Introducción al análisis en $\mathbb{R}^d$

Jhon Alfredo Huarachi Galvez

September 15, 2017

Contents

Introducción

Notas de Emalca setiembre 2017

Chapter 1

Espacios Cartesianos

Sea $d \geq 1$ natural, $\mathbb{R}^d := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ un conjunto (El Producto Cartesiano) sobre el cual se establece una relación de igualdad entre sus elementos.
$x = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$

$$x = y \quad \textit{si y sólo si} \quad \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 \\ & \vdots & \\ x_d & = & y_d \end{cases} \quad \textit{si y sólo si} \quad x_i = y_i \; \forall i \in I_d := \{1, 2, ..., d\}$$

Se define una operación binaria '+' llamada *suma*,

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

con $x + y = (x_i + y_i)_{i=1}^d$ dicha operación binaria $\left(\mathbb{R}^d, +\right)$ toma una estructura de *Grupo Abeliano*, sobre este conjunto se presenta la *Acción* de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ con su estructura de Grupo Multiplicativo) como sigue:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$$

es decir $1_{\mathbb{R}} x = x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$. Estas operaciones interactuan entre si $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
Cuando esto ocurre se menciona que $(\mathbb{R}^d, +, \cdot)$ es un *Espacio Vectorial*.
¿Multiplicación Canónica? **Teorema de Frobenius**

Ejercicio. 1.1 *Verificar que para* $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$x \otimes y = (x_i y_i)_{i=1}^d$$

no es un producto. **¿Qué es un Producto?**

1.1 Bases de el espacio vectorial $\mathbb{R}^d$

Ejercicio. 1.2 *Si $x^1, ..., x^d$ es base de $\mathbb{R}^d$ y $z \in \mathbb{R}^d$, entonces existe una única sucesión $\{\alpha_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}$ tal que $z = \sum_{i=1}^d \alpha_i x^i$.*

Los vectores $e_i \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1, 0, ..., 0) \\ e_2 & = & (0, 1, ..., 0) \\ & \vdots & \\ e_d & = & (0, 0, ..., 1) \end{array}$$

engendran todo $\mathbb{R}^d$, además en caso extraigamos uno de ellos esto (engendrar todo el espacio $\mathbb{R}^d$) no ocurre más.
Con lo mencionado arriba comentamos que $e_1, e_2, ..., e_d$ es llamada la base canónica.

Ejercicio. 1.3 *Sean $\{\alpha_i\}_{i=2}^d \subset \mathbb{R}$. Definamos*

$$v_d = e_d, \qquad v_i = e_i + \alpha_{i+1} e_{i+1}, \ \forall i \in I_{d-1}$$

Probar que $v_1, v_2, ..., v_d$ es una base de $\mathbb{R}^d$.

1.2 $\mathbb{R}^d$ con una noción de distancia

$$d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty[$$

Sea $p \in [1, \infty[$,

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty := sup_{1 \leq i \leq d} |x_i - y_i|$$

casos importantes $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$.

Ejercicio. 1.4 *Verifique lo siguiente:*

$$\lim_{p \to \infty} \|x - y\| = \|x - y\|_\infty.$$

1.3 Unas cuantas desigualdades básicas

1.3.1 Un caso general

Ejercicio. 1.5 *Verifique que para todo $a > 0$ se cumple,*

$$1 \leq \frac{a^p}{p} + \frac{1}{q a^q}$$

donde $p \in]1, \infty[$ y $q = \frac{p}{p-1}$. Además, existe $\alpha \in]0, \infty[$ para el que la igualdad vale.

1.3.2 Desigualdad de Young

Ejercicio. 1.6

1.3.3 Desigualdad de Holder

Ejercicio. 1.7

1.3.4 Desigualdad de Minkoski

Ejercicio. 1.8