INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Contenido

Contenido

Introducción

- Herramienta que se usa en la ciencia y la ingeniería para obtener valores aproximados de las integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente.
- Las fórmulas de integración numérica se usarán para construir los métodos de predicción y corrección utilizados en al resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- El objetivo es aproximar la integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ evaluando $f(x)$ en un número finito de puntos.

Introducción

- Herramienta que se usa en la ciencia y la ingeniería para obtener valores aproximados de las integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente.
- Las fórmulas de integración numérica se usarán para construir los métodos de predicción y corrección utilizados en al resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- El objetivo es aproximar la integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ evaluando $f(x)$ en un número finito de puntos.

Introducción

- Herramienta que se usa en la ciencia y la ingeniería para obtener valores aproximados de las integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente.
- Las fórmulas de integración numérica se usarán para construir los métodos de predicción y corrección utilizados en al resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- El objetivo es aproximar la integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ evaluando $f(x)$ en un número finito de puntos.

Contenido

Definiciones

Definición

Sean $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots. < x_M = b$. Una fórmula del tipo

$$Q[f] = \sum_{k=0}^{M} w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots\ldots\ldots. + w_M f(x_M)$$

Definiciones

de manera que

$$\int_a^b f(x)dx = Q[f] + E[f]$$

se llama fórmula de *Integración Numérica* o de *Cuadratura;* $E[f]$ se llama *Error de truncamiento* de la fórmula; los valores $\{x_k\}_{k=0}^{M}$ se llaman *Nodos de integración* o *Nodos de Cuadratura* y los valores $\{w_k\}_{k=0}^{M}$ se llaman *pesos* de la fórmula.

Contenido

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

Teorema: *Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes*

Sean $x_k = x_0 + kh \ \ (k = 0, 1, ..., M)$ nodos equiespaciados y sea $f_k = f(x_k)$ para $k = 0, 1, ...M$. Las cuatro primeras fórmulas cerradas de Newton-Cotes son:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad \text{(Regla del Trapecio)}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{(Regla de Simpson)}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \text{(Regla } \tfrac{3}{8} \text{ de Simpson)}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \qquad \text{(Regla de Boole)}$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

Demostración Regla de Simpson:

El Polinomio Interpolador de Lagrange $P_M(x)$ para los nodos $x_0, x_1, ..., x_M$ que se usa para aproximar $f(x)$ es:

$$f(x) \approx P_M(x) = \sum_{k=0}^{M} f_k L_{M,k}(x),$$

con $f_k = f(x_k)$ para $k = 0, 1, ...M$.

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

Así, aproximando la integral de $f(x)$ por la integral de $P_M(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_M} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_M} P_M(x)dx = \int_{x_0}^{x_M} \left(\sum_{k=0}^{M} f_k L_{M,k}(x) \right) dx \\
&= \sum_{k=0}^{M} \left(\int_{x_0}^{x_M} f_k L_{M,k}(x)dx \right) \\
&= \sum_{k=0}^{M} \left(\int_{x_0}^{x_M} L_{M,k}(x)dx \right) f_k = \sum_{k=0}^{M} w_k f_k. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

Se determinan los pesos w_k para el caso particular $M = 2$ (Regla de Simpson):

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

De (1):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx. \tag{2}$$

- Cambio de variable: $x = x_0 + ht \;\Rightarrow\; dx = h\,dt$
- Nuevos límites: $\begin{array}{lcl} x = x_0 & \Rightarrow & ht = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = x_2 & \Rightarrow & ht = x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow t = 2 \end{array}$
- Como los nodos $x_k = x_0 + kh$ están equiespaciados, podemos escribir $x_k - x_j = (k-j)h$ y $x - x_k = h(t-k)$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

De (1):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx. \tag{2}$$

- Cambio de variable: $x = x_0 + ht \;\Rightarrow\; dx = h\,dt$
- Nuevos límites: $\begin{array}{lcl} x = x_0 & \Rightarrow & ht = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = x_2 & \Rightarrow & ht = x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow t = 2 \end{array}$
- Como los nodos $x_k = x_0 + kh$ están equiespaciados, podemos escribir $x_k - x_j = (k-j)h$ y $x - x_k = h(t-k)$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

De (1):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx. \tag{2}$$

- Cambio de variable: $x = x_0 + ht \;\Rightarrow\; dx = h\,dt$
- Nuevos límites: $\begin{array}{lcl} x = x_0 & \Rightarrow & ht = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = x_2 & \Rightarrow & ht = x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow t = 2 \end{array}$
- Como los nodos $x_k = x_0 + kh$ están equiespaciados, podemos escribir $x_k - x_j = (k-j)h$ y $x - x_k = h(t-k)$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

De (1):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx f_0 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx + f_1 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx + f_2 \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx. \tag{2}$$

- Cambio de variable: $x = x_0 + ht \;\Rightarrow\; dx = h\,dt$
- Nuevos límites: $\begin{array}{lll} x = x_0 & \Rightarrow & ht = x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = x_2 & \Rightarrow & ht = x_2 - x_0 = 2h \Rightarrow t = 2 \end{array}$
- Como los nodos $x_k = x_0 + kh$ están equiespaciados, podemos escribir $x_k - x_j = (k-j)h$ y $x - x_k = h(t-k)$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

(2) se escribe entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx &\approx f_0 \int_0^2 \frac{h(t-1)h(t-2)}{(-h)(-2h)} h\,dt + f_1 \int_0^2 \frac{h(t-0)h(t-2)}{(h)(-h)} h\,dt + f_2 \int_0^2 \frac{h(t-0)h(t-1)}{(2h)(h)} h\,dt \\
&= f_0 \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt - f_1 h \int_0^2 (t^2 - 2t)dt + f_2 \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - t)dt \\
&= f_0 \frac{h}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_{t=0}^{t=2} - f_1 h \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} + f_2 \frac{h}{2} \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=2} \\
&= f_0 \frac{h}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) - f_1 h \left(\frac{8}{3} - 4 \right) + f_2 \frac{h}{2} \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \\
&= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)
\end{aligned}$$

Contenido

Regla compuesta del trapecio

Teorema: *Regla compuesta del trapecio*

Supongamos que se divide el intervalo $[a, b]$ en M subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ de ancho común $h = \frac{(b-a)}{M}$ mediante una partición cuyos nodos $x_k = a + kh$, para $k = 0, 1, ..., M$, están equiespaciados.

Regla compuesta del trapecio

La Regla compuesta del trapecio con M subintervalos se expresa así:

$$T(f,h) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{M}(f(x_{k-1})+f(x_k))$$

o bien

$$T(f,h) = \frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+2f_3+\ldots\ldots..+2f_{M-2}+2f_{M-1}+f_M)$$

o bien

$$T(f,h) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{k=1}^{M-1}f(x_k).$$

Regla compuesta del trapecio

Este valor es una aproximación a la integral de $f(x)$en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f, h).$$

Regla compuesta del trapecio

Demostración:

Aplicando la Regla del trapecio sobre cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y usando la propiedad de aditividad de la integración, obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{M} \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$

Contenido

Regla compuesta de Simpson

Teorema: *Regla compuesta de* Simpson

Supongamos que se divide $[a, b]$ en $2M$ subintervalos $[x_k, x_{k+1}]$ del mismo ancho $x_k = \frac{(b-a)}{2M}$ mediante una partición de nodos equiespaciados $x_k = a + kh$, para $k = 0, 1, ...,2M$.

Regla compuesta de Simpson

La *Regla compuesta de Simpson con* $2M$ *subintervalos* se puede expresar así:

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{M}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

o bien

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots\ldots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}\right)$$

o bien

$$S(f,h) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}).$$

Regla compuesta de Simpson

Este valor es una aproximación a la integral de $f(x)$ en $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(f, h).$$

Regla compuesta de Simpson

Demostración:

Aplicando la regla de Simpson sobre cada $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ y usando la propiedad de aditividad de la integración, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{M} \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) \\
&= \frac{h}{3} \sum_{k=1}^{M} \left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right).
\end{aligned}$$

Bibliografía

MATHEWS, John; KURTIS, Fink.
Métodos Numéricos con MATLAB.
Prentice Hall, 2000.