

Методы оптимизации. Семинар 11. От LP до SDP, примеры задач.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

13 ноября 2025г

Общий вид

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & Gx \leq h. \end{aligned}$$

Стандартный вид

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Задачу в общем виде можно свести к стандартному.

Example

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \left[f(x) := \frac{c^\top x + d}{e^\top x + f} \right] \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & Gx \leq h, \end{aligned}$$

где $\{x | e^\top x + f > 0\}$.

Задача невыпуклая, однако можно свести к LP.

Замена:

$$y = \frac{x}{e^\top x + f} \in \mathbb{R}^n, \quad z = \frac{1}{e^\top x + f} \in \mathbb{R}.$$

Эквивалентная система (почему?):

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} \quad & c^\top y + dz \\ \text{s.t.} \quad & Ay - bz = 0, \\ & Gy - hz \leq 0, \\ & e^\top y + fz = 1, \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

Example

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \sum_{i=1}^r x_{[i]}$$

$$\text{s.t. } Ax = b,$$

$$Gx \leq h,$$

где $x_{[i]}$ - i -ая по величине координата, то есть $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$.

Сведение через двойственность

Замена

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{y \in \mathbb{R}^n} y^\top x \\ \text{s.t. } & 0 \leq y \leq 1, \\ & 1^\top y = r. \end{aligned}$$

Сильная двойственность и двойственная задача (накладываем только условия $y \leq 1$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \min_{t, \nu} rt + \mathbf{1}^\top \nu \\ \text{s.t. } & t\mathbf{1} + \nu \geq x, \\ & \nu \geq 0. \end{aligned}$$

Quadratic Constrained Quadratic Programming (QCQP)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} x^\top A_0 x + b_0^\top x + c_0 \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2} x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

$A_i \in \mathbb{S}^n$ – необязательно неотрицательно определенные.

В частности, неравенства

- $x_i \in \{-1, 1\} \quad x_i^2 - 1 = 0,$
- $x_i \in \{0, 1\} \quad x_i^2 - x_i = 0,$
- $x_i \in \{-M, -M+1, \dots, N-1, N\}, \quad x_i = \sum_{j=1}^N u_j^+ - \sum_{j=1}^M u_j^-.$

Если все ограничения вида неравенства линейные, то задача называется просто Quadratic Programming.

LP лежит в QCQP!

Example

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2.$$

Составление портфеля

Предположим имеется

- n активов, куда можно вложить капитал
- $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1$ – распределение по активам
- ξ_i –случайная величина прибыли i -го актива со средним μ_i и дисперсией σ_i
- Ковариация между активами задана матрицей Σ_{ij}
- Хотим среднюю прибыль не меньше α и с наименьшей дисперсией

Составление портфеля

Предположим имеется

- n активов, куда можно вложить капитал
- $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1$ – распределение по активам
- ξ_i –случайная величина прибыли i -го актива со средним p_i и дисперсией σ_i
- Ковариация между активами задана матрицей Σ_{ij}
- Хотим среднюю прибыль не меньше α и с наименьшей дисперсией

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & x^\top \Sigma x \\ \text{s.t.} \quad & x \geq 0, \mathbf{1}^\top x = 1, \\ & \sum_{i=1}^n x_i p_i \geq \alpha. \end{aligned}$$

Приближение сферой

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^k$ – зашумленные нормальным шумом $\mathcal{N}(0, I_n \varepsilon^2)$ точки с евклидовой сферы $S_r^n(x_c) := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_c\|_2 = r\}$. То есть

$$x_i = \hat{x}_i + u_i, \quad \hat{x}_i \in S_r^n(x_c), \quad u_i \sim \mathcal{N}(0, I_n \varepsilon^2).$$

Приближение сферой

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^k$ – зашумленные нормальным шумом $\mathcal{N}(0, I_n \varepsilon^2)$ точки с евклидовой сферы $S_r^n(x_c) := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - x_c\|_2 = r\}$. То есть

$$x_i = \hat{x}_i + u_i, \quad \hat{x}_i \in S_r^n(x_c), \quad u_i \sim \mathcal{N}(0, I_n \varepsilon^2).$$

Задача оптимизации

$$\min_{x_c \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^k (\|x_i - x_c\|_2^2 - r^2)^2.$$

В общем случае, функция $(x^2 - y^2)^2$ невыпуклая.

Эквивалентная задача

Перепишем задачу:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k (\|x_i - x_c\|_2^2 - r^2)^2 = \sum_{i=1}^k (\|x_i\|_2^2 - 2x_i^\top x_c + \|x_c\|_2^2 - r^2)^2.$$

Замена:

$$(x_c, r) \rightarrow (x_c, t = \|x_c\|_2^2 - r^2)$$

Получившаяся задача

$$\min_{x_c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^k (\|x_i\|_2^2 - 2x_i^\top x_c + t)^2.$$

Множество решений шире, но в точке оптимума $\|x_c\|^2 \geq t$ (почему?).

Second-order Conic Programming

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$\|G_i x - h_i\|_2 \leq e_i^\top x + f_i, \quad i = \overline{1, M}.$$

Последнее условие означает, что пара $(G_i x - h_i, e_i^\top x + f_i)$ лежит в конусе $K_2 = \{(y, t) \mid \|y\|_2 \leq t, t \geq 0\}$.

Выпуклые задачи QCQP лежат в SOCP!

Example

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \|A_i x - b_i\|_2,$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1, \overline{m}} \|A_i x - b_i\|_2.$$

Example

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \sup_{(A,b) \in \mathcal{A}} \|Ax - b\|_2,$$

где $\mathcal{A} = \{(A, b) \mid \|(A - A_0, b - b_0)\|_F \leq \rho\}$.

Оценим сверху

$$f(x) \leq \|A_0 x - b_0\|_2 + \rho \left\| \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Robust Linear Regression

- При $A_0x + b_0 = 0$ берём $(\Delta A, \Delta b) = \frac{\rho}{\sqrt{n}\|(x,1)\|_2} \mathbf{1}_m \cdot (x^T, 1)$.
- При $A_0x + b_0 \neq 0$ берём $(\Delta A, \Delta b) = uv^T$, где
$$u = \rho \frac{A_0x - b_0}{\|A_0x - b_0\|_2}, v = \frac{(x,1)}{\|(x,1)\|_2}.$$

Итого, эквивалентная задача

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_0x - b_0\|_2 + \rho \left\| \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \min_{X \in \mathbb{S}^n} \quad & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^m} \quad & \langle b, x \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m A_i x_i \preceq C. \end{aligned}$$

SOCP лежит в SDP!

Минимум спектральной нормы

Example

Пусть $A(x) := A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i$, $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и требуется найти

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A(x)\|_2.$$

Theorem (Дополнение по Шуру)

Для блочной матрицы $M \in \mathbb{S}^{n+m}$ с обратимой $A \in \mathbb{S}^n$ верно

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix} \succeq 0 \iff \begin{cases} A \succ 0, \\ C - B^\top A^{-1} B \succeq 0. \end{cases}$$

Минимум спектральной нормы

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^m; t \in \mathbb{R}} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \|A(x)\|_2^2 \leq t^2. \end{aligned}$$

Эквивалентная задача

$$\lambda_{\max}(A(x)^{\top} A(x)) \leq t^2, t \geq 0 \iff t^2 I_n \succeq A(x)^{\top} A(x).$$

Дополнение по Шуру

$$\begin{pmatrix} tI_n & A(x)^{\top} \\ A(x) & tI_m \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Замена для условия $\frac{1}{2}x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i$:

Введём $X = xx^\top$ - новые переменные, забирающие всю сложность.

Релаксация к SDP:

$$X \succeq xx^\top \iff \begin{pmatrix} X & x \\ x^\top & 1 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

$$\frac{1}{2}x^\top A_i x + b_i^\top x + c_i = \frac{1}{2}\langle A_i, X \rangle + b_i^\top x + c_i.$$

Если у оптимума $\text{rank}(X) = 1$, то это решение исходной задачи. Если эта задача недопустима, то и исходная тоже.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathcal{K}} \quad & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

где \mathcal{K} - конус в гильбертовом пространстве.

- Экспоненциальный конус:

$$\mathcal{K}_{\text{exp}} = \text{cl} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y \exp \left(\frac{z}{y} \right), y > 0 \right\}.$$

Ограничения: $\log(1 + e^x) \leq t$ и $e^x < t$.

- Степенной конус $0 < \alpha < 1$:

$$\mathcal{P}_n^{\alpha, 1-\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \geq \sqrt{\sum_{i=3}^n x_i^2}, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Ограничения: $\|x\|_p \leq t$.