UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ

Métodos Numéricos (2001852) Ib Semestre 2016

Taller # 1 Profesor: *Camilo Cubides*

En el año 1225 Leonardo de Pisa (Fibonacci) encontró que el polinomio

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

tiene una única raíz real cuyo valor aproximado es $x \approx 1.36880810782$.

A continuación usted desarrollará los pasos necesarios para demostrar que efectivamente el polinomio de Fibonacci tiene una sola raíz real y que ésta es irracional, luego encontrará dicha raíz de forma analítica y por último utilizará algunos de los distintos métodos numéricos que permiten hallar raíces de funciones no lineales para encontrar una serie de aproximaciones de dicha raíz.
Nota: para todos los valores reales que se calculen, éstos se deben escribir con por lo menos 8 cifras decimales.

1. *a*) Demuestre que el polinomio de Fibonacci tiene al menos una raíz real.
   b) Utilizando el criterio de Descartes encuentre cuantas raíces positivas y cuantas negativas podría tener el polinomio de Fibonacci.
   c) Utilice división sintética y la regla de las raíces racionales para demostrar que el polinomio de Fibonacci no tiene raíces racionales.
   d) Utilice los resultados de las divisiones sintéticas del literal anterior (1*c*) y el criterio de las cotas para encontrar tanto una cota superior β como una inferior α para todas la raíces reales del polinomio de Fibonacci.
   e) Usando los conocimientos adquiridos en los curso de Cálculo, demostrar que el polinomio de Fibonacci es una función estrictamente creciente.
   f) A partir del resultado anterior demostrar que para el intervalo $S = [\alpha, 0]$, $p(S) \subseteq \mathbb{R}^-$, de lo cual se puede concluir que $p(x)$ no tiene raíces que sean negativas.

2. Sea $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio cúbico con coeficiente principal igual a 1, la siguiente secuencia de cálculos permite encontrar una raíz r real del polinomio $p(x)$:

$$\begin{aligned} s &\coloneqq a_1 - \frac{(a_2)^2}{3} \\ t &\coloneqq \frac{2(a_2)^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0 \\ D &\coloneqq \sqrt{\frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4}} \\ P &\coloneqq \sqrt[3]{-\frac{t}{2} + D} \\ Q &\coloneqq \sqrt[3]{-\frac{t}{2} - D} \\ r &\coloneqq P + Q - \frac{a_2}{3} \end{aligned}$$

Utilizar el método anterior para encontrar una aproximación de la raíz real irracional del polinomio de Fibonacci.

3. Construir una tabla donde se almacene la información necesaria para hallar una aproximación de la raíz r real del polinomio de Fibonacci tal que el error absoluto (épsilon) del valor funcional $|p(r) - 0| = |p(r)|$ sea menor a $< 10^{-4}$ con el método de *bisección* en donde los extremos sean las cotas obtenidas en el literal $(1d)$. La tabla debe contener una columna para cada uno de los siguientes valores: el número de la iteración, el límite inferior del intervalo, el límite superior del intervalo, la aproximación r de la raíz, el valor del polinomio de Fibonacci evaluado en la aproximación de la raíz $p(r)$ y el error encontrado $|p(r)|$.

4. Construir una tabla donde se almacene la información necesaria para hallar una aproximación de la raíz r real del polinomio de Fibonacci tal que el error absoluto (épsilon) del valor funcional $|p(r) - 0| = |p(r)|$ sea menor a $< 10^{-4}$ con el método de la *regla falsa* en donde los extremos sean las cotas obtenidas en el literal $(1d)$. La tabla debe contener una columna para cada uno de los siguientes valores: el número de la iteración, el límite inferior del intervalo, el límite superior del intervalo, la aproximación r de la raíz, el valor del polinomio de Fibonacci evaluado en la aproximación de la raíz $p(r)$ y el error encontrado $|p(r)|$.

5. Construir una tabla donde se almacene la información necesaria para hallar una aproximación de la raíz r real del polinomio de Fibonacci tal que el error absoluto (épsilon) del valor funcional $|p(r) - 0| = |p(r)|$ sea menor a $< 10^{-4}$ con el método de *Newton-Raphson* y con valor inicial la cota inferior encontrada en el literal $(1d)$. La tabla debe contener una columna para cada uno de los siguientes valores: el número de la iteración, el último término de la sucesión de aproximación x_i, el valor del polinomio de Fibonacci evaluado en el último término de la sucesión de aproximación $p(x_i)$ y el error encontrado $|p(x_i)|$.

6. Construir una tabla donde se almacene la información necesaria para hallar una aproximación de la raíz r real del polinomio de Fibonacci tal que el error absoluto

(épsilon) del valor funcional $|p(r) - 0| = |p(r)|$ sea menor a $< 10^{-4}$ con el método de la *secante* y con valores iniciales la cota superior y la cota inferior encontradas en el literal $(1d)$. La tabla debe contener una columna para cada uno de los siguientes valores: el número de la iteración, el penúltimo término de la sucesión de aproximación x_i, último término de la sucesión de aproximación x_{i+1}, el valor del polinomio de Fibonacci evaluado en el último término de la sucesión de aproximación $p(x_{i+1})$ y el error encontrado $|p(x_{i+1})|$.