Modelo Epidemiológico del juego de mesa del Risk

"Estrategias de conquista basadas en el modelo SI (Susceptibles - Infectados)"

John Edison Bravo Buitrago
M.Sc. en Ciencias Matemáticas

XII Simposio de Investigaciones

15 de junio de 2023

Tabla de Contenido

Juego de mesa del Risk.

¿Como modelar el juego de mesa Risk?.

Figura: El tablero de la edición americana del juego Risk.

Reglas del juego Risk.

Consideraciones

- El atacante usa 3 dados rojos y el defensor usa 2 dados blancos. Dicho enfrentamiento termina hasta que alguno de los dos quede sin ejercito y en el cual se determina quien es el poseedor de dicho territorio.

Turn #	Number of armies		Number of dice rolled		Outcome of the dice		Number of losses	
	attacker	defender	attacker	defender	attacker	defender	attacker	defender
1	4	3	3	2	5, 4, 3	6, 3	1	1
2	3	2	3	2	5, 5, 2	5, 5	2	0
3	1	2	1	2	6	4, 3	0	1
4	1	1	1	1	5	6	1	0
5	0	1						

Reglas del juego Risk.

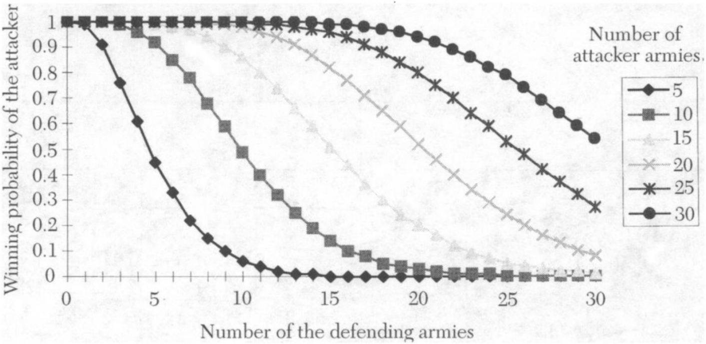
Consideraciones

- Los enfrentamientos y número de dados se definen según los ejércitos que se tengan

	Number of Armies		Number of Dice Rolled	
Case	Attacker	Defender	Attacker	Defender
I	1	1	1	1
II	2	1	2	1
III	≥ 3	1	3	1
IV	1	≥ 2	1	2
V	2	≥ 2	2	2
VI	≥ 3	≥ 2	3	2

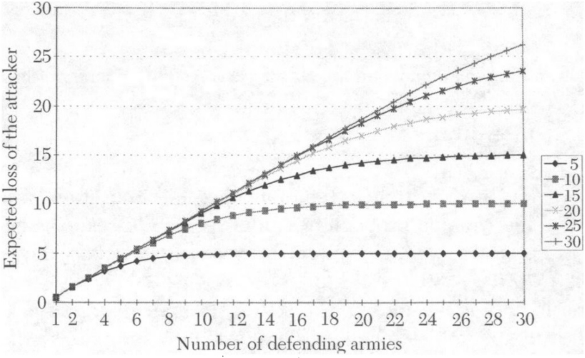
Resultados encontrados por Baris Tan.

Resultados numéricos.



Resultados encontrados por Baris Tan.

Resultados numéricos.

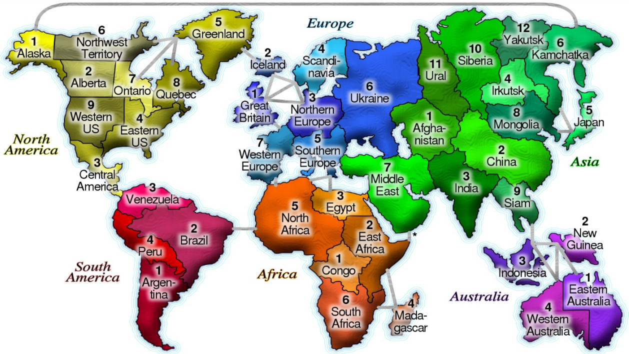


Caminata aleatoria del Risk.

Variante del juego y situación Problema.

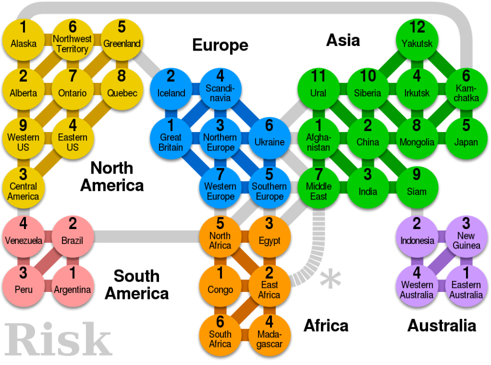
Caminata aleatoria del Risk.

Territorios del Risk.



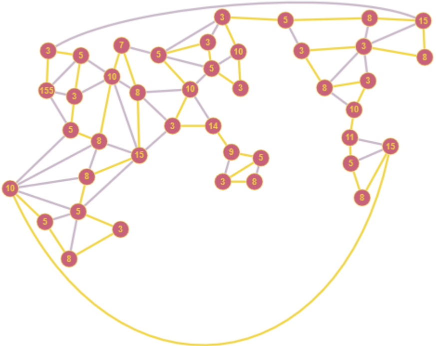
Caminata aleatoria del Risk.

El número máximo de territorios conquistados en un turno.



Grafo del juego de mesa Risk.

Circuitos Hamiltonianos.



Caminata aleatoria del Markov del Risk.

Continente	Grado Par	Grado Impar	Vértices por Continente
North America	7	2	**9**
South America	1	3	**4**
Europe	4	3	**7**
Africa	4	2	**6**
Asia	5	7	**12**
Australia	1	3	**4**
Total	**22**	**20**	**42**

Cadena de Markov del Risk.

Definición (Cadena de Markov del Risk de enfrentamientos)

Sea A el número de atacantes y D el número de defensores, entonces el espacio de estados:

$$S = \{(a,d) : 0 \leq a \leq A, \quad 0 \leq d \leq D\} \setminus \{(0,0)\},$$

con $Card(S) = AD + A + D$*, así, la cadena de Markov del Risk como:*

$$X_t = (A_t, D_t), \; 0 \leq A_t \leq A, \quad 0 \leq D_t \leq D,$$

con estado inicial $X_0 = (A, D)$*. Estados absorbentes* $X_m = (a_m, 0)$ *(Gana el atacante) o* $X_m = (0, d_m)$ *(Gana el defensor).*

Matriz de Transición.

Definición (Modelo de Markov del Risk)

Sea la matriz P de tamaño $R \times R$, aquí $R = A \cdot D + A + D + 1$, representada como

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde

1. *Q es la matriz de transitorios a transitorios de $(A \cdot D) \times (A \cdot D)$.*
2. *R es la matriz de transitorios a los absorbentes de $(A \cdot D) \times (A + D)$.*
3. *0 es la matriz nula de absorbentes a transitorios de $(A + D) \times (A \cdot D)$.*
4. *I es la identidad de absorbentes a absorbentes, de $(A + D) \times (A + D)$.*

Modelo de Markov del Risk.

Observación

Es fácil de observar que luego de $t+1$ enfrentamientos entre atacantes y defensores, la matriz de transición queda

$$P^{t+1} = \begin{pmatrix} Q^{t+1} & \left(\sum_{k=0}^{t} Q^k\right) R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q^k = (I-Q)^{-1}, \quad \sum_{k=0}^{t} Q^k = (I-Q^t)(I-Q)^{-1}.$$

Modelo de Markov del Risk.

Observación

Por lo cual, al calcular su distribución estacionaria vemos que:

$$
\begin{aligned}
\pi &= \lim_{t\to\infty} \pi P^{t+1}, \\
&= \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \pi_{A\cdot D} & \pi_{A+D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{t+1} & \left(\sum_{k=0}^{t} Q^{k}\right) R \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} \pi_{A\cdot D} & \pi_{A+D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (I-Q)^{-1} R \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \pi_{A\cdot D} (I-Q)^{-1} R + \pi_{A+D} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

Modelo de Markov del Risk.

Definición (Ejércitos sobrevivientes esperados)

Sea la matriz E de tamaño $(A + D) \times 2$, dada por

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & \dots & D \end{pmatrix},$$

a su vez, la matriz de armadas esperadas sobrevivientes de tamaño $(A \cdot D) \times 2$ dada como:

$$S_R := (I - Q)^{-1} RE = NRE.$$

Modelo de Markov del Risk.

Definición (Probabilidades de victoria del atacante y defensor)

Sea la matriz V de tamaño $(A+D)\times 2$, dada por

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

a su vez, la matriz de probabilidades de victoria de tamaño $(A\cdot D)\times 2$ dada como:

$$P_V := (I-Q)^{-1}RV = NRV,$$

la primera columna representa la probabilidad de victoria del atacante y la segunda columna la probabilidad de victoria del defensor.

Grafo del mapa del Risk.

Definición (Grafo del mapa de territorios del Risk)

Sea el grafo asociado al mapa del Risk definido como la dupla $G_M = (M, E_M)$, donde

$$M = \{1, 2, 3, \cdots, N\},$$

el conjunto de territorios del mapa y

$$E_M \subset Y_M = \{(i, j) : i, j \in M,\ i \neq j\},$$

el conjunto de aristas visto como subconjunto de todos los posibles enlaces únicos en $M \times M$.

Grafo del mapa del Risk.

Definición (La matriz de adyacencia del Risk)

La matriz de adyacencia como:

$$Q_M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ & q_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (i,j) \in E_M, \\ 0, & \text{si} \quad (i,j) \notin E_M. \end{cases}$$

Modelo epidemiológico del Risk.

Definición (Modelo epidemiológico discreto SI del Risk)

Sea $S(t) = (S_1(t), \cdots S_N(t))$*, el vector de nodos que no han sido conquistados en el tiempo t, y sea* $I(t) = (I_1(t), \cdots I_N(t))$*, el vector de nodos conquistados en el tiempo t. Donde* $||S(t)||_1 + ||I(t)||_1 = N$*. Por lo cual, la dinámica generada por dicha población es dada por:*

$$\begin{aligned} S(t+1) - S(t) &= -\left[\beta(t) \circ S(t)\right] \circ \left[Q \cdot I(t)\right], \\ I(t+1) - I(t) &= \quad \left[\beta(t) \circ S(t)\right] \circ \left[Q \cdot I(t)\right], \end{aligned}$$

donde $\circ$ *es el producto de Hadamard, Q es la matriz de adyacencia del mapa y* β *es el vector columna de* $N \times 1$*, de probabilidades de conquistar un nodo en el tiempo t. De condiciones iniciales* $||S(0)||_1 = N - 1$*,* $||I(0)||_1 = 1$*.*

Modelo epidemiológico del Risk.

Definición (Probabilidad de conquista del Risk)

Sea $\beta(t) = (\beta_1(t), \cdots, \beta_N(t))$ *, el vector de probabilidades, donde* $\beta_i(t)$ *representa la probabilidad de conquistar un nodo, estando en el nodo i, con* $1 \leq i \leq N$*, entre el tiempo t a* $t+1$*, caracterizado por la ecuación.*

$$\beta_i(t) = \frac{1}{N_A^t} \sum_{j=1}^{N_i^t} P(a_t^i, d_t^j),$$

donde, N_i^t *es el número de defensores vecinos del nodo atacante i,* $N_A^t = \sum_i N_i^t$*, es el número total de vecinos de todos los atacantes en el tiempo t,* a_t^i *es el número de atacantes en el nodo i y* d_t^j *es el número de defensores en el nodo j.*

Grafo del mapa del Risk.

Definición (La matriz de costos del Risk)

La matriz de adyacencia como:

$$C_M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & N \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = \begin{cases} d_j, & si \quad (i,j) \in E_M, \\ \\ 0, & si \quad (i,j) \notin E_M. \end{cases}$$

donde d_j representa el número de soldados del ejercito defensor en el nodo j.

Grafo del mapa del Risk.

Definición (Problema del viajante del comercio de costo mínimo)

Dado un conjunto de n ciudades, se busca encontrar el recorrido más corto que visite todas las ciudades una sola vez y con el costo mínimo.

Grafo del mapa del Risk.

Definición (Algoritmo del vecino más cercano)

El algoritmo del vecino más cercano es un método heurístico que resuelve el problema del viajante de comercio construyendo un recorrido mediante la selección en cada paso de la ciudad no visitada más cercana a la última ciudad visitada.

Ruta óptima de epidemia del Risk

¿Cual seria un algoritmo de ruta óptima para el Risk?

Bibliografía

- Baris Tan, “Markov Chains and the RISK Board Game", Mathematics Magazine, Vol. 70, No. 5 (Dec., 1997), pp. 349-357
- Robert Gallager, Stochastic Processes: Theory for Applications, Cambridge University Press (2013).
- David Taylor, THE MATHEMATICS OF GAMES, An Introduction to Probability, CRC Press, (2015).
- David Taylor, Games, Gambling and Probability, An Introduction to Mathematics, CRC Press, (2021).