Методы оптимизации. Семинар 8. Сопряженные функции.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

23 октября 2025г

Сопряженная функция

Позволяет описывать функции с помощью максимального расстояния до прямой с углом наклона y.

Definition

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$

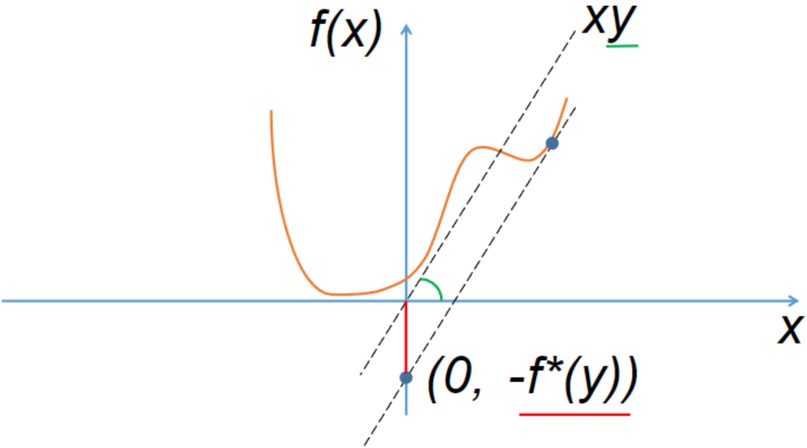
для выпуклых $f^{**} = f$

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\underbrace{\langle x, y \rangle - f(x)}_{\text{вып по } y}\}$$

называется сопряженной по Фенхелю функцией к f.

Сопряженная функция всегда выпуклая независимо от выпуклости f!

Геометрия сопряженной функции



Попробуем посчитать по определению $f^*(y)$. Если $f(x)$ - выпукла, то $\langle x, y\rangle - f(x)$ - вогнута по x, так что можно пользоваться критериями глобального максимума.

Example

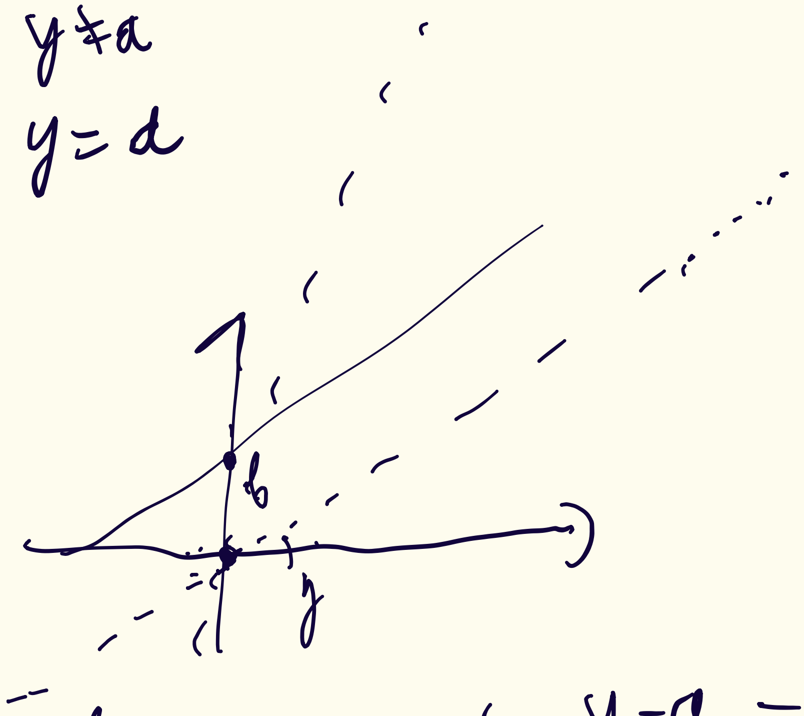
Найти сопряженную функцию к линейной функции $f(x) = \langle a, x\rangle + b$, где $a, x \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$.

$f^*(y) = \sup\limits_x \{\langle x, y\rangle - \langle a, x\rangle - b\} = \sup\limits_x \{\langle y-a, x\rangle - b\}$

$y - a \neq 0 \Rightarrow \sup = +\infty$

$y = a \Rightarrow \sup\limits_x \{-b\} = -b$

$$f^*(y) = \begin{cases} +\infty, & y \neq a \\ -b, & y = a \end{cases}$$



$g(x) = \langle y-a, x\rangle - b$

$\nabla g(x) = y - a = 0$

$\Downarrow$

$y = a$

1D сопряженные функции

Example

Найти сопряженную функцию к экспоненте $f(x) = e^x$, где $x \in \mathbb{R}$.

$f(x)=e^x$

$f^*(y)=\sup_x (xy-e^x)=\sup_x (g(x))$

$g'(x)=y-e^x$

Когда можно сделать $g'(x)=0$

$\Updownarrow$

$y=e^x \quad y>0 \Rightarrow \tilde{x}=\log y$ — max

$y>0 \quad f^*(y)=\tilde{x}y-e^{\tilde{x}}=\underbrace{y\log y-y}$.

$y=0 \Rightarrow \sup_x\{-e^x\}=0$

$e^x\in(0;+\infty)$

$y<0 \quad \sup_x\{xy-e^x\}\to+\infty$

$\Uparrow$

$x\to-\infty \quad xy\to+\infty$

$e^x\to 0$

$$f^*(y)=\begin{cases} y\log y-y, & y>0\\ 0, & y=0\\ +\infty, & y<0\end{cases}$$

Общий алгоритм подсчета f^*

Для выпуклых и дифференцируемых функций:

1. Для каждого y посчитать градиент $\langle x, y\rangle - f(x)$ по x.
2. Посмотреть, для каких y градиент можно приравнять к 0 и найти глоб максимум по x.
3. Для остальных y надо смотреть, расходится ли супремум или сходится к конечному значения.

*Для субдифференцируемых функций можно считать субдифференциал для $\sup_x\{\langle x, y\rangle - f(x)\} = -\inf_x\{f(x) - \langle x, y\rangle\}$.
**Для сложно дифференцируемых функций, можно исследовать супремум по определению или свойствам сопряженных функций.

1D сопряженные функции

Example

Найти сопряженную функцию для $f(x) = \max\{1 - x, 0\}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \max\{1-x, 0\}$

$f^*(y) = \sup\limits_{x}\{xy - \max\{1-x, 0\}\} =$

$-\max\{a,b\} = \min\{-a,-b\}$

$= \sup\limits_{x}\{\min\{x-1+xy,\ xy\}\}$

$x-1+xy = xy \Rightarrow x = 1$

$x > 1 \Rightarrow \min\{\dots\} = xy$

$x \le 1 \Rightarrow \min\{\dots\} = x-1+xy$

$x = 1$

$\sup \neq +\infty \quad x(1+y) - 1 \uparrow \quad \Rightarrow (1+y) \ge 0$

$xy \downarrow \quad \boxed{y \le 0}$

$y \in [-1;0] \Rightarrow f^*(y) = y$

$y \notin [-1;0] \quad f^*(y) = +\infty$

1D сопряженные функции

Example (Логистическая функция)

Найти сопряженную функцию для $f(x) = \log(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \log(1+e^x)$

$f^*(y) = \sup\limits_x \big(\underbrace{xy - \log(1+e^x)}_{g(x)} \big)$

$g'(x) = y - \frac{1}{1+e^x} e^x = y - \frac{e^x}{1+e^x}$

• $g'(x) = 0 \qquad y(1+e^x) = e^x$

$e^x = \frac{y}{1-y} \qquad y = \frac{y}{1-y}\left(1 + \frac{y}{1-y}\right)$

$x = \log y - \log(1-y)$

$\frac{y}{1-y} > 0 \Rightarrow y \in]0;1[$

$f^*(y) = xy - \log(1+e^x) = y\log y - y\log(1-y)$

$\underbrace{- \log\left(1 + \frac{y}{1-y}\right)}_{+\log(1-y)} = y\log y + (1-y)\log(1-y)$

• $y = 0 \qquad \sup\limits_x \left(-\log(\underbrace{1+e^x}_{\to 1})\right) \overset{x\to-\infty}{=} 0$

• $y < 0 \qquad f^*(y) = \sup\limits_x \left(xy - \log(1+e^x) \right) = +\infty$

$x \to -\infty \Rightarrow xy \to +\infty$, $\log(1+e^x) \to 0$

- $y=1$ $\quad \sup_x \{ x - \log(1+e^x) \}$

$$\log(1+e^x) = \log(e^x(e^{-x}+1)) = x + \log(1+e^{-x})$$

$$\sup_x \{ x - x - \log(1+e^{-x}) \} =$$

$$\sup_x \{ -\log(\underbrace{1+e^{-x}}_{\geq 1}) \} \quad x \to +\infty \quad = 0$$

- $y>1$

$$\sup_x \{ yx - x - \log(1+e^{-x}) \}$$

$$= \sup_x (\underbrace{(y-1)}_{>0} x - \log(1+e^{-x}) \} = +\infty$$

$x \to +\infty$

$(y-1)x \to +\infty$

$\log(1+e^{-x}) \to 0$

$$f^*(y) = \begin{cases} y \log y + (1-y) \log(1-y), & y \in [0;1] \\ +\infty & y \notin [0;1] \end{cases}$$

Многомерные сопряженные функции

Example (Квадратичная функция)

Найти сопряженную функцию для $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle$ для $A \in \mathbb{S}^n_{++}$ и $x, b \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x) = \frac{\langle x, Ax\rangle}{2} + \langle b, x\rangle \qquad A \succ 0$$

$$f^*(y) = \sup_x \left\{ \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, Ax\rangle}{2} - \langle b, x\rangle \right\}$$

$$= \sup_x \left\{ -\frac{\langle x, Ax\rangle}{2} + \langle y-b, x\rangle \right\}$$

$$\nabla g(\tilde{x}) = -A\tilde{x} + y - b = 0$$

$$\tilde{x} = -A^{-1}(b-y) \qquad \forall A, b, y$$

$$f^*(y) = \langle \tilde{x}, y\rangle - \frac{\langle \tilde{x}, A\tilde{x}\rangle}{2} - \langle b, \tilde{x}\rangle$$

$$= -\frac{\langle A^{-1}(b-y), (b-y)\rangle}{2} + \langle b-y, A^{-1}(b-y)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle b-y, A^{-1}(b-y)\rangle, \quad \forall y$$

Example (Лог-детерминант)

Найти сопряженную функцию для $f(X) = -\log\det X$ на $X \in \mathbb{S}^n_{++}$.

$f(X) = -\log\det X$

$$f^*(Y) = \sup_X \{ \underbrace{\langle Y, X\rangle + \log\det X}_{g(X)} \}$$

$$dg(X) = \langle Y, dX\rangle + \frac{\det X \langle X^{-1}, dX\rangle}{\det X}$$

$$= \langle Y + X^{-1}, dX\rangle \Rightarrow \nabla g(X) = Y + X^{-1}$$

• $\nabla g(X) = 0 \Rightarrow \tilde{X}^{-1} = -Y \Rightarrow \tilde{X} = -Y^{-1}$

$Y \prec 0 \Rightarrow \tilde{X} = -Y^{-1} \succ 0$

$$f^*(Y) = \langle \tilde{X}, Y\rangle + \log\det\tilde{X} =$$

$$= -\underbrace{\langle Y^{-1}, Y\rangle}_{n} + \log\det(-Y^{-1})$$

$\mathrm{Tr}(Y^{-1}Y) = \mathrm{Tr}(I)$

• $Y \not\prec 0 \Rightarrow v$ – собств вектор с $\lambda \geq 0$

$$X_t = I + vv^T t, \quad t > 0$$

$$\sup\{\langle X_t, Y\rangle + \log\det X_t\} =$$

$$\sup\{\langle Y, I + vv^T t\rangle + \log\det(I + vv^T t)\}$$

$$= \sup\{\langle Y, I\rangle + \underbrace{\langle Y, vv^T t\rangle}_{\lambda t} + \log(1 + t)\} \to +\infty$$

$\lambda \geq 0 \Rightarrow t \to +\infty$

$$\det(\underbrace{I + vv^T t}) = \underbrace{1+t}$$

собственные числа

$$\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \; 1+t$$

$$f^*(y) = \sup_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\}$$

Example (Норма)

Найти сопряженную функцию для произвольной нормы $f(x) = \|x\|$ на $x \in \mathbb{R}^n$.

$$f^*(y) = \sup_x \langle x, y\rangle - \|x\| \le \sup_x \|x\|(\|y\|_* - 1)$$

$$\langle x, y\rangle \le \|x\| \cdot \|y\|_*$$

$$f^*(y) = \begin{cases} 0, & \|y\|_* \leq 1 \\ +\infty, & \|y\|_* > 1 \end{cases} = I_{\|y\|_* \leq 1}(y)$$

Переход от многомерных к 1D

Example

Найти сопряженную функцию для $f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$ на $x \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x) = \frac{\|x\|^2}{2}$$

$$\sup_{x} \left\{ \langle x, y \rangle - \frac{\|x\|^2}{2} \right\} = \sup_{\substack{\alpha \geq 0 \\ \in \mathbb{R}}} \; \sup_{x : \|x\| = \alpha} \left\{ \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\sup_{x : \|x\| = \alpha}} - \frac{\alpha^2}{2} \right\} =$$

$\forall \|x\| = \alpha$ $\quad \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|_* = \alpha \|y\|_*$ – [illegible]

$$= \sup_{\alpha \geq 0} \left\{ \alpha \|y\|_* - \frac{\alpha^2}{2} \right\} = \frac{\|y\|_*^2}{2}.$$

$$\alpha = \|y\|_* \geq 0$$

- Пусть дан набор собственных функций $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, i \in \overline{1, m}$ с сопряженными функциями $f_i^*, i \in \overline{1, m}$. Тогда для функции $g : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, заданной по правилу

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i),$$

сопряженная функция g^* считается как

$$g^*(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(y_i).$$

в выпуклом верно обратное

$\sup \langle y, x \rangle - g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - f_i(x_i)$

Example

Найдите сопряженную функцию к $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i, \quad \mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}.$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

$$\sup_{x} \{xy - x\log x\} =$$

$$\nabla: \quad y - \log x - 1 = 0 \Rightarrow \tilde{x} = e^{y-1}$$

$$\forall y$$

$$\tilde{x}y - \tilde{x}\log\tilde{x} = ye^{y-1} - e^{y-1}(y-1)$$

$$= e^{y-1}.$$

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i - 1}.$$

Свойства сопряженных функций

- Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\alpha > 0$. Тогда для функций $g(x) = \alpha f(x)$ и $h(x) = \alpha f(\frac{x}{\alpha})$ сопряженные функции считаются как

$$g^*(y) = \alpha f^*(\frac{y}{\alpha}), \quad h^*(y) = \alpha f^*(y).$$

$$f^*(x) = \alpha \frac{\|y\|_*^2}{2\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} \|y\|_*^2$$

Example

Найти сопряженную функцию для $f(x) = \frac{\alpha\|x\|^2}{2}$ на $x \in \mathbb{R}^n$.

g^*: $\sup \langle x, y\rangle - \alpha f(x) = \alpha \sup_x \langle x, \frac{y}{\alpha}\rangle - f(x)$

$= \alpha f^*(\frac{y}{\alpha}).$

Дополнительные определения

Definition

Функция называется замкнутой, если её надграфик является замкнутым множеством.

Замкнутость функции равносильна её полунепрерывности снизу:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x_0)$$

для любых $x_k \to x_0$. Непрерывные функции, очевидно, являются полунепрерывными снизу.

Definition

Функция называется собственной, если она не принимает значение $-\infty$ ни в какой точке.

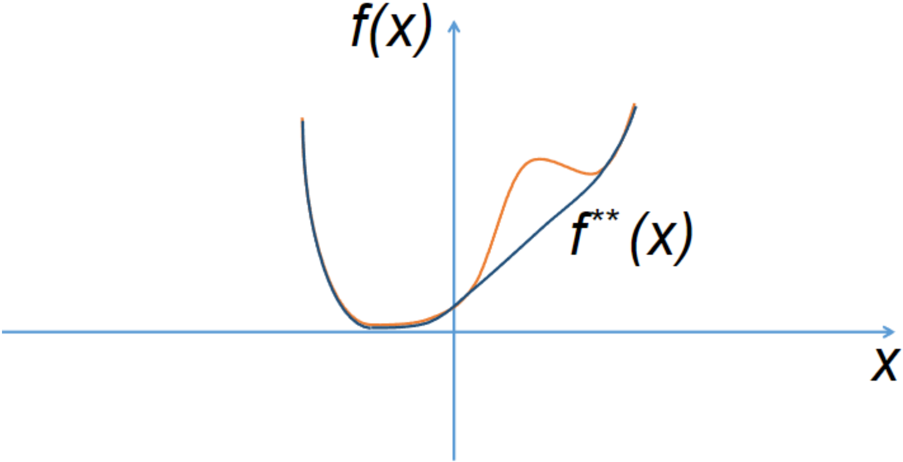
Свойства сопряженных функций

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f(x)\},$$

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - f^*(y)\}.$$

- f^* замкнутая выпуклая функция.
- Функция $f^{**} = f$ если и только если f — выпуклая, замкнутая, собственная функция.
- Пусть f — замкнутая, собственная функция. Тогда следующие два утверждения равносильны при $\mu > 0$:
  1. f является μ-сильно выпуклой,
  2. f^* имеет $1/\mu$-липшицев градиент или f^* — $1/\mu$-гладкая.

Двойное сопряжение



Fenchel–Young inequality

- Пусть f — произвольная функция, тогда:

$f^*(y) = \sup_x \langle x, y\rangle - f(x)$

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- Равенство достигается только и только если

$$f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle \longleftrightarrow \underbrace{y \in \partial f(x)}.$$

- Следствие из Fenchel–Young

$$f(x) \geq f^{**}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$f^{**}(x) = \sup_y \langle x, y\rangle - f^*(y) \leq \sup_y f(x) = f(x).$

Example

Можно показать, что для $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\forall x, y \in \mathbb{R}$ верно

$$\frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \geq xy.$$

$\frac{|x|^p}{p} \xrightarrow{*} \frac{|y|^q}{q}$

Связь субдифференциала и сопряженных функций

Для выпуклых замкнутых функций субдифференциал имеет вид

$$\partial f(x) = \arg\max_y \{\langle x, y \rangle - f^*(y)\}.$$