# Ejemplos en la teoría de grupos de Galois para esquemas

*Asesor:* Roberto Begazo Delgado
*Jurado:* Judith Cruz Torres
*Alumno:* Jhon A. Huarachi Galvez

Julio, 2019

# Índice

Introducción
Espacio biproyectivo
$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ cómo recubrimiento
Existen muchas variedades algebraicas no simplemente conexas de cualquier dimensión
Recubrimiento de una variedad compleja
Conclusiones
Bibliografía
Adicionales
- Apéndice A
- Apéndice B
- Apéndice C
- Apéndice D
- Apéndice E

# Introducción

Este escrito es el seminario de tesis primero, en el cual se estudiará las relaciones presentes entre objetos de categoría geométrica y objetos de categoría algebraica para un ejemplo en particular el espacio biproyectivo con respecto a la estructura de los números complejos. Estudio que nos lleva a nociones cómo espectro de un anillo, esquemas nociones que pueden ser consultadas en [8], y recubrimientos de espacios topológicos, Grupos de Galois en [6].

El espacio biproyectivo complejo se puede estudiar como el espacio de puntos en coordenadas complejas que son anulados por polinomios bihomogeneos elementos en un anillo y un subespacio proyectivo de este puede ser visto como la colección de puntos que son anulados por elementos de un anillo cociente.

Además este espacio es obtenido como el cociente de, un objeto geométrico cartesiano con respecto a la acción de un grupo que permuta las coordenadas en el cartesiano, de esta manera el espacio cociente tomado como espacio proyectivo es recubierto por un espacio multiproyectivo a tráves de una aplicación de recubrimiento dicha aplicación para nuestro ejemplo será de Galois.

# Espacio biproyectivo

El *espacio biproyectivo* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es el conjunto de las clases de equivalencia

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} := \left\{ ((a_0, a_1),\ (b_0, b_1)) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \middle| \begin{array}{ccc} (a_0, a_1) & \neq & (0,0) \\ (b_0, b_1) & \neq & (0,0) \end{array} \right\}_{/\sim}$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia $((a_0, a_1),\ (b_0, b_1)) \sim ((c_0, c_1),\ (d_0, d_1))$ si existen unos no cero $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $(a_0, a_1) = (\lambda c_0, \lambda c_1)$ y $(b_0, b_1) = (\mu d_0, \mu d_1)$.

Un elemento de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es llamado un *punto*. Denotaremos la clase de $((a_0, a_1),\ (b_0, b_1))$ por $[a_0 : a_1] \times [b_0 : b_1]$. Siguiendo que $[a_0 : a_1]$, $[b_0 : b_1]$ son puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

# Polinomios bihomogeneos

Si $F \in \mathbf{R}$ es un elemento bihomogeneo de grado $(i, j)$ y $P = [a_0 : a_1] \times [b_0 : b_1]$ es un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, entonces

$$F(\lambda a_0, \lambda a_1, \mu b_0, \ \mu b_1) = \lambda^i \mu^j F(a_0, a_1, b_0, b_1) \quad \textit{para todo} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$$

Así decimos que la noción de que $F$ anula un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ esta bien definida.
Si $T$ es cualquier conjunto de elementos bihomogeneos de $\mathbf{R}$, definimos

$$V(T) := \{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} | \quad F(P) = 0 \quad \textit{para todo} \quad F \in T\}.$$

Si $I$ es un ideal bihomogeneo de $\mathbf{R}$, entonces $V(I) := V(T)$ donde $T$ es el conjunto de todos los elementos bihomogeneos de $I$. Si $I = (F_1, \ \ldots, F_r)$, entonces $V(I) = V(\{F_1, \ldots, F_r\})$. El espacio biproyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ puede ser dotado con una *topología por la definición de cerrados* a todos los subconjuntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ de la forma $V(T)$ donde $T$ es una colección de elementos bihomogeneos de $\mathbf{R}$. Si $Y$ es un subconjunto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ que es cerrado e irreducible con respecto a esta topología, de esta manera decimos que $Y$ es una *variedad biproyectiva*, o simplemente, una *variedad*.

Si $Y$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, el conjunto

$$I(Y) := \{F \in \mathbf{R}| \quad F(P) = 0 \quad \textit{para todo} \quad P \in Y\}.$$

El conjunto $I(Y)$ es un ideal bihomogeneo de $\mathbf{R}$ y es llamado el *ideal bihomogeneo asociado a* $Y$, o simplemente, el *ideal asociado a* $Y$. Si $P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es un punto, escribiremos[1] $I(P)$ a cambio de $I(\{P\})$. Llamamos a cociente $\mathbf{R}/I(Y)$ *el anillo de coordenadas bihomogeneo de* $Y$, o simplemente, el *anillos de coordenadas de* $Y$.41

[1] En este momento estamos realizando un abuso de notación.

# *Nullstellensatz* bigraduado

## Teorema

**Nullstellensatz bigraduado.** *Si $I \subseteq \mathbf{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ es un ideal bihomogeneo y si $F \in \mathbf{R}$ es un polinomio bihomogeneo con deg $F \neq (0,0)$ tal que si $F(P) = 0$ para todo $P \in V(I) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, entonces $F^t \in I$ para algún $t > 0$.*

Una diferencia entre el caso graduado estándar y el caso bigrado es la noción de irrelevantes ideales.92

# Correspondencia

## Teorema

*Existe una correspondencia biyectiva entre los subconjunto de cerrados no vácios de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *y los ideales bihomogeneos de* **R** *que son radicales, es decir,* $I = \sqrt{I}$*, y* **proyectivamente relevantes**. *La correspondencia es dada por*

$$Y \longmapsto I(Y) \qquad \wedge \qquad I \longmapsto V(I).$$

# $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ cómo recubrimiento

Con lo mencionado en la sección anterior observaremos que $\mathcal{X}$ es un esquema por bondad del Teorema de ceros de Hilbert[2] para anillos bigraduados.
En lo siguiente se asumirán las pruebas para esta presentación, pudiéndolas encontrar en [4], [5], y [8]. Esto con la finalidad de observar con mayor claridad las nociones intuitivas de estos desarrollos.

[2] Nullstellensatz

## Teorema

*Cualquier variedad compleja conexa $\mathcal{X}$ puede ser escrita de la forma $\mathcal{X} = G\backslash\widetilde{\mathcal{X}}$ donde $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una variedad compleja simplemente conexa y $G$ es un grupo de automorfismos de $\widetilde{\mathcal{X}}$ actuando libre y discretamente.*

Para cuales quiera dos representaciones de la misma variedad compleja, los grupos $G$ y $G'$ son conjugados en el grupo de todos lo automorfismos de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

# Una variedad compleja simplemente conexa y sus automorfismos

El tratamiento analítico de algunos ejemplos de variedades complejas se encuentra en [3] (capítulo Superficies de Riemann).
Las variedades complejas 1-dimensionales simplemente conexas son:

1. La recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathrm{an}}$;
2. la recta afín $\mathbb{C}^1 = \mathbb{A}^1_{\mathrm{an}}$;
3. el disco unitario abierto $D \subset \mathbb{C}$ definido por $|z| < 1$.

estas dos primeras variedades complejas son llamadas la *esfera de Riemann* y el *plano complejo finito*.

## Proposición

*Cualquier automorfismo de $\mathbb{P}^1_{\mathrm{an}}$ tiene un punto fijo. Un grupo de automorfismos $G$ de $\mathbb{C}^1$ actúa libre y discretamente con el cociente compacto $G\backslash\mathbb{C}^1$ consistiendo de translaciones $z \mapsto z + a$, donde $a$ es recorrido a través de los vectores de algún latice de rango 2 en $\mathbb{C}$. Todos los automorfismos de el disco unitario son de la forma*

$$z \mapsto \theta \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad \text{con} \qquad |\theta| = 1 \quad \wedge \quad |\alpha| < 1.$$

# Existen muchas variedades algebraicas no simplemente conexas de cualquier dimensión

Para cualquier grupo finito $\Gamma$ y cualquier entero $n \leq 2$ existe una $n$-dimensional variedad algebraica completa cuyo grupo fundamental es isomorfo a $\Gamma$.

**Ejemplo 14** *Tomamos* $\Gamma$ *el grupo simétrico en m elementos* $\Gamma = \mathfrak{S}_m$.

Consideremos el producto de $m$ copias de $s$-dimensional espacios proyectivos, $\Pi = \mathbb{P}^s \times \cdots \times \mathbb{P}^s$. Puntos $x \in \Pi$ son denotados por $x = (x_1, ..., x_m)$ con $x_i \in \mathbb{P}^s$. El grupo $\mathfrak{S}_m$ actua en $\Pi$ por permutaciones de m puntos:

$$g(x_1, ..., x_m) = (x_{i_1}, ..., x_{i_m}), \qquad \text{donde} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

Un paso de construcción es la construcción del espacio cociente $\Pi' = \mathfrak{S}_m \backslash \Pi$.

# Grupo fundamental $\pi_1$ finito para algunas variedades algebraicas

Se mencionarán conceptos de manera familiar estos términos se encuentran en [5] texto *Geometría Algebraica Básica*, Shafarevich I. (2013).105

Supongamos que todas las variedades son definidas bajo el campo de los números complejos.
$\mathcal{X}$ es obtenido desde $\Pi$ por intersención con hiper-superficies, que puede ser visto cómo la intersección con hiperplanos bajo el *embebimiento de Veronese* de $\Pi$ en un espacio proyectivo.
Teniendo $\Pi(\mathbb{C})$ simplemente conexa, también es $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ simplemente conexa.
Vemos que $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ es el recubrimiento universal de $\mathcal{Y}(\mathbb{C})$, y $\pi_1(\mathcal{Y}(\mathbb{C})) = \mathfrak{S}_m$. Notando que $\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ es proyectiva por construcción.

# Recubrimiento de una variedad compleja

Comenzando desde un recubrimiento no ramificado $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con grupo $\mathfrak{S}_m$, podemos podemos dar un recubrimiento con $\Gamma$ grupo finito (Arbitrario). Para ello soponemos que $\Gamma \subset \mathfrak{S}_m$. Observando que la extensión de campos $\mathbb{C}(\mathcal{Y}) \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ es de Galois con grupo $\mathfrak{S}_m$, por teoría de Galois el subgrupo $\Gamma$ corresponde a un subcampo intermedio $\mathbf{K}$ tal que $\mathbb{C}(\mathcal{Y}) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ y $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ es una extensión de Galois con grupo $\Gamma$.

Sea $\bar{\mathcal{Y}}$ la normalización de $\mathcal{Y}$ en $\mathbf{K}$. De propiedades de normalización, tenemos los morfismos,

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Y}, \qquad \text{con} \qquad \psi \circ \bar{\varphi} = \varphi.$$

Tenemos desde las propiedades de morfismos finitos que $\bar{\varphi}$ y $\psi$ son finitos.110

## Proposición

*El grupo de simetrías $\mathfrak{S}_2$ con dos elementos, y los espacios proyectivos $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ estan relacionados por la siguiente expresión*

$$\mathfrak{S}_2 \backslash \left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\right) = \mathbb{P}^2,$$

*donde cada orbita del cociente se identifica con un punto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$.*

Dado $\mathbb{P}^1$ un espacio proyectivo[3] no singular, y $G = \{1, g\}$ el grupo de orden 2 donde

$$g : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

es dado por $g(x, x') = (x', x)$. El espacio anillado de $\mathcal{Y} = G \backslash (\mathcal{X} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ es un espacio complejo e incluso una variedad compleja de manera que

$$Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = G,$$

$$\pi_1(\mathcal{Y}) = H_1(\mathcal{X}),$$

donde $H_1$ es una forma en los polinomios $F_\alpha$.

[3] Una curva proyectiva no singular.

# Conclusiones

Encaminado este trabajo a la teoría de grupos de Galois para esquemas[4] tenemos la *Proposición22* siendo esta un paso primero en el camino de la teoría de grupos de Galois para esquemas encontrada en [6] en este caso el objeto geométrico $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ como recubrimiento universal.
Conclusión Resultó la concepción intuitiva de, un recubrimiento de una variedad proyectiva a tráves del desarrollo de este escrito. Desarrollo que involucra un grupo de Galois.

[4]Esquemas de tipo proyectivo.

# Comentarios

El presente trabajo busca de forma implícita asociar las nociones presentes en esquemas proyectivos, es decir, utilizando anillos graduados cocientes y los recubrimientos de Galois, es decir, el grupo de automorfismos topológicos del recubrimiento que dejan invariante el recubrimiento de Galois con cierto tipo de características.[5]

[5] Grupo de Galois actuando sobre un objeto, en el caso clásico, actuando sobre un anillo de polinomios.

Todo esto con la guía de la construcción de este proceso realizado en [1], mas este proceso en el artículo [1] fue realizado para esquemas llamados esquemas afín donde el escenario es diferente al correspondiente de esquemas proyectivos, este escenario diferente se puede estudiar con las construcciones presentes en [8], para el caso de nuestro ejemplo, tener mayor familiaridad con apoyo del trabajo en [7], y todo esto llevarnos a las hipótesis asociadas a una versión proyectiva del *teorema de Grothendieck*.

# Teorema de Grothendieck

## Teorema

**Grothendieck.** *Si $\mathcal{X}$ es un esquema de tipo finito sobre $\mathbb{C}$, entonces $\pi_1^{et}(\mathcal{X})$ es el completamiento profinito de $\pi_1(\mathcal{X})$.*

*Donde:*

- $\pi_1^{et}(\mathcal{X}) = Gal\left(\mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathrm{unr}} | \mathbb{K}(\mathcal{X})\right)$
- $\mathbb{K}(\mathcal{X})_{\mathrm{unr}} := \cup \{\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}(\mathcal{X}) | \quad \mathcal{X}_{\mathbb{L}} \to \mathcal{X} \quad \text{es étale}\}$
- $\mathcal{X}_{\mathbb{L}} = Spec\left(\widetilde{\mathbf{R}}\right)$.[6]

[6] $\widetilde{\mathbf{R}}$ es la clausura integral de $\mathbf{R}$ en $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ el campo de fraciones de $\mathbf{R}$.

Proponemos el estudio de las hipótesis que prueban

$$\mathfrak{S}_m \backslash \left(\mathbb{P}^1\right)^m = \mathbb{P}^m,$$

inclinado nos a tráves esta prueba a una versión proyectiva del tratamiento inicial que se realiza en [1], tratamiento para presentar un *Teorema de Grothendieck*, y al siguiente problema;

## Problema

*Sea $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ una aplicación regular con Jacobian*[7] *constante no cero. Entonces $U = \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) - \varphi(\mathbb{A}^2(\mathbb{C}))$ es un conjunto finito de puntos*

[7] Jacobian : Jacobiano

## Desarrollo

*Si una curva $f = 0$ intercepta $\varphi(\mathbb{A}^2(\mathbb{C}))$ en un número finito de puntos, el polinomio $\varphi^*(f)$ tendría sólo un número finito de ceros en $\mathbb{A}^2$. Entonces*[8] *$U$ es simplemente conexo. Además, $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \to U$ es un recubrimiento*[9] *no ramificado, siendo $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ conexo. Así se pude probar que $\mathbb{A}^2 - \{x_1, ..., x_r\}$ no es una variedad afín. Con esto $\varphi(\mathbb{A}^2) = \mathbb{A}^2$, y $\varphi$ es un automorfismo.*

---

[8] Desde una posición general argumentamos que es natural ver que.

[9] Es más, debiendo $\varphi$ ser un isomorfismo.

Para estudios de posteridad hemos de notar que el *Desarrollo* tiene error. El problema arriba es un caso particular de un problema general llamado *Conjetura de Jacobian*[10] cuyo enunciado es muy accesible,

[10] Jacobian Conjecture ($J\mathbb{C}(n)$).

## Problema

*Sea $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una aplicación polinomial tal que $F'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$ (o equivalentemente $\det(\mathbf{JF}) \in \mathbb{C}^*$), entonces $F$ es invertible (es decir, $F$ tiene cómo inversa una aplicación también polinomial).*

- Contiero A. (2014). V Galois Theory and Schemes Covering Spaces in ALgebraic Geometry. In the steps of Galois. Proccedings of the Evariste Galois bicentenary meeting., p.141.
- Quispe J. (2011). El Teorema de Bezout. Seminario de Tesis I.
- Quispe J. (2012). El Teorema de Riemann Roch. Seminario II.
- Vilca J.(2011). Grupos Profinitos, Caract. y Cohomología. S I.
- Shafarevich, I. R., and Reid, M. (1994). Basic algebraic geometry (Vol. 2). Berlin: Springer-Verlag.
- Szamuely, T. (2009). Galois groups and fundamental groups (Vol. 117). Cambridge university press.
- Guardo, E., and Van Tuyl, A. (2015). Arithmetically Cohen-Macaulay. SpringerBriefs in Mathematics, 15, 18.
- Manin, Y. I. (2018). Introduction to the Theory of Schemes.

# Espectro de un anillo

Se presenta a continuación definiciones y algunos ejemplos de las mismas, que serán necesarias para el desarrollo de una noción intuitiva en los siguientes capítulos.

## Definición

*El conjunto de ideales primos de un anillo $A$, es decir,*

$$Spec(A) := \{\mathfrak{p} \subset A| \quad \mathfrak{p} \quad \textit{es un ideal primo}\}$$

*es llamado su espectro primo o simplemente espectro, y se denota por $Spec(A)$. Los ideales primos son llamados puntos de $Spec(A)$.*

'Anillo $\longleftrightarrow$ espectro de sus ideales de cierto tipo'.

La expresión arriba nos da indicios de la existencia de espectros con en cierta manera diferentes características como los formados de ideales maximales, ideales primos homogeneos, ideales primos bihomogeneos este último tipo de espectro será objeto de estudio para los ejemplos de las siguientes secciones. **Ejemplo 1** $Spec(\mathbb{Z})$ consiste de los ideales primos $(2)$, $(3)$, ... , $(p)$, ... , donde $p$ es número primo, y el ideal generado por cero $(0)$.

La topología de *Zariski* en $Spec(A)$ es definida cómo sigue:

- Una base de conjuntos abiertos de $Spec(A)$ es dada por $D(f) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | \quad f \notin \mathfrak{p}\}$ donde $f \in A$.
- Los conjuntos cerrados son $\mathcal{V}(I) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) | \quad I \subseteq \mathfrak{p}\}$ donde $I$ es un ideal de $A$.

**Toro complejo.** Consideremos $\mathbb{C}$ como un 2-dimensional espacio vectorial real y sea $\{c_1, c_2\} \subset \mathbb{C}$ un base sobre $\mathbb{R}$. Esta base genera un subgrupo discreto $\Lambda$ de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El espacio topológico cociente $\mathbb{C}/\Lambda$ es homeomorfo a un toro. Podemos definir un atlas complejo en $\mathbb{C}/\Lambda$ cómo sigue. Cubrimos $\mathbb{C}$ con discos abiertos $D_i$ suficientemente pequeños tales que no contengan puntos congruentes modulo $\Lambda$. La imagen de cada $D_i$ por la proyección $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}/\Lambda$ por definición de topología cociente, y la proyección aplica $D_i$ homeomorficamente sobre su imagen. Las imágenes de $D_i$ forman un cubrimiento abierto de $\mathbb{C}/\Lambda$, y las cartas complejas $f_i$ son las inversas de las aplicaciones proyección $p\big|_{D_i} : D_i \to p(D_i)$. Los cambio de coordenadas $f_i \circ f_i^{-1}$ son las traslaciones por elementos de $\Lambda$, con esto tenemos indexado el atlas complejo.

# Anillo bigraduado

Existe una relación entre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y el anillo bigraduado $\mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. En esta de sección $\mathbb{K}$ denota un campo algebraicamente cerrado de característica cero.
$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ denota el conjunto de enteros no negativos.
Sean $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\preceq$ que denota la natural relación de orden parcial en los elementos de $\mathbb{N}^2$ definida por $(a, b) \preceq (c, d)$ en $\mathbb{N}^2$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$.

## Definición

*Un anillo conmutativo con unidad* **R** *es llamado un* **anillo graduado** *si existen una descomposición en suma directa y un semigrupo $N$ ordenado parcialmente tales que,*

$$\mathbf{R} = \bigoplus_{s \in N} \mathbf{R}_s \qquad \wedge \qquad \mathbf{R}_s \mathbf{R}_t \subseteq \mathbf{R}_{s+t}$$

*para todo $s, t$ en $N$.*

En adelante consideraremos objetos cuyos elementos son polinomios, recordemos que el término *deg* grado de un polinomio se le atribuye al número suma mayor de las potencias de cada monomio.

**Ejemplo 2** Sea $\mathbf{R} := \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ un anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. Notamos que $deg\ x_0 = (1,0)$ y $deg\ y_1 = (0,1)$. Un monomio $m = x_0^a x_1^b y_0^c y_1^d \in \mathbf{R}$ tiene bigrado (o grado) $deg\ m = (a+b, c+d)$. Por convención tendremos que, la identidad aditiva 0 cero, tiene $deg\ 0 = (i,j)$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Los elementos de $\mathbb{K}$ todos tienen grado $(0,0)$.

Para cada $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, asignamos $\mathbf{R}_{i,j}$ denotando el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ generado por todos los monomios de grado $(i,j)$ (los monomios con respecto a la suma no se alteran en grado y con respecto al producto por un escalar el grado se incrementa en cero). El anillo $\mathbf{R}$ es entonces un *anillo bigraduado* ya que existe una descomposición en suma directa

$$\mathbf{R} =_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbf{R}_{i,j} \qquad \wedge \qquad \mathbf{R}_{i,j}\mathbf{R}_{k,l} \subseteq \mathbf{R}_{i+k,j+l}$$

para todo $(i,j),(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

Un elemento $F \in \mathbf{R}$ es *bihomogeneo* si $F \in \mathbf{R}_{i,j}$ para algún $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Si $F$ es bihomogeneo, diremos que su *grado* es *deg* $F = (i,j)$. Cualquier polinomio $F \in \mathbf{R}$ puede ser escrito únicamente cómo $F = F_1 + ... + F_t$ donde cada $F_i$ es bihomogeneo. Llamaremos de $F_i$ los *términos bihomogeneos* de $F$.
Supongamos que $I = (F_1, \ \ldots, F_r) \subseteq \mathbf{R}$ es un ideal. Si cada $F_i$ es bihomogeneo, entonces decimos que $I$ es un *ideal bihomogeneo*. Justo como en el caso de graduación estándar, podemos mostrar que $I$ es un ideal bihomogeneo si y sólo si para cada $F \in I$, todos lo términos bihomogeneos $F_i$ de $F$ pertenecen también a $I$.

Si $I \subseteq \mathbf{R}$ es un ideal, entonces el conjunto $I_{i,j} := I \cap R_{i,j}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Cada $I_{i,j}$ es un subespacio verctorial de $\mathbf{R}_{i,j}$, y además, $I \supseteq \oplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} I_{i,j}$. Si $I$ se bihomogeneo, entonces tenemos la igualdad, es decir, $I = \oplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} I_{i,j}$, porque el término bihomogeneo de $F$ pertenece a $I$ si $F \in I$. Cuando $I$ es un ideal bihomogeneo $\mathbf{R}$, entonces el anillo cociente $\mathbf{R}/I$ hereda la estructura de *anillo bigraduado*.
En particular tenemos $(\mathbf{R}/I)_{i,j} := \mathbf{R}_{i,j}/I_{i,j}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Entonces

$$\mathbf{R}/I = \bigoplus_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (\mathbf{R}/I)_{i,j}.$$

**Ejemplo 3** Consideremos un interesante ideal $\mathfrak{m} := (x_0x_1, x_0y_1, x_1y_0, y_0y_1)$, este fue obtenido como intersección de los ideales $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$.
La relación entre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y el anillo bigraduado $\mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ será objeto de estudio.10

# Recubrimiento de Galois

Para esta sección fijaremos un espacio topológico $\mathcal{X}$ asumiendo este localmente conexo[11]. Dado un recubrimiento $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, sus *automorfismos* son los los automorfismos[12] de $\mathcal{Y}$ como un espacio sobre $\mathcal{X}$. Ellos forman un grupo con respecto a la composición, este grupo será denotado por $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$. Notamos que para cada punto $x \in \mathcal{X}$, $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$ aplica la fibra $p^{-1}(x)$ en si misma, también $p^{-1}(x)$ es dotada con la acción natural de $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$.

[11] Es decir, cada punto tiene una base de vecindades consistiendo de subconjuntos abiertos conexos

[12] Es decir, los automorfismos topológicos compatibles con el recubrimiento $p$.

## Lema

*Un automorfismo $\phi$ de un recubrimiento conexo $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ debe tener un punto fijo, al menos el trivial.*

## Proposición

*Sea $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un recubrimiento, $\mathcal{Z}$ un espacio topológico conexo, $f, g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ dos aplicaciones continuas satisfaciendo $p \circ f = p \circ g$. Si existe un punto $z \in \mathcal{Z}$ con $f(z) = g(z)$, entonces $f = g$.*

## Proposición

*Si $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es un recubrimiento conexo, la acción de $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$ en $\mathcal{Y}$ es par.*

## Proposición

*Si $G$ es un grupo actuando par mente en un espacio conexo $\mathcal{Y}$, el grupo de automorfismos del recubrimiento $p_{_G} : \mathcal{Y} \to G\backslash\mathcal{Y}$ es $G$.*

Dado un recubrimiento conexo $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, formado por el cociente de $\mathcal{Y}$ por la acción de $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$. Desde la definición de *automorfismos de un recubrimiento* podemos tener la siguiente composición

$$\mathcal{Y} \to Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})\backslash\mathcal{Y} \xrightarrow{\bar{p}} \mathcal{X}$$

donde la primera aplicación es la proyección natural.

## Definición

*Un recubrimiento $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es llamado de Galois si $\mathcal{Y}$ es conexo y la aplicación inducida $\bar{p}$ arriba es un homeomorfismo.*

## Proposición

*Un recubrimiento $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es de Galois si y sólo si $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$ actúa transitiva mente en cada fibra de $p$.*

**Ejemplo 4** Consideremos el *toro lineal* $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n/\Lambda$ con subgrupo discreto $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$, y dado $m > 1$ entero. La *multiplicación* por $m$ aplicación de $\mathbb{R}^n$ aplica $\Lambda$ en si mismo esto induce una aplicación $\mathbb{R}^n/m\Lambda \to \mathcal{X}$. Esta aplicación es un recubrimiento de Galois con grupo $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$.

Dados un recubrimiento conexo $q : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, una aplicación continua $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, y $q \circ f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es un recubrimiento, desarrollamos para $z$ un punto de $\mathcal{Z}$, $x = q(z)$ y $V$ una vecindad abierta y conexa de $x$ tal que $(q \circ f)^{-1}(V) = \amalg_i U_i$ y $q^{-1}(v) = \amalg_j V_j$ donde $U_i$, $V_j$ son homeomorfos a $V$. Para cada $U_i$ sus imágenes $f(U_i)$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{Z}$ aplicado sobre $V$ por $q$, de esta manera para algún $j$ se tiene $f(U_i) \subset V_j$. Este es un homeomorfismo siendo que ambos son mapeados homeomorficamente en $V$ por $q$, implicando que $f(\mathcal{Y})$ es un abierto de $\mathcal{Z}$.

## Lema

*Dados un recubrimiento conexo $q : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ y una aplicación continua $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$. Si $q \circ f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es un recubrimiento, entonces $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ es un recubrimiento.*

*Prueba.* Comenzaremos mostrando que $f$ es sobreyectiva. Para esto por conexidad de $\mathcal{Z}$ y $f(\mathcal{Y})$ ser abierto, el complemento de $f(\mathcal{Y})$ en $\mathcal{Z}$ es abierto. Si $z$ es un punto de $\mathcal{Z} \backslash f(\mathcal{Y})$ y $V$ es una vecindad de $x = q(z)$ como la descripción arriba, el componente $V_j$ de $q^{-1}(V)$ conteniendo $z$ sera disjunto desde $f(\mathcal{Y})$. Observado de otra manera, por el argumento anterior de $V_j$ podría estar contenido en $f(\mathcal{Y})$ que esto es una contradicción. Notando que la preimagen de $V_j$ por $f$ es una unión disjunta $\amalg U_i$ para algunos $i$.

## Teorema

**Teorema de recubrimientos de Galois**

*Sea $p : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un recubrimiento de Galois. Para cada subgrupo $H$ de $G = Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$ la proyección induce una aplicación natural $\bar{p}_H : H\backslash\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ que torna a $H\backslash\mathcal{Y}$ en un recubrimiento de $\mathcal{X}$.*

*Consecuentemente, si $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ es un recubrimiento conexo adecuado en un diagrama conmutativo, entonces $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ es un recubrimiento de Galois y el $\mathcal{Z} \simeq H\backslash\mathcal{Y}$ para el subgrupo $H = Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{Z})$ de $G$. La aplicación $H \mapsto H\backslash\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \mapsto Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{Z})$ induce una biyección entre subgrupos de $G$ y recubrimientos intermedios $\mathcal{Z}$. El recubrimiento $q : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ es de Galois si y sólo si $H$ es un subgrupo normal de $G$, en este caso $Aut(\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) \cong G/H$.*

# Esquema

Si se consideran sólo anillos con unidad, el propio anillo no es contado como ideal primo del mismo. Así es que el anillo cociente $A/P$ por un ideal primo $P$ es siempre un dominio de integridad, que es, un subanillo de un campo. Cada anillo no cero $A$ tiene al menos un ideal maximal. Esta existencia sigue del *lema de Zorn* y siendo maximal es primo por necesidad, de esta manera $Spec(A)$ es siempre no vació para $A \neq 0$.

**Ejemplo 5** Sea $\mathcal{O}_x$ el anillo local de un punto $x$ de una curva algebraica irreducible. Entonces $Spec(\mathcal{O}_x)$ consiste de dos puntos, el ideal maximal y el ideal cero.
Consideremos un homomorfismo[13] de anillos $\varphi : A \to B$. Notamos que la imagen inversa de cualquier ideal primo de $B$ es un ideal primo de $A$. Enviando un ideal primo de $B$ en su imagen inversa definimos una aplicación

$$^{a}\varphi : Spec(B) \to Spec(A),$$

llamada la *aplicación asociada* de $\varphi$.
En lo siguiente se presentan ejemplos con la noción de tipo, $Spec(\mathbb{C}[T]) \to Spec(\mathbb{R}[T])$ asociado con la inclusión $\mathbb{R}[T] \hookrightarrow \mathbb{C}[T]$.

[13] En los siguiente se consireran sólo homomorfismos que aplican $1_A \in A$ en $1_B \in B$.

**Ejemplo 6** Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[i]$ con $i^2 + 1 = 0$, y un tratamiento de números complejos con sus ideales primos, el espectro $Spec(\mathbb{Z}[i])$, usando la aplicación inclusión $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$. Esta define la aplicación

$$^a\varphi : Spec(\mathbb{Z}[i]) \to Spec(\mathbb{Z}).$$

Escribimos $\omega = (0) \in Spec(\mathbb{Z})$ y $\omega' = (0) \in Spec(\mathbb{Z}[i])$ para los puntos de $Spec(\mathbb{Z})$ y $Spec(\mathbb{Z}[i])$ correspondientes ideales cero. Podemos notar que $^a\varphi(\omega') = \omega$ y $(^a\varphi)^{-1}(\{\omega\}) = \{\omega'\}$.

Los otros puntos de $Spec(\mathbb{Z})$ corresponden a números primos. Por definición $({}^a\varphi)^{-1}(\{(p)\})$ es el conjunto de ideales primos de $\mathbb{Z}[i]$ que divide $(p)$. Como es bien conocido todos estos ideales son principales, y

$$({}^a\varphi)^{-1}(\{(p)\}) = \begin{cases} p \equiv 1 \quad mod\ 4 & \text{son dos ideales primos;} \\ p \equiv 3 \quad mod\ 4 & \text{es sólo uno.} \end{cases}$$

**Ejemplo 7** Recordamos que un subconjunto $S \subset A$ es un *sistema multiplicativo* si contiene $1_A$ y es cerrado bajo multiplicación. Para cada sistema multiplicativo, podemos construir un anillo de fracciones $A_S$ consistiendo de pares $(a, s)$ con $a \in A$ y $s \in S$, con una relación de igualdad definida por

$$(a, s) = (a', s') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists s'' \in S \quad \text{tal que} \quad s''(as' - a's) = 0.$$

Operaciones algebraicas definidas por

$$\begin{aligned} (a, s) + (a', s') &= (as' + a's, ss'); \\ (a, s)(a', s') &= (aa', ss'). \end{aligned}$$

En lo siguiente escribiremos $\frac{a}{s}$ para el par $(a, s)$. En particular si $S$ es el conjunto $A - \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $A$ entonces $A_S$ coincide con el anillo local $A_{\mathfrak{p}}$ de $A$ con un ideal primo.
Existiendo una aplicación $\varphi : A \to A_S$ definida por $a \mapsto (a, 1_A)$, y así también una aplicación

$$^a\varphi : Spec(A_S) \to Spec(A).$$

Notamos que $^a\varphi$ es una inclución, y que su imagen $^a\varphi(Spec(A_S)) = U_S$ es el conjunto de ideales primos de $A$ disjuntos desde $S$. La inversa $\psi : U_S \to Spec(A_S)$ es de la forma

$$\psi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}A_S = \left\{ \frac{x}{s} | \quad x \in \mathfrak{p} \quad \wedge \quad s \in S \right\}.$$

En particular, si $f \in A$ y $S = \{f^n| \quad n = 0, 1, \dots\}$ entonces $A_S$ es denotados por $A_f$.

El espacio topológico $Spec(A)$ es uno de los bloques edificadores de la definición de esquema. Otro bloque edificador es la noción de *sheaf*.

# Presheaves y Sheaves

Recordando las construcciones vistas en [2], es decir, el hecho de que una variedad afín $\mathcal{X}$ es por su anillo de funciones regulares $\mathbb{K}[\mathcal{X}]$, y de esta manera tenemos un camino comenzando de un anillo $A$ llegando a, su correspondiente objeto geométrico, su espectro primo $Spec(A)$. Para la definición de la noción general de esquema tomaremos funciones regulares en variedades como punto de partida. Es natural también considerar, para cualquier conjunto abierto $U \subset \mathcal{X}$, el anillo de funciones regulares en $U$. De esta manera comenzamos, no con un anillos, pero con un sistema de anillos, con varias conexiones entre ellos. Un sistema analogo es la base de la definición de esquema.

## Definición

*Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Suponiendo que con cada conjunto abierto $U \subset \mathcal{X}$ tenemos asociado un conjunto $\mathcal{F}(U)$ y con cuales quiera conjuntos abiertos $V \supset U$ una aplicación*

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U).$$

*Este sistema $\mathcal{F}$ de conjuntos y aplicaciones es un* **presheaf** *si cumple con las siguientes condiciones:*

1. *si $U$ es vació, el conjunto $\mathcal{F}(U)$ consiste de un elemento;*
2. *$\rho_U^U$ es la aplicación identidad esto para cualquier conjunto abierto $U$;*
3. *para cualquier conjunto abierto $U \subset V \subset W$, tenemos*

$$\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W.$$

Si todos los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ son grupos, módulos sobre un anillo A, o anillos, y las aplicaciones $\rho_U^V$ son homomorfismos de estas estructuras, entonces $\mathcal{F}$ es un presheaf de grupos, o $A$-módulos, o anillos respectivamente.

**Ejemplo 8** Si $\mathcal{F}$ es un presheaf en $\mathcal{X}$ y un conjunto abierto $U \subset \mathcal{X}$, entonces enviando $V$ a $\mathcal{F}(V)$ para subconjuntos abiertos $V \subset U$ definiendo así un presheaf en $U$. Este es llamado la *restricción* de el presheaf $\mathcal{F}$, y denotado por $\mathcal{F}|_U$.

**Ejemplo 9** Para un conjunto $M$, dado $\mathcal{F}(U)$ constiendo de todas las funciones en $U$ con valores en $M$ y para $U \subset V$, sea $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ la restricción de funciones de $V$ a $U$. Entonces $\mathcal{F}$ es llamado el *presheaf de todas las funciones* en $\mathcal{X}$ con valores en $M$.

**Ejemplo 10** Sean $M$ un espacio topológico, y $\mathcal{F}(U)$ conjunto de todas las funciones continuas en $U$ con valores en $M$, y $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ la restricción de funciones de $V$ a $U$. Entonces $\mathcal{F}$ es llamado el *presheaf de funciones continuas* en $\mathcal{X}$.

**Ejemplo 11** Sea $X$ una variedad diferenciable, y $\mathcal{F}(U)$ el conjunto de funciones diferenciables $U \to \mathbb{R}$, y$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ la restricción de funciones de $V$ a $U$.

**Ejemplo 12** Sea $\mathcal{X}$ una variedad quasiproyectiva irreducible, con la topología definida por tomar subvariedades algebraicas cómo los conjuntos cerrados. Para un conjunto abierto $U \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{F}(U)$ es el conjunto de funciones racionales en $\mathcal{X}$ que son regulares en todos los puntos de $U$, y $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ la restricción de funciones de $V$ a $U$. $\mathcal{F}$ es un presheaf de anillos. Este es llamado el *presheaf de funciones regulares*.

Supongamos que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es unión de conjuntos abiertos $U_\alpha$. Cada función en $\mathcal{X}$ es únicamente determinada por sus restricciones a los conjuntos $U_\alpha$, mas,si en cada $U_\alpha$ una función $f_\alpha$ es dada de manera que las restricciones de $f_\alpha$ y de $f_\beta$ a $U_\alpha \cap U_\beta$ coinciden entre ellas, así cada función $f$ en $\mathcal{X}$ es tal que $f_\alpha$ es la restricción de $f$ en $U_\alpha$. Las mencionadas propiedades de continuidad, diferenciabilidad y regularidad en el caso de variedades algebraicas quasiproyectivas expresan la naturaleza de la noción de función continua, diferenciable y regular, estas pueden ser formuladas para cualquier presheaf, y clases distinguibles y excepcionalmente importantes de presheaves.

## Definición

*Un presheaf $\mathcal{F}$ en un espacio topológico $\mathcal{X}$ es un* **sheaf** *si para cualquier conjunto abierto $U \subset \mathcal{X}$ y cualquier cubrimiento abierto $U = \cup U_\alpha$ de $U$ presenta las siguientes caracateristicas:*

1. *si $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ y $\rho^U_{U_\alpha}(s_1) = \rho^U_{U_\alpha}(s_2)$ para todo $U_\alpha$ entonces $s_1 = s_2$;*
2. *si $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ son tales que $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)$ para todo $U_\alpha$ y $U_\beta$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_\alpha = \rho^U_{U_\alpha}(s)$ para cada $U_\alpha$.*

## Definición

*El* **stalk** $\mathcal{F}_x$ *de un punto* $x \in \mathcal{X}$ *es el limite inductivo de los conjuntos* $\mathcal{F}(U)$ *tomado bajo todos los conjuntos abiertos* $Ux$ *con respecto al sistema de aplicaciones* $\rho_U^V$ *para* $U \subset V$*.*

## Definición

*Un* **espacio anillado** *es un par* $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ *consistiendo de un espacio topológico* $\mathcal{X}$ *y un sheaf de anillos* $\mathcal{O}$*.*

El sheaf $\mathcal{O}$ es algunas veces denotado por $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, y es llamado la *estructura de sheaf* de $\mathcal{X}$.

## Definición

*Un* **morfismo de espacios anillados** $\varphi : (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ *es una aplicación continua* $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *y una colección de homomorfimos*

$$\psi_U : \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$$

*para cuales quiera conjuntos abiertos* $U \subset V$.

## Definición (continuación)

*Colección de manera que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left(\varphi^{-1}(V)\right) \arrow[r, "\rho^{\varphi^{-1}(V)}_{\varphi^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\psi_V"] & \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\left(\varphi^{-1}(U)\right) \arrow[d, "\psi_U"] \\
\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(V) \arrow[r, "\rho^V_U"] & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(U)
\end{tikzcd}$$

*es conmutativo para cuales quiera conjuntos abiertos $U \subset V$ de $\mathcal{Y}$.*

## Definición

*Un* **esquema** *es un espacio anillado* $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ *para el cual cada punto tiene una vecindad* $U$ *de manera que el espacio anillado* $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}|U})$ *es isomorfo a* $Spec(A)$*, donde* $A$ *es algún anillo.*

A tráves de estas definiciones y los desarrollos presentes en [2] y [7], podemos observar objetos algebraicos como geométricos. Para esta observación para el caso de objetos proyectivos sea necesario preguntarnos *¿cuál es la relación?* entre un recubrimiento de un objeto geométrico y la noción geométrica del espectro[14] de un anillo cociente.

[14] Espectro proyectivo, visto cómo un esquema, visto cómo una variedad.

# Construcciones algebraicas de objetos geométricos

En la siguiente sección se presenta el desarrollo de un resultado que asocia un objeto geométrico con un objeto algebraico. Espacio de funciones complejas continuas sobre un espacio topológico Hausdorff compacto
Tenemos una variedad algebraica $\mathcal{X}$.(puede ser un espacio cociente) Para comenzar vamos a pensar en ella como, $\mathcal{X}$ un espacio topológico Hausdorff compacto.

Como necesitamos tener información de $\mathcal{X}$.
Tomamos

$$\mathbb{C}(\mathcal{X}) := \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{C} | \quad f \quad \textit{é continua}\}$$

$\mathbb{C}(\mathcal{X}) \subset \mathfrak{F}^{\mathcal{X}}_{\mathbb{C}}$ es una sub-álgebra.[15]

[15]$\cdot : \mathbb{C}(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}(\mathcal{X}) \to \mathbb{C}(\mathcal{X})$ es bilineal

¿Es posible reconstruir $\mathcal{X}$ a partir de $\mathbb{C}(\mathcal{X})$?
La respuesta es sí, para eso observamos en,

$$\textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) := \{I \subset \mathbb{C}(\mathcal{X}) | \quad I \quad \textit{é ideal maximal}\}$$

el espectro máximal, en el se puede definir una topología, la topología de Zariski,

$$\mathcal{V}(I) := \{\mathfrak{m} \in \textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) | I \subset \mathfrak{m}\}$$

de hecho $\mathcal{V}(I)$ tiene naturaleza de cerrado en $\textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\langle 1 \rangle) &= \emptyset \\ \mathcal{V}(\langle 0 \rangle) &= \textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda) &= \{\mathfrak{m} \in \textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) | I_\lambda \subset \mathfrak{m}, \forall \lambda\} \\ \cap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda) &= \left\{\mathfrak{m} \in \textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})) | \sum_\lambda I_\lambda \subset \mathfrak{m}\right\} \\ \cap_\lambda \mathcal{V}(I_\lambda) &= \mathcal{V}\left(\sum_\lambda I_\lambda\right); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(I_a) \cup \mathcal{V}(I_b) &= \{\mathfrak{m} \in \mathrm{M}\scriptstyle{\mathrm{AX}}\displaystyle(\mathbb{C}(\mathcal{X})) | I_a \subset \mathfrak{m} \wedge I_b \subset \mathfrak{m}\} \\
\mathcal{V}(I_a) \cup \mathcal{V}(I_b) &= \{\mathfrak{m} \in \mathrm{M}\scriptstyle{\mathrm{AX}}\displaystyle(\mathbb{C}(\mathcal{X})) | \, (I_a \cap I_b) \subset \mathfrak{m}\} \\
\mathcal{V}(I_a) \cup \mathcal{V}(I_b) &= \mathcal{V}(I_a I_b).
\end{aligned}
$$

Definimos $\varphi_x : \mathbb{C}(\mathcal{X}) \twoheadrightarrow \mathbb{C};\ f \longmapsto f(x)$.[16] para $x$ fijo $\ker(\varphi_x)$ es un ideal máximal por cuenta de que $\frac{\mathbb{C}(\mathcal{X})}{\ker(\varphi_x)} \cong \mathbb{C}$.[17]

[16] $\varphi_x(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \varphi_x(f) + \varphi_x(g)$.

[17] $\twoheadrightarrow \varphi_x$, pues existen $f$ constante

Entonces ahora definimos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{X} &\longrightarrow \textsc{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X})); \\ x &\longmapsto \mathfrak{m}_x := \ker(\varphi_x) \end{aligned}$$

¿$\Psi$ *sobreyectiva?*, esto es ,todo $\mathfrak{m}$ ideal máximal de $\mathbb{C}(\mathcal{X})$ es de la forma $\mathfrak{m}_x$?
Podemos pensar que la respuesta es no, que es $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_x$ para todo $x \in \mathcal{X}$, en otras palabras para cada $x$, existe $f_x \in \mathfrak{m}$ mas ${}_x\mathfrak{m}_x$, como $f_x$ é una aplicación(función) continua y $f_x(x) \neq 0$, existe $U_x$ abierto de $\mathcal{X}$ tal que $f_x(y) \neq 0$, $y \in U_x$.
Los $\{U_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ son una cubrimiento abierto de $\mathcal{X}$ que es compacto, por tanto existen $x_1, , x_n$ tales que $\mathcal{X} = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$.

Como $\mathfrak{m}$ es un ideal $g = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \bar{f_{x_i}} = \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}| \neq 0$ en $\mathcal{X}$ es un elemento de $\mathfrak{m}$, $g^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \left|f_{x_i}\right|} \in \mathbb{C}(\mathcal{X})$

$\mathfrak{m} = \langle 1 \rangle$ esto no puede ocurrir. Consiguiendo $\Psi : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \textrm{MAX}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))$.

¿$\Psi$ *es inyectiva?*, esto es, si $x \neq y$ en $\mathcal{X}$, entonces por el Lema de Urysohn existe $f \in \mathbb{C}(\mathcal{X})$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, por lo tanto $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$.
¿$\Psi$ continua?

$$\Psi^{-1}\left(\mathcal{V}(I)\right) = \{x \in \mathcal{X} | \mathfrak{m}_x \supset I\}$$

$$\Psi^{-1}\left(\mathcal{V}(I)\right) = \{x \in \mathcal{X} | f(x) = 0, \forall f \in I\} = \cap_{f \in I} f^{-1}(0)$$

¿$\Psi$ cerrada? Definimos $I_{\mathbf{F}} := \{f \in \mathbb{C}(\mathcal{X}) | f(y) = 0, \forall y \in \mathbf{F}\}$ donde $\mathbf{F}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{X}$

$$\Psi(\mathbf{F}) = \{\mathfrak{m}_x \in \mathrm{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))|x \in \mathbf{F}\}$$

$\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))\} = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))|f \in \mathfrak{m}, f(y) = 0,$

Supongamos $\Psi(\mathbf{F}) \not\subseteq I_{\mathbf{F}}$

$$\exists \mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x \not\supseteq I_{\mathbf{F}} \Rightarrow f \notin \mathfrak{m}_x, \quad f(y) = 0, \forall \in \mathbf{F}$$

Resultando $\Psi(\mathbf{F}) \subset I_{\mathbf{F}}$. ($\Psi$ es cerrada)

Dado un cerrado $\mathbf{F}$ en $\mathcal{X}$ se define el ideal

$$I_{\mathbf{F}} := \{f \in \mathbb{C}(\mathcal{X})|f(y) = 0, \forall y \in \mathbf{F}\}.$$

Tomamos la imagen por medio de $\Psi$ de un subconjunto cerrado $\mathbf{F}$ de $\mathcal{X}$ y podemos pensar que esta imagen no es un subconjunto cerrado de $\mathrm{Max}(\mathbb{C}(\mathcal{X}))$, esto es, $\Psi(\mathbf{F})$ distinto de $\mathcal{V}(I)$, para todo $I$ ideal en $\mathbb{C}(\mathcal{X})$.

En particular, podemos suponer que, $\Psi(\mathbf{F})$ es distinto de

Así, $\Psi(\mathbf{F})$ no esta contenido en $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$ o $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$. Decir que $\Psi(\mathbf{F})$ no esta contenido $I_{\mathbf{F}}$, es decir que existe $\mathfrak{m}_x$ no está $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$ con $y$ en $\mathbf{F}$, en otras palabras $m_x$ no contiene $I_{\mathbf{F}}$ lo que es absurdo pues

$$\mathfrak{m}_y = \{f \in \mathbb{C}(\mathcal{X}) | f(y) = 0\}.$$

Por lo tanto $\Psi(\mathbf{F})$ es subconjunto de $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$.
De nuestro supuesto podemos esperar que $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$ no esta contenido en $\Psi(\mathbf{F})$, existe $\mathfrak{m}$ en $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$ pero $\mathfrak{m}$ no está en $\Phi(\mathbf{F})$ con esto $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ para algún $x$ fuera de $\mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}$ y $\{x\}$ cerrados en $\mathcal{X}$ por el Lema de Urysohn existe $f$ en $\mathbb{C}(\mathcal{X})$ tal que $f|_F = 0$ y $f(x) = 1$, es decir $\mathfrak{m}_x$ fuera de $\mathcal{V}(I_{\mathbf{F}})$.[18]

[18] $f \in I_F$ mas $f \notin \mathfrak{m}_x$.

# Complementos topológicos

$\mathcal{X}$ Hausdorff compacto es un espacio topológico normal.
Un espacio topológico es normal si dados $U_1$ e $U_2$ cerrados disjuntos existen $V_1$ e $V_2$ abiertos disjuntos tales que, $V_i \supset U_i$, $i \in \{1, 2\}$.[19]
Afirmación.[20][Denotemos $x$, $y$ elementos de $U_1$, $U_2$ respectivamente]
Si tenemos $U_1$, $U_2$ cerrados disjuntos en $\mathcal{X}$.
Entonces existen $V_{1y}$, $V_y$ abiertos disjuntos tales que $V_{1y} \supset U_1$.

---

[19] Normal $\rightarrow$ Hausdorff
[20] $H \wedge C \longmapsto N$

*Prueba.* Para cada $y$ en $U_2$, exiten $V_{1y}$, $V_y$ abiertos disjuntos con $V_{1y} \supset U_1$, los $V_y$ constituyen un cubrimiento abierto de $U_2$.
Por el hecho de $U_2$ ser compacto[21] tenemos un cubrimiento finito $\{V_{y_\lambda}\}_{\lambda=1}^{n_2}$. Con esa familia finita encontramos $V_2 := \cap_{\lambda=1}^{n_2} V_\lambda$ y $V_1 := \cup_{\lambda=1}^{n_2} V_{1y_\lambda}$ abiertos disjuntos tales que $V_i \supset U_i$, $i \in 1, 2$.
$(\cdot)$ fijamos $y$ en $U_2$, para cada $x \in U_1$ tenemos $V_x$ y $V_\lambda$ abiertos disjuntos con $y \in V_\lambda$, tomamos los $\{V_x\}_{x \in U_1}$ como un cubrimiento de $U_1$ ser compacto relativo tenemos un cubrimiento finito $\{V_{x\lambda}{}_{\lambda=1}^{n_1}$ de $U_1$, definimos entonces $V_y := \cap_{\lambda=1}^{n_1} V_\lambda$ y $V_{1y} := \cup_{\lambda=1}^{n_1} V_{x\lambda}$ abiertos disjuntos con $V_{1y} \supset U_1$.

[21] Compacto relativo, con respecto a la topología inducida.2

# Espacio biproyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Consideramos es estudio de

$$\mathcal{X} := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

donde $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es el espacio proyectivo[22] obtenido a partir de $\mathbb{C}^2$.
Embebimiento de Segre

$$\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(U \otimes V).$$

Por medio del embebimiento de segre podemos ver a $\mathcal{X}$ como un espacio[23] proyectivo.
Para poner en evidencia que $\mathcal{X}$ posee estructura de esquema comenzaremos mencionando Sheaves, Sheaves invertibles en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

[22] $\mathbb{P}(V)$ es formado por todos los subespacios de dimensión 1 del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $V$.

[23] $\mathcal{X}$ espacio bi-proyectivo.

Entendiendo a las subvariedades de un espacio proyectivo de tipo $\mathbb{P}^3$ como una configuración multiproyectiva por el embebimiento de Segre. Un espacio multiproyectivo puede ser definido usando el lenguaje moderno de esquemas, será suficiente para por ahora proponer sólo considerar la construcción clásica, es decir, en términos de *geometría algebraica* identificación de ideales radicales y subconjuntos cerrados.
Para identificar ideales bihomogeneos de $\mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ y subconjuntos cerrados de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tenemos el *Nullstellensatz*[24] *bigraduado*.

[24] *Nullstellensatz: Teorema de Ceros (de Hilbert).*

El *espacio biproyectivo* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es el conjunto de las clases de equivalencia

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} := \left\{ ((a_0, a_1),\ (b_0, b_1)) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 | \begin{array}{ccc} (a_0, a_1) & \neq & (0,0) \\ (b_0, b_1) & \neq & (0,0) \end{array} \right\}_{/\sim}$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia $((a_0, a_1),\ (b_0, b_1)) \sim ((c_0, c_1),\ (d_0, d_1))$ si existen unos no cero $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $(a_0, a_1) = (\lambda c_0, \lambda c_1)$ y $(b_0, b_1) = (\mu d_0, \mu d_1)$.
Un elemento de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es llamado un *punto*. Denotaremos la clase de $((a_0, a_1),\ (b_0, b_1))$ por $[a_0 : a_1] \times [b_0 : b_1]$. Siguiendo que $[a_0 : a_1], [b_0 : b_1]$ son puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

Si $F \in \mathbf{R}$ es un elemento bihomogeneo de grado $(i, j)$ y $P = [a_0 : a_1] \times [b_0 : b_1]$ es un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, entonces

$$F(\lambda a_0, \lambda a_1, \mu b_0,\ \mu b_1) = \lambda^i \mu^j F(a_0, a_1, b_0, b_1) \quad \textit{para todo no cero} \quad \lambda$$

Así decimos que la noción de que $F$ anula un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ esta bien definida.
Si $T$ es cualquier conjunto de elementos bihomogeneos de $\mathbf{R}$, definimos

$$V(T) := \{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} | \quad F(P) = 0 \quad \textit{para todo} \quad F \in T\}.$$

Si $I$ es un ideal bihomogeneo de $\mathbf{R}$, entonces $V(I) := V(T)$ donde $T$ es el conjunto de todos los elementos bihomogeneos de $I$. Si $I = (F_1, \ \ldots, F_r)$, entonces $V(I) = V(\{F_1, \ldots, F_r\})$. El espacio biproyectivo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ puede ser dotado con una *topología por la definición de cerrados* a todos los subconjuntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ de la forma $V(T)$ donde $T$ es una colección de elementos bihomogeneos de $\mathbf{R}$. Si $Y$ es un subconjunto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ que es cerrado e irreducible con respecto a esta topología, de esta manera decimos que $Y$ es una *variedad biproyectiva*, o simplemente, una *variedad*.

Si $Y$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, el conjunto

$$I(Y) := \{F \in \mathbf{R} | \quad F(P) = 0 \quad \textit{para todo} \quad P \in Y\}.$$

El conjunto $I(Y)$ es un ideal bihomogeneo de $\mathbf{R}$ y es llamado el *ideal bihomogeneo asociado a* $Y$, o simplemente, el *ideal asociado a* $Y$. Si $P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es un punto, escribiremos[25] $I(P)$ a cambio de $I(\{P\})$. Llamamos a cociente $\mathbf{R}/I(Y)$ *el anillo de coordenadas bihomogeneo de* $Y$, o simplemente, el *anillos de coordenadas de* $Y$.

[25] En este momento estamos realizando un abuso de notación.

## Teorema

i. *Si* $I_1 \subseteq I_2$ *son ideales bihomogeneos, entonces* $V(I_1) \supseteq V(I_2)$;
ii. *Si* $Y_1 \subseteq Y_2$ *son subconjuntos de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, *entonces* $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$;
iii. *Para cualesquiera conjuntos* $Y_1$, $Y_2$ *de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

**Ejemplo 13** Consideremos el ideal del *Ejemplo 2*, que es, $\mathfrak{m} = (x_0, y_0) \cap (x_1, y_1)$ .
Siendo $V((x_0, y_0)) = \{[0:1] \times [0:1]\}$ y $V((x_1, y_1)) = \{[1:0] \times [1:0]\}$ tenemos

$$V(\mathfrak{m}) = \{[1:0] \times [1:0],\ [0:1] \times [0:1]\} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}.$$

La identificación mencionada arriba, es decir, correspondencia entre los objetos *anillos bigraduados* y *conjuntos cerrados en* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Es dada por la versión bigraduada de *Nullstellensatz*.

## Teorema

**Nullstellensatz bigraduado.** *Si* $I \subseteq \mathbf{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ *es un ideal bihomogeneo y si* $F \in \mathbf{R}$ *es un polinomio bihomogeneo con deg* $F \neq (0,0)$ *tal que si* $F(P) = 0$ *para todo* $P \in V(I) \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, *entonces* $F^t \in I$ *para algún* $t > 0$.

Una diferencia entre el caso graduado estándar y el caso bigrado es la noción de irrelevantes ideales.

## Definición

*Un ideal homogeneo $I$ de $\mathbf{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ es llamado proyectivamente irrelevante si $(x_, x_1)^t \subseteq I$ o $(y_0, y_1)^t \subseteq I$ para algún $t$. Un ideal $I \subseteq \mathbf{R}$ es proyectivamente relevante si no es proyectivamente irrelevante.11*

Un objeto que ejemplifica la definición anterior es $\mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_0y_1, x_1y_0, y_0y_1)$ de el *Ejemplo 2*. La siguiente afirmación puede se a probado adaptando la prueba del caso graduado y usando Nullstellensatz bigraduado.

## Teorema

*Existe una correspondencia biyectiva entre los subconjunto de cerrados no vácios de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *y los ideales bihomogeneos de* **R** *que son radicales, es decir,* $I = \sqrt{I}$, *y* **proyectivamente relevantes**. *La correspondencia es dada por*

$$Y \longmapsto I(Y) \qquad \wedge \qquad I \longmapsto V(I).$$

# Complementos algebraicos

## Teorema

*Caso especial de Bezout Bigraduado Sea $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ una forma bihomogenea con deg $F = (a, b)$, y sea $H \in \mathbf{R}_{1,0}$. Si la curva $V(F)$ y $V(H)$ comparten los mismos puntos contando con multiplicidades, entonces $F = HF'$.*

# *Prueba.*

Salvo un cambio de coordenadas, podemos asumir que, $H = x_0$. Aplicando el algoritmo de división para polinomios tiene tenemos $F = F'x_0 + F''$ donde $F'' = x_1^a G(y_0, y_1)$ y $G(y_0, y_1)$ es un polinomio homogéneo de grado $b$ en los $y_i$. Cualquier punto $P \in V(F) \cap V(H)$ teniendo la forma $P = [0 : 1] \times [b_1 : b_2]$ por que $P$ está en $V(H)$ . Así entonces $[b_1 : b_2] \in$ es un punto que se anula $G(y_0, y_1)$. Pues $G(y_0, y_1)$ es un polinomio homogéneo de grado $b$, teniendo exactamente $b$ raíces (contados con multiplicidades). También, existen más puntos $b$ (contados con multiplicidades) que en la interseccíon, tendrá $G(y_0, y_1) = 0$.

Existe una versión que ayuda al entendimiento de forma intuitiva, una versión más general de el *teorema de Bezout para el anillo bigraduado* $\mathbf{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$.

## Teorema

**Bezout bigraduado.** *Sea* $F, G \in \mathbf{R} = \mathbb{K}[x_0, x_1, y_0, y_1]$ *formas bihomogeneas de con grado deg* $F = (a, b)$ *y deg* $G = (c, d)$ *, suponiedo también que* $G$ *es irreducible. Si la curva* $V(F)$ *y* $V(G)$ *se contan en más de* $ad + bc$ *puntos (contados con multiplicidades), entonces* $F = GF'$*.*

# $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ cómo recubrimiento

Con lo mencionado en la sección anterior observaremos que $\mathcal{X}$ es un esquema por bondad del Teorema de ceros de Hilbert[26] para anillos bigraduados.
En el desarrollo de las subsecciones siguientes se asumiran las pruebas para este escrito, pudiéndolas encontrar en [4], [5], y [8]. Esto con la finalidad de observar con mayor claridad las nociones intuitivas de estos desarrollos.

[26] Nullstellensatz

## Teorema

*Cualquier variedad compleja conexa $\mathcal{X}$ puede ser escrita de la forma $\mathcal{X} = G \backslash \widetilde{\mathcal{X}}$ donde $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una variedad compleja simplemente conexa y $G$ es un grupo de automorfismos de $\widetilde{\mathcal{X}}$ actuando libre y discretamente.*

Para cuales quiera dos representaciones de la misma variedad compleja, los grupos $G$ y $G'$ son conjugados en el grupo de todos lo automorfismos de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

# Una variedad compleja simplemente conexa y sus automorfismos

El tratamiento analítico de algunos ejemplos de variedades complejas se encuentra en [3] (capítulo Superficies de Riemann).
Las variedades complejas 1-dimensionales simplemente conexas son:

1. La recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathrm{an}}$;
2. la recta afín $\mathbb{C}^1 = \mathbb{A}^1_{\mathrm{an}}$;
3. el disco unitario abierto $D \subset \mathbb{C}$ definido por $|z| < 1$.

estas dos primeras variedades complejas son llamadas la *esfera de Riemann* y el *plano complejo finito*.

## Proposición

*Cualquier automorfismo de $\mathbb{P}^1_{\mathrm{an}}$ tiene un punto fijo. Un grupo de automorfismos $G$ de $\mathbb{C}^1$ actúa libre y discretamente con el cociente compacto $G\backslash\mathbb{C}^1$ consistiendo de translaciones $z \mapsto z + a$, donde $a$ es recorrido a través de los vectores de algún latice de rango 2 en $\mathbb{C}$. Todos los automorfismos de el disco unitario son de la forma*

$$z \mapsto \theta \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad \textit{con} \qquad |\theta| = 1 \quad \wedge \quad |\alpha| < 1.$$

# Existen muchas variedades algebraicas no simplemente conexas de cualquier dimensión

Para cualquier grupo finito $\Gamma$ y cualquier entero $n \leq 2$ existe una $n$-dimensional variedad algebraica completa cuyo grupo fundamental es isomorfo a $\Gamma$.

**Ejemplo 14** *Tomamos* $\Gamma$ *el grupo simétrico en m elementos* $\Gamma = \mathfrak{S}_m$.
Consideremos el producto de $m$ copias de $s$-dimensional espacios proyectivos, $\Pi = \mathbb{P}^s \times \cdots \times \mathbb{P}^s$. Puntos $x \in \Pi$ son denotados por $x = (x_1, ..., x_m)$ con $x_i \in \mathbb{P}^s$. El grupo $\mathfrak{S}_m$ actua en $\Pi$ por permutaciones de m puntos:

$$g(x_1, ..., x_m) = (x_{i_1}, ..., x_{i_m}), \qquad \text{donde} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & ... & m \\ i_1 & ... & i_m \end{pmatrix}$$

Un paso de construcción es la construcción del espacio cociente $\Pi' = \mathfrak{S}_m \backslash \Pi$.

# Grupo fundamental $\pi_1$ finito para algunas variedades algebraicas

En esta subsección se mencionarán conceptos de manera familiar estos términos se encuentran en [5] texto *Geometría Algebraica Básica*, Shafarevich I. (2013).

Escribimos $\Delta \subset \Pi$ para el conjunto cerrado de todos los puntos $(x_1, \ldots, x_m)$ tal que $x_i = x_j$ para algún $i \neq j$, y el conjunto $\Delta' = \varphi(\Delta) \subset \Pi'$, y $W = \Pi - \Delta$, $W' = \Pi' - \Delta'$. Tenemos construido dos variedades no singulares $W$, y $W'$ más un recubrimiento no ramificado $\varphi : W \to W'$ con el grupo de automorfismos $\mathfrak{S}_m$.

El conjunto de puntos $(x_1, ..., x_m) \subset \Pi$ para los que $x_p = x_q$ tienen codimensiones en $\Pi$ y

$$\operatorname{codim}(\Delta \subset \Pi) = \operatorname{codim}(\Delta' \subset \Pi') = s.$$

Siendo $\mathcal{Y} \cap \Delta' = \emptyset$, que es, $\mathcal{Y} W'$, sigue que $\mathcal{X} = \varphi^{-1}(\mathcal{Y})$ es un recubrimiento no ramificado de $\mathcal{Y}$ con grupo de automorfismos $\mathfrak{S}_m$.19
Supongamos que todas las variedades son definidas bajo el campo de los números complejos.

$\mathcal{X}$ es obtenido desde $\Pi$ por interseción con hiper-superficies, que puede ser visto cómo la intersección con hiperplanos bajo el *embebimiento de Veronese* de $\Pi$ en un espacio proyectivo. Teniendo $\Pi(\mathbb{C})$ simplemente conexa, también es $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ simplemente conexa.
Vemos que $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ es el recubrimiento universal de $\mathcal{Y}(\mathbb{C})$, y $\pi_1(\mathcal{Y}(\mathbb{C})) = \mathfrak{S}_m$. Notando que $\mathcal{Y}(\mathbb{C})$ es proyectiva por construcción.

# Recubrimiento de una variedad compleja

Comenzando desde un recubrimiento no ramificado $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con grupo $\mathfrak{S}_m$, podemos podemos dar un recubrimiento con $\Gamma$ grupo finito (Arbitrario). Para ello soponemos que $\Gamma \subset \mathfrak{S}_m$. Observando que la extensión de campos $\mathbb{C}(\mathcal{Y}) \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ es de Galois con grupo $\mathfrak{S}_m$, por teoría de Galois el subgrupo $\Gamma$ corresponde a un subcampo intermedio $\mathbf{K}$ tal que $\mathbb{C}(\mathcal{Y}) \subset \mathbf{K} \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ y $\mathbf{K} \subset \mathbb{C}(\mathcal{X})$ es una extensión de Galois con grupo $\Gamma$.

Sea $\bar{\mathcal{Y}}$ la normalización de $\mathcal{Y}$ en $\mathbf{K}$. De propiedades de normalización, tenemos los morfismos,

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{Y}, \qquad \text{con} \qquad \psi \circ \bar{\varphi} = \varphi.$$

Tenemos desde las propiedades de morfismos finitos que $\bar{\varphi}$ y $\psi$ son finitos.

## Proposición

*El espacio $\bar{\mathcal{Y}}$ descrito arriba es no singular y no ramificado.22*

*Prueba* Siendo *deg* $\varphi =$ *deg* $\bar{\varphi}$*deg* $\psi$, y el número de imágenes inversas $\varphi^{-1}(y)$ de un punto cerrado $y \in \mathcal{Y}$ es igual a *deg* $\varphi$, así para cada $y \in \mathcal{Y}$ y $\bar{y} \in \bar{\mathcal{Y}}$, el número de imágenes inversas $\psi^{-1}(y)$ y $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{y})$ iguales a *deg* $\psi$ y *deg* $\bar{\varphi}$ respectivamente.
Así $\bar{\varphi}$ y $\psi$ son no ramificados.
Siendo $\mathcal{Y}$ no singular, resulta ser $\bar{\mathcal{Y}}$ proyectiva[27] no singular.

[27]Ya que la normalización de una variedad proyectiva es proyectiva.

## Proposición

*El grupo de simetrías $\mathfrak{S}_2$ con dos elementos, y los espacios proyectivos $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ estan relacionados por la siguiente expresión*

$$\mathfrak{S}_2 \backslash \left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\right) = \mathbb{P}^2,$$

*donde cada orbita del cociente se identifica con punto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^2$.*

Dado $\mathbb{P}^1$ un espacio proyectivo[28] no singular, y $G = \{1, g\}$ el grupo de orden 2 donde

$$g : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

es dado por $g(x, x') = (x', x)$. El espacio anillado de $\mathcal{Y} = G \backslash \left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\right)$ es un espacio complejo e incluso una variedad compleja de manera que

$$\pi_1 (\mathcal{Y}) = H_1 (\mathcal{X}) ,$$

donde $H_1$ es una forma en los polinomios $F_\alpha$.

[28] Una curva proyectiva no singular.