Методы оптимизации. Семинар 5. Выпуклые множества.

Корнилов Никита Максимович

Московский физико-технический институт

2 октября 2025г

Классы множеств

Definition

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in [0, 1]$, точка $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2$ также принадлежит S.

Если мы берем любые две точки внутри множества и соединяем их отрезком, то весь этот отрезок лежит внутри множества.

Примеры выпуклых множеств

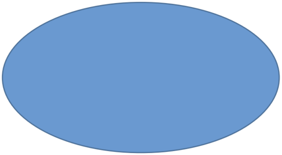

Рис.: Пример выпуклого множества.

Рис.: Пример не выпуклого множества.

Афинные множества

Definition

Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *афинным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in S$ и любого числа $\theta \in \mathbb{R}$, точка $\theta x_1 + (1 - \theta) x_2$ также принадлежит S.

Proposition

Любое афинное множество является выпуклым.

В афинном множестве, выбрав две точки, мы ожидаем, что не только отрезок между ними, но и вся прямая, соединяющая эти точки, принадлежит этому множеству, в отличие от определения выпуклости.

Докажем по определению

Example (Полуплоскость)

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда полуплоскость $\{x \mid a^T x \geq b\}$ выпукла.

Example (Гиперплоскость)

Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, тогда гиперплоскость $\{x \mid a^T x = b\}$ афинное множество.

Example (Шар по норме)

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Тогда шар $\overline{B}(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| \leq r\}$ является выпуклым множеством.

В частности, шары в матричных нормах $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$ (норма Фробениуса) и $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ (Спектральная норма) также являются выпуклыми.

Example (Сфера)

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, $r > 0$ и $c \in \mathbb{R}^n$. Является ли сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - c\| = r\}$ выпуклым множеством?

Докажем по определению

Example (Множество положительно полуопределенных матриц)

Множество всех положительно полуопределенных матриц размера $n \times n$, определяемое как

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T,\, z^T X z \geq 0,\, \forall z \in \mathbb{R}^n\},$$

является выпуклым множеством. Аналогично, множество положительно определенный матриц $\mathcal{S}_{++}^n$ тоже выпуклое.

Example

Является ли множество $M = \{x \in \mathbb{R}^2_{++} | x_1 x_2 \geq 1\}$ выпуклым?

Афинная функция

Definition

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется *афинной*, если найдутся $b \in \mathbb{R}^m$ и $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такие, что $f(x) = Ax + b$.

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.

Операции, сохраняющие выпуклость

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i\in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.

Операции, сохраняющие выпуклость:

1. **Пересечение:** Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ - семейство выпуклых множеств, тогда пересечение $\cap_{i \in I} S_i$ также является выпуклым.
2. **Линейная комбинациия:** Пусть S_1, S_2 — выпуклые множества и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, тогда линейная комбинация $c_1 S_1 + c_2 S_2 = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ также является выпуклым множеством.
3. **Взятие образа при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f(S)$ также является выпуклым множеством.
4. **Взятие прообраза при афинном преобразовании:** Пусть S — выпуклое множество, f — афинная функция, тогда $f^{-1}(S)$ также является выпуклым множеством.
5. **Декартово произведение:** Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — выпуклые множества, тогда декартово произведение $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ также выпукло.

Докажем через сохранение выпуклости

Example (Многогранник)

Многогранником называется множество точек в $\mathbb{R}^n$, задающееся системой линейных равенств и неравенств: $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Cx = d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ и $d \in \mathbb{R}^k$.

Example (Ограниченные полиномы)

Докажите, что множество $\{a \in \mathbb{R}^k | p(0) = 1, |p(t)| \leq 1 \forall t : \alpha \leq t \leq \beta\}$, где
$p(t) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_k t^{k-1}$, является выпуклым.

Докажем через афинные функции

Example

Докажите, что множество $S = \{x \,|\, \|Ax + b\| \leq c^T x + d\}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $c, d \in \mathbb{R}^n$, выпукло.

Докажем через афинные функции

Example (Гиперболический конус)

Пусть $P \in \mathcal{S}^n_+$ и $c \in \mathbb{R}^n$, тогда множество

$$K = \{x | x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$$

является выпуклым.

Доказательство.

Как мы уже знаем, множество $L = \{(x, t) | \|x\| \leq t\}$ является выпуклым.
Воспользуемся фактом, что $\forall P \in \mathcal{S}^n_+ \ \exists Q \in \mathcal{S}^n_+ : P = Q^2$, поэтому наше множество K переписывается следующим образом:
$K = \{x | \|Qx\| \leq c^T x\}$. Заметим, что $K = f^{-1}(L)$, где $f(x) = (Qx, c^T x)$ - афинная функция. Поэтому K выпукла как прообраз выпуклого множества при афинном преобразовании. $\square$

Докажем через афинные функции

Example

Рассмотрим множество $C = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n \succ B\}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Докажите, что C выпукло.

Доказательство.

Рассмотрим афинную функцию $f(x) = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n - B$, тогда
$C = f^{-1}(\mathcal{S}^n_{++})$. Поэтому C выпукла как прообраз выпуклого множества. □

Конусы

Definition

Множество C называется *конусом*, если для любых $c \in C$ и $\theta \geq 0$ точка θc также принадлежит C.

Если взять любую точку из конуса, то отрезок по направлению из 0 до этой точки можно сколь угодно продлить в этом конусе.
Примеры: любое линейное подпространство, прямая через начало координат, луч из начала координат.

Proposition

Условие: для любых $c_1, c_2 \in C$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ выполнено

$$\theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C,$$

равносильно тому, что множество является выпуклым конусом.

Свойства конусов

Любой конус обязательно содержит 0.

Proposition

Пересечение любого семейства (выпуклых) конусов сохраняет свойство быть (выпуклым) конусом.

Примеры конусов

Example

Множество $C = \{(x, t) \in R^{n+1} : \quad \|x\| \le t\}$ является выпуклым конусом.

Example

Множество положительно полуопределенных матриц $\mathcal{S}_+^n$ является выпуклым конусом

Example

Гиперплоскости $\{x \mid a^T x = 0\}$ и полуплоскости $\{x \mid a^T x \ge 0\}$, проходящие через 0, являются выпуклыми конусами. В частности, их пересечения тоже выпуклые конусы.

Выпуклая комбинация

Definition

Выпуклой комбинацией точек $x_1, \ldots, x_k$ называется любая точка вида

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k,$$

где $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \leq \theta_i \leq 1$ для всех i.

Proposition

Если S является выпуклым множеством и $x_1, \ldots, x_k \in S$, то любая выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_k$ также принадлежит S.

Доказательство

Доказательство.

Доказательство проведем индукцией по k.
База при $k = 2$ верна. Пусть утверждение верно для $k - 1$.
Переход: рассмотрим $x_1, \ldots, x_k \in S$ и пусть $\theta_1, \ldots, \theta_k$ таковы, что $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$ и $0 \leq \theta_i \leq 1$. Если $\theta_k = 1$, то утверждение очевидно. В противном случае перепишем комбинацию:

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k = (1 - \theta_k)\left(\frac{\theta_1}{1 - \theta_k} x_1 + \ldots + \frac{\theta_{k-1}}{1 - \theta_k} x_{k-1}\right) + \theta_k x_k,$$

где каждое слагаемое $\frac{\theta_i}{1-\theta_k}$ лежит в интервале $[0, 1]$, а их сумма равна 1. По предположению индукции и определению выпуклого множества, утверждение верно для k. □

Выпуклая оболочка

Definition

Выпуклой оболочкой множества S называется наименьшее по включению выпуклое множество T, содержащее S. То есть, это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S. Обычно выпуклую оболочку обозначают $\operatorname{conv} S$.

Выпуклая оболочка является выпуклым множеством.

Связи

Theorem

Выпуклая оболочка множества S равна множеству всех выпуклых комбинаций элементов S, то есть
$\text{conv}\, S = \cup_{k\in\mathbb{N}}\{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1, x_i \in S\}.$

Множество S является выпуклым тогда и только тогда, когда $S = \text{conv}\, S$.

Доказательство.

Пусть x — произвольная выпуклая комбинация элементов S. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение справа налево.

Доказательство теоремы

Доказательство.

Пусть x — произвольная выпуклая комбинация элементов S. Это значит, что она также является выпуклой комбинацией выпуклого множества $\operatorname{conv} S$, тк $S \subset \operatorname{conv} S$. Поэтому $x \in \operatorname{conv} S$, то есть выполняется вложение справа налево.

Докажем вложение в обратную сторону. Заметим, что $\cup_{k \in \mathbb{N}} \{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1, 0 \leq \theta_i \leq 1\}$ является выпуклым множеством, так как если x и y выпуклые комбинации S, то $\theta x + (1-\theta) y$ является выпуклой комбинацией большей размерности для $\theta \in [0,1]$. Поэтому вложение выполняется. Значит эти множества равны. □

Пример на выпуклую оболочку

Example

Чему равна $\operatorname{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$?

Пример на выпуклую оболочку

Example

Чему равна $\mathrm{conv}\{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$?

Для начала докажем вложение слева направо. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1$. Покажем, что след матрицы xx^T равен 1:

$$\mathrm{Tr}(xx^T) = \mathrm{Tr}(x^T x) = \|x\|_2^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим матрицу $A \in \{xx^T | x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$. По вышедоказанной теореме мы имеем, что $A = \theta_1 x_1 x_1^T + \theta_2 x_2 x_2^T + \ldots + \theta_n x_n x_n^T$, где $\theta_i \geq 0$, $\|x_i\|_2 = 1$ и $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = 1$. Поэтому, используя линейность следа, мы получаем $\mathrm{Tr}(A) = 1$.

Пример на выпуклую оболочку

Далее докажем вложение справа налево. Пусть $A \in \mathcal{S}_+^n$ и $\mathrm{Tr}(A) = 1$. Матрица A симметричная, значит у нее есть базис из собственных векторов. Применяя спектральное разложение мы получаем, что $A = S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S$, где S - ортогональная матрица. Заметим, что

$$Tr(S^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S) = Tr(SS^T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) =$$
$$Tr((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Из спектрального разложения мы делаем вывод, что $A = \lambda_1 s_1 s_1^T + \lambda_2 s_2 s_2^T + \ldots + \lambda_n s_n s_n^T$, где s_i - соответствующие нормированные собственные вектора. Это завершает доказательство.

Другие оболочки

Definition

Конической оболочкой множества C называется множество

$$\cup_{k=1}^{\infty}\{\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_k c_k | c_i \in C, \theta_i \geq 0, i = 1, \ldots, k\}.$$

Коническая оболочка является выпуклым конусом.

Definition

Аффинной оболочкой aff S множества S называется множество

$$\text{aff } S := \cup_{k=1}^{\infty}\{\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_k x_k | \theta_1 + \ldots \theta_k = 1, x_i \in S, i = 1, \ldots, k\}.$$

Аффинная оболочка aff S любого мн-ва S может быть представлена как сумма единственного линейного подпространства L_S и представителя $y \in \text{aff } S$, то есть aff $S = L_S + y$.

Для любого множества S можно определить его размерность как $\dim S = \dim \operatorname{aff} S = \dim L_S$.

Theorem

Пусть дано множество S и $\dim \operatorname{conv} S = d$. Тогда любой элемент $\operatorname{conv} S$ представляется как выпуклая комбинация не более чем $d + 1$ точки множества S.

Теоремы отделимости

Theorem (Теорема об отделимости)

Пусть S и T - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in S$ $a^T x - b \leq 0$ и $\forall y \in T$ $a^T y - b \geq 0$.

То есть любые два непересекающиеся выпуклых множества можно разделить гиперплоскостью.

Theorem (Теорема о строгой отделимости)

Пусть S и T - непересекающиеся непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, причем S - компакт, а T - замкнуто. Тогда найдутся $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$ такие, что $\sup_{x \in S} a^T x < b < \inf_{y \in T} a^T y$.

Лемма Фаркаша

Theorem

Рассмотрим систему строгих неравенств $Ax < b$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Она неразрешима тогда и только тогда, когда найдется $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $\lambda^T A = 0$, $\lambda \geq 0$ и $\lambda^T b \leq 0$.

Неразрешимость линейного неравенства от x, который лежит в m-мерном пространстве, сводится к разрешимости системы равенств и неравенств от переменной из n-мерного пространства.