

Методы оптимизации. Семинар 9.

Двойственная задача

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

30 октября 2025г

Задача оптимизации с ограничениями

Постановка прямой задачи оптимизации стандартной формы:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1}$$

с прямой переменной $x \in \mathbb{R}^d$.

Definition (Лагранжиан)

Лагранжиан $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ для задачи (1) задается следующим образом:

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x). \quad (2)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^m$ мы будем называть двойственными переменными, в то время как $x \in \mathbb{R}^d$ — прямой.

Definition (Двойственная функция по Лагранжу)

Определим двойственную функцию по Лагранжу (или просто двойственную функцию) $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x) \right). \quad (3)$$

- Если при (λ, ν) лагранжиан L является неограниченным снизу по переменной x , то значение $g(\lambda, \nu) = -\infty$.
- $g(\lambda, \nu)$ **всегда** является вогнутой по переменным (λ, ν) .

Proposition

Пусть дано оптимальное значение задачи (1) p^ (может быть $-\infty$). Тогда, для любого $\lambda \succeq 0$ и любого ν выполняется*

$$g(\lambda, \nu) \leq p^*. \quad (4)$$

Получили нижнюю оценку на оптимальное значение задачи (1).

Двойственная задача

Нижняя оценка $g(\lambda, \nu)$ зависит напрямую от λ и ν . А какова **лучшая** оценка на p^* снизу?

$$\begin{aligned} d^* &= \max_{\lambda, \nu} g(\lambda, \nu), \\ \text{s.t. } \lambda &\succeq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Такая задача называется **двойственной задачей** к задаче (1). Эта задача является задачей выпуклой оптимизации, так как максимизация вогнутой функции и линейные ограничения λ .

Для оптимального значения двойственной задачи d^* всегда верно

$$d^* \leq p^*.$$

Это свойство называется **слабой двойственностью**.

В частности, когда

$$d^* = p^*,$$

то выполняется свойство **сильной двойственности**.

Proposition

Если прямая задача неограниченна снизу ($p^ = -\infty$), то двойственная задача $g(\lambda, \nu) \equiv -\infty$.*

Proposition

Если двойственная задача неограниченна сверху ($d^ = +\infty$), то прямая задача **может не иметь допустимых прямых точек**.*

При выполнении **сильной двойственности** утверждения верны и в обратную сторону.

Условие сильной выпуклости Слейтера

Рассмотрим задачу с выпуклыми f_0, \dots, f_n и линейными равенствами:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ & Ax = b. \end{aligned} \tag{6}$$

Proposition (Условие Слейтера)

Будем говорить, что для задачи (6) выполняется условие Слейтера, если существует допустимая точка $\bar{x} \in \text{relint}(\cap_{i=1}^m \text{dom } f_i)$, такая что

$$f_i(\bar{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad A\bar{x} = b.$$

Ослабленное условие: $f_i(\bar{x}) < 0$ только у не аффинных f_i .

Theorem (Теорема Слейтера)

Если для задачи (6) выполняется (ослабленное) условие Слейтера, то тогда выполняется свойство сильной двойственности.

Example (Решение СЛАУ минимальной нормы)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} x^T x \\ \text{s.t. } Ax = b, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Example (Задача линейного программирования)

Составьте двойственную задачу для

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \succeq 0, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Общий алгоритм

- 1 Составляем лагранжиан (обратите внимание на знак $f_i(x) \leq 0$):

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x).$$

- 2 Ищем двойственную функцию $g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \lambda, \nu)$.
Если функция f_0 и неравенства f_i выпуклые, а равенства h_j линейные, то лагранжиан $L(x, \lambda, \nu)$ выпуклый по x . Можно применять условие глобального минимума $\nabla_x L(x, \lambda, \nu) = 0$. Но осторожно с (λ, ν) , где инфимум не достигается.

В случае других f_0, f_i, h_j , надо смотреть инфимум отдельно.

- 3 Составляем двойственную задачу (помним про $\lambda \succeq 0$):

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, \nu} \quad & g(\lambda, \nu), \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \succeq 0. \end{aligned}$$

Example (Задача разбиения)

Составьте двойственную задачу для

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & x^T W x \\ \text{s.t.} \quad & x_j^2 = 1, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $W \in \mathbb{S}_+^m$.

$$f_0^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (y^T x - f_0(x)).$$

Для нахождения связи рассмотрим следующую задачу

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax \preceq b, \\ & Cx = d. \end{aligned}$$

$$g(\lambda, \nu) = -\lambda^T b - \nu^T d - f_0^*(-A^T \lambda - C^T \nu), \quad \lambda \succeq 0.$$

Для задач с линейными ограничениями, можно выписать двойственную задачу, зная лишь сопряженную функцию.

Example (Решение СЛАУ с наименьшей нормой общего вида)

Составьте двойственную задачу для

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \|x\| \\ \text{s.t. } Cx = d, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ - любая норма, $C \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $d \in \mathbb{R}^m$.

Example (Максимизация энтропии)

Составьте двойственную задачу для

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^d} \quad & \sum_{i=1}^d x_i \log x_i \\ \text{s.t.} \quad & Ax \preceq b, \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Example (Кусочно-линейная оптимизация)

Составьте двойственную задачу для

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{i=1, \dots, m} (a_i^T x + b_i),$$

где $a_i \in \mathbb{R}^d$, $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \overline{1, m}$.

На практике методы работают следующим образом - происходит инициализация x^0, λ^0, ν^0 , и итеративным алгоритмом меняются сразу как прямые, так и двойственные методы. В качестве критерия останова берут $f(x^k) - g(\lambda^k, \nu^k) \leq \epsilon$.

Поэтому, когда будет исследоваться график невязки между прямой и двойственной функцией, то станет понятно, выполняется сильная двойственность, или же нет: $f(x^k) - g(\lambda^k, \nu^k)$ должно стремиться к $p^* - d^*$ — так называемому **оптимальному двойственному зазору**, и если выполняется свойство сильной двойственности, то этот зазор на графике будет стремиться к нулю.