Методы оптимизации. Семинар 12. Конусы.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

20 ноября 2025г

Сопряженные конусы

Definition

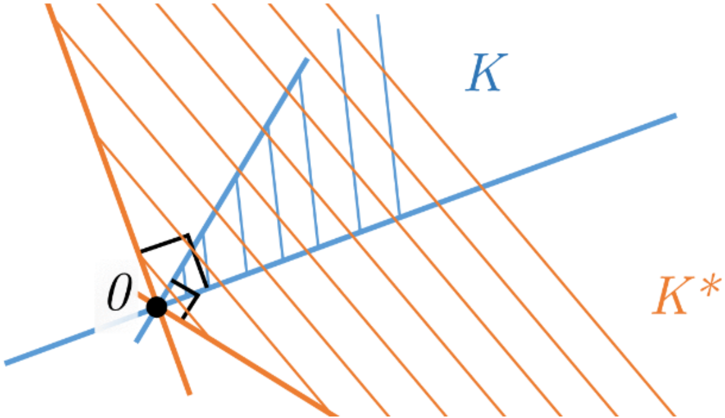
Пусть $K \subseteq U$ – конус в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда множество

$$K^* = \{y \in V \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

называется *сопряженным конусом* к K.

Сопряженный конус задаётся как множество нормалей таких касательных плоскостей к K, что K целиком лежит по одну сторону от них.

Геометрическая интерпретация



Примеры на конусы

Example (Конус Лоренца)

Дан конус $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \quad \|x\| \le t\}$. Найдите K^*.

Примеры на конусы

Example

Дан конус $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < 0\}$. Найдите K^*.

Theorem (Лемма Фаркаша)

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax < b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

Самосопряженный конус

Definition

Конус K называется самосопряженным, если
$$K^* = K.$$

Definition

Конус
$$K^{**} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K^*\}$$
называется *вторым сопряженным* к K.

Примеры на конусы

Example

Дан неотрицательный ортант $K = \mathbb{R}^n_+$. Найдите K^*.

Примеры на конусы

Example

Дано множество симметричных положительно полуопределенных матриц $\mathbb{S}^n_+$. Найдите $(\mathbb{S}^n_+)^*$ в пространстве $\mathbb{S}^n$.

Свойства сопряженных конусов

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

- K^* всегда замкнутый и выпуклый конус.

Свойства сопряженных конусов

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

- K^* всегда замкнутый и выпуклый конус.
- Для произвольного конуса K

$$K^{**} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(K)).$$

- Если K – выпуклый и замкнутый конус, то $K^{**} = K$.

Свойства сопряженных конусов

Definition

Выпуклый замкнутый конус K называется правильным конусом, если

1. $\operatorname{int} K \neq \emptyset$,
2. $\forall x \in K : -x \in K \Rightarrow x = 0$ (конус не содержит прямых).

- Если $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, то K^* не содержит прямых.
- Если K не содержит прямых, то $\operatorname{int} K^* \neq \emptyset$.
- Если K – правильный конус, то K^* тоже правильный.

Доп свойства сопряженных конусов

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ конусы, тогда
$$\left(\sum_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \cup_{i=1}^{m} K_i^*.$$
- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ конусы, а их пересечение имеет внутреннюю точку. Тогда
$$(\cup_{i=1}^{m} K_i)^* = \sum_{i=1}^{m} K_i^*.$$

Обобщенные неравенства

Правильные конусы задают частичный порядок на множестве V.

Definition

Пусть K — правильный конус.

- Элемент $x \in V$ *нестрого обобщенно меньше* элемента $y \in V$, если

$$x \preceq_K y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in K.$$

- Элемент $x \in V$ *строго обобщенно меньше* элемента $y \in V$, если

$$x \prec_K y \quad \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} K.$$

Example

- Конус $\mathbb{R}^n_+$ задает частичный порядок покомпонентного сравнения векторов из $\mathbb{R}^n$.
- Конус $\mathbb{S}^n_+$ задаёт частичный порядок по положительной полуопределенности на симметричных матрицах $\mathbb{S}^n$.

Связь с сопряженными конусами

Proposition

Пусть K — правильный конус. Тогда выполнено

- $x \leq_K y \Leftrightarrow \lambda^\top x \leq \lambda^\top y, \forall \lambda \geq_{K^*} 0;$
- $x <_K y \Leftrightarrow \lambda^\top x < \lambda^\top y, \forall \lambda \geq_{K^*} 0, \lambda \neq 0.$

Theorem (Обощение Леммы Фаркаша)

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax <_K b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in K^* \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

Обобщенная монотонность

Definition

Пусть K — правильный конус.

- Функция $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ называется K-неубывающей, если

$$x \leq_K y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y), \quad \forall x, y \in V.$$

- Функция $f : V \to \overline{R}$ называется K-неубывающей, если

$$x \leq_K y, x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < f(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Example

Определите, при каких $W \in \mathbb{S}^n$ функция

$$f(X) = \mathrm{Tr}(WX)$$

является $\mathbb{S}^n_+$-неубывающей/возрастающей на $\mathbb{S}^n$.

Критерий монотонной функции

Theorem

Пусть функция $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ дифференцируемая, а dom f выпуклое.

- *Функция f является K-неубывающей если и только если*

$$\nabla f(x) \succeq_{K^*} 0, \quad \forall x \in dom\ f.$$

- *Функция f является K-возрастающей если и только если*

$$\nabla f(x) \succ_{K^*} 0, \quad \forall x \in dom\ f.$$

Example

Функция $f(X) = \det X$ является $\mathbb{S}^n_+$-возрастающей на $\mathbb{S}^d_{++}$.

Обобщенная выпуклость

Definition

Пусть V, U — конечномерные евклидовы пространства, а $K \subseteq U$ — правильный конус. Функция $f : V \to U$ называется K-выпуклой, если выполнено обобщенное неравенство Йенсена:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_K \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in [0,1].$$

Example

Является ли функция

$$f(X) = X^2, X \in \mathbb{S}^n$$

$\mathbb{S}^d_+$-выпуклой?

Proposition

Функция $f : V \to U$ *является* K*-выпуклой если и только если*

$$g_z(x) = \langle z, f(x) \rangle, \forall z \in K^*$$

является выпуклой по x *в обычном смысле.*

Proposition

Пусть $K \subseteq U$ *— правильный конус,* $h : V \to U$ *—* K*-выпуклая,* $g : U \to \overline{\mathbb{R}}$ *— выпуклая* K*-неубывающая функция. Тогда* $f(x) = g(h(x))$ *выпуклая функция.*

Example

Покажите, что функция

$$f(x) = \mathrm{Tr}(Wxx^\top), W \in \mathbb{S}^n_+$$

Задача конической оптимизации

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in V} \ & f_0(x) \\
\textbf{s.t.} \ & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \ i = 1, \ldots, n, \\
& h_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

где $\{K_i\}_{i=1}^n$ — набор правильных конусов.
Двойственная функция

$$
g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in V} \Big(f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\top f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j h_j(x) \Big).
$$

Чтобы выполнялась слабая двойственность, требуем

$$
\lambda_i \succeq_{K_i^*} 0.
$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} &\max_{\lambda,\nu} g(\lambda,\nu),\\ &\textbf{s.t. } \lambda_i \geq_{K_i^*} 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Theorem (Условие Слейтера)

Пусть f_0 — выпуклая функция, $\{f_i\}_{i=1}^n$ — K_i-выпуклые функции и ограничения линейные $Ax = b$. Если существует такой $\overline{x} \in relint \ \cap_{i=1}^n dom \ f_i$, что

$$f_i(\overline{x}) <_{K_i} 0, i = \overline{1,n}, A\overline{x} = b,$$

то выполняется сильная двойственность.

Example

Постройте двойственную задачу для задачи SDP

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ & c^\top x \\ \textbf{s.t.} \ & P_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \succeq 0, \end{aligned}$$

где $P_i \in \mathbb{S}^n$.