Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Introducción

En este escrito se estudia la teoría de transporte óptimo de manera que se permita la adaptación del método de solución y análisis de un problema de transporte no normalizado unidimensional, esto a través del estudio y análisis del problema de transporte óptimo no normalizado desarrollado en [1]. Para problemas generales la teoría del transporte óptimo proporciona una función distancia en particular, llamada métrica de Wasserstein.

Dicha métrica asigna un valor númerico a dos medidas de probabilidad. Y esta es una forma compacta de la solución al problema de transporte, encontrar una aplicación de transporte entre espacios métricos de manera que una medida de probabilidad se el 'Push Forwad' del transporte con restecto a otra medida, que corresponda al infimo de una expresión integral.

Para el caso no normalizado se trabajan en espacios de medidas positivas, para el estudio y análisis se requiere una métrica, la métrica no normalizada de Wasserstein, esta permite una adaptación de la solución del problema de transporte no normalizado de manera que permite encontrar aproximaciones de la solución con los algoritmos presentes en 'Unnormalized Optimal Transport' [1] (Gangbo, Li y Puthawala, 2019, p. 11).
4

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Antecedentes

Como muchos objetos (y fenómenos) de investigación en matemáticas, nació la teoría del transporte óptimo varias veces. El primero de estos nacimientos ocurrió a fines del siglo XVIII, por mano del geómetra francés Gaspard Monge.

Antecedentes

Monge nació en 1746 bajo el antiguo régimen francés. Por sus sobresalientes habilidades, las autoridades militares lo toleraron en una escuela de entrenamiento militar de la que hubiera sido excluido por su modesto origen. Inventó la geometría descriptiva por su propia cuenta, y el poder del método era tan evidente que fue nombrado profesor en dicho programa a los 22 años, el entendimiento de que su teoría seguía siendo un secreto militar, por uso exclusivo de oficiales superiores. Más tarde fue uno de los científicos guerreros más ardientes de la Revolución Francesa, sirvió como profesor bajo varios regímenes, escapó de una sentencia de muerte, y se convirtió en uno de los amigos más cercanos de Napoleón. Él enseñó en Ecole Normale Superieure y Ecole Polytechnique en París. En mayor parte de su trabajo se dedicó a la geometría.

En 1781 publicó una de sus primeras obras famosas, 'Memoire sur la theorie des deblais et des remblais' [2] (un 'deblai' es una cantidad de material que se extrae de la tierra o de una mina; un 'remblai' es un material que se introduce en una nueva construcción). El problema considerado por Monge es la siguiente:
Suponga que tiene una cierta cantidad de material para extraer de la tierra y transporte a lugares donde debe incorporarse en una construcción. Los lugares donde se debe extraer el material y aquellos donde se debe transportara, son todos conocidos. Pero la asignación tiene que determinarse: ¿a qué destino debe uno envíar el material que se ha extraído en un lugar determinado?.

Antecedentes

Responder a la pregunta anterior es importante porque el transporte es costoso y se desea minimizar el costo total. Monge asumió qué el costo de transporte de una unidad de masa a lo largo de una cierta distancia fue dado por el producto de la masa por la distancia.

Antecedentes

Hay una calle Monge en París, y allí se puede encontrar una excelente panadería llamado *Le Boulanger de Monge*. Para reconocer esto e ilustrar como el problema de Monge puede reformularse en una perspectiva económica, en el texto de Cedric Villani [3] expresa y menciona el problema de la siguiente manera.

Antecedentes

Problem

Considerar una gran cantidad de panaderías, que producen panes, que deben transportarse cada mañana a cafés donde los consumidores los comerán. La cantidad de pan que se puede producir en cada panadería, y la cantidad que se consumirá en cada café se conoce de antemano, y puede ser modelado como medidas de probabilidad (hay una 'densidad de producción' y una 'densidad de consumo') en un espacio determinado (equipado con la métrica natural de tal manera que la distancia entre dos puntos es la longitud del más corto camino que los une).

El problema es encontrar la manera de a dónde debe ir cada unidad de pan, de tal manera que se minimice el costo total de transporte.
Entonces el problema de Monge es realmente la búsqueda de un acoplamiento óptimo; y para ser más precisos, estaba buscando un acoplamiento determinista óptimo.

Monge estudió el problema en tres dimensiones para una distribución continua de masa. Guiado por su hermosa intuición geométrica, hizo la importante observación de que el transporte debería ir a lo largo de líneas rectas que serían ortogonales a una familia de superficies. Este estudio lo condujo al descubrimiento de líneas de curvatura, un concepto que por sí mismo fue un gran contribución a la geometría de las superficies.
Sus ideas fueron desarrolladas por Charles Dupin y luego por Paul Appell.
Para los estándares matemáticos de hoy en día, todos estos argumentos fueron defectuosos, sin embargo, sin duda valdría buscar todos estos problemas con herramientas modernas.

El problema de Monge fue redescubierto por el matemático ruso Leonid Vitaliyevich Kantorovich. Nacido en 1912, Kantorovich fue un matemático muy talentoso quién hizo su reputación como investigador de primera clase a la edad de 18 años y obtuvo una posición de profesor joven como Monge. Trabajó en muchas áreas de las matemáticas, con un fuerte gusto por las aplicaciones en economía y más tarde en informática teórica.
En 1938 un laboratorio se verifico la solución de un cierto problema de optimización, que él reconoció que era representativo de toda una clase de problemas lineales que surgen en varias áreas de la economía[1]. Motivado así, desarrolló las herramientas de programación lineal, que luego se hizo prominente en economía.

[1] En los apendices se puede encontrar algunas aplicaciones en el área económica

Antecedentes

Escribió un tratado bien conocido en economía, y en 1975 recibió el premio Nobel de economía, conjuntamente con Tjalling Koopmans, 'Por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos'.
Sobre el problema del acoplamiento óptimo, Kantorovich declaró y demostró, por medio de herramientas analíticas para funcionales, un teorema de dualidad, eso jugaría un papel crucial más tarde. También ideó una noción conveniente de distancia entre medidas de probabilidad: la distancia entre dos medidas debe ser el costo del transporte óptimo de una medida de probabilidad a otra medida de probabilidad, si el costo se elige como la distancia entre las medidas. Esta distancia entre las medidas de probabilidad se llama la distancia Kantorovich – Rubinstein, y ha resultado ser particularmente flexible y útil.

Antecedentes

Solo a unos años después de sus principales resultados, Kantorovich hizo la conexión con el trabajo de Monge. El problema del acoplamiento óptimo desde entonces se llama el problema de Monge–Kantorovich.
A lo largo de la segunda mitad del siglo XX, técnicas de acoplamiento óptimo y variantes de la distancia Kantorovich–Rubinstein (a menudo son llamadas bajo el nombre de las distancias de Wasserstein u otras denominaciones) fueron utilizadas por estadísticos. El espacio 'ambiente' podría ser de dimensión finita o de dimensión infinita: por ejemplo, los acoplamientos óptimos dan nociones interesantes de distancia entre las medidas de probabilidad. Una contribución notable se debe de Hiroshi Tanaka, quién en los años setenta usó tales distancias para estudiar el comportamiento en el tiempo de una variante simple de la ecuación de Boltzmann. Por a mediados de los ochenta, especialistas en el tema, como Svetlozar Rachev o Ludger Ruschendorf, estaban en posesión de una gran biblioteca de ideas, herramientas, técnicas y aplicaciones relacionadas con problemas de transporte óptimo.

Antecedentes

Durante ese tiempo, muchos investigadores que trabajaban en desigualdades que involucran volúmenes o integrales utilizaron técnicas de reparametrización. Solo más tarde se entenderá que el transporte óptimo a menudo proporciona útiles reparametrizaciones.
A finales de los años ochenta, surgieron tres direcciones de investigación de forma independiente y casi simultáneamente, lo que reformó por completo la imagen del transporte óptimo.

Una dirección fue el trabajo de John Mather sobre sistemas dinámicos lagrangianos, las curvas que minimizan la acción son objetos importantes básicos en la teoría de sistemas dinámicos, la construcción de curvas cerradas que minimizan la acción y satisfacen ciertas propiedades cualitativas es un problema clásico. También finales de los años ochenta, Mather encontró conveniente estudiar no solo curvas que minimizan la acción, sino medidas estacionarias que minimizan la acción en el espacio de fase. Las medidas de Mather son una generalización de curvas que minimizan la acción, y resuelven un problema variacional qué en realidad es un problema de Monge-Kantorovich. Bajo algunas condiciones en el lagrangiano, Mather demostró un resultado célebre según el cuál (más o menos) ciertas medidas de minimización de acciones se concentran automáticamente en los gráficos de Lipschitz. Y como se encuentra en el escrito [3] (Villani, 2009, pp. 163-204), este problema está íntimamente relacionado con la construcción de un acoplamiento determinista óptimo.

Antecedentes

La segunda dirección de investigación provino del trabajo de Yann Brenier. Mientras estudio problemas en la mecánica de fluidos incompresible, Brenier necesitaba construir un operador que actuaría como la proyección en el conjunto de asignaciones de preservación de medidas en un conjunto abierto (en lenguaje probabilístico, las asignaciones de preservación de medidas son acoplamientos deterministas de la medida de Lebesgue consigo misma). Entendió que podía hacerlo introduciendo un acoplamiento óptimo: Si u es el mapa del cual se quiere calcular la proyección, introduzca un acoplamiento de la medida $\mathcal{L}$ de Lebesgue con $u_{\#}\mathcal{L}$. Este estudio reveló un inesperado vínculo entre el transporte óptimo y la mecánica de fluidos, y al mismo tiempo atrajo la atención de la comunidad qué trabajaba ecuaciones diferenciales parciales, señalando su relación con la teoría de la ecuación Monge–Ampere

Antecedentes

La tercera dirección de la investigación, ciertamente la más sorprendente, provino de las matemáticas externas. Mike Cullen era parte de un grupo de meteorólogos con un gusto matemático bien desarrollado, trabajando en ecuaciones semigeostróficas, utilizadas en meteorología para el modelado de frentes atmosféricos Cullen y sus colaboradores demostraron que cierto **cambio famoso de desconocido** debido a Hoskins podría ser reinterpretado en términos de un problema de acoplamiento óptimo, e identificaron la propiedad de minimización como una condición de estabilidad. Un resultado sorprendente de este trabajo fue qué del transporte óptimo podría surgir naturalmente ecuaciones diferenciales parciales que parecían no tener nada que ver con eso.

Antecedentes

Las tres contribuciones enfatizaron (en sus respectivos dominios) que se puede obtener información importante mediante una descripción cualitativa del transporte óptimo. Estas nuevas direcciones de investigación atrajo a varios matemáticos (entre los primeros, Luis Caffarelli, Craig Evans, Wilfrid Gangbo, Robert McCann), quienes trabajaron en una mejor descripción del estructura de transporte óptima y encontraron algunas otras aplicaciones. Un paso conceptual importante fue realizado por Felix Otto, quien descubrió un atractivo formalismo que en efecto introdujo un punto de vista diferencial en la teoría del transporte óptimo. Esto abrió el camino a una descripción más geométrica del espacio de medidas de probabilidad y transporte óptimo conectado a la teoría de ecuaciones de difusión, lo que lleva a una rica interacción de geometría, análisis funcional y ecuaciones diferenciales parciales.

Antecedentes

El transporte óptimo se ha convertido en una industria próspera, que involucra a muchos investigadores y muchas tendencias. Además de meteorología, mecánica de fluidos y ecuaciones de difusión, también se ha aplicado a temas tan diversos como el colapso de pilas de arena, la coincidencia de imágenes y el diseño de redes o antenas reflectoras. El libro de Cedric Villani, en Transporte óptimo [3], escrito entre 2000 y 2003, fue el primer intento de presentar una síntesis de la teoría moderna. Desde entonces, el campo ha crecido mucho más rápido de lo que se esperaba. *Transporte óptimo* Para una introducción general a la teoría de transporte óptimo, nosotros debemos consultar consultar el escrito de Cédric Villani [3] (Villani, 2008) o el escrito de Filippo Santambrogio notas de aula [4] (Santambrogio, 2015), y para una introducción práctica podemos consultar Alfred Galichon [5] (Galichon, 2019). Para una exposición más abstracta y más general, ver también la monografía de Luigi Ambrosio, Nicola Gigli y Giuseppe Savaré [6] (Ambrosio, Gigli y Savaré, 2008).

El problema de Monge - Kantorovich

Dadas dos medidas de probabilidad μ y ν en $\mathbb{R}^d$ y una función de costo $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$, el problema que fue introducido primero por Gaspard Monge [**MonG**] puede ser enunciado en términos actuales como sigue:

Problem

Encontrar $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *tal que*

$$\nu = T_{\#}\mu \qquad y \qquad \int c\,(x, T(x))d\mu(x) \quad \textit{es mínimo.}$$

La condición inicial, $\nu = T_{\#}\mu$, significa qué T debería transportar μ en ν, qué es, ν debería ser el 'push-forward' de μ por T:
Para cualquier ξ, $\int \xi(y)d\nu(y) = \int \xi\,(T(x))d\mu(x)$.

El problema de Monge - Kantorovich

Dependiendo de las medidas, puede no existir una aplicación qué transporte μ sobre ν, si μ es discreto y ν es uniforme no existe aplicación de transporte. Por lo tanto, la siguiente generalización fue propuesta por Leonid Kantorovich [**KanT**]: en lugar de buscar una aplicación de transporte,

Problem

Encontrar una medida $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ tal que

$$\int c(x, y) d\gamma(x, y) \quad es\ mínimo,$$

donde $\Gamma(\mu, \nu)$ es la colección de todas las aplicaciones de transporte entre μ y ν, es decir, la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ con marginales μ y ν.

El problema de Monge - Kantorovich

El problema anterior extiende el problema de Monge, pues para cualquier aplicación de transporte qué lleve μ en ν producimos una medida $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$, qué es $\gamma = (Id, T)_{\#}\, \mu$, es decir la medida γ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tal que

$$\forall \xi \in \mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right), \qquad \int \xi(x,y)d\gamma(x,y) = \int \xi\,(x, T(x))d\mu(x),$$

y el costo asociado del transporte es el mismo.

Theorem

Sean μ, ν dos medidas de probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^d$. Si la función de costo $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [o, +\infty)$ es 'lower' semicontinuo, entonces existe una solución a el problema de Monge-Kantorovich. Denotaremos a la colección de todas estas soluciones por $\Gamma_0(\mu, \nu)$.

En la siguiente demostración se utilizan teoremas y definiciones qué se presentan en *Apéndice B*.

Demostración.

Como μ y ν son regulares internas, la colección $\Gamma(\mu, \nu)$ es *tight* y así, cerrada, compacta por el teorema de *Prokhorov*. $\square$

Existe una forma de dualidad entre el problema de Monge-Kantorovich y el problema a continuación:

Problem

Encontrar $\psi, \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ *tal que*

$$\psi(x) + \varphi(y) \leq c(x, y) \qquad y \qquad \int \psi d\mu + \int \varphi d\nu \quad es\ máximo.$$

Este problema es normalmente llamado el problema dual, y el espacio de medidas de Radon con signo, donde el problema de Monge-Kantorovich es definido, es el dual de el espacio de funciones continuas qué anulan a infinito, donde este nuevo problema es definido.
El problema arriba puede ser relajado, con respecto al espacio de trabajo, como:

Problem

Encontrar $\psi \in L^1(\mu), \varphi \in L^1(\nu)$ *tal que*

$$\psi(x) + \varphi(y) \leq c(x,y) \qquad y \qquad \int \psi d\mu + \int \varphi d\nu \quad es\ máximo.$$

Notamos para la solución de el nuevo problema entre los pares (ψ, φ) qué sature las condiciones, y satisfaciendo

$$\varphi(y) = \inf_x \{c(x,y) - \psi(x)\} \qquad \text{y} \qquad \psi(x) = \inf_y \{c(x,y) - \varphi(y)\}.$$

Por las relaciones escribiremos $\varphi = \psi^c$ y $\psi = \varphi^c$, donde ψ^c, φ^c son llamadas las $c-$ *tranformada* de ψ, φ. Si ambas relaciones son verificadas, es decir, $\psi = (\psi^c)^c$, decimos que ψ es $c-$ *concava*.

Entonces el problema arriba es escrito, por bondad de las relaciones notadas anteriormente, como:

Problem

Encontrar $\psi \in L^1(\mu)$ *tal que*

$$\int \psi d\mu + \int \psi^c d\nu \quad es\ máximo.$$

Cualquier solución ψ es llamada un potencial de Kantorovich entre μ y ν.

Theorem

Sean μ, ν dos medidas de probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^d$. Si la función d costo $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ es 'lower' semicontinua y

$$\int \int c(x, y) d\mu(x) d\nu(y) < \infty,$$

entonces existe una aplicación de Borel $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qué es $c -$ concava y óptima para el problema anterior. Mas, resultando el máximo es igual al mínimo del problema de Monge-Kantorovich:

$$\min_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int c(x, y) d\gamma(x, y) = \max_{\varphi \in L^1(\mu)} \left\{ \int \varphi(x) d\mu(x) + \int \varphi^c(y) d\nu(y) \right\}.$$

Si $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ es óptimo, entonces $\psi(x) + \psi^c(y) = c(x, y)$ casi en todas partes para γ.

Para un prueba de este resultado, ver la monografía de Luigi Ambrosio.

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Solución al problema unidimensional

El problema unidimensional es, cuando μ, ν son medidas de probabilidad en la recta real, una solución al problema de *Monge-Kantorovich* puede ser calculada explicitamente, y a su vez es una solución al problema de *Monge*.

Solución al problema unidimensional

Si μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$, su distribución acumulativa es la aplicación $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definido por

$$F(x) := \mu((-\infty, x]). \tag{1}$$

Función no decreciente y continua a derecha.

Para tal aplicación, es posible definir una inversa generalizada F^{-1}, también llamada función cuantil, por configuración

$$F^{-1}(y) := \text{mín}\{x \in [-\infty, \infty]; y \leq F(x)\}. \tag{2}$$

El valor de F^{-1} da los diferentes cuantiles: como, $F^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ da el tercer cuartil.

Solución al problema unidimensional

Lemma

Si F es una distribución acumulativa, entonces $y \leq F(x)$ si y sólo si $F^{-1}(y) \leq x$.

Demostración.

El mínimo en la definición de F^{-1} es obtenido, $y \leq F(F^{-1}(y))$ para cualquier y. Así, si $F^{-1}(y) \leq x$ para algún x, resultando $y \leq F(F^{-1}(y)) \leq F(x)$, ya que F es no decreciente. Consecuentemente, si $y \leq F(x)$, entonces la definición de F^{-1} implica $F^{-1}(y) \leq x$. $\square$

Solución al problema unidimensional

Theorem (Proposición)

Sea $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una función no negativa y estrictamente convexa. Sean μ y ν medidas de probabilidad de Borel tal que

$$\int\int h(x-y)d\mu(x)d\nu(y) < \infty. \tag{3}$$

Si μ no tiene 'atom', y F y G las respectivas distribuciones acumulativas de μ y ν, entonces $T := G^{-1} \circ F$ resuelve el problema de Monge para el costo $c(x,y) = h(x-y)$. Si γ es el 'plan' de transporte inducido, es decir, $\gamma := (\mathbb{I}, T)_{\#}\mu$, entonces γ es óptimo para el problema de Monge-Kantorovich.

Solución al problema unidimensional

Demostración.

Notamos que T esta bien definida casi en todas partes para μ. Existe problema solamente cuando $F(x) = 0$, para $G^{-1} = -\infty$. Mas $F = 0$ solo en $(-\infty, a]$ para algún $a \in \mathbb{R}$, y, por la buena definición de F, tenemos $\mu((-\infty, a]) = F(a) = 0$.
Notamos también que, como F y G son no decrecientes, T debe ser no decreciente. Entonces, aplicando *lema 9* a la distribución acumulativa G

$$\begin{aligned} T^{-1}((-\infty, y]) &= \{x \in [-\infty, +\infty]; \quad G^{-1}(F(x)) \leq y\} && (4) \\ &= \{x \in [-\infty, +\infty]; \quad F(x) \leq G(y)\}. && (5) \end{aligned}$$

□

Demostración.

Este conjunto tiene que ser un intervalo, pues T es no decreciente. Siendo μ sin 'atom', F es creciente y continuo, además este intervalo deber ser cerrado. Así, si x es su supremo, debemos tener $F(x) = G(y)$, y por tanto

$$\mu(T^{-1}((-\infty, y])) = \mu((-\infty, x]) = F(x) = G(y) = \nu((-\infty, y]). \tag{6}$$

Con esto mostramos que $\nu = T_{\#}\mu$.

$\square$

Demostración.

Ahora probaremos que T es óptimo. Si $u \geq x$, entonces, como T y h' son no decrecientes, $h'(u - T(u)) \leq h'(u - T(x))$. Integrando entre x y algún $y \geq x$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_x^y h'(u - T(u))du &\leq \int_x^y h'(u - T(x))du && (7)\\ &\leq h(y - T(x)) - h(x - T(x)). && (8) \end{aligned}$$

Ahora, si $u \leq x$, entonces $h'(u - T(u)) \geq h'(u - T(x))$; integrando entre x y $y \leq x$, obteniendo

$$\int_x^y h'(u - T(u))du \leq -\int_y^x h'(u - T(x))du \leq h(y - T(x)) - h(x - T(x)). \tag{9}$$

$\square$

Demostración.

Si,

$$\psi(y) := \int_0^y h'(u - T(u))du, \tag{10}$$

entonces, en cualquier caso, $\psi(y) - \psi(x) \leq h(y - T(x)) - h(x - T(x))$, implique

$$\psi^c(T(x)) := \inf_y \{h(y - T(x)) - \psi(y)\} = h(x - T(x)) - \psi(x), \tag{11}$$

y esto produce que ψ sea $c-$concava. La *condición 3* asegura que x_0 y y_0 son tales que

$$\int h(x - y_0)d\mu(x) < \infty \quad \text{y} \quad \int h(x_0 - y)d\nu(y) < \infty. \tag{12}$$

$\square$

Demostración.

Siendo $h(x-y_0)-\psi^c(y_0)\geq\psi(x)$, y $h(x_0-T(x))-\psi(x_0)\geq\psi^c(T(x))$, y también $\psi(x)\geq-\psi^c(T(x))$, tenemos

$$h(x-y_0)-\psi^c(y_0)\geq\psi(x)\geq-h(x_0-T(x))+\psi(x_0) \tag{13}$$

y como $T_{\#}\mu=\nu$, esto implica $\psi\in L^1(\mu)$. Similarmente, $\psi^c\in L^1(\nu)$. Integrando la igualdad $\psi(x)+\psi^c(y)=h(x-T(x))$ con respecto a las medidas dadas

$$\int\psi(x)d\mu(x)+\int\psi^c(y)d(y)=\int c(x,T(x))d\mu(x). \tag{14}$$

□

Solución al problema unidimensional

Demostración.

Siendo $\psi(x) + \psi^c(y) \leq c(x, y)$ para todo par (x, y), si γ es cualquier otro 'plan' de transporte, el costo total de transporte es necesariamente mayor, y con esto T es óptimo. $\square$

6

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Métrica de Wasserstein

Si μ y ν son dos medidas de probabilidad en un espacio X, qué será o un espacio Euclideano o una variedad Riemanniana, entonces el valor mínimo para el problema de Monge-Kantorovich define una distancia, con respecto a la distancias de Wasserstein, cuando el costo es $C(x,y) = d(x,y)^p$ con d la distancia de X:

$$W_p(\mu,\nu) := \left(\min_{\gamma \in \Gamma(\mu,\nu)} \int d(x,y)^p d\gamma(x,y) \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Para qué la distancia de Wasserstein entre μ y ν sea finita, es suficiente qué ambos tengan momentos de p orden finitos.

Es decir, W_p es una distancia en el siguiente subconjunto del espacio $\mathcal{P}(X)$ de medidas de probabilidad *de Borel* en X:

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in P(X); \quad \forall x_0 \in X, \int d(x, x_0)^p d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Por la desigualdad triangular, la condición 'para todo x_0' puede ser reemplazado por 'existe al menos un x_0'.

Theorem (proposición)

Para cualquier $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(X)$,

$$W_1(\mu, \nu) := \inf_{\psi \in Lip_1(X)} \int \psi d(\mu - \nu).$$

Demostración.

Este resultado sigue del *Teorema 1.8*, para ψ 1$-$Lipschitz, entonces $-\psi(y) \leq d(x, y) - \psi(x)$ para cualquier x, y así $\psi^c = -\psi$. □

Métrica de Wasserstein

Theorem (proposición)

Una sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para la distancia de Wasserstein si y solo si converge estrechamente y también los momentos de p orden converge. Por lo tanto, si X es compacto, entonces $\mathcal{P}_p(X) = \mathcal{P}(X)$ es también compacto.

Demostración.

Consultar el libro de 'Optimal Transport' [3] (Villani, 2008). $\square$

Como se exhibe a continuación, el transporte óptimo se apoya en la esencia de las propiedades de la distancia de Wasserstein.

Theorem (proposición)

Sean $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Entonces, cualquier $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$ óptimo para el problema de Monge-Kantorovich induce una geodésica con velocidad constante $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$, definido por

$$\mu_t := [(1-t)X + tY]_{\#}\gamma,$$

donde $X(x,y) := x$ y $Y(x,y) := y$; que es,

$$\forall \xi \in \mathcal{C}_b, \qquad \int \xi(z) d\mu_t(z) = \int \xi\left((1-t)x + ty\right) d\gamma(x,y)$$

Consecuentemente, cualquier geodésica con velocidad constante entre μ_0 y μ_1 es iducido por un 'plan' de transporte óptimo $\gamma \in \Gamma(\mu, \nu)$. Por lo tanto, si μ_0 es absolutamente continua, existe una aplicación de transporte

Demostración.

Sea γ un 'plan' de transporte óptimo entre μ_0 y μ_1. Sea también $t \in [0,1]$, y definido $Z_t := (1-t)X + tY$. Entonces, $\mu_t := [Z_t]_{\#}\gamma$, y, para cualquier $s \in [0,1]$, $(Z_s, Z_t)_{\#}\gamma$ es un 'plan' de transporte óptimo entre μ_s y μ_t. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
W_p(\mu_s,\mu_t)^p &\leq \int |[(1-s)x+sy]-[(1-t)x+ty]|^p \, d\gamma(x,y) && (15)\\
&\leq |s-t|^p W_p(\mu_0,\mu_1)^p, && (16)
\end{aligned}
$$

que es $W_p(\mu_s,\mu_t) \leq |t-s| W_p(\mu_0,\mu_1)$. Si la desigualdad es estricta para el par (s,t), la desigualdad sería $W_p(\mu_{t-1},\mu_t) < W_p(\mu_0,\mu_1)$, que obviamente no es posible. Así

$$W_p(\mu_s,\mu_t) = |t-s| W_p(\mu_0,\mu_1).$$

$\square$

Demostración.

Consecuentemente, si $(\mu_t)_{t\in[0,1]}$ es una geodésica con velocidad constante, entonces, para cualquier $t \in [0,1]$, es posible yuxtaponer dos 'plans' de transporte óptimo para formar $\pi \in \Gamma(\mu_0, \mu_t, \mu_1)$ tal que $(X, Y)_{\#}\pi$ y $(Y, Z)_{\#}\pi$ son 'plans' de transporte óptimo entre μ_0, μ_t y, μ_t, μ_1 respectivamente. Donde

$$X(x,y,z) = x, \qquad Y(x,y,z) = y \qquad Z(x,y,z) = z.$$

Se utiliza para está prueba resultados de [3] (Villani, 2008, p. 62). Entonces,

$$\begin{aligned} W_p(\mu_0,\mu_1) &\leq \|X - Z\|_{L^p(\pi)} && (17)\\ &\leq \|X - Y\|_{L^p(\pi)} + \|Y - Z\|_{L^p(\pi)} && (18)\\ &\leq W_p(\mu_0,\mu_t) + W_p(\mu_t,\mu_1) && (19)\\ &\leq W_p(\mu_0,\mu_1). && (20)\end{aligned}$$

Demostración.

Así, todas las desigualdades son, en efecto, igualdades. Esto implica $(X, Z)_{\#}\pi$ es óptimo y existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $Y = (1 - \alpha)X + \alpha Z$ en $L^p(\pi)$. Pör tanto, $W_p(\mu_0, \mu_\alpha) = \alpha W_p(\mu_0, \mu_1)$. $\square$

Theorem (proposición)

Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$, con K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ o una variedad compacta. Entonces, para cualquier bar$\mu \in \mathcal{P}(K)$, existe un potencial de Kantorovich ψ entre μ y ν para el costo $c(x, y) = \frac{d(x,y)^p}{p}$ tal que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{W_2\left((q-\varepsilon)\mu + \varepsilon\bar{\mu}, \nu\right)^2 - W_2(\mu, \nu)^2}{2\varepsilon} = \int \psi d(\bar{\mu} - \mu)$$

Tenemos que el potencial ψ depende de $\bar{\mu}$.

Métrica de Wasserstein

Demostración.

Sea ψ_ε un potencialde Kantorovich entre $(1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\bar{\mu}$ y ν:

$$\int \psi_\varepsilon d[(1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\bar{\mu}] + \int \psi_\varepsilon^c d\nu = \frac{1}{2} W_2\left((1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\bar{\mu}, \nu\right)^2 .$$

Entonces,

$$\frac{W_2\left((1-\varepsilon)\mu + \varepsilon\bar{\mu}, \nu\right)^2 - W_2\left(\mu, \nu\right)^2}{2\varepsilon} \leq \int \psi_\varepsilon d(\bar{\mu} - \mu).$$

Siendo ψ_ε $c-$concava,

$$\psi(x) = \inf_y \left\{ \frac{1}{2} d(x,y)^2 - \psi_{c_{(y)}} \right\},$$

y consecuentemente, como K es acotado, ψ_ε es Lipschitz con una constante que no dependiente de ε; también lo es ψ_ε^c. Por el teorema de

Demostración.

Así, ψ es un potencial de Kantorovich entre μ y ν, y

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{W_2\left((1-\varepsilon)\mu+\varepsilon\bar{\mu},\nu\right)^2 - W_2\left(\mu,\nu\right)^2}{2\varepsilon} &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \int \psi_\varepsilon d(\bar{\mu}-\mu) && (25)\\
&\leq \int \psi d(\bar{\mu}-\mu). && (26)
\end{aligned}$$

De otra forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} W_2\left((1-\varepsilon)\mu+\varepsilon\bar{\mu},\nu\right)^2 &\geq \int \psi d\left((1-\varepsilon)\mu+\varepsilon\bar{\mu}\right) + \int \\
&\geq \frac{1}{2} W_2(\mu,\nu)^2 + \varepsilon \int \psi d(\bar{\mu} -
\end{aligned}$$

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{W_2\left((1-\varepsilon)\mu+\varepsilon\bar{\mu},\nu\right)^2 - W_2(\mu,\nu)^2}{2\varepsilon} \geq \int \psi d(\bar{\mu}-\mu).$$

Theorem (proposición)

Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(K)$*, con* K *un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^d$ *o* $K = \mathbb{T}^d$*, y asumimos* μ *es absolutamente continua.* ψ *es el (único) potencial de Kantorovich entre* μ *y* ν *para el costo* $c(x,y) = \frac{d(x,y)^p}{p}$*. Si* ζ *es un difeomorfismo de* K*, entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{W_2\left([\mathbb{I} + \varepsilon\zeta]_{\#}\mu, \nu\right)^2 - W_2(\mu,\nu)^2}{2\varepsilon} = \int \langle \nabla\psi | \zeta \rangle d\mu.$$

Demostración.

Como ψ es un potencial de Kantorovich entre μ y ν,

$$.$$

Siendo ψ Lipschitz (ya que K es compacto), es diferenciable casi en todas partes.
Así, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{W_2\left([\mathbb{I}+\varepsilon\zeta]_{\#}\mu,\nu\right)^2 - W_2(\mu,\nu)^2}{2\varepsilon} \geq \int \langle \nabla\psi(x) | \zeta(x)\rangle d\mu(x).$$

$\square$

Métrica de Wasserstein

Demostración.

Consecuentemente, $\mathbb{I} - \nabla\psi$ es una aplicación óptima entre μ y ν, y asu vez $(\mathbb{I} + \varepsilon\zeta.\mathbb{I} - \nabla\psi)_{\#}\,\mu$ es un 'plan' de transporte entre $[\mathbb{I} + \varepsilon\zeta]_{\#}\mu$ y ν, y en consecuencia

$$\begin{aligned} W_2\left([\mathbb{I} + \varepsilon\zeta]_{\#}\mu, \nu\right)^2 &\leq \int \left|[x + \varepsilon\zeta(x)] - [x - \nabla\psi(x)]\right|^2 d\mu(x) \\ &\leq \int \{|x - [x - \nabla\psi(x)]^2 + 2\varepsilon\langle\nabla\psi(x)|\zeta(x)\langle + \varepsilon^2|\zeta(x)| \\ &\leq W_2(\mu, \nu)^2 + \varepsilon \int \langle\nabla\psi(x)|\zeta(x)\rangle d\mu(x) + \varepsilon^2 \int |\zeta(x)| \end{aligned}$$

Resultando

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{W_2\left([\mathbb{I} + \varepsilon\zeta]_{\#}\mu, \nu\right)^2 - W_2(\mu, \nu)^2}{2\varepsilon} \leq \int \langle\nabla\psi(x)|\zeta(x)\rangle d\mu(x).$$

□

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Métrica no normalizada de Wasserstein

La métrica no normalizada de Wasserstein presentada en [1] (Gangbo, 2019) está bien definida.
Denotamos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a un dominio convexo y acotado con area $|\Omega|$, y el espacio de densidades normalizadas por

$$\mathcal{P}(\Omega) = \left\{ \mu \in L^1(\Omega); \quad \mu(x) > 0, \int \mu(x)dx = 1 \right\}.$$

Sea el espacio de densidades no normalizadas

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{\mu \in L^1(\Omega); \quad \mu(x) \geq 0\}.$$

Notamos que por definición, tenemos $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$. A continuación procedemos a definir el costo del transporte óptimo entre $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Métrica no normalizada de Wasserstein

Definition (Definición)

(OT no normalizado). Definimos la distancia no normalizada de Wasserstein $UW_p : \mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{M}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$UW_p(\mu_0, \mu_1)^p = \inf_{v,\mu,f} \left\{ \int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\|^p \mu(t,x) dx dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)|^p dt \cdot |\Omega|; \quad L(\mu, v, f) = 0 \right\}. \tag{33}$$

Con restricción dinámica, es decir, la *ecuación de continuidad* no normalizada[a],

$$\partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot (\mu(t,x) v(t,x)) = f(t), \qquad \mu(0,x) = \mu_0(x), \mu(1,x) = \mu_1(x). \tag{34}$$

[a] Donde L el operador; $\quad L(\mu, v, f) = \partial_t \mu + \nabla \cdot (\mu v) - f$.

Definition (Definición)

Donde $\|\cdot\|$ es la norma euclideana, $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$, y el infimo es tomado bajo todas funciones de densidad no normalizadas $\mu : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$, y campos de vectores *de Borel* $v : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ con condición de flujo cero $v(t,x) \cdot \eta(t,x) = 0$ en $(0,1) \times \partial\Omega$ con $\eta(t,x)$ el vector normal en la frontera de Ω en el punto (t,x), y una función fuente *de Borel* independiente espacial $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Métrica no normalizada de Wasserstein

La nueva L^p-métrica de Wasserstein propuesta tiene una interpretación física atractiva. El problema de optimización anterior, es decir, puede verse como un problema de dinámica de fluidos (variacional) en Coordenadas Eulerianas.

La definición no normalizada considera el movimiento, la creación y la eliminación de partículas. Durante este proceso, la masa total está cambiando dinámicamente de manera uniforme, controlado por el parámetro positivo α y una función espacialmente independiente $f(t)$.

Métrica no normalizada de Wasserstein

En el artículo [1] (Gangbo, Li y Puthawala, 2019) comentan que la independencia espacial de la función fuente introduce una muy importante propiedad natural y utiliza la misma ecuación de Hamilton-Jacobi que en el transporte óptimo clásico, esto les permite obtener un nuevo problema de Monge, una ecuación de Monge-Ampére y un problema de dualidad de Kantorovich.

Cuando $p = 1$, el problema no normalizado se convierte en:
$UW_1(\mu_0, \mu_1) =$

$$\inf_{v,f} \left\{ \int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\| \mu(t,x) dx dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)| dt \cdot |\Omega|; \quad \partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot (\mu(t,x) v(t,x)) = f(t) \right\}.$$

Donde la restricción (dinámica) tiene la condición
$\mu(0,x) = \mu_0(x)$ y $\mu(1,x) = \mu_1(x)$.

Métrica no normalizada de Wasserstein: Unidimensional

Cuando además $\Omega = [a, b]$, el problema no normalizado:

Problem (Problema no normalizado unidimensional)

$UW_1(\mu_0, \mu_1) =$

$$\inf_{v,f} \left\{ \int_0^1 \int_a^b \|v(t,x)\| \mu(t,x) dx dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)| dt \cdot |\Omega|; \quad \partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot (\mu(t,x) v(t,x)) = f(t) \right\}.$$

Donde la restricción (dinámica) tiene la condición $\mu(0,x) = \mu_0(x)$ *y* $\mu(1,x) = \mu_1(x)$*.*

68

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Versiones no normalizadas

En el trabajo 'Unnormalized optimal transport' [1] (Gangbo, Li y Puthawala, 2019) se propone una extensión del enfoque de la mecánica de fluidos computacional al problema de transferencia de masa Monge-Kantorovich.

Versiones no normalizadas

La extensión qué se presenta en [1] (Gangbo, Li y Puthawala, 2019) permite la transferencia óptima de elementos no normalizados y de masas desiguales. Se obtiene una familia $1-$ paramétrica de modificaciones simples de la formulación. Esto los lleva a una nueva ecuación de tipo Monge-Ampere y una nueva fórmula de dualidad de Kantorovich.
7

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Versiones no normalizadas

En dicho trabajo [1] se exhibe que se pueden resolver de manera eficiente. Esa solución al problema de transferencia de masa extendida a una métrica simple para calcular la distancia entre dos densidades no normalizadas.

Versiones no normalizadas

En este capítulo, estudiamos las propiedades del problema de transporte óptimo dinámico no normalizado, es decir, la métrica de Wasserstein no normalizada. El problema de Monge no normalizado, se derivan la ecuación de Monge-Ampere y las formulaciones de Kantorovich.

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Theorem

La L^1-métrica no normalizada de Wasserstein es dada por,
$UW_1(\mu_0, \mu_1) =$

$$\inf_m \left\{ \int_\Omega \|m(x)\| dx + \frac{1}{\alpha} \left| \int_\Omega \mu_{\mathbf{0}}(x) dx - \int_\Omega \mu_{\mathbf{1}}(x) dx \right| ; \mu_{\mathbf{1}} - \mu_{\mathbf{0}} + \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_\Omega \mu_{\mathbf{0}} dx - \int_\Omega \mu_{\mathbf{1}} dx \right) + \nabla \cdot m = 0 \right\}.$$

Donde m denota $m(x) = \int_0^1 v(t,x)\mu(t,x)dt.$

Problema de Monge

Demostración.

A continuación $\square$

Demostración. Parte I.

Por la desigualdad de Jensen [7] (Ziemer, 2017, p. 165), el mínimo es obtenido por una solución independiente del tiempo. Así que,

$$\int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\|\mu(t,x)dxdt \geq \int_\Omega \left\| \int_0^1 v(t,x)\mu(t,x)dt \right\| dx = \int_\Omega \|m(x)\|dx.$$

$\square$

Por la integración de las restricciones con respecto al tiempo, notamos que

$$\left\{\int_0^1\int_\Omega \|v(t,x)\|\mu(t,x)dxdt + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |f(t)|dt\cdot|\Omega|;\quad \partial_t\mu(t,x)+\nabla\cdot(\mu(t,x)v(t,x)) = f(t)\right\}$$

$$\int_0^1\int_\Omega \|v(t,x)\|\mu(t,x)dxdt + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |f(t)|dt\cdot|\Omega|;$$

$$\partial_t\mu(t,x)+\nabla\cdot(\mu(t,x)v(t,x)) = f(t)$$

Demostración. Parte II.

$$\int_0^1 \nabla \cdot (\mu(t,x)v(t,x))dt = \nabla \cdot m \tag{35}$$

$$\left\{ \int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\| \mu(t,x) dx dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)| dt \cdot |\Omega|; \quad \partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot (\mu(t,x)v(t,x)) = f(t) \right\}$$

$$\geq \quad \left\{ \int_\Omega \|m(x)\| dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)| dt \cdot |\Omega|; \quad \mu_1 - \mu_0 + \int_0^1 f dt + \nabla \cdot m = 0 \right\} \tag{36}$$

$\square$

$$\left\{ \int_{\Omega} \|m(x)\| dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)| dt \cdot |\Omega|; \quad \mu_1 - \mu_0 + \int_0^1 f dt + \nabla \cdot m = 0 \right\}$$

$$\geq \quad \left\{ \int_{\Omega} \|m(x)\| dx + \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \cdot |\Omega|; \quad \mu_1 - \mu_0 + \int_0^1 f dt + \nabla \cdot m = 0 \right\}. \quad (37)$$

Por integración con respecto al dominio espacial y temporal en la ecuación de continuidad no normalizada,

Demostración. Parte III.

Obtenemos

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega \mu_0(x)dx - \int_\Omega \mu_1(x)dx\right).$$

□

En un espacio unidimensional $\Omega = [0,1]$, la métrica no normalizada de Wasserstein tiene solución explicita:

$$
\begin{aligned}
UW_1(\mu_0,\mu_1) &= \int_\Omega \left| \int_0^x \mu_1(y)dy - \int_0^x \mu_0(y)dy - x\int_\Omega (\mu_1(z)-\mu_0(z))dz \right| dx \\
&+ \frac{1}{\alpha}\left(\int_\Omega \mu_1(z)dz - \int_\Omega \mu_0(z)dz \right).
\end{aligned}
$$

8

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Theorem

La métrica no normalizada de Wasserstein 33 esta bien definida como función en $\mathcal{M}(\Omega)$. Además, el minimizador $(v(t,x), \mu(t,x), f(t))$ para el problema **(1)** *satisface*

$$v(t,x) = \nabla\Phi(t,x), \qquad f(t) = \alpha \int_\Omega \Phi(t,x)dx,$$

Theorem

y

$$\begin{cases} \partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot (\mu(t,x)\nabla\Phi(t,x)) = \alpha \int_\Omega \Phi(t,x)dx \\ \partial_t \Phi(t,x) + \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \leq 0 \\ \mu(0,x) = \mu_0(x), \quad \mu(1,x) = \mu_1(x). \end{cases} \tag{38}$$

En particular, si $\mu(t,x) > 0$, entonces

$$\partial_t \Phi(t,x) + \frac{1}{2}\|\Phi(t,x)\|^2 = 0. \tag{39}$$

Notamos que el sistema anterior implica

$$\alpha \int_0^1 \int_\Omega \Phi(t,x) dxdt = \int_\Omega \mu_1(y) dy - \int_\Omega \mu_0(y) dy.$$

Esto quiere decir, que a diferencia del transporte óptimo clásico, no sólo se resuelve para $\nabla\Phi$ único, también para Φ único.

Demostración.

Denotamos $m(t,x) = \mu(t,x)v(t,x)$ y

$$F(m,\mu) = \begin{cases} \frac{\|m\|^2}{\mu}, & si \quad \mu > 0; \\ 0, & si \quad \mu = 0, m = 0; \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces el problema variacional no normalizado puede ser reformulado como

$\square$

Demostración.

$UW_2(\mu_0, \mu_1)^2 =$

$$\inf_{m,\mu,f} \left\{ \int_0^1 \int_\Omega F(m(t,x), \mu(t,x)) dxdt + \frac{1}{\alpha} \int_0^1 |f(t)|^2 dt; \partial_t \mu + \nabla \cdot (\mu v) = f, \right.$$

$\square$

93

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Dualidad de Kantorovich

Demostración.

Primero demostramos que este problema variacional reformulado está bien definido. En otras palabras, si existe una ruta factible para la restricción dinámica. Construimos un camino factible μ_t conectando cualquier $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$. La prueba se divide en pasos:

$\square$

Dualidad de Kantorovich

- Construya una ruta de densidad con $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, existe una ruta factible que conecta μ_0 y una medida uniforme con masa total $\int_\Omega \mu_0 dx$. En este caso, la ruta de densidad está normalizada (clásico) OT entre dos densidades. Establecemos $f(t) = 0$ cuando $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, siempre hay existe tal camino.
- Construya una ruta de densidad $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, existe un camino factible que conecta un medida uniforme con masa total $\int_\Omega \mu_0 dx$ y una medida uniforme con masa total $\int_\Omega \mu_1 dx$. En este caso, dejamos que el flujo de transporte $m(t, x) = 0$, y elija $f(t) = 3\left(\int_\Omega \mu_1 dx - \int_\Omega \mu_0 dx\right)$.
- Construya una ruta de densidad $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, existe un camino factible que conecta un medida uniforme con masa total $\int_\Omega \mu_1 dx$ y μ_1. En este caso, establecemos $f(t) = 0$. Siguiendo en el OT clásico, encontramos un camino factible.

Combinando todos los pasos, el camino propuesto es factible con un funcional de costo finito. A continuación, exhibiremos que el problema tiene un minimizador. Como el conjunto de restricciones no está vacío, entonces es clásico mostrar que el costo funcional $F(m, \mu) + \frac{1}{\alpha} f(t)^2$ es convexo y es semicontinuo inferior, con la restricción es lineal. Entonces el problema variacional en el sistema del inicio de la página anterior también tiene un minimizador.

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Dualidad de Kantorovich

Demostración. Parte I.

Aplicamos la técnica de un multiplicador de Lagrange para encontrar el minimizador. Denotamos (t, x) como el multiplicador (variable dual) con

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(m, \mu, \Phi) &= \int_0^1 \int_\Omega \left(\frac{\|m(t,x)\|^2}{2\mu(t,x)} + \Phi(t,x)\left(\partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot m(t,x) - f(t\right.\right. \\ &+ \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 f(t)^2 dt.\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(m, \mu, \Phi) = \int_0^1 \int_\Omega \left(\frac{\|m(t,x)\|^2}{2\mu(t,x)} + \Phi(t,x)\left(\partial_t \mu(t,x) + \nabla \cdot m(t,x) - f(t)\right)\right) dxdt + \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

$\square$

Demostración. Parte II.

Suponiendo que $\delta_m \mathcal{L} = 0$, $\delta_\mu \mathcal{L} \geq 0$, $\delta_\Phi \mathcal{L} = 0$, derivamos la propiedad del minimizador de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{m(t,x)}{\mu(t,x)} = \nabla \Phi(t,x) \\ -\frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)^2} - \partial_t \Phi(t,x) \geq 0 \\ f(t) = \alpha \int_\Omega \Phi(t,x) dx. \end{cases} \tag{40}$$

□

Demostración. Parte III.

Así, si $\mu > 0$, obtenemos $\delta_\mu \mathcal{L} = 0$. $\square$

Demostración.

Lo que da igualdad en la segunda fórmula del sistema anterior. Usando que $\frac{m(t,x)}{\mu(t,x)} = \nabla\Phi(t,x)$, probamos el resultado. En este caso, la no negatividad, la simetría, la desigualdad triangular de la métrica se derivan directamente de la definición. $\square$

9

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Monge

Theorem (Problema de Monge no normalizado)

$$UW_2(\mu_0,\mu_1)^2 = \inf_{M,f(t)} \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \mu_0(x)dx + \alpha \int_0^1 f(t)^2 dt$$
$$+ \int_0^1 \int_0^t f(s) \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 Det\left(s\nabla M(x) + (1-s)\mathbb{I}\right) d$$

$$+ \int_0^1 \int_0^t f(s) \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 Det\left(s\nabla M(x) + (1-s)\mathbb{I}\right) dxdsdt,$$

donde el ínfimo es entre todo uno a uno, aplicando funciones invertibles $M:\Omega\to\Omega$ y una función fuente $f:\Omega\to\mathbb{R}$, tal que la relación no normalizada push forward,

$$\mu(1,M(x))Det(\nabla M(x)) = \mu(0,x) + \int_0^1 f(t) Det\left(t\nabla M(x) + (1-t)\mathbb{I}\right) dt.$$

Demostración.

Derivamos de la formulación de Lagrange del no normalizado transporte óptimo. $\square$

Demostración. Parte I.

Consideraremos una aplicación $X_t(x)$ con campo de vectores $v(t, X_t(x))$, es decir,

$$\frac{d}{dt}X_t(x) = v(t, X_t(x)), \qquad X_0(x) = x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\|^2 \mu(t,x)dxdt &= \int_0^1 \int_\Omega \|v(t, X_t(x))\|^2 \mu(t, X_t(x))dX_t(x)dt \\ &= \int_0^1 \int_\Omega \|\frac{d}{dt}X_t(x)\|^2 \mu(t, X_t(x))\mathrm{Det}\left(\nabla X_t(x)\right) dxdt.\end{aligned}$$

$\square$

Demostración. Parte II.

La siguiente ecuación diferencial para $J(t,x) := \mu(t, X_t(x))\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x))$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} J(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mu(t, X_t(x))\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x))\right\} \\
&= \left(\partial_t \mu(t, X_t(x)) + \nabla_X \mu(t, X_t(x)) \frac{d}{dt} X_t(x)\right) \mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x)) \\
&\quad + \mu(t, X_t(x)) \partial_t \mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x)) \\
&= \left\{\partial_t \mu + \nabla \mu \cdot v + \nabla v \cdot \mu\right\}(t, X_t(x))\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x)) \\
&= \left\{\partial_t \mu + \nabla\,(\mu v)\right\}(t, X_t(x))\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x)) \\
&= f(t)\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x))
\end{aligned}$$

en la cuarta igualdad usamos la identidad de Jacobi, es decir,

$$\partial_t \mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x)) = \nabla v(t, X_t(x))\mathrm{Det}\,(\nabla X_t(x))\,. \tag{41}$$

Demostración. Parte III.

Notamos que,

$$J(t,x) = J(0,x) + \int_0^t \frac{d}{ds} J(s,x) ds.$$

Siendo $X_0(x) = x$ y $\nabla X_0(x) = \mathbb{I}$, resulta $J(0,x) = \mu(0,x)$, y

$$\mu(t, X_t(x))\mathrm{Det}\left(\nabla X_t(x)\right) = \mu(0,x) + \int_0^t f(s)\mathrm{Det}\left(\nabla X_s(x)\right) ds,$$

Siendo el minimizador en coordenadas Eulerianas aquel qué satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \Phi(t,x) + \frac{1}{2}\|\nabla \Phi(t,x)\|^2 = 0,$$

□

Monge

Demostración.

y $\frac{d}{dt}X_t(x) = \nabla\Phi(t, X_t(x))$, implica naturalmente $\frac{d^2}{dt^2}X_t(x) = 0$. Resultando

$$\frac{d}{dt}X_t(x) = v(t, X_t(x)) = M(x) - x,$$

así $X_t(x) = (1-t)x + tM(x)$ y
$\mathrm{Det}\left(\nabla X_t(x)\right) = \mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I} + t\nabla M(x)\right).$
$\int_0^1 \int_\Omega \|v(t,x)\|^2 \mu(t,x) dx dt =$ $\square$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_\Omega \|\frac{d}{dt}X_t(x)\|^2 J(t,x)dxdt \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \left(J(0,x) + \int_0^t \frac{d}{ds}J(s,x)ds \right) dxdt \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 J(0,x)dxdt + \int_0^1 \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \int_0^t \frac{d}{ds}J(s,x)dsdxdt \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \mu(0,x)dxdt + \int_0^1 \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \int_0^t f(s)\mathrm{Det}\left(\nabla X_s(x)\right) dsdxdt \\
&= \int_0^1 dt \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \mu(0,x)dx + \int_0^1 \int_\Omega \int_0^t \|M(x)-x\|^2 f(s)\mathrm{Det}\left(\nabla X_s(x)\right) dsdxdt \\
&= \int_\Omega \|M(x)-x\|^2 \mu(0,x)dx + \int_0^1 \int_\Omega \int_0^t \|M(x)-x\|^2 f(s)\mathrm{Det}\left((1-s)\mathbb{I} + s\nabla M(x)\right) dsdxdt
\end{aligned}
$$

$\square$

10

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Theorem (Ecuación de Monge-Ampére no normalizada)

Un función aplicando optimamente $M(x) = \nabla\Psi(x)$ satisface la siguiente ecuación no normalizada de Monge-Ampére

$$\mu(1, \nabla\Psi(x))Det\left(\nabla^2\Psi(x)\right) - \mu(0, x) =$$

$$\alpha \int_0^1 Det\left(t\nabla^2\Psi(x) + (1-t)\mathbb{I}\right) \int_\Omega \left(\Psi(y) - \frac{\|y\|^2}{2} + \frac{t\|\nabla\Psi(y) - y\|^2}{2}\right) Det\left(t\nabla^2\Psi(y) + (1-t)\mathbb{I}\right) \tag{42}$$

$$\alpha \int_0^1 \mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi(x) + (1-t)\mathbb{I}\right) \int_\Omega \left(\Psi(y) - \frac{\|y\|^2}{2} + \frac{t\|\nabla\Psi(y) - y\|^2}{2}\right) \mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi(y) + (1-t)\mathbb{I}\right) dydt.$$

Demostración.

Se reescribirá el minimizador en una formulación independiente del tiempo. Desde la formula de Hopf-Lax de la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\Phi(1, M(x)) = \Phi(0, x) + \frac{\|M(x) - x\|^2}{2}.$$

Así, $\nabla\Phi(0, x) + x - M(x) = 0$. Usaremos la notación $\Psi(x) = \Phi(0, x) + \frac{\|x\|^2}{2}$, entonces $M(x) = \nabla\Psi(x)$. Desde $X_t(x) = (1 - t)x + tM(x)$, entonces □

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\Phi(t, X_t(x)) &= \Phi(0,x) + \frac{\|X_t(x) - x\|^2}{2t} \\
&= \Phi(0,x) + \frac{t\|M(x) - x\|^2}{2} \\
&= \Psi(x) - \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{t\|\nabla\Psi(x) - x\|^2}{2}
\end{aligned}
$$

y

$$\nabla X_t(x) = (1-t)\mathbb{I} + t\nabla^2\Psi(x)$$

implica, $\square$

Ecuación de Monge - Ampére

Demostración.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \alpha \int_\Omega \Phi(t,x)dx \\
&= \alpha \int_\Omega \Phi(t, X_t(x))\mathrm{Det}\left(\nabla X_t(x)\right) dx \\
&= \alpha \int_\Omega \left\{ \Psi(x) - \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{t\|\nabla\Psi(x) - x\|^2}{2} \right\} \mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I} + t\nabla^2\Psi(x)\right)
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \alpha \int_\Omega \Phi(t,x)dx \\
&= \alpha \int_\Omega \Phi(t, X_t(x))\mathrm{Det}\left(\nabla X_t(x)\right) dx \\
&= \alpha \int_\Omega \left\{ \Psi(x) - \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{t\|\nabla\Psi(x) - x\|^2}{2} \right\} \mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I} + t\nabla^2\Psi(x)\right) dx.
\end{aligned}
$$

Demostración.

Ahora recordamos la expresión en **proposición** anterior,

$$\mu(1, M(x))\mathrm{Det}\left(\nabla M(x)\right) = \mu(0, x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{Det}\left(t\nabla M(x) + (1-t)\mathbb{I}\right) dt,$$

en está expresión reemplazamos de manera que sea independiente de la función fuente

□

Ecuación de Monge - Ampére

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\big(\nabla^2\Psi(x)\big) &= \mu(0,x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{Det}\big(t\nabla^2\Psi + (1 \\
\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\big(\nabla^2\Psi(x)\big) - \mu(0,x) &= \int_0^1 f(t)\mathrm{Det}\big(t\nabla^2\Psi + (1-t)\mathbb{I}\big)\,dt
\end{aligned}
$$

□

$$
\begin{aligned}
\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\big(\nabla^2\Psi(x)\big) &= \mu(0,x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{Det}\big(t\nabla^2\Psi + (1-t)\mathbb{I}\big)\,dt \\
\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\big(\nabla^2\Psi(x)\big) - \mu(0,x) &= \int_0^1 f(t)\mathrm{Det}\big(t\nabla^2\Psi + (1-t)\mathbb{I}\big)\,dt
\end{aligned}
$$

Demostración.

$$\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\left(\nabla^2\Psi(x)\right)-\mu(0,x)=$$

$$\int_0^1\left(\alpha\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dx\right)\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t\right.$$

$$\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\left(\alpha\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)d\right.$$

$$\alpha\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\left(\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)d\right.$$

$$\alpha\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dxc$$

$\square$

Demostración.

$$\mu(1,\nabla\Psi(x))\mathrm{Det}\left(\nabla^2\Psi(x)\right)-\mu(0,x)=$$

$$\int_0^1\left(\alpha\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dx\right)\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)dt.$$

$$\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\left(\alpha\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dx\right)dt.$$

$$\alpha\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\left(\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dx\right)dt.$$

$$\alpha\int_0^1\mathrm{Det}\left(t\nabla^2\Psi+(1-t)\mathbb{I}\right)\int_\Omega\left\{\Psi(x)-\frac{\|x\|^2}{2}+\frac{t\|\nabla\Psi(x)-x\|^2}{2}\right\}\mathrm{Det}\left((1-t)\mathbb{I}+t\nabla^2\Psi(x)\right)dxdt.$$

□

11

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Theorem (No normalizada formulación de Kantorovich)

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2=\sup_{\Phi}\left\{\int_{\Omega}\Phi(1,x)\mu(1,x)dx-\int_{\Omega}\Phi(0,x)\mu(0,x)dx-\frac{\alpha}{2}\int_0^1\left(\int_{\Omega}\Phi(t,x)dx\right)^2dt\right\} \tag{43}$$

donde el supremo es tomado entre todo $\Phi:[0,1]\to\Omega$ *que satisface*

$$\partial_t\Phi(t,x)+\frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\leq 0.$$

Demostración.

Nosotros derivamos las formula dual por integración por partes como sigue. Notamos el hecho que

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \inf_{m,\mu,f}\left\{\int_0^1\int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)}dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2dt : \begin{array}{c}\partial_t\mu + \nabla\cdot m = 0,\\ \mu(0,x)=\mu_0(x),\\ \mu(1,x)=\mu_1(x)\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \inf_{m,\mu,f}\sup_{\Phi}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} + \frac{1}{2\alpha}f(t)^2 + \\ \Phi(t,x)\left(\partial_t\mu(t,x) + \nabla\cdot m(t,x) - f(t)\right)dxdt\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 \geq \sup_{\Phi}\inf_{m,\mu,f}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} + \frac{1}{2\alpha}f(t)^2 + \\ \Phi(t,x)\left(\partial_t\mu(t,x) + \nabla\cdot m(t,x) - f(t)\right)dxdt\end{array}\right\}$$

□

Formulación de Kantorovich

Demostración.

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \sup_{\Phi}\ \inf_{m,\mu,f}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} - \nabla\Phi(t,x)\cdot m(t,x) + \frac{1}{2\alpha}f(t)^2 + \\ \Phi(t,x)\left(\partial_t\mu(t,x) - f(t)\right)dxdt\end{array}\right\}$$

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \sup_{\Phi}\ \inf_{m,\mu,f}\left\{\begin{array}{c}\int_0^1\int_\Omega \frac{1}{2}\left(\frac{m(t,x)^2}{\mu(t,x)} - \nabla\Phi(t,x)\right)^2\mu(t,x) - \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\mu(t,x)d \\ + \int_\Omega\left(\Phi(1,x)\mu(1,x) - \Phi(0,x)\mu(0,x)\right)dx \\ + \int_0^1\int_\Omega\left(-\mu(t,x)\partial_t\Phi(t,x) + \frac{1}{2\alpha}f(t)^2 - \Phi(t,x)f(t)\right)dxdt\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \sup_{\Phi}\left\{\begin{array}{c}\inf_\mu\int_0^1\int_\Omega -\mu(t,x)\left(\partial_t\Phi(t,x) + \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\right)dxdt \\ + \int_\Omega\left(\Phi(1,x)\mu(1,x) - \Phi(0,x)\mu(0,x)\right)dx \\ + \inf_f\int_0^1\int_\Omega\left(\frac{1}{2\alpha}f(t)^2 - \Phi(t,x)f(t)\right)dxdt\end{array}\right\}$$

$\square$

Demostración.

$$
\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \sup_{\Phi}\left\{\begin{array}{c} \text{ínf}_\mu\left\{-\int_0^1\int_\Omega \mu(t,x)\left(\partial_t\Phi(t,x)+\frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\right)dxdt\right\} \\ +\int_\Omega\left(\Phi(1,x)\mu(1,x)-\Phi(0,x)\mu(0,x)\right)dx-\frac{1}{2\alpha}\int_0^1\left(\int_\Omega\Phi(t,x)dx\right)^2 d \\ +\frac{1}{2\alpha}\,\text{ínf}_f\left\{\int_0^1\left(f(t)-\alpha\int_\Omega\Phi(t,x)dx\right)^2dt\right\} \end{array}\right.
$$

$$
\frac{1}{2}UW_2\left(\mu_0,\mu_1\right)^2 = \sup_{\Phi}\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega\left(\Phi(1,x)\mu(1,x)-\Phi(0,x)\mu(0,x)\right)dx-\frac{1}{2\alpha}\int_0^1\left(\int_\Omega\Phi(t,x)dx\right)^2 dt: \\ \partial_t\Phi(t,x)+\frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2\leq 0 \end{array}\right.
$$

□

Demostración.

Tenemos mostrado que el minimizador bajo m es obtenido en $\frac{m}{\mu} = \nabla\Phi$, y $f(t) = \alpha \int_\Omega \Phi(t,x)dx$.
La última igualdad se sostiene por $\mu(t,x) \geq 0$, así $\partial_t \Phi(t,x) + \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \leq 0$.
Continuamos mostrando que la diferencia primal-dual es cero. Desde el *teorema 20*, el minimizado (μ, Φ) satisface (2). Así

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt \quad &= \quad \begin{array}{l} \int_0^1 \int_\Omega \frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \mu(t,x) dxdt \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt \end{array} \\
\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt \quad &= \quad \begin{array}{l} \int_0^1 \int_\Omega \left(-\frac{1}{2}\|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \mu(t,x) + \|\nabla\Phi(t,x)\|^2 \mu(t,x)\right. \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt \end{array}
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 \int_\Omega \partial_t \Phi(t,x)\mu(t,x)dxdt + \int_0^1 \int_\Omega \Phi(t,x)\left(-\nabla\cdot(\mu(t,x)\nabla\Phi(t,x))\right)dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt$$

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_\Omega \Phi(1,x)\mu(1,x)dx - \int_\Omega \Phi(0,x)\mu(0,x)dx - \int_0^1 \int_\Omega \Phi(t,x)\left(\partial_t\mu(t,x) + \nabla\cdot(\mu(t,x)\nabla\Phi(t,x))\right) + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt$$

$$\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_\Omega \Phi(1,x)\mu(1,x)dx - \int_\Omega \Phi(0,x)\mu(0,x)dx - \int_0^1 \int_\Omega \Phi(t,x)f(t)dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt$$

$\square$

Formulación de Kantorovich

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt &= \int_\Omega \Phi(1,x)\mu(1,x)dx - \int_\Omega \Phi(0,x)\mu(0,x)dx \\
&\quad + \left(-\alpha + \tfrac{\alpha}{2}\right)\int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt \\
\int_0^1 \int_\Omega \frac{m(t,x)^2}{2\mu(t,x)} dxdt + \frac{1}{2\alpha}\int_0^1 f(t)^2 dt &= \int_\Omega \Phi(1,x)\mu(1,x)dx - \int_\Omega \Phi(0,x)\mu(0,x)dx \\
&\quad - \tfrac{\alpha}{2}\int_0^1 \left(\int_\Omega \Phi(t,x)dx\right)^2 dt
\end{aligned}
$$

□

Conclusión

Primero, es muy natural el tratamiento presentado en 'unnormalized optimal transport' [1] trabajo presentado para resolver un problema no normalizado en la teoría de transporte óptimo.
Segundo, la teoría de transporte óptimo permite la adaptación del método de solución y análisis de un problema de transporte no normalizado unidimensional, a través del estudio y análisis del problema de transporte óptimo no normalizado desarrollado en [1]. Así como en la *sección 4*.
Tercero, este estudio, análisis y adaptación a las versiones unidimensionales sirve de apoyo para en trabajos posteriores encontrar soluciones periodicas a modelos unidimensionalels como en 'Periodic solutions for a 1D-model with nonlocal velocity via mass transport' [8] (Ferreira L. y Valencia J. , 2016).

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Agradecimientos

(i) Agradezco a la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, por brindarme lo necesario para desarrollar mi persona cómo un académico en Matemáticas y Economía.

(ii) Agradezco al profesor Richard Manuel Mamani Troncoso, por su dedicación en cada dictado de aulas, aulas qué ayudaron a formar este escrito y al profesor Roberto Carlos Begazo Delgado por su asesoramiento (en los semestres I y II - 2019).

Un problema de transporte óptimo unidimensional

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

Prof. Mg. Roberto Begazo Delgado
Prof. Dr. Richard Mamani Troncoso

UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

16 de Diciembre de 2019

Referencias

[1] Wilfrid Gangbo y col. «Unnormalized Optimal Transport». En: *arXiv preprint arXiv:1902.03367* (2019).

[2] Gaspard Monge. «Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais». En: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1781).

[3] Cédric Villani. *Optimal transport: old and new*. Vol. 338. Springer Science & Business Media, 2008.

[4] Filippo Santambrogio. «Optimal transport for applied mathematicians». En: *Birkäuser, NY* 55 (2015), págs. 58-63.

[5] Alfred Galichon y Robert McCann. *Optimal Transportation, Equilibrium, and Applications to Economics*. 2019.

[6] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli y Giuseppe Savaré. *Gradient flows: in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer Science & Business Media, 2008.

Referencias

[7] William P Ziemer y Monica Torres. *Modern real analysis*. Vol. 278. Springer, 2017.

[8] Lucas CF Ferreira y Julio C Valencia-Guevara. «Periodic solutions for a 1D-model with nonlocal velocity via mass transport». En: *Journal of Differential Equations* 260.10 (2016), págs. 7093-7114.