# Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

## Conceptos básicos

Edwin Camilo Cubides
eccubidesg@unal.edu.co

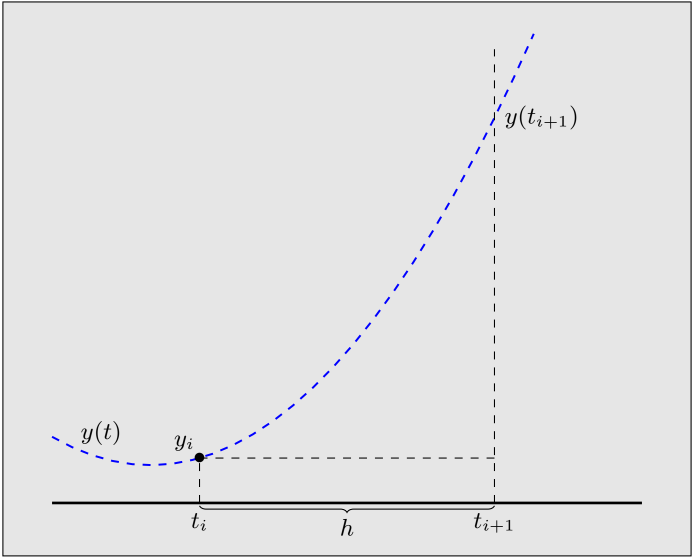
Research Group on Artificial Life – Grupo de investigación en vida artificial – (Alife)
Computer and System Department
Engineering School
Universidad Nacional de Colombia

# Outline

# Método de Euler

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$

# Método de Euler (conti.)

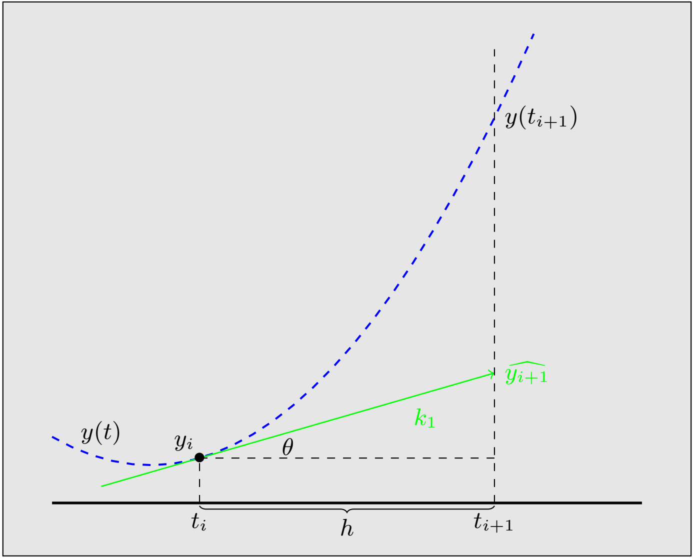


# Método de Euler (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$\frac{\widehat{y_{i+1}} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \tan(\theta) = y_i' = k_1 = f(t_i, y_i)$$

# Método de Euler (conti.)



# Método de Euler (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

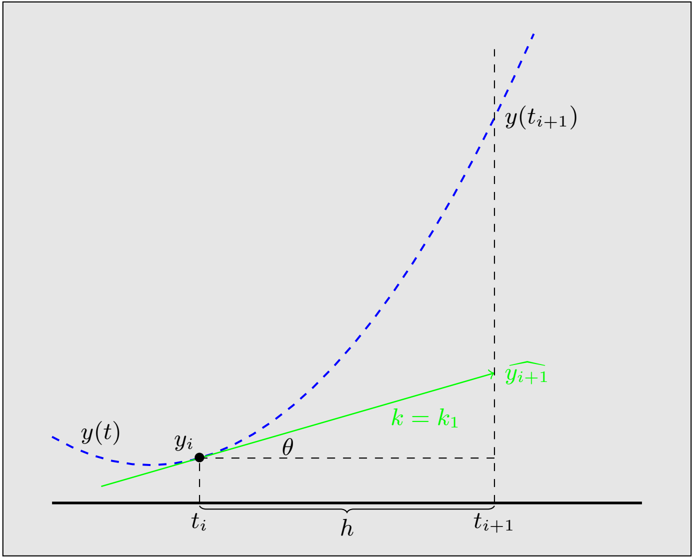
$$\frac{\widehat{y_{i+1}} - y_i}{t_{i+1} - t_i} = \tan(\theta) = y_i' = k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k &= k_1 \end{aligned}$$

$$\widehat{y_{i+1}} - y_i = k(t - t_i)\big|_{t=t_{i+1}} \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = k(t_{i+1} - t_i) + y_i \Rightarrow$$
$$\widehat{y_{i+1}} = k(t_i + h - t_i) + y_i \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = kh + y_i$$

$$\widehat{y_{i+1}} = y_i + hk \quad \text{(método de Euler)} \quad \text{error} = O\left(h^2\right)$$
$$\widehat{y_{i+1}} \approx y(t_{i+1})$$

# Método de Euler (conti.)

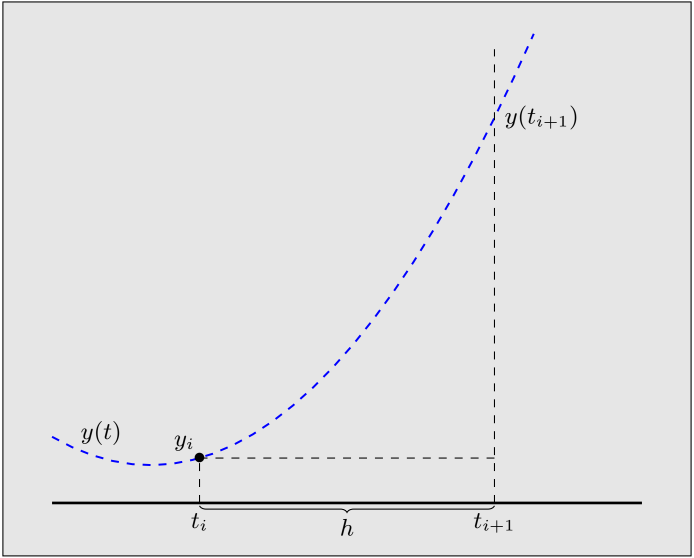


# Outline

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$,

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

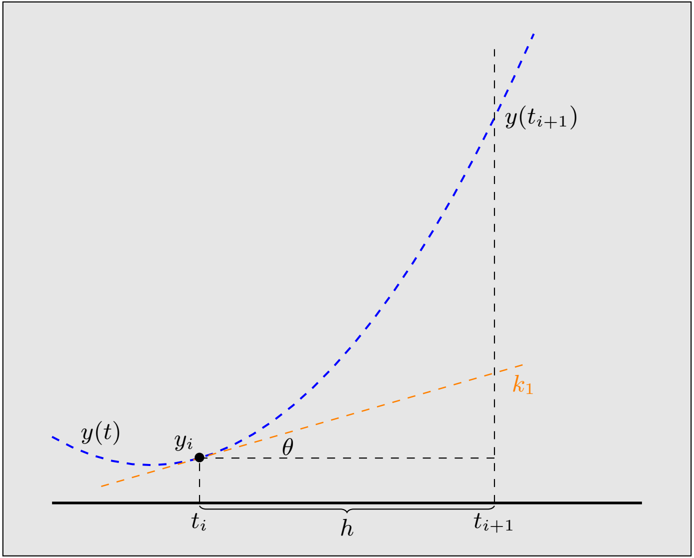


# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)



# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

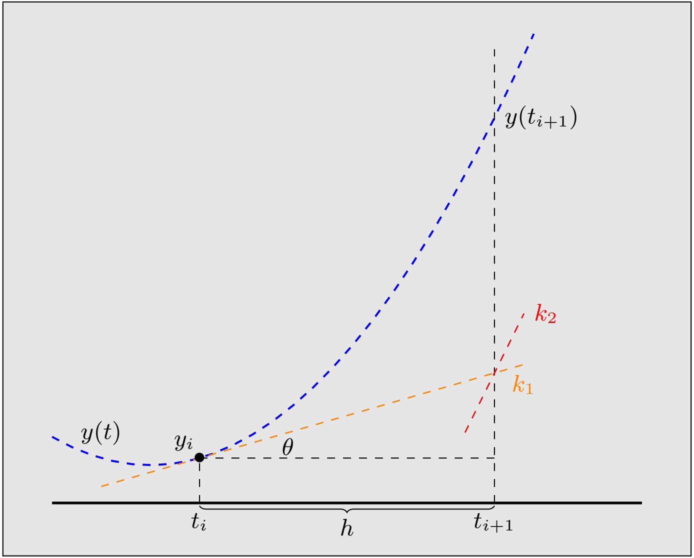
Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

y si se obtiene la pendiente $k_2$ de la recta paralela a la tangente de la función $y(t)$ mediante la función $y' = f(t, y)$ que corta en la abscisa $t_{i+1} = t_i + h$ a la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_1$.

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_i + h, k_1(t - t_i)|_{t_{i+1}} + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_1(t_{i+1} - t_i) + y_i\right) \\ &= f\left(t_i + h, k_1(t_i + h - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_1 h + y_i\right) \\ &= f(t_i + h, y_i + hk_1) \end{aligned}$$

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)



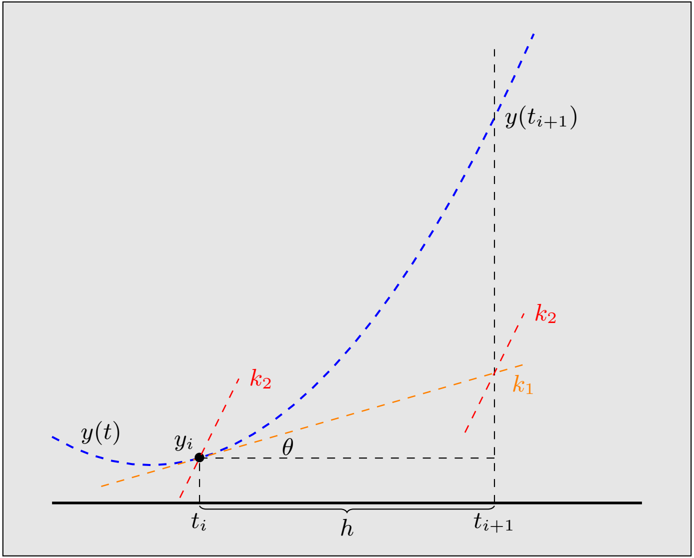
# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + h, k_1(t - t_i)|_{t_{i+1}} + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_1(t_{i+1} - t_i) + y_i\right) \\
&= f\left(t_i + h, k_1(t_i + h - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_1 h + y_i\right) \\
&= f(t_i + h, y_i + hk_1)
\end{aligned}
$$

Construyendo una recta que pase por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_2$, se tiene la siguiente representación:

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)



# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

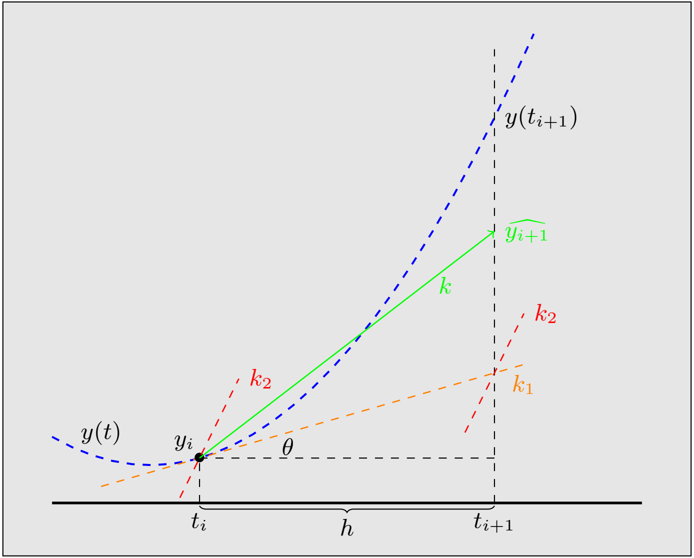
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + h, y_i + hk_1) \end{aligned}$$

si se construye una pendiente $k$ promedio de las pendientes $k_1$ y $k_2$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

y se traza la recta que pase por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$, se tiene

# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)



# Método mejorado de Euler o Heun (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i), \qquad k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1), \qquad k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

el valor $\widehat{y_{i+1}}$ se obtiene como imagen de $t_{i+1}$ a través de la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$ de la siguiente manera:

$$\widehat{y_{i+1}} - y_i = k(t - t_i)|_{t=t_{i+1}} \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = k(t_{i+1} - t_i) + y_i \Rightarrow$$
$$\widehat{y_{i+1}} = k(t_i + h - t_i) + y_i \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = kh + y_i$$

$$\widehat{y_{i+1}} = y_i + hk \quad \text{(método mejorado de Euler o Heun)} \qquad \text{error} = O\left(h^3\right)$$

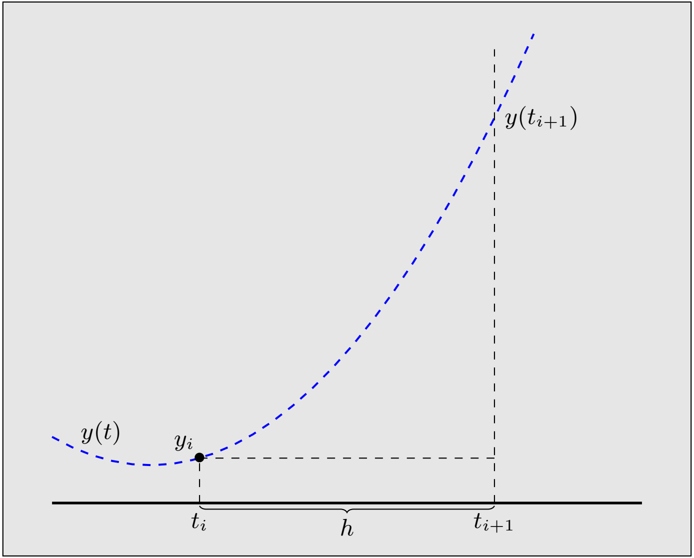
$$\widehat{y_{i+1}} \approx y(t_{i+1})$$

# Outline

# Método modificado de Euler o mejorado del polígono o de Cauchy

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$,

# Método de Cauchy (conti.)

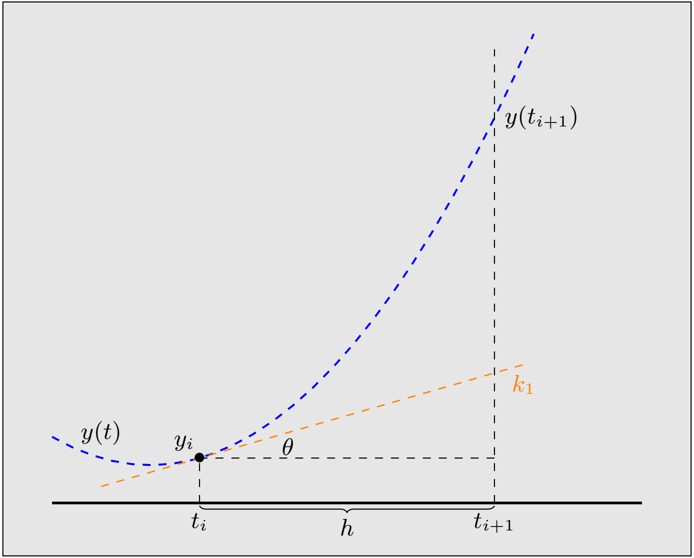


# Método de Cauchy (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

# Método de Cauchy (conti.)



# Método de Cauchy (conti.)

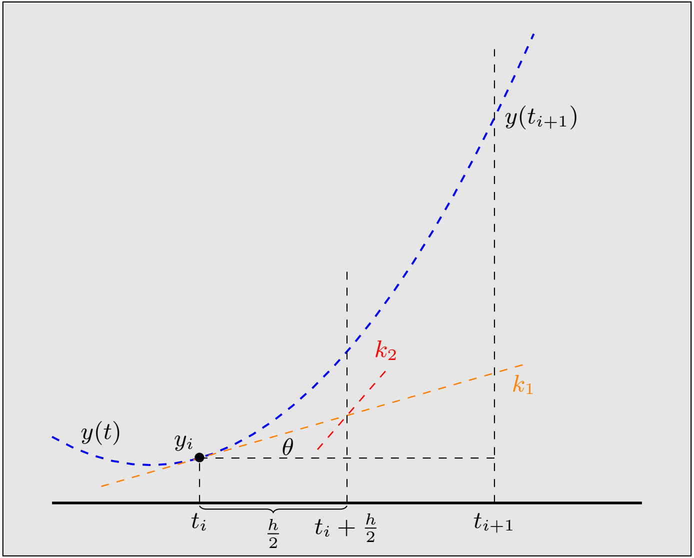
Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

y si se obtiene la pendiente $k_2$ de la recta paralela a la tangente de la función $y(t)$ mediante la función $y' = f(t, y)$ que corta en la abscisa $t_{i+1/2} = t_i + h/2$ a la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_1$.

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_i + h/2, k_1(t - t_i)|_{t_{i+1/2}} + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_1(t_{i+1/2} - t_i) + y_i\right) \\ &= f\left(t_i + h/2, k_1(t_i + h/2 - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_1 h/2 + y_i\right) \\ &= f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2) = f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \end{aligned}$$

# Método de Cauchy (conti.)



# Método de Cauchy (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

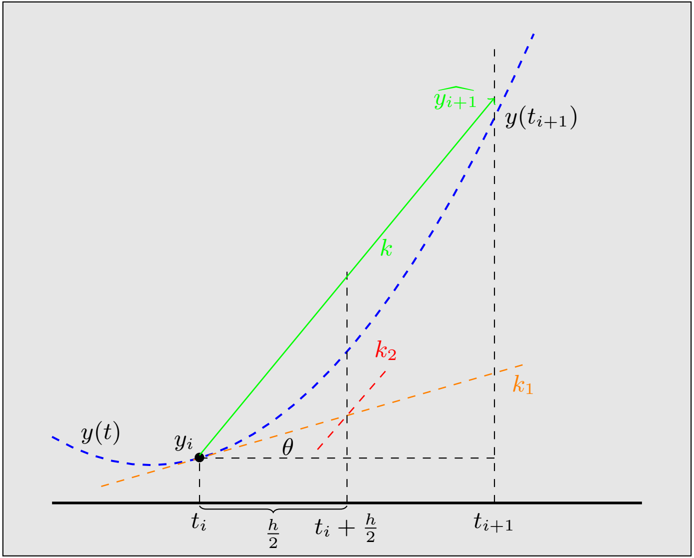
$$k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \text{ donde } t_{i+1/2} = t_i + h/2 \text{ y } y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_1$$

y si se construye una pendiente $k$ que sea el promedio ponderado de las pendientes $k_1$ y $k_2$, donde la pendiente $k_2$ tendrá todo el peso y la otra pendiente $k_1$ no aportará peso a la nueva pendiente.

$$k = \frac{0k_1 + 1k_2}{1} = k_2$$

Al trazar la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$, se tiene:

# Método de Cauchy (conti.)



# Método de Cauchy (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i), \qquad k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \qquad k = \frac{0k_1 + 1k_2}{1} = k_2$$

el valor $\widehat{y_{i+1}}$ se obtiene como imagen de $t_{i+1}$ a través de la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$ de la siguiente manera:

$$\widehat{y_{i+1}} - y_i = k(t - t_i)\big|_{t=t_{i+1}} \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = k(t_{i+1} - t_i) + y_i \Rightarrow$$
$$\widehat{y_{i+1}} = k(t_i + h - t_i) + y_i \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = kh + y_i$$

$$\widehat{y_{i+1}} = y_i + hk \quad \text{(Método de Cauchy)} \quad \text{error} = O\left(h^3\right)$$

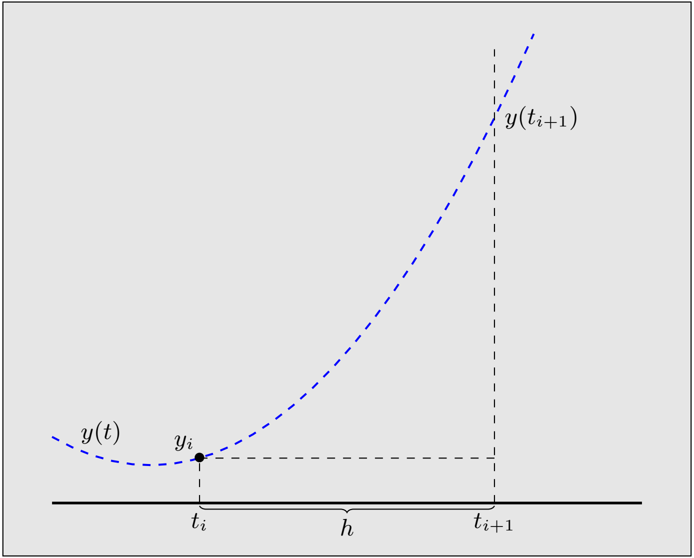
$$\widehat{y_{i+1}} \approx y(t_{i+1})$$

# Outline

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$,

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

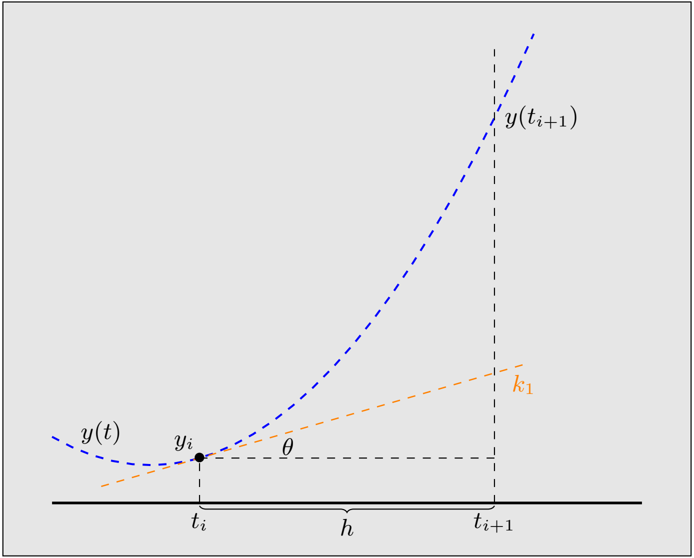


# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)



# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

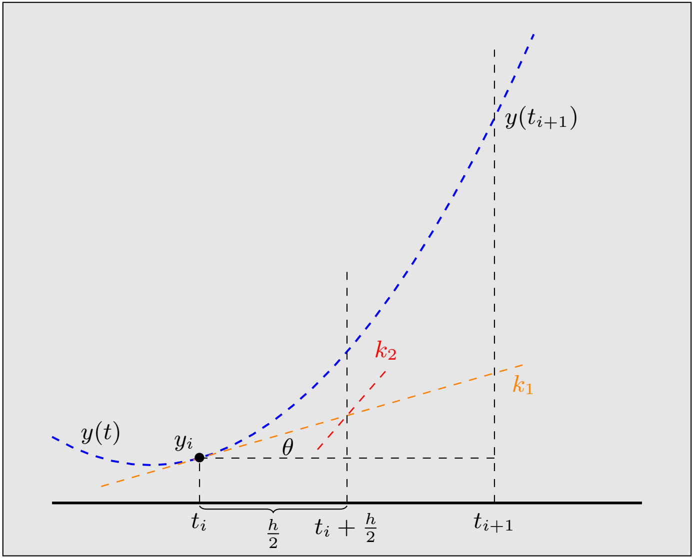
Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

y si se obtiene la pendiente $k_2$ de la recta paralela a la tangente de la función $y(t)$ mediante la función $y' = f(t, y)$ que corta en la abscisa $t_{i+1/2} = t_i + h/2$ a la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_1$.

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_i + h/2, k_1(t - t_i)|_{t_{i+1/2}} + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_1(t_{i+1/2} - t_i) + y_i\right) \\ &= f\left(t_i + h/2, k_1(t_i + h/2 - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_1 h/2 + y_i\right) \\ &= f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2) = f(t_{i+1/2}, y_{i_1+1/2}) \end{aligned}$$

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)



# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

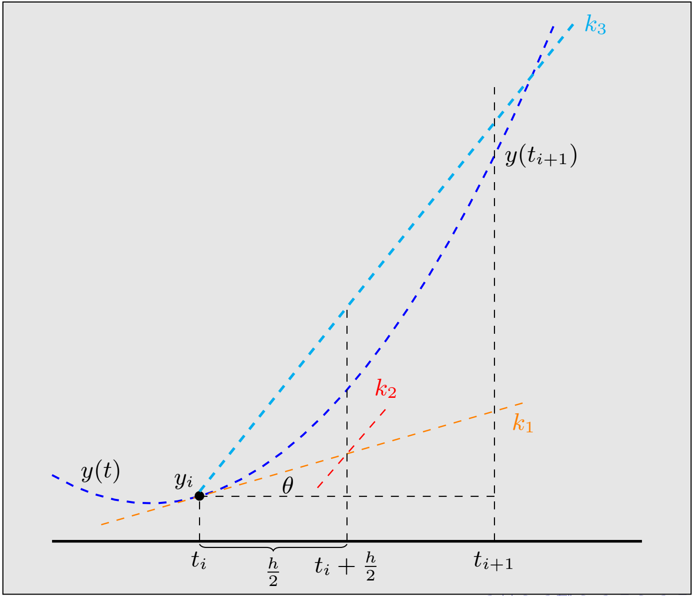
Dada $y' = f(t,y)$ la derivada en cualquier punto $(t,y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i), \qquad\qquad k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i_1+1/2})$$

y si se obtiene la pendiente $k_3$ de la recta paralela a la tangente de la función $y(t)$ mediante la función $y' = f(t,y)$ que corta en la abscisa $t_{i+1/2} = t_i + h/2$ a la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_2$.

$$\begin{aligned}
k_3 &= f\left(t_i + h/2, k_2(t - t_i)|_{t_{i+1/2}} + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_2(t_{i+1/2} - t_i) + y_i\right) \\
&= f\left(t_i + h/2, k_2(t_i + h/2 - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h/2, k_2 h/2 + y_i\right) \\
&= f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2) = f(t_{i+1/2}, y_{i_2+1/2})
\end{aligned}$$

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)



# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

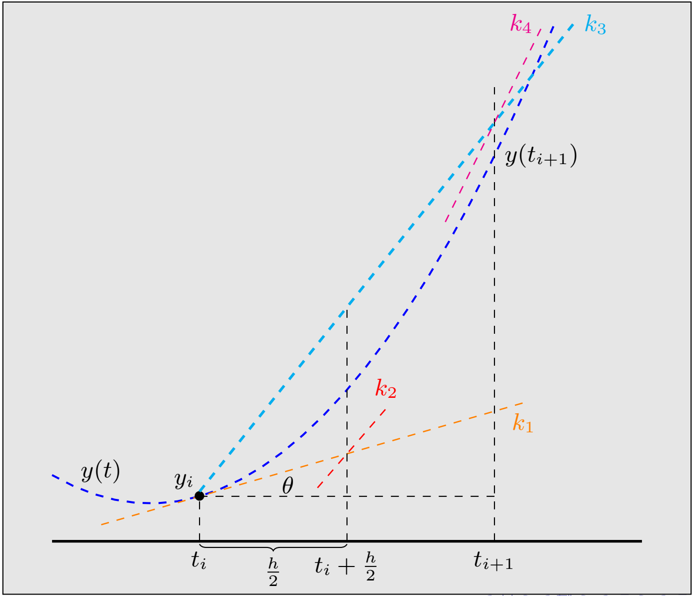
$$k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i_1+1/2}),\ \text{donde } t_{i+1/2} = t_i + h/2 \text{ y } y_{i_1+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_1$$

$$k_3 = f(t_{i+1/2}, y_{i_2+1/2}),\ \text{donde } t_{i+1/2} = t_i + h/2 \text{ y } y_{i_2+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_2$$

y si se obtiene la pendiente $k_4$ de la recta paralela a la tangente de la función $y(t)$ mediante la función $y' = f(t, y)$ que corta en la abscisa $t_{i+1} = t_i + h$ a la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k_3$.

$$\begin{aligned} k_4 &= f\left(t_i + h, k_3(t - t_i)|_{t_{i+1}} + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_3(t_{i+1} - t_i) + y_i\right) \\ &= f\left(t_i + h, k_3(t_i + h - t_i) + y_i\right) = f\left(t_i + h, k_3 h + y_i\right) \\ &= f(t_i + h, y_i + hk_3) \end{aligned}$$

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)



# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i_1+1/2}), \text{ donde } t_{i+1/2} = t_i + h/2 \text{ y } y_{i_1+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_1$$

$$k_3 = f(t_{i+1/2}, y_{i_2+1/2}), \text{ donde } t_{i+1/2} = t_i + h/2 \text{ y } y_{i_2+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_2$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

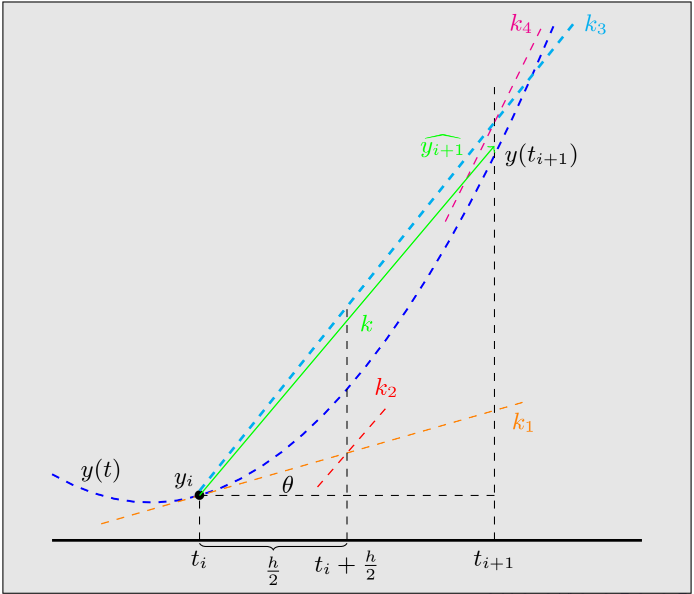
# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

y si se construye una pendiente $k$ que sea el promedio ponderado de las pendientes $k_1$, $k_2$, $k_3$ y $k_4$ donde Runge y Kutta encontraron que las pendientes $k_2$ y $k_3$ debe tener mayor peso que las otras pendientes. Generalmente se les asigna el doble del peso con respecto a las otras, de la siguiente manera

$$k = \frac{k_1 + k_2 + k_2 + k_3 + k_3 + k_4}{6} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Al trazar la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$, se tiene:

# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)



# Método de Runge–Kutta de cuarto orden (conti.)

Dada $y' = f(t, y)$ la derivada en cualquier punto $(t, y)$; y un punto inicial $y(t_i) = y_i$, si

$$k_1 = f(t_i, y_i), \qquad k_2 = f(t_{i+1/2}, y_{i_1+1/2}), \qquad k_3 = f(t_{i+1/2}, y_{i_2+1/2}),$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3), \qquad k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

el valor $\widehat{y_{i+1}}$ se obtiene como imagen de $t_{i+1}$ a través de la recta que pasa por el punto $(t_i, y_i)$ con pendiente $k$ de la siguiente manera:

$$\widehat{y_{i+1}} - y_i = k(t - t_i)\big|_{t=t_{i+1}} \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = k(t_{i+1} - t_i) + y_i \Rightarrow$$
$$\widehat{y_{i+1}} = k(t_i + h - t_i) + y_i \Rightarrow \widehat{y_{i+1}} = kh + y_i$$

$$\widehat{y_{i+1}} = y_i + hk \quad \text{(método Runge-Kutta, cuarto orden)} \quad \text{error} = O\left(h^5\right)$$

$$\widehat{y_{i+1}} \approx y(t_{i+1})$$