1$ или $p \leq 0$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$ и вогнута для $0 \leq p \leq 1$.

Докажем по критериям

Example

Пусть $A \in \mathbb{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

Она является выпуклой в том и только в том случае, когда $A \succeq 0$.

Example

В частности, в $\mathbb{R}^2$ рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.

Докажем по критериям

Example

Функция
$$f(X) = -\ln det(X)$$
является выпуклой на $\mathbb{S}^n_{++}$.

Example

Функция
$$f(x) = \ln\left(e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_n}\right)$$
является выпуклой на $\mathbb{R}^n$.

Неравенство Йенсена

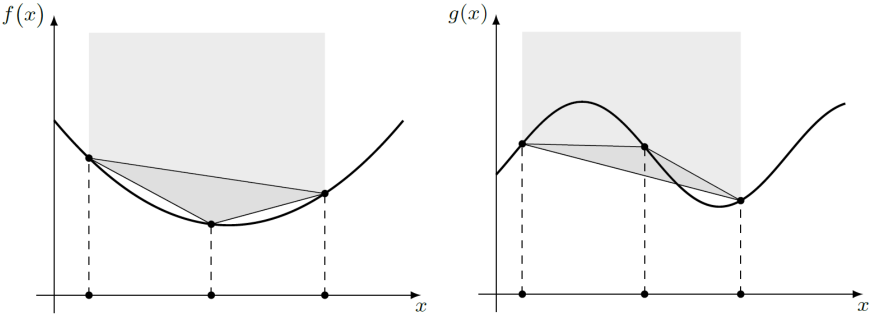
Theorem

Пусть $f(x) : U \to \overline{\mathbb{R}}$ *— выпуклая функция. Пусть также* $x_1, \ldots, x_k$ *— точки из* U *и коэффициенты* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *таковы, что* $\alpha_i \geq 0$ *и* $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$*. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i). \tag{4}$$

Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция f *является аффинной или когда все точки* x_i *совпадают.*

Иллюстрация



Следствия

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Следствия

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

2. Неравенство Гельдера в частности Коши-Буняковского:
Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$ и чисел $p \geq 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ выполняется неравенство
$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5}$$

Следствия

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно
$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

2. Неравенство Гельдера в частности Коши-Буняковского:
Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$ и чисел $p \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ выполняется неравенство
$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5}$$

3. Для выпуклой функции f и случайной величины X верно,
$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

Операции, сохраняющие выпуклость

- Неотрицательная взвешенная сумма

Proposition

Пусть функции $f_1, ... f_m$ *выпуклы,* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}_+$ *Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x)$$

является выпуклой.

Операции, сохраняющие выпуклость

- Неотрицательная взвешенная сумма

Proposition

Пусть функции $f_1, \dots f_m$ *выпуклы,* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_+$ *Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x)$$

является выпуклой.

- Аффинная подстановка аргумента

Proposition

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *- выпуклая функция,* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$*, и* $b \in \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$g(x) = f(Ax + b)$$

выпуклая с областью определения $dom\ g = \{x \,|\, Ax + b \in dom\ f\}$ *.*

Докажем по сохранению

Example

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^k$ и $c \in \mathbb{R}^k_+$. Функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp\left(\langle a_i, x\rangle + b_i\right)$$

является выпуклой.

Поточечный максимум

Пересекая выпуклые эпиграфы двух выпуклых функций f_1 и f_2, приходим к новому выпуклому множеству, которое является эпиграфом функции

$$f(x) = max\left\{f_1(x), f_2(x)\right\}.$$

Пересекая произвольное число выпуклых множеств, мы опять получаем выпуклое множество.

Theorem

Если функция двух аргументов $g(x, y)$ выпукла по x для любого $y \in Y$, то следующая функция

$$f(x) = \sup_{y \in Y} g(x, y)$$

так же выпукла по x.

Примеры на максимум

Example

Кусочно-линейная функция

$$f(x) = max\left\{a_1^\top x + b_1, \ldots, a_m^\top x + b_m\right\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, выпукла на $\mathbb{R}^n$.

Example (Сумма r максимальных координат)

Обозначим i-ю максимальную координату вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $x_{[i]}$, т.е.

$$x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge \ldots \ge x_{[n]}$$

Тогда функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]},$$

то есть сумма r максимальных координат, есть выпуклая функция.

Примеры на максимум

Example (Расстояние до наиболее удаленной точки множества)

Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $||\cdot||$ - произвольная норма. Тогда расстояние от точки x до наиболее удаленной точки множества C

$$f(x) = \sup_{y \in C} ||x - y||,$$

— выпуклая функция.

Example (Наибольшее собственное число)

Пусть X — симметрическая матрица. Тогда

$$f(X) = \lambda_{\max}(X)$$

является выпуклой.

Монотонная суперпозиция

Proposition

Пусть даны функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и набор функций $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ для $i \in \overline{1, n}$. Тогда функция $g(x) = h(f_1(x), ..., f_n(x)) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, если h — выпуклая функция, и для каждого индекса i

- *либо h - неубывающая функция i-го аргумента и f_i выпуклая,*
- *либо h - невозрастающая функция i-го аргумента и f_i вогнутая*
- *либо f_i - аффинная.*

Примеры на монотонность

Example

Пусть $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция

$$g(x) = e^{f(x)}$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$.

Example

Пусть $||\cdot||$ — произвольная норма. Тогда функция

$$g(x) = ||x||^p$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$ при $p \geq 1$.

Алгоритм проверки на выпуклость

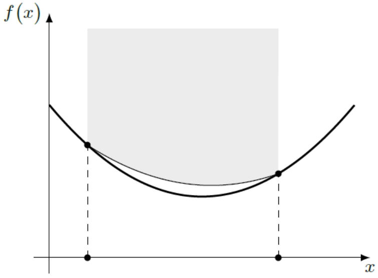
1. Для самых простых функций: попробовать воспользоваться определением или выпуклость эпиграфа.
2. Посчитать второй дифференциал и проверить, что он положительно определен $d^2 f(x)[h, h] \geq 0, \forall x, h$. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, то можно поверить гессиан на $\nabla^2 f(x) \succeq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ или же эквивалентно $\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
3. Если считать второй дифференциал сложно или невозможно, можно проверить операции, сохраняющие выпуклость: аффинная подстановка, максимум, положительная сумма, неубывающие суперпозиция. Особенно полезно целевая функция состоит из максимумов или комбинаций простых выпуклых функций.

Сильная выпуклость

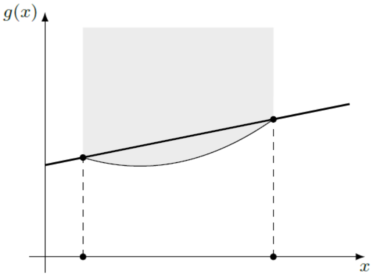
Definition

Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется μ-сильно выпуклой, если для любых $x, y \in U$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \alpha(1-\alpha)\frac{\mu}{2}\langle x - y, x - y\rangle.$$



(a) μ-сильно выпуклая парабола.



(b) Не сильно выпуклая прямая.

Критерий сильной выпуклости первого порядка

Theorem

Пусть $dom\ f$ *является открытым множеством и собственная функция* f *дифференцируема всюду на* $dom\ f$. *Функция* f *является* μ*-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда* $dom\ f$ *является выпуклым множеством и*

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \langle x - y, x - y \rangle, \quad x, y \in dom\ f.$$

Критерий сильной выпуклости второго порядка

Theorem

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дважды дифференцируема на dom f. Функция f является μ-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$d^2 f(x)[h,h] \geq \mu\langle h,h\rangle, \quad \forall x, h \in dom\ f.$$

В случае $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ условие имеет вид

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I \Leftrightarrow \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq \mu, \quad \forall x \in \mathrm{dom}\ f.$$

Алгоритм поиска константы сильной выпуклости

1. Посчитать второй дифференциал и найти наибольшую константу $\mu \geq 0$, для которой $d^2 f(x)[h, h] \geq \mu\langle h, h\rangle, \forall x, h$. Можно искать через инфинум $\mu = \inf_{x, h\neq 0} \frac{d^2 f(x)[h,h]}{\langle h,h\rangle}$.

   Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, то можно поверить гессиан на $\nabla^2 f(x) - \mu I \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq \mu, \forall x \in \mathbb{R}^n$ или же через инфинум $\mu = \inf_x \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x))$.
2. Заметьте, что операции, сохраняющие выпуклость, могут НЕ сохранять константы сильной выпуклости. Например, сумма μ_1 и μ_2-сильно выпуклых функций не $\mu_1 + \mu_2$ сильно выпуклая, это оценка снизу.

Гладкость

Definition

Пусть дана непрерывно дифференцируемая функция $f : U \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что данная функция имеет L-Липшицев градиент (или является L-гладкой), если для любых $x, y \in U$ выполнено

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|,$$

где норма $\|\cdot\|$ индуцирована скалярным произведением.

Theorem

Непрерывно дифференцируемая функция $f : U \to \mathbb{R}$ является L-гладкой равносильно тому, что для любых $x, y \in U$ выполнено

$$|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle| \leq \frac{L}{2}\langle x - y, x - y\rangle.$$

Критерии гладкости второго порядка

Theorem

Дважды непрерывно дифференцируемая функция $f : U \to \mathbb{R}$ *является* L*-гладкой равносильно тому, что*

$$-L\langle h, h\rangle \leq d^2 f(x)[h, h] \leq L\langle h, h\rangle, \quad \forall x, h \in U.$$

В случае $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ условие имеет вид

$$-L \cdot I \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L \cdot I, \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow |\lambda_i(\nabla^2 f(x))| \leq L, i \in \overline{1, n}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Нужно искать наименьшую константу $L > 0$, которая удовлетворяет этим условиям. Или же через супремум

$$L = \sup_{x, h \neq 0} \frac{|d^2 f(x)[h, h]|}{\langle h, h\rangle} = \sup_x |\lambda_i(\nabla^2 f(x))|.$$

Пример на гладкость

Example

Для функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} f_i(x_i), \begin{cases} 6x_i^2 + 16x_i + 12, & x_i < -2 \\ \frac{1}{4}x_i^4, & |x_i| \leq 2 \\ 6x_i^2 - 16x_i + 12, & x_i > 2 \end{cases}$$

найдите минимально возможную константу гладкости L.

Выпуклые и гладкие функции

Непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является μ-сильно выпуклой и L-гладкой:

$$\frac{\mu}{2}\|x-y\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x-y \rangle \leq \frac{L}{2}\|x-y\|_2^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

или эквивалентное утверждение для дважды непрерывно дифференцируемой функции

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(x) \preceq LI, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

или же через спектр

$$\mu \leq \lambda_i(\nabla^2 f(x)) \leq L, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mu = \inf_x \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)), \quad L = \sup_x \lambda_{\max}(\nabla^2 f(x)).$$

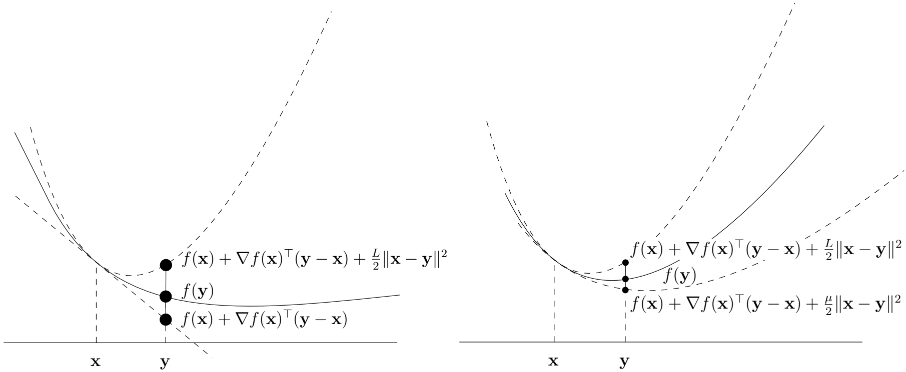


Рис.: Иллюстрация понятий L-гладкости и (μ-сильной) выпуклости

Выпуклость линий уровней

Definition

Для функции $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ множество $\mathfrak{L}_\beta$, определенное скаляром $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{L}_\beta = \{x \in U : f(x) \leq \beta\}$$

называется множеством подуровня β функции $f(x)$.

Proposition

Пусть U — линейное пространство и $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ выпуклая функция. Тогда $\forall \beta \in \mathbb{R}$ множество подуровня $\mathfrak{L}_\beta$ выпукло.

Верное ли обратное?

Линии уровня