Методы оптимизации. Семинар 12. Конусы.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

20 ноября 2025г

Сопряженные конусы

K - конус $\Longleftrightarrow \forall x \in K, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$

Definition

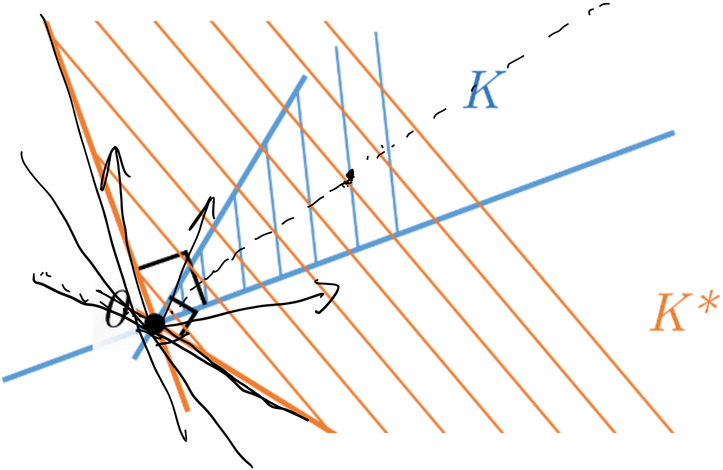
Пусть $K \subseteq U$ – конус в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда множество

$$K^* = \{y \in V \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

называется *сопряженным конусом* к K.

Сопряженный конус задаётся как множество нормалей таких касательных плоскостей к K, что K целиком лежит по одну сторону от них.

Геометрическая интерпретация



Примеры на конусы

{

Example (Конус Лоренца)

Дан конус $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \quad \|x\| \leq t\}$. Найдите K^*.

$K = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,,\ \|x\| \leq t\}$

K^* $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$: $\forall \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$ $\quad \underbrace{\langle x, y\rangle}_{\geq t\|y\|_*} + tv \geq 0$

$\forall x, t > 0,$

$\langle \frac{x}{t}, y\rangle \leq \|\frac{x}{t}\| \|y\|_* \leq \frac{t\|y\|_*}{t} = \|y\|_*$

$\langle -\frac{x}{t}, y\rangle - v \leq \|y\|_* - v \leq 0$

$vt + \langle x, y\rangle \geq 0$

$\{(y, v) : \|y\|_* \leq v\} \subseteq K^*$

$y : \|y\|_* > v \qquad \|y\|_* = \sup_{\|x\|=1} \langle x, y\rangle$

$\exists \bar{x}, \|\bar{x}\| = 1 \qquad \langle \bar{x}, y\rangle > v$

$\exists \begin{bmatrix} -\bar{x} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \langle -\bar{x}, y\rangle + v \cdot 1 < 0 \Rightarrow \notin K^*.$

$\{(y, v) \mid \|y\|_* \leq v\} = K^*.$

Example

Дан конус $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < 0\}$. Найдите K^*.

Theorem (Лемма Фаркаша)

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax < b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

Самосопряженный конус

Definition

Конус K называется самосопряженным, если

$$K^* = K.$$

Definition

Конус

$$K^{**} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K^*\}$$

называется *вторым сопряженным* к K.

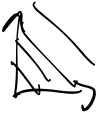
– невыпуклый конус

$\Rightarrow K^* = \{0\}$

$\Downarrow K^{**} = \mathbb{R}^n$

Example

Дан неотрицательный ортант $K = \mathbb{R}^n_+$. Найдите K^*. $= K$



$x \in \mathbb{R}^n_+ \quad x \geq 0$

$y: \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \quad \langle x, y \rangle \geq 0$

$= \sum x_i y_i$

$\Rightarrow y \geq 0$

Example

Дано множество симметричных положительно полуопределенных матриц $\mathbb{S}^n_+$. Найдите $(\mathbb{S}^n_+)^*$ в пространстве $\mathbb{S}^n$.

$Y \in S^n \quad \forall X \in S^n_+ \quad \langle Y, X \rangle \geq 0$

$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T$

v_i – собств

$\lambda_i \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} \langle Y, \lambda v_i v_i^T \rangle =$

$Tr\left(\sum_{i=1}^{n} Y \lambda v v_i^T\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{v_i^T Y v_i}_{\forall} \geq 0$

$\Rightarrow v_i^T Y v_i \geq 0 \Rightarrow Y \in S_n^+ .$

$S_n^+ \subseteq (S_n^+)^*$

• $Y \ \exists \bar{v} : \quad \bar{v}^T Y \bar{v} < 0$

$Tr(\bar{v}^T Y \bar{v}) = Tr(Y \underbrace{\bar{v} \bar{v}^T}_{\bar{X}}) =$

$\langle Y, \bar{X} \rangle \qquad \bar{X} \in S^n_+$

$\exists \bar{X} \in \mathbb{K} \ \langle Y, \bar{X} \rangle < 0 \Rightarrow \times$

$(S^n_+)^* = S^n_+ .$

Свойства сопряженных конусов

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}. = \bigcap_{x \in K}$$

- K^* всегда замкнутый и выпуклый конус.

$\underbrace{\{y : \langle y, x \rangle \geq 0\}}_{\text{полуплоскость}}$

выпукла и замк.

Свойства сопряженных конусов

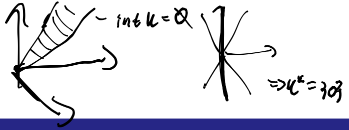
$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}.$$

- K^* всегда замкнутый и выпуклый конус.
- Для произвольного конуса K

$$K^{**} = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(K)).$$

$cl(conv(K)) = \mathbb{R}^n$

- Если K – выпуклый и замкнутый конус, то $K^{**} = K$.



Definition

Выпуклый замкнутый конус K называется правильным конусом, если

1. $\operatorname{int} K \neq \emptyset$,
2. $\forall x \in K : -x \in K \Rightarrow x = 0$ (конус не содержит прямых).

- Если $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, то K^* не содержит прямых.
- Если K не содержит прямых, то $\operatorname{int} K^* \neq \emptyset$.
- Если K – правильный конус, то K^* тоже правильный.

$\operatorname{int} K \neq \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{int} K^* \neq \emptyset$

нет прямых нет прямых

Доп свойства сопряженных конусов

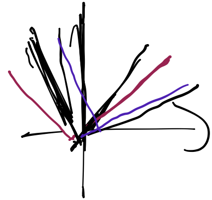
- Пусть $K_1, \dots, K_m$ конусы, тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \cup_{i=1}^{m} K_i^*.$$

$A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$

- Пусть $K_1, \dots, K_m$ конусы, а их пересечение имеет внутреннюю точку. Тогда

$$(\cup_{i=1}^{m} K_i)^* = \sum_{i=1}^{m} K_i^*.$$



Обобщенные неравенства

Правильные конусы задают частичный порядок на множестве V.

Definition

Пусть K — правильный конус.

- Элемент $x \in V$ *нестрого обобщенно меньше* элемента $y \in V$, если

$y \le_K x \quad x \le_K y \Rightarrow x = y$

$x \le_K x \Rightarrow 0 \in K$

$$x \le_K y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in K.$$

$x \le_K y \quad y \le_K z \Rightarrow \quad z - x = z - y + y - x \in K$

- Элемент $x \in V$ *строго обобщенно меньше* элемента $y \in V$, если

$$x <_K y \quad \Leftrightarrow y - x \in \operatorname{int} K.$$

Example

- Конус $\mathbb{R}^n_+$ задает частичный порядок покомпонентного сравнения векторов из $\mathbb{R}^n$.
- Конус $\mathbb{S}^n_+$ задаёт частичный порядок по положительной полуопределенности на симметричных матрицах $\mathbb{S}^n$.

$\mathbb{R}^n_+$ $\quad y \geq_K x \quad y - x \in \mathbb{R}^n_+$

$y_i \geq x_i$

$S^n_+ \quad Y - X \succeq 0$

Связь с сопряженными конусами

Proposition

Пусть K — правильный конус. Тогда выполнено

$\lambda \geq_{K^*} 0 \Leftrightarrow \lambda \in K^*$

- $x \leq_K y \Leftrightarrow \lambda^\top x \leq \lambda^\top y, \forall \lambda \geq_{K^*} 0;$
- $x <_K y \Leftrightarrow \lambda^\top x < \lambda^\top y, \forall \lambda \geq_{K^*} 0, \lambda \neq 0.$

Theorem (Обощение Леммы Фаркаша)

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax <_K b$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in K^* \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

$K = \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow K^* = \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow \lambda \geq 0$

$x \leq_K y \Rightarrow y - x \in K$

$\forall \lambda \in K^* \quad \langle y-x, \lambda \rangle \geq 0$

$\Downarrow$

$\langle y, \lambda \rangle \geq \langle x, \lambda \rangle$

$\Leftarrow \quad \forall \lambda \in K^* \quad \langle \underbrace{y-x}, \lambda \rangle \geq 0$

$y - x \in K^{**} = K.$

$Ax <_K b$ неразрешима

$\Leftrightarrow \quad b - Ax \notin \operatorname{int} K \ \forall x$

$\{ b - Ax \mid x \in R^n \}$ и $\operatorname{int} K$

$\cap = \emptyset$

$\exists \lambda \neq 0 \quad \sup_x \lambda^T (b - Ax) \leq \inf_z \lambda z \quad , \ z \in \operatorname{int} K$

$\circ \quad z \in \operatorname{int} K$

$\forall t > 0 \quad tz \in \operatorname{int} K$

$\circ \ \lambda \in K^* \quad \underbrace{\lambda z} \geq 0$

$\sup_{x \in R^n} \lambda^T (b - Ax) \leq 0$

$\Downarrow$

$\lambda^T A = 0 \quad \lambda^T b \leq 0$

$\Leftarrow$ $\bar{\lambda} \in K^* \setminus \{0\}$ $\quad \bar{\lambda}^T A = 0$

$\bar{\lambda}^T b \leq 0$

$Ax \leq_K b$ - разрешима

$b - Ax \in \operatorname{int} K \in K$

$\Rightarrow \lambda^T(b - Ax) \cancel{\geq} 0$ - по опр. K^*

$\lambda^T b \leq 0$

Обобщенная монотонность

Definition

Пусть K — правильный конус.

- Функция $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ называется K-неубывающей, если

$$x \le_K y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le f(y), \quad \forall x, y \in V.$$

- Функция $f : V \to \overline{R}$ называется K-~~неубывающей~~ возрастающей, если

$$x \le_K y, x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < f(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Example

Определите, при каких $W \in \mathbb{S}^n$ функция

$$f(X) = \mathrm{Tr}(WX)$$

является $\mathbb{S}^n_+$-неубывающей/возрастающей на $\mathbb{S}^n$.

$f(X) = Tr(WX)$

$X \preceq_{S_n^+} Y \qquad f(Y) - f(X) = Tr(W(\underbrace{Y-X}_{\in S_n^+}))$

$= Tr(W \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i v_i^T) =$

$\sum_{i=1}^{n} \underset{\geq 0}{\lambda_i} v_i^T W v_i \geq 0$

$\Rightarrow$ Если $W \in S_+^n \Rightarrow f$ - неубывающая

Если $W \in S_{++}^n$, $\Rightarrow f$ - возрастающая

$\exists i, \quad \lambda_i > 0$

$v_i^T W v_i > 0 \quad f(Y) - f(X) > 0$

Критерий монотонной функции

Theorem

Пусть функция $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *дифференцируемая, а* $dom\ f$ *выпуклое.*

- *Функция* f *является* K*-неубывающей если и только если*

$$\nabla f(x) \geq_{K^*} 0, \quad \forall x \in dom\ f.$$

- *Функция* f *является* K*-возрастающей если и только если*

$$\nabla f(x) >_{K^*} 0, \quad \forall x \in dom\ f.$$

Example

Функция $f(X) = \det X$ является $\mathbb{S}^n_+$-возрастающей на $\mathbb{S}^d_{++}$.

$\nabla f(X) = \det X \; X^{-1}$

$\nabla f(X) \succ_{(S^n_+)^*} 0$

$(S^n_+)^* = S^n_+$

$\nabla f(X) \in \operatorname{int} S^n_+ = S^n_{++}$ не конус

$X \in S^n_{++} \Rightarrow \det X \; X^{-1} \in S^n_{++} \Rightarrow$ возрастающая

Обобщенная выпуклость

Definition

Пусть V, U — конечномерные евклидовы пространства, а $K \subseteq U$ — правильный конус. Функция $f : V \to U$ называется K-выпуклой, если выполнено обобщенное неравенство Йенсена:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq_K \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in [0,1].$$

Example

Является ли функция

$$f(X) = X^2, X \in \mathbb{S}^n$$

$(X-Y)^2 \succeq 0$

$\mathbb{S}^d_+$-выпуклой?

$\alpha X^2 + (1-\alpha) Y^2 - (\alpha X + (1-\alpha) Y)^2 = (X-Y)^2 \cdot \alpha(1-\alpha) \succeq_K 0$

Свойства выпуклых функций

Proposition

Функция $f : V \to U$ является K-выпуклой если и только если

$$g_z(x) = \langle z, f(x) \rangle, \forall z \in K^*$$

является выпуклой по x в обычном смысле.

Proposition

Пусть $K \subseteq U$ — правильный конус, $h : V \to U$ — K-выпуклая, $g : U \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая K-неубывающая функция. Тогда $f(x) = g(h(x))$ выпуклая функция.

Example

Покажите, что функция

$Z \in K^* = S^n_+$

$\langle Zx, x \rangle = x^T Z x$ — выпукл

$$f(x) = \mathrm{Tr}(Wxx^\top), W \in \mathbb{S}^n_+$$

$= x^T W x$

$g(Y) = Tr(WY)$

$h(X) = xx^T$

$f_i(x): V \to U$

$$\min_{x \in V} f_0(x)$$
$$\textbf{s.t. } f_i(x) \le_{K_i} 0, \; i = 1, \ldots, n, \quad f_i(x) \in K_i$$
$$h_j(x) = 0, \; j = 1, \ldots, m,$$

где $\{K_i\}_{i=1}^n$ — набор ~~выпуклых функций~~ правильных конус.
Двойственная функция

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in V} \Big(f_0(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^\top f_i(x) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(x) \Big).$$

Чтобы выполнялась слабая двойственность требуем

$$\lambda_i \ge_{K_i^*} 0.$$

$g(\lambda, \nu) = \inf$ $\le f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\top f_i(x^*) + 0$

$$\underbrace{g(\lambda, \nu)}_{} \le f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^T f_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \nu_j \underbrace{h_j(x^*)}_{=0} \le \underbrace{f_0(x^*)}_{}$$

$-f_i(x^*) \in K$

$\lambda_i \in K^*$

$\lambda_i f_i(x^*) \le 0$

$$\max_{\lambda,\nu} g(\lambda,\nu),$$
$$\textbf{s.t. } \lambda_i \geq_{K_i^*} 0. \quad \lambda_i \in K_i^* \qquad (1)$$

Theorem (Условие Слейтера)

Пусть f_0 — выпуклая функция, $\{f_i\}_{i=1}^n$ — K_i-выпуклые функции и ограничения линейные $Ax = b$. Если существует такой $\overline{x} \in relint\ \cap_{i=1}^n dom\ f_i$, что

$$f_i(\overline{x}) <_{K_i} 0, i = \overline{1,n}, A\overline{x} = b, \qquad -f_i(\overline{x}) \in int K_i$$

то выполняется сильная двойственность.

Example

Постройте двойственную задачу для задачи SDP

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ & c^\top x \\
\text{s.t.} \ & P_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \succeq 0,
\end{aligned}
$$

$\ell_i \in S_+^n$

где $P_i \in \mathbb{S}^n$.

$U_i^* \in S_n^+ \Rightarrow \lambda \in S_n^+$

$\lambda \succeq 0$