Método de Newton-Raphson y de Punto Fijo

Métodos numéricos

Camilo Cubides
eccubidesg@unal.edu.co

Research Group on Artificial Life – Grupo de investigación en vida artificial – (Alife)
Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

(Intersemestral 2016)

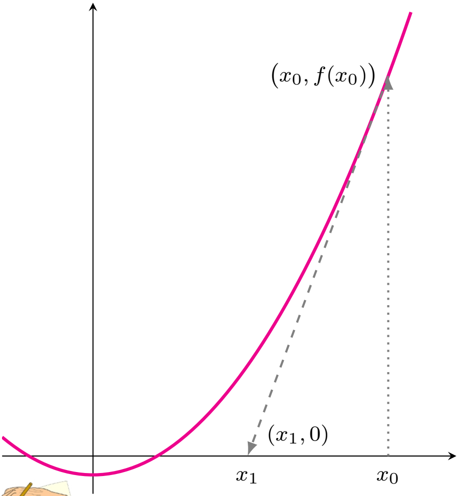
Agenda

1. **Resolución de ecuaciones no lineales por métodos abiertos**
   - Método de Newton-Raphson
   - Método de iteración simple de punto fijo

Outline

1. Resolución de ecuaciones no lineales por métodos abiertos
   - Método de Newton-Raphson
   - Método de iteración simple de punto fijo

Método de Newton-Raphson I

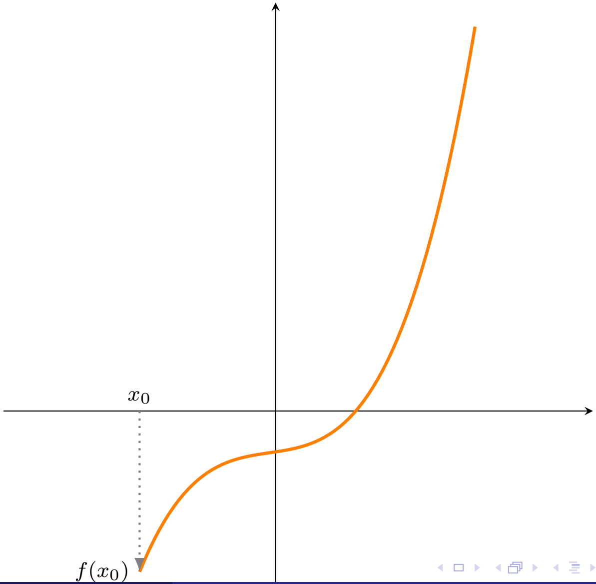


$$
\begin{aligned}
m &= \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} \\
f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} \\
x_0 - x_1 &= \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
-x_1 &= -x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}
$$

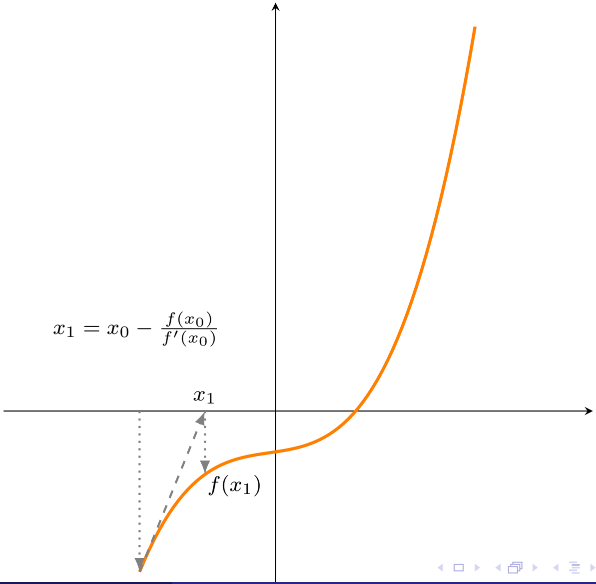
en general

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

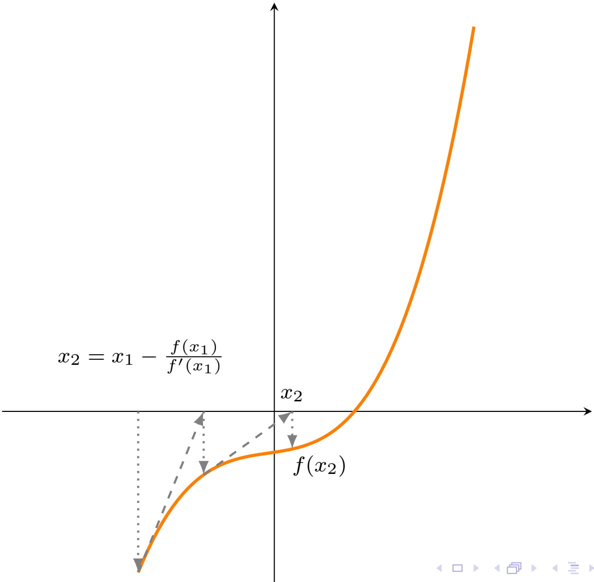
Método de Newton-Raphson II



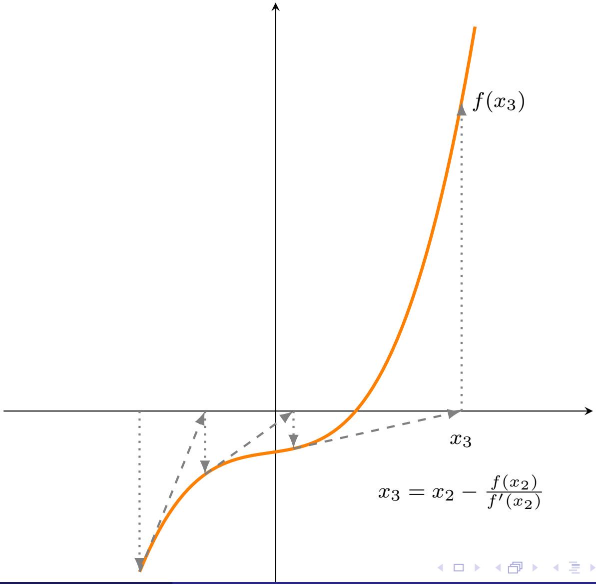
Método de Newton-Raphson III



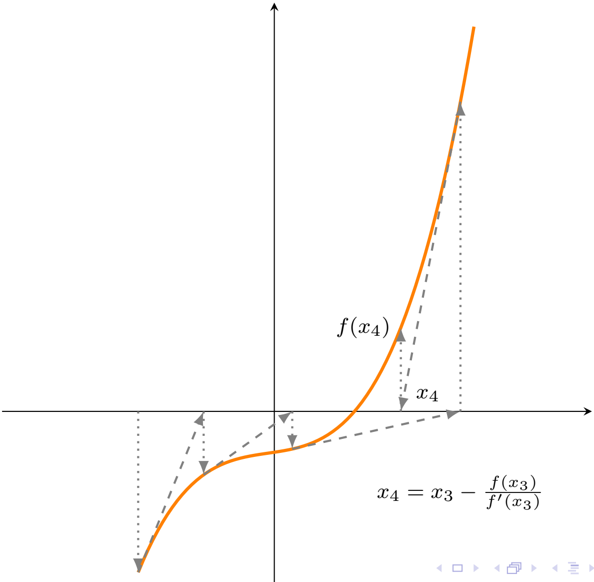
Método de Newton-Raphson IV



Método de Newton-Raphson V

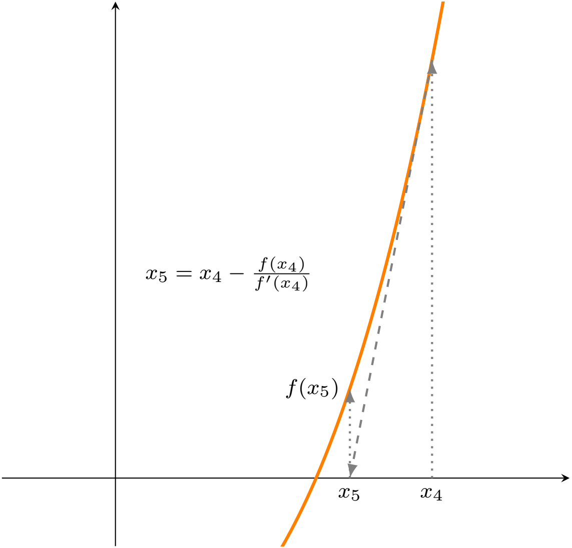


Método de Newton-Raphson VI

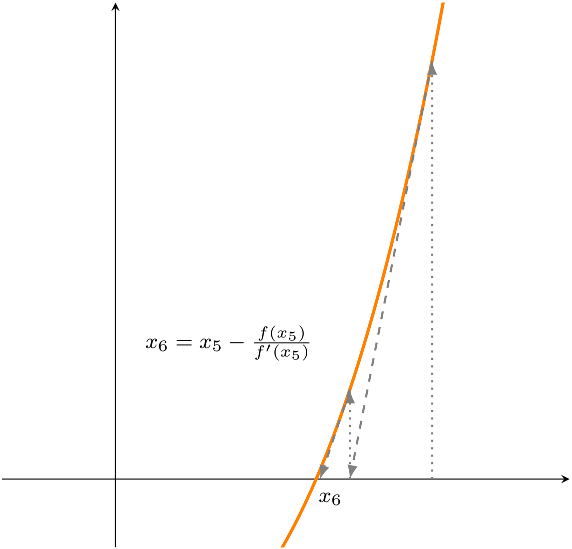


$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Método de Newton-Raphson VII



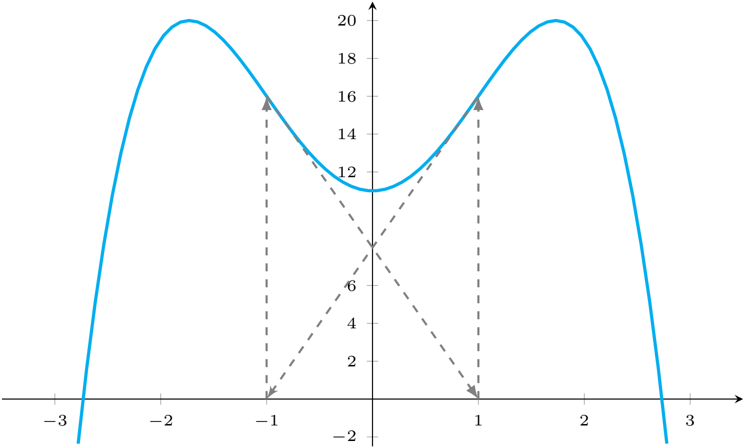
Método de Newton-Raphson VIII



Método de Newton-Raphson IX

¡El método de Newton-Raphson no es infalible! I

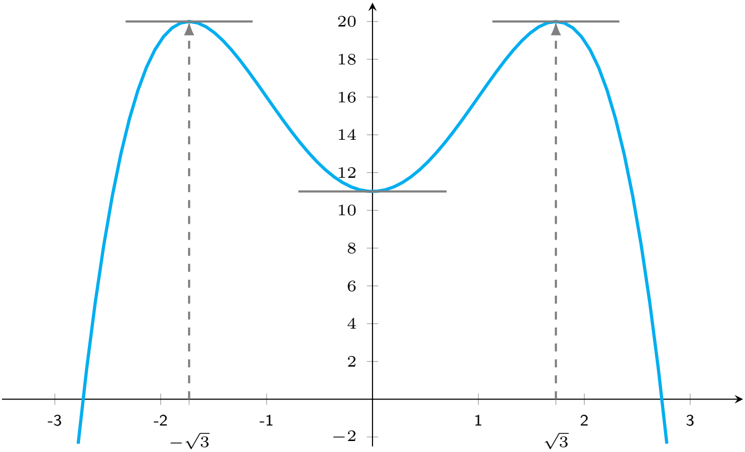
$$f(x) = -x^4 + 6x^2 + 11$$



Método de Newton-Raphson X

¡El método de Newton-Raphson no es infalible! II

$$f(x) = -x^4 + 6x^2 + 11$$



Teorema de Newton-Raphson XI

Theorem (Teorema de Newton-Raphson)

Supóngase que la función $f \in \mathcal{C}^2\big([a,b]\big)$ *y que existe un número* $p \in [a,b]$ *tal que* $f(p) = 0$*. Si* $f'(p) \neq 0$*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que la sucesión* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *definida por el proceso iterativo*

$$p_n = g\big(p_{n-1}\big) = p_{n-1} - \frac{f\big(p_{n-1}\big)}{f'\big(p_{n-1}\big)}, \qquad \textit{para} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

converge a p *cualquiera que sea la aproximación inicial* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$*.*

Teorema de Newton-Raphson XII

Función de iteración de Newton-Raphson

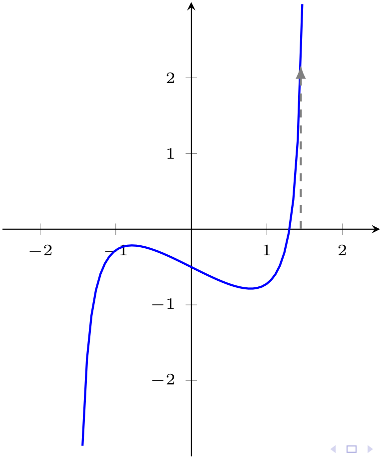
a función $g(x)$ del teorema anterior, se encuentra definida por la relación

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

y se le suele llamar la *función de iteración de Newton-Raphson*, ésta tiene la característica de que si $f(p) = 0$, entonces $g(p) = p$, con lo cual se deduce que encontrar una raiz p de la ecuación $f(x) = 0$, esto equivale a encontrar un valor p tal que $g(p) = p$.

Resolución de ecuaciones no lineales por medio del método de Newton-Raphson I

$$f(x) = \frac{1}{2}\tan(x) - x - \frac{1}{2}, \qquad ¿f(p) = 0?$$



Resolución de ecuaciones no lineales por medio del método de Newton-Raphson II — (Scilab)

$$f(x) = \frac{1}{2}\tan(x) - x - \frac{1}{2}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\sec^2(x) - 1$$

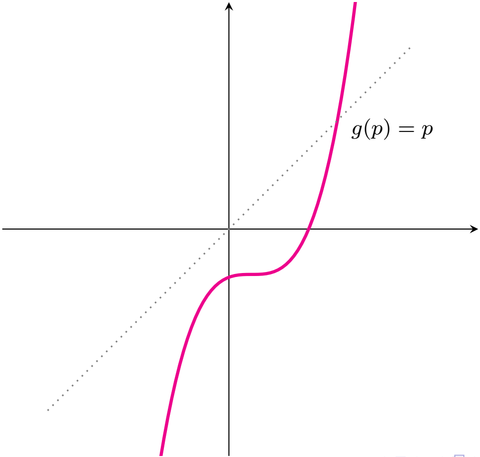
i	Xi	f(Xi)	|f(Xi)|
0	1.45000000	2.16904638	2.16904638
1	1.38512276	0.77675840	0.77675840
2	1.32830572	0.19305539	0.19305539
3	1.30314144	0.02011210	0.02011210
4	1.29987038	0.00027554	0.00027554
5	1.29982431	0.00000005	0.00000005

¡EXITO! el cálculo fue exitoso, la mejor aproximación de la raiz es: 1.299824311553

Conceptos previos sobre puntos fijos I

Definition

Un *punto fijo* de una función $g(x)$ es un número p tal que $g(p) = p$.



Conceptos previos sobre puntos fijos II

Definition

La iteración $p_{n+1} = g(p_n)$ para $n = 0, 1, \ldots$ se dice que es una *iteración de punto fijo*.

Theorem

Supóngase que g *es una función continua y que* $\{p_i\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión generada por iteración de punto fijo. Si* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$*, entonces* p *es un punto fijo de* $g(x)$*.*

Conceptos previos sobre puntos fijos III

Theorem

Supóngase que $g \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$*, entonces.*

- *Si la imagen de la aplicación* $g(x) = y$ *cumple que* $y \in [a,b]$ *para cada punto* $x \in [a,b]$*, entonces* g *tiene un punto fijo en* $[a,b]$*.*
- *Supóngase que además,* $g'(x)$ *está definida en* (a,b) *y que* $|g'(x)| < 1$ *para todo* $x \in (a,b)$*, entonces* g *tiene un único punto fijo en* $[a,b]$*.*

Método de iteración simple de punto fijo I

Método de iteración, Método punto fijo, Método de aproximaciones sucesivas de Picard (Charles Émile Picard; 1856–1941)

Supóngase que se desea estudiar el problema de encontrar una raiz de la función f, es decir se desea solucionar la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Solucionar este problema es equivalente a resolver la ecuación

$$g(x) = x$$

donde $g(x)$ es equivalente a la función $f(x) + x$ o una variante algebraica del problema original $f(x) = 0$, para el cual una solución de $f(x) = 0$ es una solución de $g(x) = x$ y viceversa.

Método de iteración simple de punto fijo II

Bajo ciertas condiciones, si dado un valor inicial x_0 y si la sucesión generada por iteración de punto fijo sobre g

$$\begin{aligned} &x_0 \\ x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= g(x_i) \\ &\vdots \end{aligned}$$

converge, entonces el $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = p$ resulta ser un punto fijo de g y por lo tanto se ha encontrado una solución al problema de resolver la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Caso 1: Punto fijo atractivo monótono

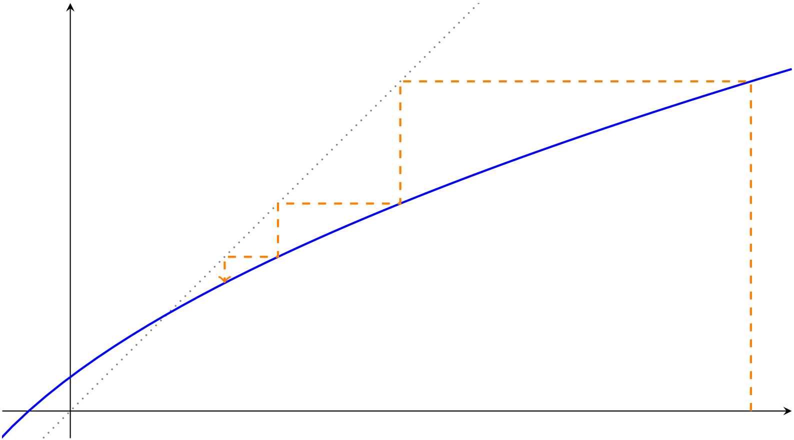


Figure: Convergencia monótona para $0 \leq g'(p) < 1$.

Caso 2: Punto fijo atractivo oscilante

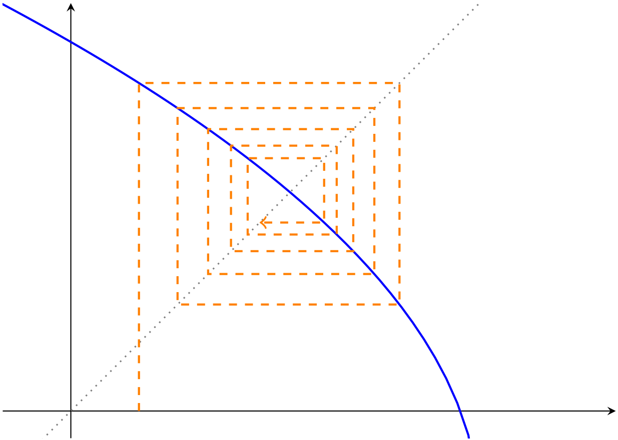


Figure: Convergencia oscilante para $-1 < g'(p) < 0$.

Caso 3: Punto fijo repulsivo monótono

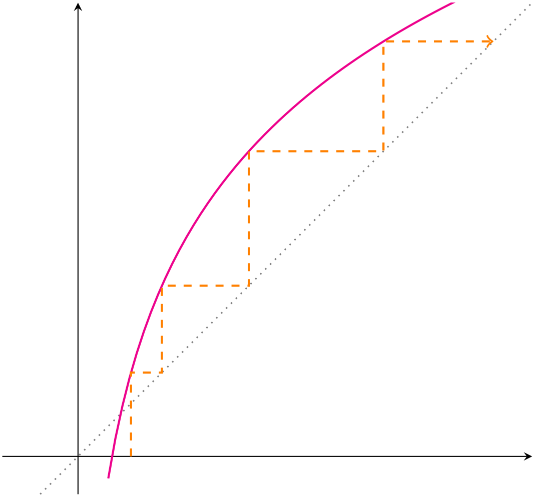


Figure: Divergencia monótona para $1 < g'(p)$.

Caso 4: Punto fijo repulsivo oscilante

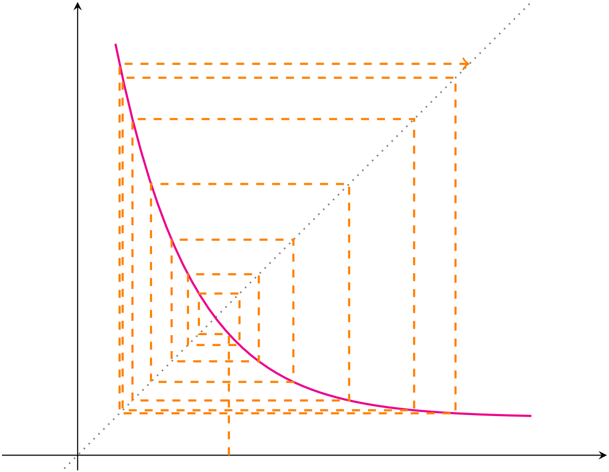
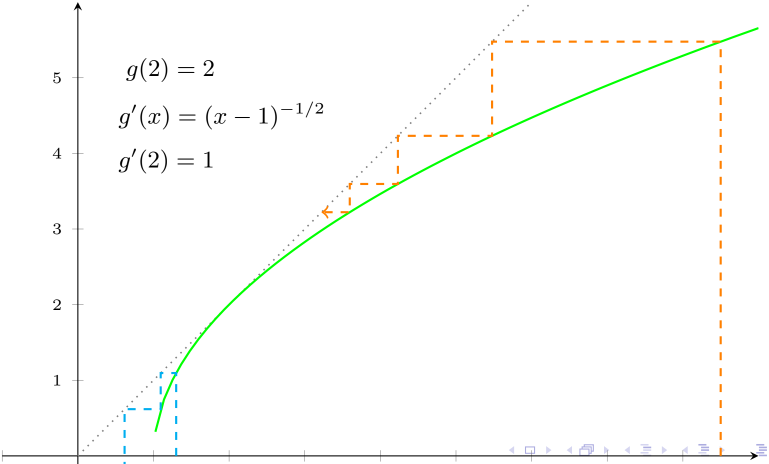


Figure: Divergencia oscilante para $g'(p) < -1$.

Caso 5: Punto fijo convergente y divergente; $|g'(p)| = 1$

$$g(x) = 2(x-1)^{1/2}$$



Teorema del punto fijo

Theorem (Teorema del punto fijo)

Supóngase que la función $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *tales que* $g(x) \in [a,b]$ *para toda* $x \in [a,b]$, *además supóngase que existe una constante positiva* $0 < K < 1$ *y* $p_0 \in (a,b)$. *Entonces existe un punto fijo* p *de* g *en* $[a,b]$, *y*

- *Si* $|g'(x)| \leq K$, *para toda* $x \in [a,b]$, *entonces* p *es un único punto fijo de g en* $[a,b]$ *y la sucesión* $p_k = g(p_{k-1})$ *con* $k = 1, 2, \ldots$, *converge a el punto fijo* p, *el cual se llama un punto fijo atractivo.*
- *Si* $|g'(p)| > 1$ *y* $p_0 \neq p$, *entonces la sucesión* $p_k = g(p_{k-1})$ *con* $k = 1, 2, \ldots$ *no converge a* p. *En este caso, se dice que* p *es un punto fijo repulsivo y la sucesión presenta divergencia local.*
- *Si* $|g'(p)| = 1$ *y* $p_0 \neq p$, *no se puede decidir si hay o no convergencia hacia el punto fijo.*