Методы оптимизации. Семинар 6. Выпуклые функции.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

9 октября 2025г

Расширеннозначные функции

$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m}$

Definition

Пусть U - линейное пространство, и $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ - функция, принимающая значения на всем U во множестве расширенных вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Будем называть эффективной областью определения функции f множество всех точек, в которых функция принимает конечные значения:

$f(x) \to +\infty$

$$\operatorname{dom} f = \{x \in U : |f(x)| < +\infty\}$$

Операции с бесконечностями:

$f: U \to V$

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad -\infty < \alpha < +\infty,$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha + \infty = +\infty, \quad \alpha - \infty = -\infty,$
3. $\forall \alpha > 0 \in \mathbb{R}: \quad \pm\alpha \cdot (+\infty) = \pm\infty, \quad \pm\alpha \cdot (-\infty) = \mp\infty.$

Если функция задана только на области определения $Q \subset U$, то удобно доопределить её за пределами Q на всем U, считая, что там функция принимает значение $+\infty$.

Выпуклые функции

Definition (Выпуклые функции)

Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Выпуклые функции

Definition (Выпуклые функции)

Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \qquad (1)$$

Если неравенство (1) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется *строго выпуклой* функцией.

Definition (Выпуклые функции)

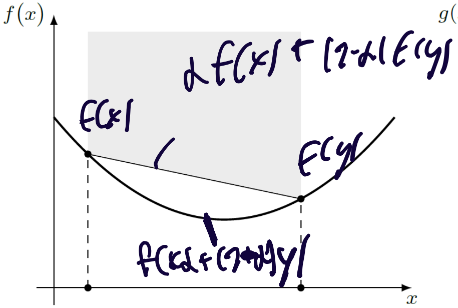
Пусть U - линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

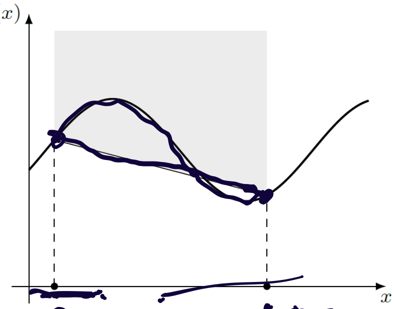
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{1}$$

Если неравенство (1) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется *строго выпуклой* функцией.

- Выпуклая функция может принимать только одно расширенное значение - $+\infty$ (или быть $f \equiv -\infty$). Поэтому введём определение *собственной функции*: $f(x) > -\infty, \forall x \in U$. $f(x) = -\infty$
- $\forall x, y \in$ dom f значение выпуклой функции f в любой точке отрезка $[x, y]$ должно быть конечным. Поэтому у выпуклых функций dom f — выпуклое множество.

Примеры функций





x $\qquad$ y $\qquad$ $+\infty$

$f - $ выпукл

$f: Q^{(U)} \to R$ $\qquad$ $f: U \to \bar{R}$ $\qquad$ $(Q) \to Q = \operatorname{dom} f$ — выпукл

Вогнутые функции

Definition

Пусть U — линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{2}$$

Если это неравенство (2) выполняется как строгое для всех $x \neq y$ и $\alpha \in (0, 1)$, то функция f называется *строго вогнутой*.

- Функция f является (строго) выпуклой тогда и только тогда, когда функция $-f$ является (строго) вогнутой.
- У вогнутой функции dom f все также выпуклое множество.
- Вогнутая функция может принимать только значение $-\infty$ (или быть $f \equiv +\infty$.)

Докажем по определению

Example (Афинная функция)

Пусть в пространстве U задано (произвольное) скалярное произведение и $f : U \to \mathbb{R}$ - аффинная функция

$$f(x) = \langle a, x \rangle + b,$$

где $a \in U$ и $b \in \mathbb{R}$. Проверьте f на выпуклость/вогнутость.

Example (Норма)

Пусть в пространстве U задана (произвольная) норма $||\cdot||$. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$f(x) = ||x||.$$

Проверьте f на выпуклость/вогнутость.

$f(x) = \langle a, x \rangle + b$

$\forall x, y \in U \quad \forall \alpha \in [0;1]$

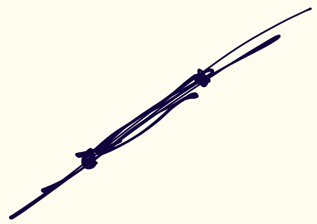
$f(\alpha x + (1-\alpha) y) = \langle a, \alpha x + (1-\alpha) y \rangle + b$

$= \alpha \langle a, x \rangle + (1-\alpha) \langle a, y \rangle + \alpha b + (1-\alpha) b$

$= \alpha \underbrace{(\langle a, x \rangle + b)}_{f(x)} + (1-\alpha) \underbrace{(\langle a, y \rangle + b)}_{f(y)}$

$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ — вып

$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ — вогн



$f(x) = \|x\|$

$x, y \in V \quad \forall \alpha \in [0;1]$

$f(x\alpha + (1-\alpha) y) = \|x \overset{\geq 0}{\alpha} + \overset{\geq 0}{(1-\alpha)} y\| \leq$

$\alpha \|x\| + (1-\alpha)\|y\| = f(x)\alpha + f(y)(1-\alpha)$

— вып.

но не вогнутая

Пример расширеннозначной выпуклой функции

Example

Функция индикатор множества $Q \subset U$:

$$I_Q(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ +\infty, & x \notin Q. \end{cases}$$

Для выпуклых множеств Q функция I_Q выпуклая.

$\forall x, y \in U \quad x, y \in Q$

$\alpha x + (1-\alpha) y \in Q$

$f(\ldots) \le \alpha \underbrace{f(x)}_{=1} + (1-\alpha)\underbrace{f(y)}_{=1}$

$\exists\, x \notin Q$

$f(x) = +\infty$

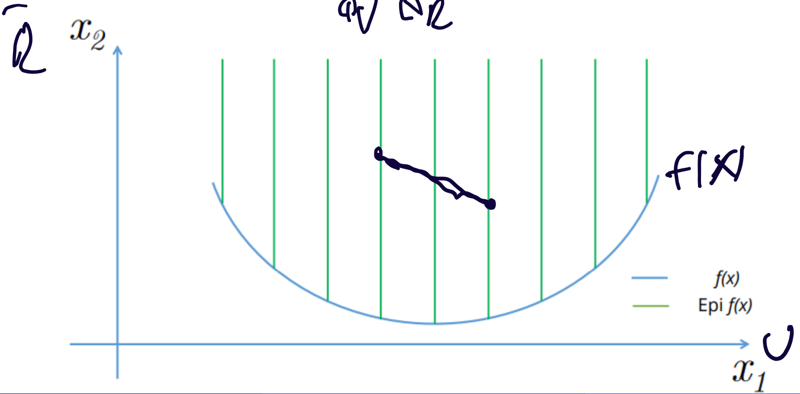
$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha \cdot +\infty$

Эпиграф

Definition

Пусть U - линейное пространство. Надграфиком (или эпиграфом) функции $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ называется множество

$$\mathrm{Epi}\, f := \left\{(x, t) \in U \times \overline{\mathbb{R}} : f(x) \leq t\right\}.$$

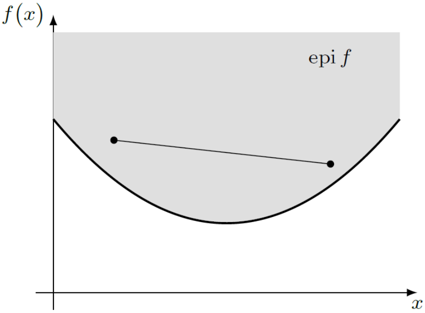


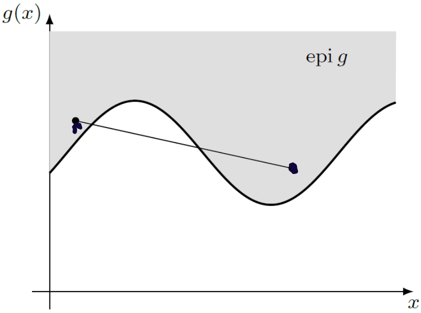
Альтернативное определение выпуклости

Следующее утверждение можно считать альтернативным определением выпуклости функции.

Theorem

Пусть U — линейное пространство. Функция $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ является выпуклой тогда и только тогда, когда её надграфик $\operatorname{Epi} f$ является выпуклым множеством в пространстве $U \times \overline{\mathbb{R}}$.





f-konv =>

$\forall\ (x, t_x) \quad (y, t_y)$

$f(x) \leq t_x \qquad f(y) \leq t_y$

$\forall \alpha \in [0;1] \quad (\alpha x + (1-\alpha) y,\ \underline{\alpha t_x + (1-\alpha) t_y})$ $\in$ Epi f

$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha \underbrace{f(x)}_{} + (1-\alpha) f(y)$, $f(x) \leq t_x$, $f(y) \leq t_y$

$\leq \alpha t_x + (1-\alpha) t_y$ =>

x, y Epi f-konv => $(x, f(x)) \in$ Epi f

$(y, f(y)) \in$ Epi f

$f(x\alpha + (1-\alpha) y) \Leftarrow (x\alpha + y(1-\alpha),\ \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)) \in$ Epi f

$\leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

Критерий выпуклости первого порядка

Theorem (Критерий выпуклости 1-го порядка)

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дифференцируема всюду на dom f. Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad x, y \in dom\ f. \tag{3}$$

Example

Проверьте критерий на функции $f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x_i}, x \in \mathbb{R}^n$ с dom $f = \mathbb{R}^n_{++}$.

Example

Проверьте критерий на функции $f(x) = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$$ ~ він опуклий

$\forall x, y \in \operatorname{dom} f = \mathbb{R}^n_{++}$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i} + \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{y_1^2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{y_n^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \cdot , \cdot \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} - \frac{x_i - y_i}{y_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{y_i} + \frac{x_i - y_i}{y_i^2} \right) = \frac{y_i^2 - x_i y_i + x_i^2 - y_i x_i}{y_i^2 x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2 + x_i^2 - 2 x_i y_i}{y_i^2 x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - x_i)^2}{y_i^2 x_i} \geq 0$$

$$f(x) = \|x\|_2 \qquad \nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

$$\|x\|_2 \geq \|y\|_2 + \left\langle \frac{y}{\|y\|_2}, x - y \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{y}{\|y\|_2}, x - y \right\rangle = -\frac{\|y\|_2^2}{\|y\|_2} + \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|_2}$$

$$\|x\|_2 - \cancel{\|y\|_2} + \cancel{\|y\|_2} - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|_2} \geq 0$$

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Критерий выпуклости первого порядка

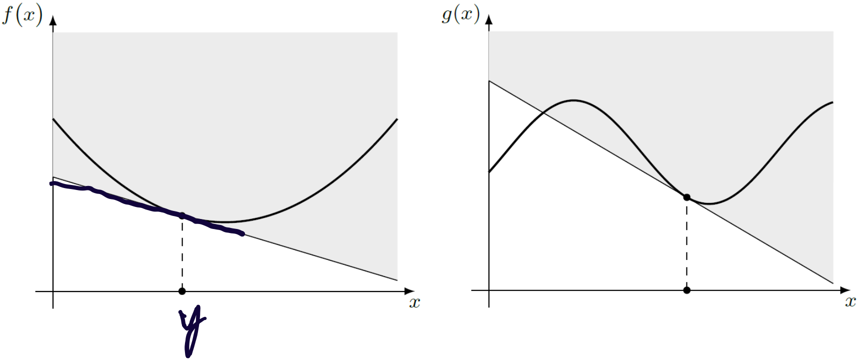


График функции $f(x)$ лежит выше касательной $f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ в любой точке dom f.

Оптимальность

Theorem (Дифференциальное условие оптимальности для выпуклой функции)

Пусть f — собственная выпуклая функция, dom f является открытым множеством, на котором f дифференцируемая, и $x^* \in \mathrm{dom}\, f$. Тогда x^* является глобальным минимумом функции f, если и только если $\nabla f(x^*) = 0$. Другими словами любая стационарная точка автоматически является глобальным минимумом функции f.

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

$$\nabla f(y) = 0 \Rightarrow y \text{ - gmol}$$

Критерий выпуклости второго порядка

$$f(x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x-y \rangle + \langle x-y, \nabla^2 f(y)(x-y) \rangle + O[\ldots]$$

$$\geq$$

Theorem (Критерий выпуклости 2-го порядка)

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дважды дифференцируема на dom f. Функция f является выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$\textit{билинейная форма } d^2 f(x) \textit{ неотрицательно определена}$$

для всех $x \in$ dom f.

В случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ условие имеет вид

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \quad x \in \mathrm{dom}\ f.$$

$$d^2 f(x)[h, h] = \langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle$$

Докажем по критериям

Example

- $f(x) = \exp(ax)$ выпукла для любого $a \in \mathbb{R}$,
- $f(x) = -\ln x$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$,
- $f(x) = x \ln x$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{+}$,
- $f(x) = -\sqrt{x}$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$
- $f(x) = x^p$ для $p \geq 1$ или $p \leq 0$ выпукла с $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}$ и вогнута для $0 \leq p \leq 1$.

$f(x) = x \ln x$ $\quad f'(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$

Докажем по критериям

Example

Пусть $A \in \mathbb{S}^n, b \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

Она является выпуклой в том и только в том случае, когда $A \succeq 0$.

Example

В частности, в $\mathbb{R}^2$ рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$.

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{2} + \langle b, x\rangle \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ A \in S^n$$

$$df(x) = \frac{\langle (A+A^T)x, dx\rangle}{2} + \langle b, dx\rangle$$

$$\langle \underbrace{Ax + b}_{\nabla f(x)}, dx\rangle$$

$$d\nabla f(x) = \underbrace{A}_{\nabla^2 f(x)} dx \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f(x) = A \succeq 0$$

$$\Updownarrow$$

f – выпуклая

$$\forall \lambda_i(A) \overset{\in \mathbb{R}}{\geq} 0 \iff \lambda_{min}(A) \geq 0$$

$$\lambda_{max}(A) = \qquad v^{k+1} = \frac{\langle Av^k, v^k\rangle}{\langle v^k, v^k\rangle} \Rightarrow v^{\infty}$$ – собств. вектор с max λ

$$A^{-1}$$

Докажем по критериям

Example

Функция

$$f(X) = -\ln det(X)$$

является выпуклой на $\mathbb{S}^n_{++}$.

Example

Функция

$$f(x) = \ln\left(e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_n}\right)$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$.

Докажем по критериям

Example

Функция

$$f(X) = -\ln det(X)$$

является выпуклой на $\mathbb{S}^n_{++}$.

Example

Функция

$$f(x) = \ln\left(e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_n}\right)$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$.

- $f(X) = -\ln\det X$

$$df(X) = -\frac{1}{\det X}\det X\langle X^{-1}, dX\rangle$$

$$\Rightarrow \nabla f(X) = -X^{-1}$$

$$d^2 f(X) = \langle X^{-1} dX_2 X^{-1}, dX_1\rangle$$

$$d^2 f(X)[H, H] \geq 0$$

- $f(x) = \ln(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_i = \left(\frac{e^{x_i}}{e^{x_1} + \dots + e^{x_n}}\right)_{i=\overline{1,n}} =$$

$$z = e^x \qquad = \frac{z}{\langle \vec{1}, z\rangle}$$

$$\nabla^2 f(x) = d\nabla f(x) = d\frac{z}{\langle \vec{1}, z\rangle} = \frac{dz\langle \vec{1}, z\rangle}{\langle \vec{1}, z\rangle^2} - \frac{z\, d\langle \vec{1}, z\rangle}{\langle \vec{1}, z\rangle^2} =$$

$$dz = de^x = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(z)dx$$

z

$\operatorname{diag}(z)\, dx$

$$= \frac{\operatorname{diag}(z)\langle \vec{1}, z\rangle \cancel{dx}}{\langle \vec{1}, z\rangle^2} - \frac{z\langle \vec{1}, dz\rangle}{\langle \vec{1}, z\rangle^2}$$

$$\vec{1}^T \operatorname{diag}(z) = z$$

$$d\nabla f(x) = \underbrace{\left[\frac{\operatorname{diag}(z)\langle\vec{1},z\rangle}{\langle\vec{1},z\rangle^2} - \frac{zz^T}{\langle\vec{1},z\rangle^2}\right]}_{\nabla^2 f(x)} dx$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$v^T \nabla^2 f(x) v = \left(v^T \operatorname{diag}(z) v \langle\vec{1},z\rangle - v^T z z^T v\right) / \underbrace{\langle\vec{1},z\rangle^2}_{>0}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^n v_i^2 z_i\right)\left(\sum_{i=1}^n z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n v_i z_i\right)^2\right] / \langle\vec{1},z\rangle^2 \geq 0$$

$$\langle a,b\rangle^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2 \qquad a_i = v_i\sqrt{z_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \sum_{i=1}^n b_i^2 \qquad b_i = \sqrt{z_i}$$

Неравенство Йенсена

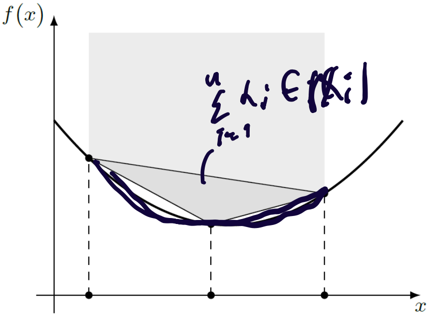
Theorem

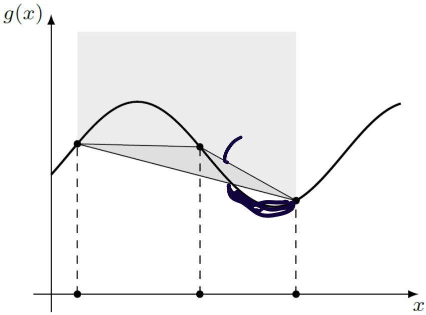
Пусть $f(x) : U \to \overline{\mathbb{R}}$ *— выпуклая функция. Пусть также* $x_1, \dots, x_k$ *— точки из* U *и коэффициенты* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *таковы, что* $\alpha_i \geq 0$ *и* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$*. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i). \tag{4}$$

Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда функция f *является аффинной или когда все точки* x_i *совпадают.*

Иллюстрация





Следствия

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно
$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Следствия

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно
$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

2. Неравенство Гельдера в частности Коши-Буняковского:
Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$ и чисел $p \geq 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ выполняется неравенство
$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5}$$

1. Для вектора чисел $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ верно

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

$-\ln x$ - вып

$\alpha_i = \frac{1}{n}$

x_i

2. Неравенство Гельдера в частности Коши-Буняковского:
Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^d$ и чисел $p \geq 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ выполняется неравенство

$$\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{5}$$

3. Для выпуклой функции f и случайной величины X верно,

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]. \leq \int f(x) p(x) dx$$

$\int p(x) x \, dx$

Операции, сохраняющие выпуклость

- Неотрицательная взвешенная сумма

Proposition

Пусть функции $f_1, ...f_m$ *выпуклы,* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}_+$ *Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x)$$

$c_i \geqslant 0$!!!

является выпуклой.

Операции, сохраняющие выпуклость

- Неотрицательная взвешенная сумма

Proposition

Пусть функции $f_1, \dots f_m$ *выпуклы,* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_+$ *Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x)$$

является выпуклой.

- Аффинная подстановка аргумента

Proposition

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *- выпуклая функция,* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$*, и* $b \in \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$g(x) = f(Ax + b),$$

$Ax+b$

с областью определения $dom\ g = \{x \,|\, Ax + b \in dom\ f\}$ *.*

Example

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^k$ и $c \in \mathbb{R}^k_+$. Функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \exp\left(\langle a_i, x\rangle + b_i\right)$$

является выпуклой.

$\exp(x)$ – вып

$\Downarrow$

$\exp(\langle a, x\rangle + b)$ – вып

$\sum c_i \exp(\langle a, x\rangle + b)$ – вып

Поточечный максимум

Пересекая выпуклые эпиграфы двух выпуклых функций f_1 и f_2, приходим к новому выпуклому множеству, которое является эпиграфом функции

$$f(x) = max\left\{f_1(x), f_2(x)\right\}.$$

Пересекая произвольное число выпуклых множеств, мы опять получаем выпуклое множество.

Theorem

Если функция двух аргументов $g(x, y)$ выпукла по x для любого $y \in Y$, то следующая функция

$$f(x) = \sup_{y \in Y} g(x, y)$$

так же выпукла по x.

y – любой

$\forall y$ $g(x,y)$ – вып

Example

Кусочно-линейная функция $\max_{m}$ $\langle a_i, x\rangle + b_i$ - вып по x

$$f(x) = max\left\{a_1^\top x + b_1, \ldots, a_m^\top x + b_m\right\},$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, выпукла на $\mathbb{R}^n$.

Example (Сумма r максимальных координат)

Обозначим i-ю максимальную координату вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $x_{[i]}$, т.е.

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \ldots \geq x_{[n]}$$

Тогда функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]},$$

то есть сумма r максимальных координат, есть выпуклая функция.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \cancel{x}[1] + \dots \cancel{x}[r]$$

$\max\limits_{\{a\}} \langle a, x \rangle$ — вып для фикс a $\Rightarrow$ вып

$$a = [\underbrace{1, 0, 1, \dots 0}_{r\text{ - значений } 1}] - \left(C_n^r\right)$$

Example (Расстояние до наиболее удаленной точки множества)

Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $||\cdot||$ - произвольная норма. Тогда расстояние от точки x до наиболее удаленной точки множества C

C - любое

$$f(x) = \sup_{y \in C} ||x - y||,$$

по x вып. для фикс y.

— выпуклая функция.

Example (Наибольшее собственное число)

Пусть X — симметрическая матрица. Тогда

$$f(X) = \lambda_{\max(X)}$$

по X вып

$$\lambda_{\max}(X) = \max_{\substack{||v||=1 \\ v \in \mathbb{R}^n}} \langle v, Xv \rangle$$

вып как max

является выпуклой.

Монотонная суперпозиция

$h \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Definition

Функция $h : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ неубывающая, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ покоординатно $x \leq y$ верно то, что

$$h(x) \leq h(y).$$

Аналогично обобщаются другие варианты монотонности.

Proposition

Пусть $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклые функции для $i = \overline{1, m}$, а $h : \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ - выпуклая неубывающая функция. Тогда композиция этих функции $g(x) = h(f_1(x), \dots, f_m(x))$ является выпуклой функцией.

Примеры на монотонность

Example

Пусть $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция

$$g(x) = e^{f(x)}$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$.

e - вып
- неубывающ

$e^{||x||}$

Example

Пусть $||\cdot||$ — произвольная норма. Тогда функция

$$g(x) = ||x||^p$$

является выпуклой на $\mathbb{R}^n$ при $p \geq 1$.

y^p - вып для $p \geq 1$
а неубыв

$f = x^2 \quad h = -x \Rightarrow h \circ f = -x^2 \Rightarrow$ неверно.

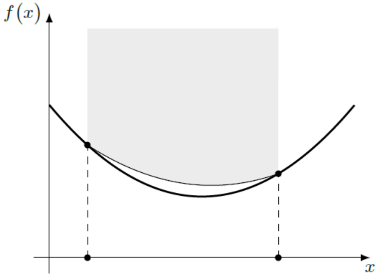
вместо y $\forall$ вып $||x||$

Сильная выпуклость

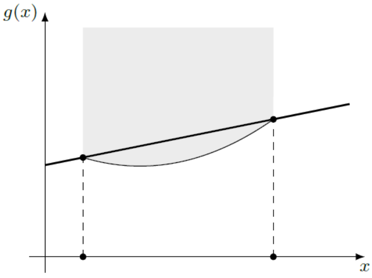
Definition

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ называется μ-сильно выпуклой, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \alpha(1-\alpha)\frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2.$$



(a) μ-сильно выпуклая парабола.



(b) Не сильно выпуклая прямая.

Критерии сильной выпуклости

Theorem

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дифференцируема всюду на dom f. Функция f является μ-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2}\|x - y\|_2^2, \quad x, y \in dom\ f.$$

Theorem

Пусть dom f является открытым множеством и собственная функция f дважды дифференцируема на dom f. Функция f является μ-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда dom f является выпуклым множеством и

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I, \quad \forall x \in dom\ f.$$

Гладкость

Definition

Пусть дана непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что данная функция имеет L-Липшицев градиент (говорить, что она является L-гладкой), если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2.$$

Theorem

Пусть дана L-гладкая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle| \leq \frac{L}{2}\|x - y\|_2^2.$$

Непрерывно дифференцируемая функция является μ-сильно выпуклой и L-гладкой:

$$\frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq \frac{L}{2}\|x - y\|_2^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

или эквивалентное утверждение для дважды непрерывно дифференцируемой функции

$$\mu I \preceq \nabla^2 f(x) \preceq LI, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

или же через спектр

$$\mu \leq \lambda_i(\nabla^2 f(x)) \leq L, \quad i = \overline{1, n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Иллюстрация

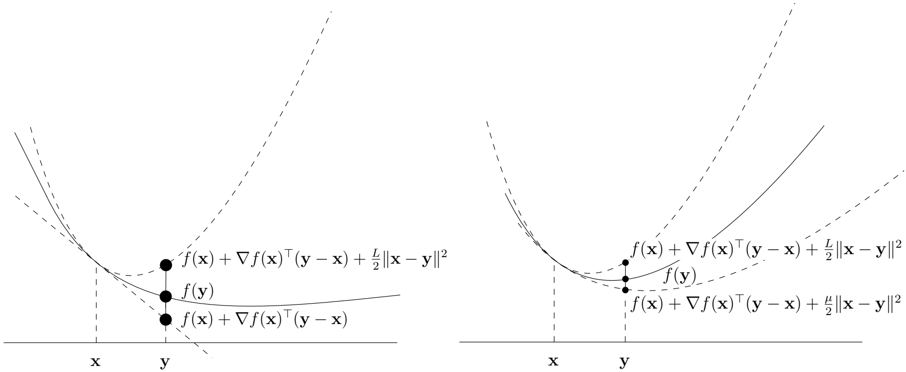


Рис.: Иллюстрация понятий L-гладкости и (μ-сильной) выпуклости

Definition

Для функции $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ множество $\mathfrak{L}_\beta$, определенное скаляром $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{L}_\beta = \{x \in U : f(x) \leq \beta\}$$

называется множеством подуровня β функции $f(x)$.

Proposition

Пусть U — линейное пространство и $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$ выпуклая функция. Тогда $\forall \beta \in \mathbb{R}$ множество подуровня $\mathfrak{L}_\beta$ выпукло.

Верное ли обратное?

Линии уровня