logounsa.jpg

Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa
Facultad de Ciencias Naturales y Formales
Escuela Profesional de Matemáticas
Notas de Aula

Análisis Numérico

Alumno: Huarachi Gálvez Jhon Alfredo

A cargo: Prof. Mg. Ricardo Hancco

Arequipa, Perú
25 de Mayo del 2016

Análisis Numério

Huarachi Gálvez Jhon Alfredo

Aprender lenguaje máquina. Resolver ecuaciones no lineales de una variable. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.(Solución aproximada) Resolver sistemas de ecuaciones lineales. Interpolarción.
Â¿Cuál es la motivación? (Como decidir, si usar una recta o polinomios de mayor grado) Integración numérica. Metodos numéricos para la solución de Ecuaciones Diferenciales.

Resumen

A continuación se presenta un panorama inicial del tema.
Â¡Cuidado con los algoritmos inestables!

1. Representación Numérica.
   - Representación Binaria.(base dos)
   - Representación Hexadecimal.(base diesiseis)
   - Representación Punto Flotante.(fluctuante)
2. Teoria de Errores.
   - Valor exacto y valor aproximado.
   - Error absoluto y error relativo.
   - Fuentes de error.(errores generados en el momento de hacer cuentas)
3. Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales de una variable.
   - (calcular la rapidez del Algoritmo)
   - (cuan cerca estamos de la Solución)
4. Sistemas de ecuaciones lineales.
   - Estudiaremos el caso $m = n$.
   - Tecnicas de pivoteo.(parcial o total)
   - El metodo de GAUSS JORDAN(es un metodo directo), despues de un número finito de pasos obtendremos la solución.
   - Existen metodos iterativos.(que ameritan una aproximación de entrada)
   - En que situaciones ocurren sucesos que nos alejen de la solución.
5. Técnicas de pivotéo.
   - Gauss-Jodan.
   - Descomposición LU.
   - Métodos iterativos.

- Descomposición de Cholesky.(Solo utíl para matrices simetricas)
- Gradiente conjuado.

6. Sistemas de ecuaciones no lineales.(con métodos iterativos)

   - Nota:
     Cuando se formulan las ecuaciones, el generador del problema tiene una idea de la solución.(dicha idea nos dara la aproximación de entrada)

7. Interpolación.

   - Objetivo.(minimizar el error)
   - Reducir el número de operaciones.(calculos)

8. Integración numérica.

   - Métodos para calcular integrales de manera aproximada.

9. Métodos numéricos para resolver $E.D.$

   - Resolver el $P.V.I.$

Abstract

Indice

Introducción

Capítulo 1

Representación Numérica

Representación Numérica.(base 2, base 16)
Â¿Cuidado con la aritmetica computacional?
Sucesiones y series.(repaso)

1.1 Sucesiones (Un Repaso Rapido)

Recordemos.

Definición 1.1.1. *Sea $a : A \to B$ una función, se dice que a es una suceción en $\mathbb{R}$ si $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{R}$.*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} 1 \to a(1)\ \dots\ a_1 \\ 2 \to a(2)\ \dots\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ n \to a(n)\ \dots\ a_n \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

Ejemplo 1.1.1. *$a_n = (-1)^n$ su desarrollo es $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, ...*
$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ su desarrollo es $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{4}$, ...

1.1.1 Sucesiones y Series

Definición 1.1.2. *Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es L, si se cumple:*
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que
$\forall n > k(\varepsilon)$ se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$
...
$|a_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Longleftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

Teorema 1.1.1. *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiónes convergentes,* $c \in \mathbb{R}$. *entonces:*

1. $a_n \pm b_n$ *converge y* $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $a_n \cdot b_n$ *converge y* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
   Â¡Manejar dichos teoremas de forma verbal!
3. $\frac{a_n}{b_n}$ *converge(siempre que* $b_n \neq 0$*) y* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *si* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$
4. ca_n *converge y* $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$
   Â¡Vale la pena demostrar dichas propiedades!

Ejemplo 1.1.2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Definición 1.1.3. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una suceción de números reales, se le llama serie a la sucesión conformada por las sumas parciales de* a_n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Suma de una serie infinita.

Definición 1.1.4. *Se dice que* S *es la suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *si se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = S$$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
Â¡Podriá no existir también!

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ . \\ . \\ . \\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \end{gathered}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo 1.1.3.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} =?$
$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}$
$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
$S_n = \frac{1}{2}\left(1 + S_n - \frac{1}{2^n}\right)$
$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$
$\lim S_n = 1$

Series Geometricas.

Proposición 1.1.1. *Sean* $c, r \in \mathbb{R}$*:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} cr^n ...(1)$$

1. *La serie (1) es convergente a* $\frac{c}{1-r}$, *si* $|r| < 1$
2. *La serie (1) diverge si* $|r| \geq 1$

1.2 Representación Binaria

Â¿$125 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$?

Teorema 1.2.1. *Si* $N \in \mathbb{Z}^+$, *existen* $b_j, b_{j-1}, ..., b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ *tal que* $N = b_j 2^j + b_{j-1} 2^{j-1} + ... + b_1 2^1 + b_0 2^0$ *...(1)*

Dicha descomposición es única.

Ejemplo 1.2.1. $9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Definición 1.2.1. *En (1) la representación binaria(en base 2) de* N *es:*

$$N = b_j b_{j-1} ... b_1 b_{0_{dos}}$$

Ejemplo 1.2.2.
9=1001$_{dos}$

Â¿Cómo cambiar de la base 10 a la base 2?

Lema 1.2.1. *Sea* $N \in \mathbb{R}^+$.

$$N = b_j b_{j-1} ... b_1 b_{0_{dos}}, \qquad b_i \in \{0, 1\}$$

$N = b_j 2^j + b_{j-1} 2^{j-1} + ... + b_1 2^1 + b_0 2^0$
$N = 2\left(b_j 2^{j-1} + b_{j-1} 2^{j-2} + ... + b_2 2^1 + b_1\right) + b_0$

Así, b_0 *es el residuo de dividir* N *entre* 2.

$Q_1 = b_j 2^{j-1} + b_{j-1} 2^{j-2} + ... + b_2 2^1 + b_1$
$Q_1 = 2\left(b_j 2^{j-2} + b_{j-1} 2^{j-3} + ... + b_3 2^1 + b_2\right) + b_1$

Así, b_1 *es el residuo de dividir* Q_1 *entre* 2.
...

Ejemplo 1.2.3. *Expresar 1996 en base 2.*

$$\begin{gathered}1996 = 2 \cdot 998 + 0 \\ 998 = 2 \cdot 499 + 0 \\ 499 = 2 \cdot 249 + 1 \\ 249 = 2 \cdot 124 + 1 \\ 124 = 2 \cdot 62 + 0 \\ 62 = 2 \cdot 31 + 0 \\ 31 = 2 \cdot 15 + 1 \\ 15 = 2 \cdot 7 + 1 \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 = 2 \cdot 1 + 1\end{gathered}$$

$$1996 = 11111001100_{dos}$$

Para cambiar de base decimal a base binaria.

```
CaracterBinario.m
function N=CaracterBinario(n)
b0=rem(n,2);
N=num2str(b0);
q1=fix(n/2);
while q1~=0
b0=rem(q1,2);
N=[num2str(b0),N]
q1=fix(q1/2);
end
```

Â¿Cómo pasar un número decimal $0 < R < 1$ a la base 2?

Teorema 1.2.2. *Si* $R \in \langle 0,1\rangle$, *existen* $d_1, d_2, ..., d_n, ... \in \{0,1\}$ *tales*

$$R = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n} + ...$$

Ejemplo 1.2.4. $0.625 = 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3}$

Representación binaria de R.

Definición 1.2.2. *La representación binaria de* R *en (base 2) es:*

$$R = 0.d_1 d_2 ... d_n ...$$

Ejemplo 1.2.5.

0.625=0.101$_{dos}$

$2.7 = b_j b_{j-1} ... b_1 b_0 . d_1 d_2 ... d_n ... = 10.1\mathbf{0110}0110\mathbf{0110}0110..._{dos} = 10.1\widehat{0110}_{dos}$

Cuando la serie es convergente, es posible factorizar.

Lema 1.2.2. *Sea* $R \in \langle 0,1\rangle$.

$R = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n} + ...$

$2R = d_1 + d_2 2^{-1} + d_3 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n+1} + ...$

Así, d_1 *es la parte entera de* $2R$

$F_{rac}(2R) = d_2 2^{-1} + d_3 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n+1} + ...$

$2F_{rac}(2R) = d_2 + d_3 2^{-1} + d_4 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n+2} + ...$

Así, d_2 *es la parte entera de* $2F_{rac}(2R)$

$F_{rac}(2F_{rac}(2R)) = d_3 2^{-1} + d_4 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n+2} + ...$

.

.

.

Ejemplo 1.2.6. *Representar 0.7 en base 2.*

$$R = 0.7$$

$2R = 1.4$	$d_1 = 1$	$F_1 = F_{rac}(1.4) = 0.4$
$2F_1 = 0.8$	$d_2 = 0$	$F_2 = F_{rac}(0.8) = 0.8$
$2F_2 = 1.6$	$d_3 = 1$	$F_3 = F_{rac}(1.6) = 0.6$
$2F_3 = 1.2$	$d_4 = 1$	$F_4 = F_{rac}(1.2) = 0.2$
$2F_4 = 0.4$	$d_5 = 0$	$F_5 = F_{rac}(0.4) = 0.4$

$$0.7 = 0.1\mathbf{0110}0110\mathbf{0110}0110..._{dos}$$

$$0.7 = 0.1\widehat{0110}_{dos}$$

Ahora. Dado $R \in \langle 0, 1\rangle$. (resulte un número con periodicidad en base 2)
Caso: $R = 0.\widehat{ab}_{dos}$

Ejemplo 1.2.7. *Hallar la representación en base 10 del número* $0.\widehat{ab}_{dos}$.

$$R = 0.\widehat{ab}_{dos}$$

$R = 0 * 2^0 + a * 2^{-1} + b * 2^{-2} + a * 2^{-3} + b * 2^{-4} + ...$
$R = a\left(2^{-1} + 2^{-3} + ...\right) + b\left(2^{-2} + 2^{-4} + ...\right)$
$x = 2^{-1} + 2^{-3} + ... \quad , \qquad y = 2^{-2} + 2^{-4} + ...$

$R = ax + by$

$x = 2^{-1} + 2^{-3} + ...$	$y = 2^{-2} + 2^{-4} + ...$
$4x = 2 + 2^{-1} + 2^{-3} + ...$	$4y = 1 + 2^{-2} + 2^{-4} + ...$
$4x = 2 + x$	$4y = 1 + y$
$x = \frac{2}{3}$	$y = \frac{1}{3}$

$$R = a\left(\frac{2}{3}\right) + b\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ejemplo 1.2.8.
R=0.$\widehat{10}_{dos}$
Recordando lo realizado en el ejemplo anterior.
$R = 1\left(\frac{2}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right)$
$R = \frac{2}{3}$

$$R = 0.\widehat{6}$$

```
CaracterBinarioDecimal.m
function R=CaracterBinarioDecimal(r,n)
d1=fix(2*r);
R=num2str(d1);
f1=2*r-d1;
a=0;
while a<n
d1=fix(2*f1);
R=[R,num2str(d1)];
f1=2*f1-d1;
a=a+1;
end
R=["0",".",R];
```

1.3 Representación punto Flotante

$$x_{dos} \approx q \cdot 2^n$$

(análogo a la notación científica) $q := mantisa$

$$\frac{1}{2} \leq q < 1$$

q esta en base 2.

Ejemplo 1.3.1.

$$0.101100111_{dos} * 2^{101_{dos}}$$

$\pm$	q	exp

$\mathbb{F}$ números de la máquina. $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$, es más

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

"No necesariamente cumplen propiedades(comutatividad) para la operación suma.

$$X \to F_{lot}(X)$$

Los números en $\mathbb{F}$ no cumplen asociatividad ni distibutividad.

$$x(y + z) = xy + xz$$

Así, $F_{lot}(x)(F_{lot}(y) + F_{lot}(z))$

$F_{lot}(x)F_{lot}(F_{lot}(y) + F_{lot}(z))$
$F_{lot}(F_{lot}(x)F_{lot}(F_{lot}(y) + F_{lot}(z)))$ ... (1)

En contra parte, $F_{lot}(x)F_{lot}(y) + F_{lot}(x)F_{lot}(z)$

$F_{lot}(F_{lot}(x)F_{lot}(y)) + F_{lot}(F_{lot}(x)F_{lot}(z))$
$F_{lot}(F_{lot}(F_{lot}(x)F_{lot}(y)) + F_{lot}(F_{lot}(x)F_{lot}(z)))$ ... (2)

De (1), (2) notoriamente se ve, que pueda, que no sean iguales.
Posiblemente.(no tendrian el mismo registro en el computador)

Ejemplo 1.1. 10101_{dos}
$N = 10101_{dos}$
$N = 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$
$N = 16 + 0 + 4 + 0 + 1$
$N = 21$

Ejemplo 1.2. 111000_{dos}
$N = 111000_{dos}$
$N = 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0$
$N = 32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 0$
$N = 56$

Ejemplo 1.3. 11111110_{dos}
$N = 11111110_{dos}$
$N = 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 1 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0$
$N = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0$
$N = 256 - 2$
$N = 254$

Ejemplo 1.4. 0.11011_{dos}
$R = 0.11011_{dos}$
$R = 0 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 0 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-5}$
$R = 0 + 1/2 + 1/4 + 0 + 1/16 + 1/32$
$R = 0.84375$

Ejemplo 1.5. 0.1010101_{dos}
$R = 0.1010101_{dos}$
$R = 0 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} + 0 * 2^{-4} + 1 * 2^{-5} + 0 * 2^{-6} + 1 * 2^{-7}$
$R = 0 + 1/2 + 0 + 1/8 + 0 + 1/32 + 0 + 1/124$
$R = 0.664314516129$

Ejemplo 1.6. 1.0110101_{dos}
$R = 1.0110101_{dos}$
$R = 1 * 2^0 + 0 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} + 0 * 2^{-4} + 1 * 2^{-5} + 0 * 2^{-6} + 1 * 2^{-7}$
$R = 1 + 0 + 1/4 + 1/8 + 0 + 1/32 + 0 + 1/124$
$R = 1.41431451613$

Ejemplo 1.7. $\frac{7}{16} = 0.4375$

$$R = 0.4375$$

$2R = 0.875$	$d_1 = E_{nt}(0.875) = 0$	$F_1 = F_{rac}(0.875) = 0.875$
$2F_1 = 1.75$	$d_2 = E_{nt}(1.75) = 1$	$F_2 = F_{rac}(1.75) = 0.75$
$2F_2 = 1.5$	$d_3 = E_{nt}(1.5) = 1$	$F_3 = F_{rac}(1.5) = 0.5$
$2F_3 = 1.0$	$d_4 = E_{nt}(1.0) = 1$	$F_4 = F_{rac}(1.0) = 0$

$R = 0.0111_{dos}$

Ejemplo 1.8. $\frac{23}{32} = 0.71875$

$$R = 0.71875$$

$2R = 1.4375$	$d_1 = E_{nt}(1.4375) = 1$	$F_1 = F_{rac}(1.4375) = 0.4375$
$2F_1 = 0.875$	$d_2 = E_{nt}(0.875) = 0$	$F_2 = F_{rac}(0.875) = 0.875$
$2F_2 = 1.75$	$d_3 = E_{nt}(1.75) = 1$	$F_3 = F_{rac}(1.75) = 0.75$
$2F_3 = 1.5$	$d_4 = E_{nt}(1.5) = 1$	$F_4 = F_{rac}(1.5) = 0.5$
$2F_4 = 1.0$	$d_5 = E_{nt}(1.0) = 1$	$F_5 = F_{rac}(1.0) = 0$

$R = 0.10111_{dos}$

Ejemplo 1.9. $\frac{1}{10} = 0.1$

$$R = 0.1$$

$2R = 0.2$	$d_1 = E_{nt}(0.2) = 0$	$F_1 = F_{rac}(0.2) = 0.2$
$2F_1 = 0.4$	$d_2 = E_{nt}(0.4) = 0$	$F_2 = F_{rac}(0.4) = 0.4$
$2F_2 = 0.8$	$d_3 = E_{nt}(0.8) = 0$	$F_3 = F_{rac}(0.8) = 0.8$
$2F_3 = 1.6$	$d_4 = E_{nt}(1.6) = 1$	$F_4 = F_{rac}(1.6) = 0.6$
$2F_4 = 1.2$	$d_5 = E_{nt}(1.2) = 0$	$F_5 = F_{rac}(1.2) = 0.2$

$R = 0.0\widehat{0011}_{dos}$

Ejemplo 1.10. $\frac{1}{7} = 0.\widehat{142857}$

$$R = 0.\widehat{142857}$$

$2R = 0.\widehat{285714}$	$d_1 = E_{nt}(0.\widehat{285714}) = 0$	$F_1 = F_{rac}(0.\widehat{285714}) = 0.\widehat{285714}$
$2F_1 = 0.\widehat{571428}$	$d_2 = E_{nt}(0.\widehat{571428}) = 0$	$F_2 = F_{rac}(0.\widehat{571428}) = 0.\widehat{571428}$
$2F_2 = 1.\widehat{142857}$	$d_3 = E_{nt}(1.\widehat{142857}) = 1$	$F_3 = F_{rac}(1.\widehat{142857}) = 0.\widehat{142857}$
$2F_3 = 0.\widehat{285714}$	$d_4 = E_{nt}(0.\widehat{285714}) = 0$	$F_4 = F_{rac}(0.\widehat{285714}) = 0.\widehat{285714}$

$R = 0.\widehat{0010}_{dos}$

Capítulo 2

Análisis de Errores

Fuentes de error
Medidas de error (tipos de error)
Aproximación

2.1 Fuentes de Error

1. **Error inherente.**
   Se debe a los instrumentos de medida.

2. **Error por truncamiento.**
   Consiste en contar decimales(terminos), en la representacioón de una cantidad.

$$\pi = 3.14159... \rightarrow 3.1415$$
$$e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} \approx \frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!}$$

3. **Error por redondeo.**
   Debido a la necesidad de usar un número finito de decimales, nos vemos obligados a redondear.
   Perdida de significancia. $2 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 10^{209}$

2.1.1 Formas de medir el error

1. **Error Absoluto:** Si $\hat{x}$ es una aproximación de un valor exacto x.
   El error absoluto de esa aproximación es

$$\varepsilon_a = |x - \hat{x}|$$

2. **Error Relativo**

$$\varepsilon_r = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}, \qquad x \neq 0$$

El error relativo es la fracción que representa el error absoluto en relación al valor exacto.

Ejemplo 2.1.1. *Determine cual de las siguientes aproximaciones es mejor en cuanto a precisión.*

1. $x = 1000Km$ $\qquad\qquad \hat{x} = 999Km$
   Solución:
   $\varepsilon_r = \frac{|1000-999|}{1000} = \frac{1}{1000} = 0.1\%$
2. $x = 2 \cdot 10^{-4}mm$ $\qquad\qquad \hat{x} = 2.1 \cdot 10^{-4}mm$
   Solución:
   $\varepsilon_r = \frac{|2\cdot 10^{-4} - 2.1\cdot 10^{-4}|}{2\cdot 10^{-4}} = \frac{0.1\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-4}} = 0.05 = 5\%$

Si tiene sentido comparar los errores relativos.
Si se olvida, esto puede traer implicancias graves, al finalde la resolución.

2.2 Dígitos Significativos

Definición 2.2.1. *Si $\hat{x}$ es una aproximación a x diremos que dicha aproximación es con d cifras significativas de precisión.*
Si d : es el mayor entero tal que,

$$\frac{|x - \hat{x}|}{|x|} < 0.5 \cdot 10^{-d}$$

Ejemplo 2.2.1. *Sea $x = \pi$ y $\hat{x} = 3.1416$*
Calcular el número de cifras significativas de precisión.

$$\frac{|\pi - 3.1416|}{\pi} < 0.5 \cdot 10^{-d}$$
$$2.3384349 \cdot 10^{-6} < 0.5 \cdot 10^{-d}$$
$$0.2338434 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-d}$$
$$0.0000023... < 0.5 \cdot 10^{-4} \qquad d = 4...(<)$$
$$0.0000023... < 0.5 \cdot 10^{-5} \qquad d = 5...(<)$$
$$0.0000023... < 0.5 \cdot 10^{-6} \qquad d = 6...(\not<)$$
$$2.3384349 \cdot 10^{-6} < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

Tiene cinco cifras significativas de precisión.

Ejemplo 2.2.2. *Calcular el número de cifras significativas de precisión en las aproximaciones siguientes:*

1. $x = 3.141592, \qquad \hat{x} = 3.14$

   $\frac{|3.141492-3.14|}{3.141592} < 0.5 \cdot 10^{-d}$

   $5.067... \cdot 10^{-4} < 0.5 \cdot 10^{-d}$
   $0.5067... \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-d}$
   $0.5067... \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-3} \qquad d = 3...(\not<)$
   $0.5067... \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-2} \qquad d = 2...(<)$
   $0.5067... \cdot 10^{-3} < 0.5 \cdot 10^{-2}$
   Tiene dos cifras significativas de precisión.

2. $x = 1000000, \qquad \hat{x} = 999996$

   $\frac{|1000000-999996|}{1000000} < 0.5 \cdot 10^{-d}$

   $4 \cdot 10^{-6} < 0.5 \cdot 10^{-d}$
   $0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-d}$
   $0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-5} \qquad d = 5...(<)$
   $0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-6} \qquad d = 6...(\not<)$
   $0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-5}$
   Tiene cinco cifras significativas de precisión.

3. $x = 0.000012, \qquad \hat{x} = 0.000009$

   $\frac{|0.000012-0.000009|}{0.000012} < 0.5 \cdot 10^{-d}$

   $0.25 \cdot 10^{0} < 0.5 \cdot 10^{-d}$
   $0.4 \cdot 10^{0} < 0.5 \cdot 10^{0} \qquad d = 0...(<)$
   $0.4 \cdot 10^{0} < 0.5 \cdot 10^{-1} \qquad d = 1...(\not<)$
   Â¿Tiene cero cifras significativas de precisión.?

0.005 Una cifra significativa.
0.205 Tres cifras significativas.
22.40 Cuatro cifras significativas.(o $2.240 * 10^{1}$ basada en una regla)
2200 Â¿No se sabe?
$2.2 \cdot 10^{3}$ Dos cifras significativas.
$22.0 \cdot 10^{2}$ Dos cifras significativas.
$220 \cdot 10^{1}$ Tres cifras significativas.
($2200 \cdot 10^{0}$ o 2200)Cuatro cifras significativas.

Definición 2.2.2. *Se dice que un número tiene n dígitos significativos exactos si el error absoluto no excede de $\frac{1}{2}$ la unidad situada en la posición n-énesima, contando de izquierda a derecha.*

Teorema 2.2.1. *Sea un número aproximado positivo, con n dígitos exactos y a_m su primer dígito significativo. El error relativo viene acotado por:*

$$|\varepsilon_r| \leq \frac{1}{a_m}\frac{1}{10}^{n-1}$$

Programa que determina el número de dígitos significativos, de una aproximación.

```
nudiss.m
function d=nudiss(x,x0)
% numero de digitos significativos
error=abs((x-x0)/x);
d=0;
while error<0.5*10^(-d)
d=d+1;
end
d=d-1;
```

2.3 Orden de Aproximación

"Comparar el comportamiento de funciones complicadas(o sucesiones complicadas) con funciones simples(o sucesiones simples)

(Comentario:Propagación del Error)

.

.

.

Definición 2.3.1. *Se dice que $f(h)$ es de orden $g(h)$ cuando $h \to 0$.*
Si existen $c, C > 0$ tales que,

$$|f(x)| \leq C|g(h)|$$

para cada h tal que $|h|C$

...

Notación: $f(h) = O(g(h))$

Ejemplo 2.3.1.

$$f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2, \qquad g(x) = x^2$$

$f(x)$ es de orden $g(x)$ cuando entre cero y uno.

$$x \to 0$$

Si cuando $x \in [-1,1]$ se tiene $x^3 \leq x^2$
$\Rightarrow \quad x^3 + 2 \cdot x^2 \leq 3 \cdot x^2$
$\Rightarrow$ *f(x)*$\leq 3 \cdot g(x)$
$\Rightarrow$ *f(x)*$\leq 3 \cdot |g(x)|$
$\therefore$ *—f(x)—*$\leq 3 \cdot |g(x)|$
para x tal que $|x| \leq 1$
$\Rightarrow$ *f(x)=O(x^2)*

Teorema 2.3.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^{n+1} y sean $x_0, x_0 + h \in \langle a,b \rangle$. Entonces,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)h}{1!} + \frac{f''(x_0)h^2}{2!} + ... + \frac{f^n(x_0)h^n}{n!} + \frac{f^{n+1}(\xi)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde ξ está entre x_0 y $x_0 + h$

Usando la notación: $O(g(x))$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)h}{1!} + ... + \frac{f^n(x_0)h^n}{n!} + O\left(h^{n+1}\right)$$

con $O\left(h^{n+1}\right) \leq C|h^{n+1}|$

Ejemplo 2.3.2. *Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$*
desarrollando al rededor de cero. $f(0+h) = f(0) + ... + O\left(h^{n+1}\right)$

$$e^h = f(0+h) = 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + O\left(h^4\right)$$

Â¿Cómo sabemos cuan pequeÃ$\pm oes? \to$ **tiene un residuo de orden cuatro**

$$\cos h = g(0+h) = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + O\left(h^6\right)$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{e}^h + \cos h = 2 + \frac{h}{1!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + O\left(h^4\right) + O\left(h^6\right)$
$\Rightarrow \quad \mathbf{e}^h + \cos h = 2 + h + \frac{h^3}{6} + O\left(h^4\right) + O\left(h^6\right)$
$\Rightarrow \quad \mathbf{e}^h + \cos h = 2 + h + \frac{h^3}{6} + O\left(h^4\right)$

Proposición 2.3.1. *Sean $O\left(h^p\right)$ y $O\left(h^q\right)$ residuos de ordenes p y q respectivamente,*

- $O\left(h^p\right) + O\left(h^p\right) = O\left(h^p\right)$
- $O\left(h^p\right) + O\left(h^q\right) = O\left(h^r\right)$ *donde $r = min\{p,q\}$*
- $O\left(h^p\right) \cdot O\left(h^q\right) = O\left(h^{p+q}\right)$

Orden de la aproximación de una sucesión.

$$x_n \to x \qquad \frac{n^3 + 2 \cdot n - \cos n}{n^4 + 3 \cdot n^2 + n + 1}$$

Comparar la rapidez de convergencia de una sucesión complicada, con la rapidez de convergencia de una sucesión simple.

Definición 2.3.2. *Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $x \in \mathbb{R}$ y sea $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a cero.*
Se dice que (x_n) tiende a x con orden $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si: existen $k > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que,

$$|x_n - x| \leq k \cdot |r_n|$$

para $n \geq N$.

Comentario:

Para un indice suficientemente grande se tiene que cumplir la desigualdad.

Ejemplo 2.3.3.

$$x_n = \frac{\cos n}{n^2} \qquad r_n = \frac{1}{n^2}$$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

como $\frac{1}{n^2} > 0$

$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$
$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq 1 \cdot \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq 1 \cdot \left|\frac{1}{n^2}\right|$
$x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

x_n tiene a su límite aproximadamente con la rapidez de convergencia que r_n tiende a cero.

Cometario:

$$\begin{gathered} O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \textit{más rapido} \\ \downarrow \\ O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{gathered}$$

$\Rightarrow |x_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n^2} - 0\right| \leq 1 \cdot \left|\frac{1}{n^2}\right|, \quad \forall n \geq 1,$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales de una variable

1. **Métodos Cerrados**
   - Método de Bisección.
   - Método de Falsa Posición.
2. **Métodos Abiertos**
   - Método de Punto Fijo.
   - Método de la Secante.
   - Método de Newton.

PROBLEMA:
Resolver $\quad f(x) = 0$
$\star Asumiremosque\mathrm{f}escontinua.$

3.1 Método de Bisección

Para resolver $f(x) = 0$ debemos encontrar un intervalo $[a_0, b_0]$ que contenga una solución.
...
FIGURA
...

$$r_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Si $f(a_0)f(r_0) < 0$ entonces $a_1 = a_0, \quad b_1 = r_0$.
en otro caso $\quad a_1 = r_0, \quad b_1 = b_0$.

$$r_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Si $f(a_1)f(r_0) < 0$ entonces $a_2 = a_1, \quad b_2 = r_1$.
en otro caso $\quad a_2 = r_1, \quad b_2 = b_1$.

$$r_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$$...$$

$$r_n \to r$$

$$f(r_n) \to 0$$

ya que $f(r) = 0$

Ejemplo 3.1.1. $x^3 - 2 = 0$ *Así,* $f(x) = x^3 - 2$
$f(1) = -1, \ f(2) = 6 \quad y \quad f(1) \cdot f(2) = -6 < 0$
Entonces en $\quad [1.2] \quad$ *hay solución.*

i	a_i	b_i	r_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(r_i)$
0	*1*	*2*	*1.5*	*-1*	*6*	*1.375*
1	*1*	*1.5*	*1.25*	*-1*	*1.375*	*-0.04687*
2	*1.25*	*1.5*	*1.375*	*-0.04687*	*1.375*	*0.5996*
3	*1.25*	*1.375*	*...*			

3.2 Método de Falsa Posición

Para resolver $f(x) = 0$ debemos encontrar un intervalo $[a_0, b_0]$ que contenga una solución.
...
FIGURA
...

$$L: \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$y - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \cdot (x - a_0)$
Tomamos el punto $(r_0, 0)$ $0 - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \cdot (r_0 - a_0)$

$$\boxed{\mathrm{r}_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} \cdot f(a_0)}$$

Comentario: $\uparrow Másbarata, computacionalmentehablando.$
f(b_0) $- f(a_0) \neq 0$
$f(b_0) \neq f(a_0)$
Â¿Que pasa cuando $f(b_0)$ es muy proximo $f(a_0)$?
Â¿La computadora reconoce diferencia entre $f(b_0)$ y $f(a_0)$?
Si $f(a_0)f(r_0) < 0$ entonces $a_1 = a_0, \quad b_1 = r_0$.
en otro caso $\quad a_1 = r_0, \quad b_1 = b_0$.

$$r_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{b_1 - a_1}$$

Ejemplo 3.2.1. $x^3 - 2 = 0$ *Así,* $f(x) = x^3 - 2$
$f(1) = -1$, $f(2) = 6 \quad y \quad f(1) \cdot f(2) = -6 < 0$
Entonces en $\quad [1.2] \quad$ *hay solución.*

i	a_i	b_i	r_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(r_i)$
0	*1*	*2*	*1.1428*	*-1*	*6*	*-0.5075*
1	*1.1428*	*2*	*1.2096*	*-0.5075*	*6*	*-0.2302*
2	*1.2096*	*2*	*1.2388*	*-0.2302*	*6*	*-0.0989*
3	*1.2388*	*2*	*1.2588*	*-0.0989*	*6*	*-0.0417*
4	*1.2588*	*...*				

Redondear como la forma estandar.

3.3 Método de Punto Fijo

Definición 3.3.1. *Si* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función, se dice que* x_0 *es punto fijo de* g *si* $g(x_0) = x_0$.

Teorema 3.3.1. *Si* g *es continua en* $[a, b]$ *y* $f([a, b]) \subset [a, b]$.
Entonces f *tienen por lo menos un punto fijo en* $[a, b]$.

...
FIGURA

...
Encontrar una buena g. (una g apropiada)
Resolver $f(x) = 0$ ...$(\star)$
$Transformarlaecuaciónenlaforma$g(x)=x ...$(\star\star)$
$(\star\star) equivaleaencontrarunpuntofijodeg.r_0, r_1 = g(r_0), r_2 = g(r_1), r_3 = g(r_2), ... \to \mathbf{r}$

Ejemplo 3.3.1. $x^2 + x - 10 = 0$ *donde* $f(x) = x^2 + x - 10$
$10 - x^2 = x$ *donde* $g(x) = 10 - x^2$

Teorema 3.3.2. *Sea* $p \in [a, b]$, *se dice que* p *es un punto fijo de una función* f *si* $g(p) = p$

Ejemplo 3.3.2. $g(x)x^3$
$g(0) = 0, g(1) = 1, g(-1) = -1$
$-1, 0y1$ *son puntos fijos de* f.

Ejemplo 3.3.3. $f(x) = x^2 - 4$
$f(x) = x$
$x^2 - 4 = x$
$x^2 - x - 4 = 0$ $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

Sus puntos fijos son:

$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ *y* $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

Comentario:
Resolver $f(x) = 0$.
Se convierte, en hallar el punto fijo de $g(x)$.
Así, $\boxed{f(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0}$
...
FIGURA
...
$p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), ...$
Â¿$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge a** p**?**
...
FIGURA
...
Â¿En que caso $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge?

Ejemplo 3.3.4. $1 - \frac{x^2}{4} = 0$
Equivale a resolver
$1 + x - \frac{x^2}{4} = x$ *donde* $g(x) = 1 + x - \frac{x^2}{4}$

i	p_i	$f(p_i)$	$g(p_i)$
0	*1.6000*	*0.3600*	*1.9600*
1	*1.9600*	*0.0396*	*1.9996*
2	*1.9996*	*0.0003*	...

3.4 Método de Newton

Resolver $f(x) = 0$.
...
FIGURA
...
$L : y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y_f(r_0) = f'(r_o)(x - r_0)$$

$0_f(r_0) = f'(r_o)(r_1 - r_0)$
$r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)}$
$\boxed{\mathrm{r}_{k+1} = r_k - \frac{f(r_k)}{f'(r_k)}, con \quad k = \{0, 1, ...\}}$
Â¡f debe se diferenciable con derivada no nula!
Alrededor (o cerca de **r**)

Observación 3.4.1. *Si definimos* $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ *(llamando a* $g(x)$ *función iteradora) la fórmula del metodo de Newton quedaría.*

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_{k+1})$
$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = g\left(\lim_{k\to\infty} x_{k+1}\right)$
$\Rightarrow \quad$ r=g(r)

Observación 3.4.2. *Observamos que los puntos fijos de* g *son soluciones de* $f(r) = 0$ *Es decir el problema se reduce a encontrar puntos fijos de* g*.*

Ejemplo 3.4.1. $x^3 - 2 = 0$
$f(x) = x^3 - 2, \quad f'(x) = 3 \cdot x^2$

i	r_i	$f(r_i)$
0	*1*	*-1*
1	*1.3333*	*0.3703*
2	*1.2639*	*0.0190*
3	*1.2599*	...

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25992104989487$$

3.5 Método de la Secante

Resolver $f(x) = 0$.

...

FIGURA

...

$$L : y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - f(r_1) = \frac{f(r_1) - f(r_0)}{r_1 - r_0} \cdot (x - r_1)$$
$$Evaluamos\ en\ el\ punto (r_2, 0).$$
$$0 - f(r_1) = \frac{f(r_1) - f(r_0)}{r_1 - r_0} \cdot (r_2 - r_1)$$
$$r_2 = r_1 - \frac{r_1 - r_0}{f(r_1) - f(r_0)} \cdot f(r_1)$$
$$\boxed{r_{k+1} = r_k - \frac{r_k - r_{k-1}}{f(r_k) - f(r_{k-1})} \cdot f(r_k), con \quad k = \{0, 1, ...\}}$$

Ejemplo 3.5.1. $x^3 - 2 = 0$

i	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
1	*1.5*	*2*	*1.3514*	*0.4680*
2	*2*	*1.3514*	*1.2965*	*0.1793*
3	*1.3514*	*1.2965*	*1.2641*	*0.0199*
4	*1.2965*	*1.2641*	*1.2600*	*0.0003*
5	*1.2641*	*1.2600*	*1.2599*	*...*

Capítulo 4

Análisis de Convergencia