Revisitando Conceitos Importantes

Processos Estocásticos, Estacionariedade e Ergodicidade

Wilmer Yecid Córdoba Camacho

Unicap

2025

Processo estocástico

- Só observamos uma série temporal $y_1, y_2, \ldots, y_T$
- Essa série é uma possível realização do processo estocástico gerador de dados
- Suponha que você queira gerar S sequências com infinitas observações. Teríamos então um conjunto com as seguintes sequências

$$(y_t^{(1)})_{t=-\infty}^{\infty}, (y_t^{(2)})_{t=-\infty}^{\infty}, \ldots, (y_t^{(S)})_{t=-\infty}^{\infty}$$

- Em cada instante t há S estados da natureza. Para um dado período t, por exemplo, teríamos

$$\{y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \ldots, y_t^{(S)}\}$$

- Se pudéssemos observar essas S realizações poderíamos estimar vários momentos da série

Processo estocástico

- Só observamos uma série temporal $y_1, y_2, ..., y_T$
- Podemos então definir processo estocástico

Sejam (Ω, ζ, P) um espaço de probabilidades e Z um conjunto de índices de números reais. Defina a função $y(\cdot, \cdot)$ por

$$y(\cdot, \cdot) : S \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

A sequência ordenada de variáveis aleatórias $\{y(\cdot, t), t \in \mathbb{Z}\}$ é chamada de processo estocástico

Descompactando a Definição Formal

- (Ω, ζ, P):
  - Ω: Conjunto de todos os resultados possíveis
  - ζ: Eventos que podemos medir
  - P: Probabilidade de cada evento
- $\mathbb{Z}$: Dias, meses, anos que observamos
- $y(\omega, t)$: Valor no cenário ω no tempo t

Tradução

O processo estocástico é a **coleção completa** de todas as possíveis séries temporais que poderiam ocorrer.

Por que essa definição é importante?

Ela nos permite falar sobre **propriedades estatísticas** mesmo observando apenas **uma realização**.

Processo estocástico

- Definição: $\{y(s,\cdot), s \in \Omega\}$ em $\mathbb{Z}$ são realizações do processo $\{y(\cdot,t), t \in \mathbb{Z}\}$
- A esperança não condicional de y_t é dada por

$$E(y_t) = p \lim_{s \to \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} y_t^{(s)}$$

- A esperança não depende das informações passadas. Ela depende da distribuição de Y.
- Se quisermos saber a esperança de uma série com T observações deveríamos ter que calcular T momentos. Mas isso não é possível já que só temos T dados.

Processo estocástico

- Precisamos impor mais restrições para calcular os momentos da série;
- Precisamos de ERGODICIDADE. Para definir ergodicidade preciso da definição de estacionariedade fraca que para ser definida, precisa da definição de autovariância.

Processo estocástico

Autocovariância e autocorrelação

- Dada uma particular realização de um processo estocástico, a função de autocovariância é definida como

$$\gamma_{jt} \equiv E\left[(y_t - \mu_t)(y_{t-j} - \mu_{t-j})\right] =$$

$$= p \lim_{S \to \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} (y_t^{(s)} - \mu_t)(y_{t-j}^{(s)} - \mu_{t-j})$$

Processo estocástico

Autocovariância e autocorrelação

- Exemplo: seja $y_t = \mu + \varepsilon_t$, sendo $\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2)$. Qual a autocovariância?
- Sabemos que

$$\gamma_{jt} \equiv E[(y_t - \mu_t)(y_{t-j} - \mu_{t-j})]$$

Mas nesse nosso caso

$$\mu_t = E(y_t) = \mu + E(\varepsilon_t) = \mu$$

$$\mu_{t-j} = E(y_{t-j}) = \mu + E(\varepsilon_{t-j}) = \mu$$

Então

$$\gamma_{jt} = E[(y_t - \mu_t)(y_{t-j} - \mu_{t-j})] =$$
$$= E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] =$$
$$= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j})$$

Processo estocástico

Autocovariância e autocorrelação

- Assim, a autocovariância é igual a σ^2, quando $j = 0$ (que é a própria variância de y_t). Então, se $j = 0$:

$$\gamma_{0t} = E[(y_t - \mu)(y_t - \mu)] = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-0}) = \sigma^2$$

- E é igual a 0 para todos os outros valores de j diferentes de 0, então se $j \neq 0$:

$$\gamma_{jt} = E[(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu)] = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$$

Processo estocástico

Autocovariância e autocorrelação

- Podemos, então encontrar a autocorrelação. Sabemos que a correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y pode ser definida como
$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$
- Na nossa notação de autocovariância podemos reescrever
$$corr(y_t, y_{t-j}) = \frac{cov(y_t, y_{t-j})}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-j}}}$$
- Como em geral assumimos que $\sigma_{y_t} = \sigma_{y_{t-j}}$, então,
$$\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-j}} = \sigma^2 = \gamma_{0t}.$$
- Usamos a notação γ_{jt} para representar $cov(y_t, y_{t-j})$ Portanto:
$$\rho_{jt} = \frac{\gamma_{jt}}{\gamma_{0t}}$$

Processo estocástico

Estacionariedade

- **Estacionariedade é um conceito fundamental para que possamos proceder inferências estatísticas;**
- **Processo fracamente estacionário de novo! Se nem esperança e nem autocovariância dependem do tempo (e o segundo momento não centrado é finito) o processo é fracamente estacionário**
- **Definição:** Um processo estocástico, ou a série temporal $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ é fracamente estacionário se
  1. $E|y_t|^2 < \infty$
  2. $E(y_t) = \mu$ para todo $t \in Z$
  3. $E(y_t - \mu)(y_{t-j} - \mu) = \gamma_j$
- Em geral escrevemos com uma variação dessas três condições:
  1. $E(y_t - \mu)^2 = E(y_{t-s} - \mu)^2 = \sigma_y^2$
  2. $E(y_t) = E(y_{t-s}) = \mu$
  3. $E(y$ [illegible] $- \mu)(y$ [illegible] $- \mu) = E(y$ [illegible] $- \mu)(y$ [illegible] $- \mu) = \gamma$ [illegible]

Ergodicidade

- Um processo fracamente estacionário é ergódico para o primeiro momento se

$$E(y^{(S)}) \equiv p \lim_{S\to\infty} \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_t^{(S)} = p \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^{(S)} \equiv E(y_t)$$

- Na prática, o processo é ergódico para o primeiro momento se

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty$$

Ruído Branco: Definição Formal

- Seja uma sequência $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ de variáveis aleatórias. Se
  - $E(\varepsilon_t) = 0$ para todo t
  - $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ para todo t
  - $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}) = 0$ para todo $j \neq 0$

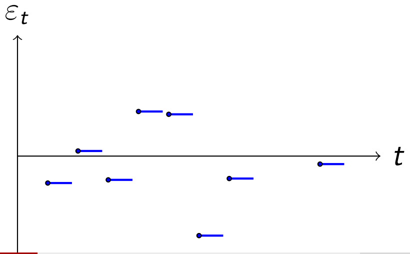
Dizemos que o processo é um RUÍDO BRANCO: $RB(0, \sigma^2)$

Características do Ruído Branco

Propriedades Fundamentais

- **Média zero constante**: $E(\varepsilon_t) = 0$
- **Variância constante**: $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$
- **Ausência de autocorrelação**: $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0$ para $j \neq 0$
- **Estacionariedade**: É um processo estritamente estacionário

Exemplo Visual



Tipos de Ruído Branco

Ruído Branco Gaussiano

- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$
- Independente e identicamente distribuído
- Mais forte: independência implica não-correlação
- Muito usado em modelos teóricos

Ruído Branco Genérico

- Apenas não-correlacionado
- Pode ter dependência não-linear
- Mais fraco: não-correlação não implica independência
- Mais realista em aplicações

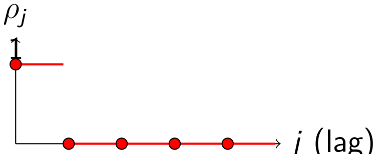
Importante

A definição básica exige apenas não-correlação, não independência!

Função de Autocorrelação (FAC) do Ruído Branco

- Para um processo $RB(0, \sigma^2)$:

$$\rho_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{se } j \neq 0 \end{cases}$$



FAC do Ruído Branco

Ruído Branco como "Bloco Básico de Construção"

- Muitos processos importantes são transformações de ruído branco:

Exemplos Clássicos

- **Passeio Aleatório**: $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
- **Processo MA(q)**: $y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$
- **Processo AR(p)**: $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$
- **Processo ARMA(p,q)**: Combinação de AR e MA

Papel Fundamental

O ruído branco representa a "inovação" ou "choque" não previsível nos modelos!

Testando se uma Série é Ruído Branco

- Como verificar se uma série observada pode ser considerada ruído branco?

1. **Teste de autocorrelação**: Estatística Q de Ljung-Box

$$Q = T(T+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j}$$

2. **Teste de heterocedasticidade**: Teste ARCH/LM
3. **Análise gráfica**: FAC e FACP dentro das bandas de confiança
4. **Teste de normalidade**: Jarque-Bera para verificar se é gaussiano

Critério prático

Se todos os $\hat{\rho}_j \approx 0$ e a série parece "imprevisível", provavelmente é ruído branco.

Aplicações Práticas do Ruído Branco

Em Econometria

- Termo de erro em modelos de regressão
- Testes de especificação
- Análise de resíduos
- Simulações Monte Carlo

Em Finanças

- Modelos de precificação de ativos
- Teoria do passeio aleatório
- Modelos de volatilidade (GARCH)
- Simulação de cenários

Exemplo: Análise de Resíduos

Se os resíduos de um modelo ARIMA não forem ruído branco, o modelo está mal especificado!

Ruído Branco vs. Passeio Aleatório

Ruído Branco

$$y_t = \varepsilon_t$$

- Média constante
- Variância constante
- Não correlacionado
- Estacionário
- Reverte à média

Passeio Aleatório

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Média constante
- Variância $\rightarrow \infty$
- Altamente correlacionado
- Não-estacionário
- Não reverte

Importante

Ambos usam ruído branco como inovação, mas comportam-se de forma completamente diferente!

Extensões do Conceito

Ruído Branco Multivariado

- $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{kt})'$
- $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = \mathbf{0}$
- $Cov[\boldsymbol{\varepsilon}_t] = \circ$
- $Cov[\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}] = \mathbf{0}$ para $j \neq 0$

Ruído Branco com Heterocedasticidade Condicional

- $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$, com $z_t \sim RB(0, 1)$
- σ_t^2 pode seguir processo ARCH/GARCH
- Importante em finanças (volatilidade variável no tempo)

Exemplo Numérico: Simulação

- Vamos simular um ruído branco gaussiano com $\sigma^2 = 1$

Tempo	1	2	3	4	5	$\cdots$
ε_t	0.324	-1.231	0.478	0.892	-0.645	$\cdots$

$$\text{Média amostral} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t \approx 0$$

$$\text{Variância amostral} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 \approx 1$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon})}{\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2} \approx 0$$

Resumo: Por que o Ruído Branco é importante?

- **Bloco fundamental** para construção de modelos mais complexos
- **Benchmark** para testes de especificação de modelos
- **Representa** a componente não previsível dos dados
- **Garante** a validade de procedimentos inferenciais
- **Base** para simulações e experimentos computacionais

Próximos Tópicos

- Processos MA (Média Móvel)
- Processos AR (Auto-regressivos)
- Processos ARMA
- Modelos de volatilidade (ARCH/GARCH)

Perguntas?