Методы оптимизации. Семинар 5. Выпуклые множества.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

2 октября 2025

Definition

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in [0,1]$, точка $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ также принадлежит S.

Если мы берем любые две точки внутри множества и соединяем их отрезком, то весь этот отрезок лежит внутри множества.

x_1 x_2

$x_1, x_2 \in S$

$\underline{\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S}$

Примеры выпуклых множеств

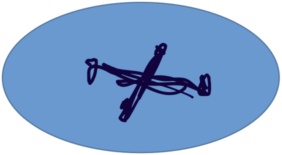


Рис.: Пример выпуклого множества.

Рис.: Пример не выпуклого множества.

Афинные множества

$x_1, x_2 \in S \ \forall \theta$ $\quad$ $\underline{\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S}$

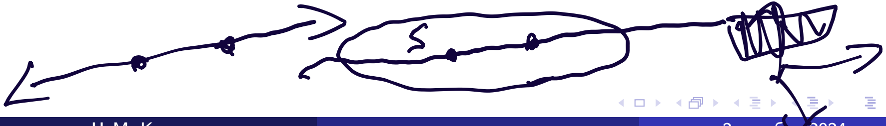
Definition

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *афинным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in \mathbb{R}$, точка $\theta x_1 + (1 - \theta) x_2$ также принадлежит S.

Proposition

Любое афинное множество является выпуклым.

В афинном множестве, выбрав две точки, мы ожидаем, что не только отрезок между ними, но и вся прямая, соединяющая эти точки, принадлежит этому множеству, в отличие от определения выпуклости.



Докажем по определению

$\{x \in$

Example (Полуплоскость)

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда полуплоскость $\{x \mid a^T x \geq b\}$ выпукла.

Example (Гиперплоскость)

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда гиперплоскость $\{x \mid a^T x = b\}$ афинное множество.

$S = \{x \mid \langle a, x\rangle \geq b\}$

$\langle a, x\rangle = b$

$x, y \in S \qquad \theta \in [0;1]$

$x \in S \qquad\qquad y \in S$

$$\langle x\theta + y(1-\theta), a\rangle = \underbrace{\theta}_{\geq 0}\underbrace{\langle x, a\rangle}_{\geq b} + \underbrace{(1-\theta)}_{\geq 0}\underbrace{\langle y, a\rangle}_{\geq b}$$

$$\geq \theta b + (1-\theta) b = b \Rightarrow (x\theta + y(1-\theta)) \in S$$

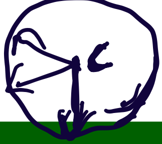
$\{x \mid \langle a, x\rangle = b\}$

$\forall x, y \in S$ $\quad \langle x\theta + y(1-\theta), a\rangle =$

$\forall \theta \in \underbrace{[0;1]}$ $\quad \theta \underbrace{\langle a, x\rangle}_{b} + (1-\theta)\underbrace{\langle y, a\rangle}_{b} =$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ $\quad = \theta b + (1-\theta) b = b \in S$

$\Rightarrow S$ - aff, conv



Example (Шар по норме)

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда шар $\overline{B}(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| \leq r\}$ является выпуклым множеством.

В частности, шары в матричных нормах $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$ (норма Фробениуса) и $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ (Спектральная норма) также являются выпуклыми.

Example (Сфера)

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Является ли сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| = r\}$ выпуклым множеством?

$B = \{x \mid \|x-c\| \leq r\} \Rightarrow$ conv

$x, y \in B \quad \forall \theta \in [0;1]$

$\|\underbrace{x\theta + y(1-\theta)} - c\| = \|\theta(x-c) + (1-\theta)(y-c)\|$

$c = c(1-\theta) + c\theta$

$\leq \|\theta(x-c)\| + \|(1-\theta)(y-c)\| = \theta\underbrace{\|x-c\|}_{\leq r} + (1-\theta)\underbrace{\|y-c\|}_{\leq r}$

$\theta \geq 0 \qquad 1-\theta \geq 0$

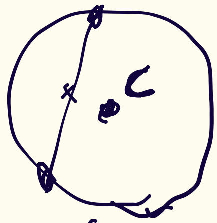
$\leq \theta r + (1-\theta) r = r \Rightarrow x\theta + (1-\theta) y \in B$

$S = \{x \mid \|x - c\| = r\}$ — не выпукло!!! ???

$x, y \in S \quad \forall \theta \in [0;1]$

$\|x\theta + (1-\theta)y - c\| \le \theta \underbrace{\|x-c\|}_{= r} + (1-\theta)\underbrace{\|y-c\|}_{= r}$

$= \theta r + (1-\theta) r = r$



$z \in R^n \quad \|z\| = r, \quad \theta = \frac{1}{2}$

$\exists \; z + c \in S, \; -z + c \in S \Rightarrow \frac{1}{2}(z+c) + \frac{1}{2}(-z+c) = c \notin S$

Докажем по определению

Example (Множество положительно полуопределенных матриц)

Множество всех положительно полуопределенных матриц размера $n \times n$, определяемое как

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T,\ z^T X z \geq 0,\ \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

является выпуклым множеством. Аналогично, множество положительно определенный матриц $\mathcal{S}_{++}^n$ тоже выпуклое.

Example

Является ли множество $M = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} | x_1 x_2 \geq 1\}$ выпуклым?

$$S_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T,\ \forall z \in \mathbb{R}^n\ z^T X z \geq 0\}$$

$$X, Y \in S_+^n \quad \forall \theta \in [0;1]$$

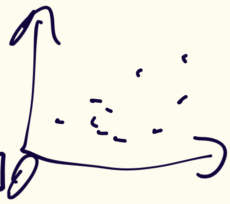
$X\theta + Y(1-\theta)$ – симм.

$$\forall z \quad z^T(X\theta + Y(1-\theta))z = \overbrace{z^T X z}^{\geq 0}\,\overset{\geq 0}{\theta} + \overset{\geq 0}{(1-\theta)}\,\overbrace{z^T Y z}^{\geq 0}$$

$$\geq 0 \Rightarrow X\theta + Y(1-\theta) \in S_+^n \Rightarrow \text{conv}$$

$$S_{++}^n \quad \forall z \neq 0 \quad z^T X z > 0$$

$M = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} \mid x_1 x_2 \geq 1\}$



$x, y \in M \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \forall \theta \in [0;1]$

$z_\theta = x\theta + y(1-\theta) = \begin{bmatrix} x_1\theta + y_1(1-\theta) \\ x_2\theta + y_2(1-\theta) \end{bmatrix}$

$(x_1\theta + y_1(1-\theta))(x_2\theta + y_2(1-\theta)) =$

$\underset{\geq 1}{\theta^2 x_1 x_2} + \underset{\geq 1}{y_1 y_2}(1-\theta)^2 + \theta(1-\theta)\underbrace{(y_1x_2 + x_1y_2)}_{\geq 2\sqrt{y_1x_2 \cdot x_1y_2}}$

$2\sqrt{y_1 x_2 \cdot x_1 y_2} \geq 1$

$\geq \theta^2 + (1-\theta)^2 + 2\theta(1-\theta) = 1 \Rightarrow$

$(1-\theta)^2 = \theta^2 - 2\theta + 1 \quad + 2\theta - 2\theta^2$

$x\theta + (1-\theta)y \in M$

Афинная функция

Definition

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *афинной*, если найдутся $b \in \mathbb{R}^m$ и $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что $f(x) = Ax + b$.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad$ $Ax + b$

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.

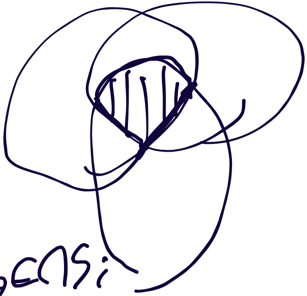
$x, y \in \bigcap S_i$

$\Downarrow$

$\forall i \quad x, y \in S_i$ - вып

$\Downarrow$

$z_0 \in S_i \Rightarrow z_0 \in \bigcap S_i$

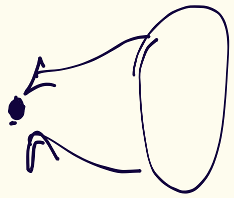


Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$



$f^{-1}(S)$ – выпуклый

S – вып

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i\in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.
5. **Декартово произведение:** Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — выпуклые множества, тогда декартово произведение $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ также выпукло.

Докажем через сохранение выпуклости

Example (Многогранник)

Многогранником называется множество точек в $\mathbb{R}^n$, задающееся системой линейных равенств и неравенств: $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Cx = d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ и $d \in \mathbb{R}^k$.

Example (Ограниченные полиномы)

Докажите, что множество $\{a \in \mathbb{R}^k | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 \forall t : \alpha \leq t \leq \beta\}$, где
$p(t) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_k t^{k-1}$, является выпуклым.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \underset{\mathbb{R}^{m\times n}}{A}x \le b,\ \underset{\mathbb{R}^{d\times n}}{C}x = d\} = M$$

$$M = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{\{\langle a_i^T, x\rangle \le b_i\}}_{\text{conv}} \bigcap_{j=1}^{d} \underbrace{\{\langle c_j^T, x\rangle = d_j\}}_{\text{conv}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_m^{\,T} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ conv как пересечение

$$\{ \underbrace{a \in \mathbb{R}^n} \mid p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_{n-1} t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{p(0) = 1}, \quad |p(t)| \le 1 \quad \forall t \in [\alpha; \beta], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R}$$

$- M$

- $p(0) = a_0 = 1 \Rightarrow \left\langle \vec{a}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

- $\tilde{t} \in [\alpha; \beta]$ $\quad -1 \le p(\tilde{t}) = a_0 + a_1 \tilde{t} + \dots + a_{n-1} \tilde{t}^{\,n-1} \le 1$

$$\left\langle \vec{a}, \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{t} \\ \vdots \\ \tilde{t}^{\,n-1} \end{bmatrix} \right\rangle \le 1$$

$$\left\langle \vec{a}, \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{t} \\ \tilde{t}^{\,n-1} \end{bmatrix} \right\rangle \ge -1$$

$$M = \left\{ a \mid \left\langle a, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \right\} \bigcap_{\tilde{t} \in [\alpha; \beta]} \left\{ a \mid -1 \le \left\langle a, \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{t}^{\,n-1} \end{bmatrix} \right\rangle \le 1 \right\}$$

гиперплоскость $\in$ conv по a

полуплоскость conv по a

$\bigcap$ conv $\Rightarrow$ conv

Докажем через афинные функции

Example

Докажите, что множество $S = \{x | \|Ax + b\| \leq c^T x + d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $c, d \in \mathbb{R}^n$, выпукло.

$S = \{ \|Ax+b\| \le c^T x + d \}$

$L = \{ (\underset{\in \mathbb{R}^n}{y}, \underset{\in \mathbb{R}}{t}) \mid \|y\| \le t \} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(y_1, t_1), (y_2, t_2) \in L \quad \forall \theta \in [0,1]$

$\theta(y_1, t_1) + (1-\theta)(y_2, t_2) = (\theta y_1 + (1-\theta) y_2, \; t_1\theta + (1-\theta) t_2) \in L$

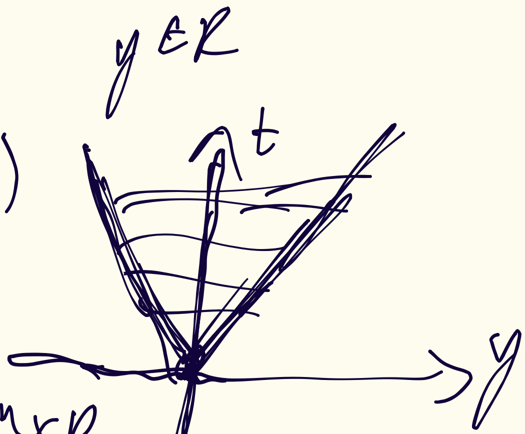
$\|\theta y_1 + (1-\theta) y_2\| \le \theta \underset{\le t_1}{\|y_1\|} + (1-\theta) \underset{\le t_2}{\|y_2\|}$

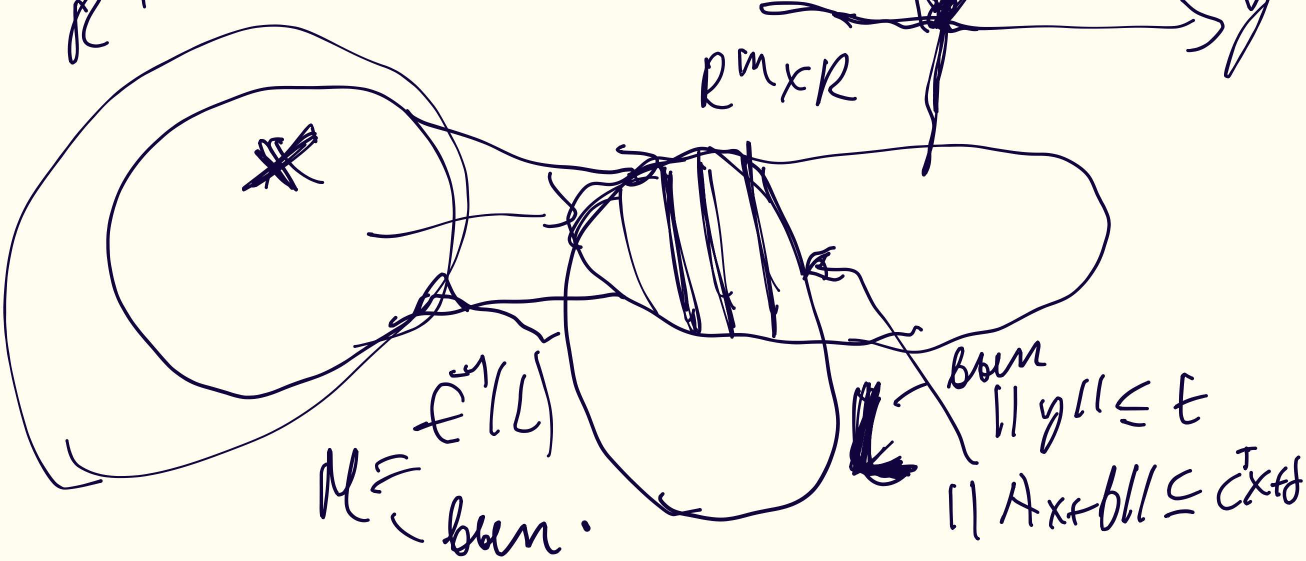
$\theta t_1 + (1-\theta) t_2 \le$

$\Downarrow$

$\mathbb{R}^n$

$f(x) = (\underset{\in \mathbb{R}^m}{Ax+b}, \underset{\in \mathbb{R}}{c^T x + d})$





Докажем через афинные функции

Example (Гиперболический конус)

Пусть $P \in \mathcal{S}^n_+$ и $c \in \mathbb{R}^n$, тогда множество

$$K = \{x | x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$$

является выпуклым.

Доказательство.

Как мы уже знаем, множество $L = \{(x, t) | \|x\| \leq t\}$ является выпуклым.
Воспользуемся фактом, что $\forall P \in \mathcal{S}^n_+ \; \exists Q \in \mathcal{S}^n_+ : P = Q^2$, поэтому наше множество K переписывается следующим образом:
$K = \{x | \|Qx\| \leq c^T x\}$. Заметим, что $K = f^{-1}(L)$, где $f(x) = (Qx, c^T x)$ - афинная функция. Поэтому K выпукла как прообраз выпуклого множества при афинном преобразовании. $\square$

Докажем через афинные функции

Example

Рассмотрим множество $C = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \succ B\}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Докажите, что C выпукло.

Доказательство.

Рассмотрим афинную функцию $f(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n - B$, тогда

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$C = f^{-1}(\mathcal{S}^n_{++})$. Поэтому C выпукла как прообраз выпуклого множества. $\square$

$S^n_{++} \subset$ conv

Конусы

Definition

Множество C называется *конусом*, если для любых $c \in C$ и $\theta \geq 0$ точка θc также принадлежит C.

Если взять любую точку из конуса, то отрезок по направлению из 0 до этой точки можно сколь угодно продлить в этом конусе.
Примеры: любое линейное подпространство, прямая через начало координат, луч из начала координат.

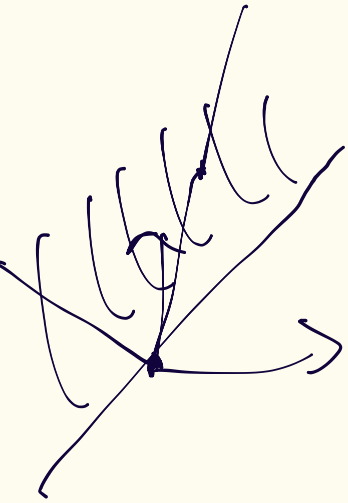
Proposition

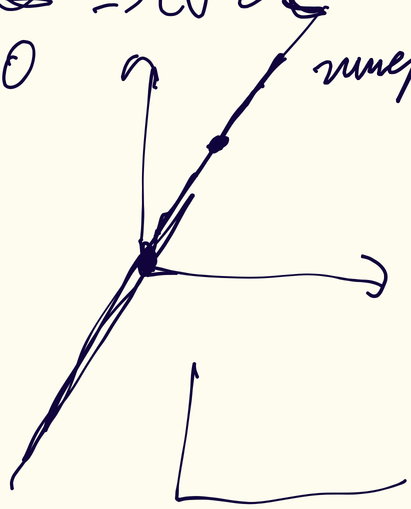
Условие: для любых $c_1, c_2 \in C$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ выполнено

$$\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C,$$

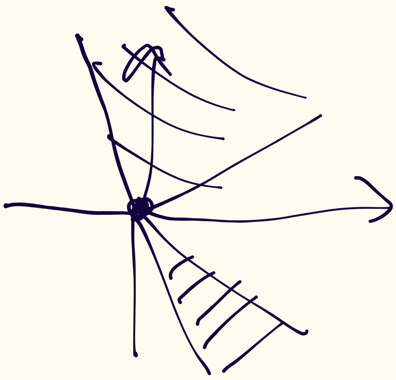
равносильно тому, что множество является выпуклым конусом.

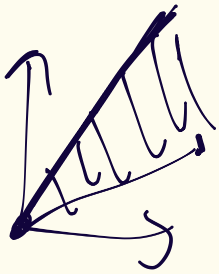
$\forall c \in C \Rightarrow c\theta \in C$
$\forall \theta \geq 0$





линерание





C - конус + выпукл $\Leftrightarrow$

$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0 \quad \forall c_1, c_2 \in C$

$\Rightarrow \theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C$

Свойства конусов

Любой конус обязательно содержит 0.

Proposition

Пересечение любого семейства (выпуклых) конусов сохраняет свойство быть (выпуклым) конусом.

$x_1, x_2 \quad \theta_1, \theta_2 \geq 0 \quad \|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2\| \leq \theta_1 \underbrace{\|x_1\|}_{\leq t_1} + \theta_2 \underbrace{\|x_2\|}_{\leq t_2} \leq \underbrace{\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2}_{}$ $\in C$

Example

Множество $C = \{(x, t) \in R^{n+1} : \quad \|x\| \leq t\}$ является выпуклым конусом.

Example

Множество положительно полуопределенных матриц $\mathcal{S}_+^n$ является выпуклым конусом

и S_+^n $\qquad X\theta_1 + Y\theta_2$

Example

Гиперплоскости $\{x \mid a^T x = 0\}$ и полуплоскости $\{x \mid a^T x \geq 0\}$, проходящие через 0, являются выпуклыми конусами. В частности, их пересечения тоже выпуклые конусы.

Выпуклая комбинация

$x\theta + y(1-\theta)$ для 2 $\qquad \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k$

Definition

Выпуклой комбинацией точек $x_1, \ldots, x_k$ называется любая точка вида

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k,$$

где $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \leq \theta_i \leq 1$ для всех i.

Proposition

Если S является выпуклым множеством и $x_1, \ldots, x_k \in S$, то любая выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_k$ также принадлежит S.

Доказательство.

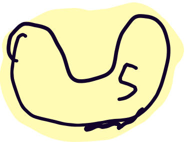
Доказательство проведем индукцией по k.
База при $k = 2$ верна. Пусть утверждение верно для $k - 1$.
Переход: рассмотрим $x_1, \ldots, x_k \in S$ и пусть $\theta_1, \ldots, \theta_k$ таковы, что $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \leq \theta_i \leq 1$. Если $\theta_k = 1$, то утверждение очевидно. В противном случае перепишем комбинацию:

было для n-1

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k = (1 - \theta_k) \left(\underbrace{\frac{\theta_1}{1 - \theta_k} x_1 + \ldots + \frac{\theta_{k-1}}{1 - \theta_k} x_{k-1}}_{\in S} \right) + \theta_k x_k,$$

где каждое слагаемое $\frac{\theta_i}{1-\theta_k}$ лежит в интервале $[0, 1]$, а их сумма равна 1. По предположению индукции и определению выпуклого множества, утверждение верно для k. □

Выпуклая оболочка



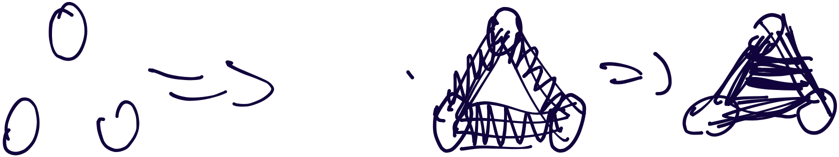
Definition

Выпуклой оболочкой множества S называется наименьшее по включению выпуклое множество T, содержащее S. То есть, это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S. Обычно выпуклую оболочку обозначают $\operatorname{conv} S$.

Выпуклая оболочка является выпуклым множеством.

$$\operatorname{conv} S = \bigcap_{\substack{A - \text{conv} \\ A \supset S}} A$$ — conv как пересечение

Связи



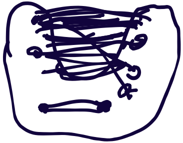
Theorem

Выпуклая оболочка множества S равна множеству всех выпуклых комбинаций элементов S, то есть

$$\operatorname{conv} S = \cup_{k\in\mathbb{N}}\{\underbrace{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k}|\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \le \theta_i \le 1, x_i \in S\}.$$

Множество S является выпуклым тогда и только тогда, когда $S = \operatorname{conv} S$.

$$\operatorname{conv} S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}$$



Доказательство.

Пусть x — произвольная выпуклая комбинация элементов S. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение справа налево.

Доказательство теоремы

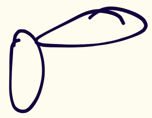
Доказательство.

Пусть x — произвольная выпуклая комбинация элементов S. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение справа налево.
Докажем вложение в обратную сторону. Заметим, что $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1\}$ является выпуклым множеством, так как если x и y выпуклые комбинации S, то $\theta x + (1 - \theta) y$ является выпуклой комбинацией большей размерности для $\theta \in [0, 1]$. Поэтому вложение выполняется. Значит эти множества равны. $\square$

Пример на выпуклую оболочку

Example

Чему равна $\mathrm{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$?



$\{xx^T \mid x\in\mathbb{R}^n \quad \|x\|_2=1\}$

$\forall \theta_1,\dots,\theta_k \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$

$\forall x_1x_1^T, \dots, x_kx_k^T \mid \|x_i\|_2=1$

$\theta_1 x_1x_1^T + \dots + \theta_k x_kx_k^T \Rightarrow Z_k \qquad Z_k \in S_+^n$

$\forall y \quad \underbrace{y^T(\theta_1x_1x_1^T)y}_{\theta_1 y^T x_1 x_1^T y \geq 0} + \dots + \underbrace{y^T(\theta_k x_k x_k^T)y}_{\geq 0} \geq 0$

$Tr(\theta_1x_1x_1^T + \dots \theta_k x_k x_k^T) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i Tr(1) = 1$

$Tr(x_ix_i^T) = Tr(\underbrace{x_i^Tx_i}_{\|x_i\|_2^2=1}) = 1$

$\forall Z \in conv M \Rightarrow Z \in \{A \mid A \in S_+^n, Tr(A)=1\}$

$conv M \subset \{A\mid A\in S^n_+, Tr(A)=1\}$

$=$

$A: \quad Tr(A)=1 \quad A\in S_+^n \quad A \in conv M$

$A = S \Theta S^T$ - ОНБ из собств. векторов

$$(s_1 \dots s_n)\begin{pmatrix}\theta_1 \geq 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \theta_n \geq 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T\end{pmatrix}$$

$A = \sum_{i=1}^{n} s_i\theta_i s_i^T \qquad \|s_i\|_2=1$ - ОНБ

выпуклая комб-ка

$\theta_1\dots\theta_n\geq0 \quad \sum\theta_i=1$

$\|s_i\|_2=1$

Θ ОНБ

$Tr(A) = Tr(S\Theta S^T) = Tr(\underbrace{S^TS}_{I}\Theta) = Tr(\Theta) = 1$

Пример на выпуклую оболочку

Example

Чему равна $\text{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$?

Для начала докажем вложение слева направо. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1$. Покажем, что след матрицы xx^T равен 1:

$$\text{Tr}(xx^T) = \text{Tr}(x^T x) = \|x\|_2^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим матрицу $A \in \{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$. По вышедоказанной теореме мы имеем, что $A = \theta_1 x_1 x_1^T + \theta_2 x_2 x_2^T + \ldots + \theta_n x_n x_n^T$, где $\theta_i \geq 0$, $\|x_i\|_2 = 1$ и $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 1$. Поэтому, используя линейность следа, мы получаем $\text{Tr}(A) = 1$.

Пример на выпуклую оболочку

Далее докажем вложение справа налево. Пусть $A \in \mathcal{S}_+^n$ и $\mathrm{Tr}(A) = 1$. Матрица A симметричная, значит у нее есть базис из собственных векторов. Применяя спектральное разложение мы получаем, что $A = S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S$, где S - ортогональная матрица. Заметим, что

$$Tr(S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S) = Tr(SS^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) =$$
$$Tr((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Из спектрального разложения мы делаем вывод, что $A = \lambda_1 s_1 s_1^T + \lambda_2 s_2 s_2^T + \ldots + \lambda_n s_n s_n^T$, где s_i - соответствующие нормированные собственные вектора. Это завершает доказательство.

Другие оболочки

Definition

Конической оболочкой множества C называется множество

$$\cup_{k=1}^{\infty}\{\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_k c_k | c_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

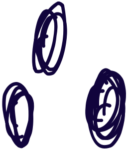
Коническая оболочка является выпуклым конусом.

Definition

Аффинной оболочкой $\mathrm{aff}\ S$ множества S называется множество

$$\mathrm{aff}\ S := \cup_{k=1}^{\infty}\{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots \theta_k = 1, x_i \in S, i = 1, \ldots, k\}.$$

Аффинная оболочка $\mathrm{aff}\ S$ любого мн-ва S может быть представлена как сумма единственного линейного подпространства L_S и представителя $y \in \mathrm{aff}\ S$, то есть $\mathrm{aff}\ S = L_S + y$.



$\mathbb{R}^2$ $d=2$

-3 точки

Для любого множества S можно определить его размерность как $\dim S = \dim \operatorname{aff} S = \dim L_S$.

Theorem

Пусть дано множество S и $\dim \operatorname{conv} S = d$. Тогда любой элемент $\operatorname{conv} S$ представляется как выпуклая комбинация не более чем $d+1$ точки множества S.

Теоремы отделимости

Theorem (Теорема об отделимости)

Пусть S и T - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in S$ $a^T x - b \le 0$ и $\forall y \in T$ $a^T y - b \ge 0$.

То есть любые два непересекающиеся выпуклых множества можно разделить гиперплоскостью.

Theorem (Теорема о строгой отделимости)

Пусть S и T - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, причем S - компакт, а T - замкнуто. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\sup_{x \in S} a^T x < b < \inf_{y \in T} a^T y$.

Лемма Фаркаша

Мн-ва: $\{b - Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ и $\{y \mid y \geq 0\}$
отделить слабо

Theorem

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax < b$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

Неразрешимость линейного неравенства от x, который лежит в m-мерном пространстве, сводится к разрешимости системы равенств и неравенств от переменной из n-мерного пространства.