



1. La Tabla I incluye las observaciones originales utilizadas por Hubble en 1929

Tabla I. Hubble-1929

Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)	Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)	Object Name	Dist. (Mpc)	Vd. (km/s)
SMC	0.032	+170	5194	0.5	+270	1055	1.1	+450
LMC	0.034	+290	4449	0.63	+200	7331	1.1	+500
6822	0.214	-130	4214	0.8	+300	4258	1.4	+500
598	0.263	-70	3031	0.9	-30	4151	1.7	+960
221	0.275	-185	3627	0.9	+650	4382	2.0	+500
224	0.275	-220	4826	0.9	+150	4472	2.0	+850
5357	0.45	+200	5236	0.9	+500	4486	2.0	+800
4736	0.5	+290	1068	1.0	+920	4649	2.0	+1090

SMC = Small Magellanic Cloud; LMC = Large Magellanic Cloud; All object numbers are preceded by "NGC." 1 parsec = 3.26 light years; 1 Mpc = megaparsec = 10 parsees.

Determinar mediante ajuste lineal de mínimos cuadrados la constante H_0 .

Para determinar la constante de Hubble, se procedió a graficar los datos de la Tabla I para luego hacer uso de un modulo de python llamado *scipy*, la cual nos permite hacer un ajuste por mínimos cuadrados determinando entre otras, la constante de Hubble H_0 (pendiente de la recta). En ese sentido, la Figura 1, ilustra el ajuste por mínimos cuadrados (linea roja), arrojando una constante $H_0 = 465.902842 \frac{km/s}{Mpc}$.

por otra parte, haciendo una simple regla de tres, podemos determinar el tiempo de Hubble $\frac{1}{H_0}$ como

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{465.902842} \left[\frac{Mpc}{km/s} \right] \cdot \left[\frac{3.086e^{19} km}{1 Mpc} \right] \cdot \left[\frac{1 \text{ Año}}{3.154e^7} \right] \\ = 2100.094e^6 \text{ Años} \quad (1)$$

¿Qué podría decirse del hecho que entonces ya era conocida la edad de algunos aglomerados globulares, la cual es del orden de 9000 millones de años?

Sin duda las observaciones de Hubble en 1929 no eran suficientes para determinar con alta probabilidad una estimación a la edad del universo, esto debido a que en sus datos recolectados solo tenia galaxias cercanas, es decir, *redshifts* bajos y estos no daban la información suficiente para una buena estimación.

2. En 1936, Humason volvió a calcular la constante H_0 aprovechando el advenimiento de nuevos datos, incluyendo varias galaxias más distantes. Repita los pasos del punto anterior para una combinación de los datos originales y los nuevos, compare y comente.

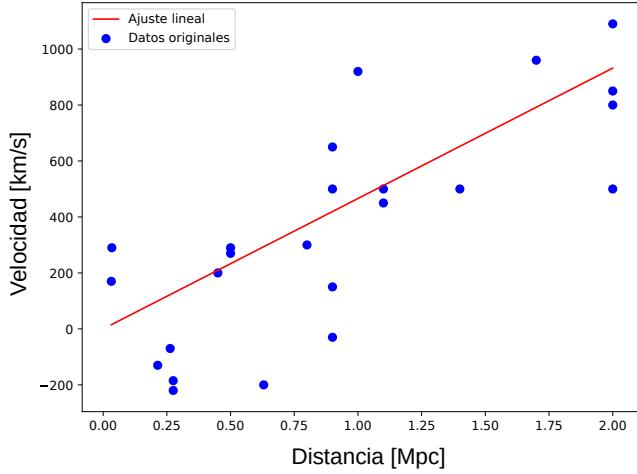


Figura 1: Ajuste lineal por mínimos cuadrados usando la Tabla I.

El análisis es el mismo al enciso anterior. En este caso las observaciones cuentan con galaxias más lejanas. Para este caso la constante de Hubble es $H_0 = 560.7327 \frac{km/s}{Mpc}$ y la constante de tiempo $\frac{1}{H_0}$ es igual a

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{560.7327} \left[\frac{Mpc}{km/s} \right] \cdot \left[\frac{3.086e^{19} km}{1Mpc} \right] \cdot \left[\frac{1\text{Año}}{3.154e^7} \right] = 1744.931e^6 \text{Años} \quad (2)$$

Tabla II. Humason - 1936

Cluster	Vd. (km/s)	Dist. (Mpc)	Cluster	Vd. (km/s)	Dist. (Mpc)	Cluster	•Vel. (km/s)	Dist. (Mpc)
Virgo	890	1.6	Leo	19,600	35.1	Anon 5	19,000	34.0
Pegasus	3,810	6.8	7814	1,000	1.8	Anon 6	42,000	75.3
Pisces	4,630	8.3	7868	5,700	10.2	Anon 7	15,400	27.6
Cancer	4,820	8.6	7869	6,700	12.0	Anon 9	39,000	69.9
Perseus	5,230	9.4	7872	7,000	12.5	Anon 10	21,000	37.6
Coma	7,500	13.4	Gem	24,000	43.0	Anon 11	9,200	16.5
U.Maj.	11,800	21.1	Gem	23,000	41.2	Anon 12	12,400	22.2

"NGC" precedes the 7814, 7868, 7869, and 7872.

Sin embargo, a pesar de tener galaxias mas lejanas, el tiempo del Hubble da menor que considerando la Tabla I Lo cual, no debería ser así, ya que teniendo en cuenta la edad de algunos aglomerados globulares, el tiempo calculado debió ser mayor que considerando la Tabla I. Esto puede deberse a que las mediciones no fueron bien estimadas.

La Figura 2 ilustra el ajuste por mínimos cuadrados a la base de datos en la Tabla II.

3. Realice una última estimación de la constante de Hubble a partir del siguiente conjunto de datos, mucho más actuales, provenientes del telescopio espacial Hubble. Compare el

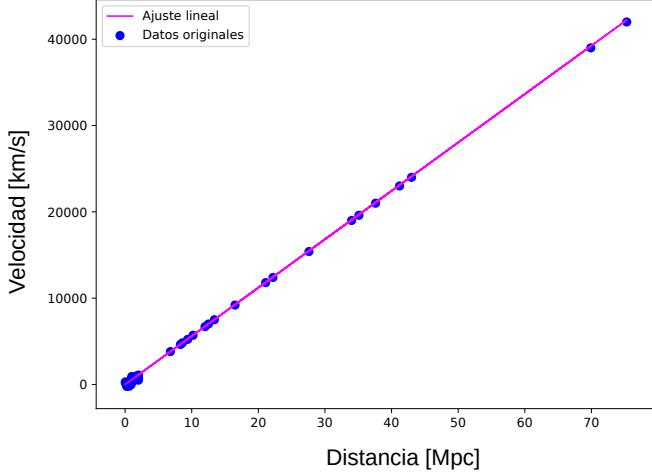


Figura 2: Ajuste lineal por mínimos cuadrados usando la Tabla II.

resultado con los resultados obtenidos en los puntos anteriores, y con el valor de H_0 más aceptado en la actualidad, igual a 68 km s^{-1} .

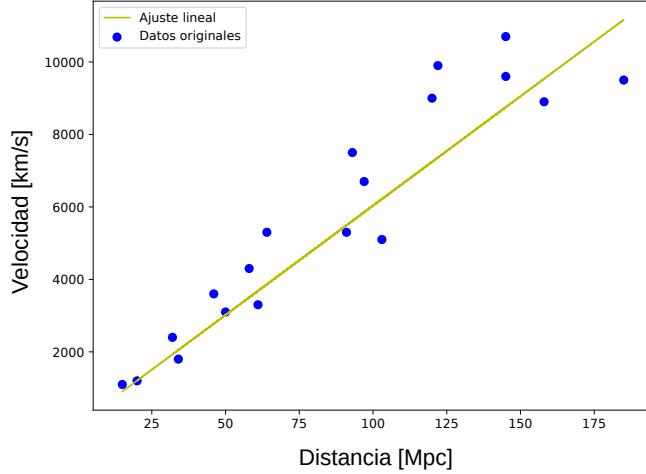


Figura 3: Ajuste lineal por mínimos cuadrados usando datos actuales.

En este caso la constante de Hubble calculada es $H_0 = 60.3454 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$, la cual si se compara con el valor de H_0 más aceptado en la actualidad ($H_0 = 68 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$) es cercano. Estas mediciones ya consideran galaxias mucho mas lejanas, llegando hasta 185 Mpc , por ende, tiene abarca galaxias muy lejanas permitiendo hacer un mejor valor aproximado. Por otra parte, el tiempo de Hubble sería

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{H_0} = \frac{1}{60.3454} \left[\frac{\text{Mpc}}{\text{km/s}} \right] \cdot \left[\frac{3.086e^{19} \text{ km}}{1 \text{ Mpc}} \right] \cdot \left[\frac{1 \text{ Año}}{3.154e^7} \right] \\ &= 16234.58e^6 \text{ Años} \end{aligned} \quad (3)$$

que superan la edad de algunos aglomerados globulares, teniendo un poco mas de coherencia este tiempo de aproximación a la edad del universo. Por último, la Figura 3 ilustra el ajuste lineal realizado.

4. Lectura de supernovas tipo IA a bajos y altos redshifts.

	Objeto	Redshift	Distancia	error_distancia
0	1993ah	0.028488	35.346583	0.223906
1	1993ag	0.050043	36.682368	0.166829
2	1993o	0.052926	36.817691	0.155756
3	1993b	0.070086	37.446737	0.158467
4	1992bs	0.062668	37.483409	0.156099
5	1992br	0.087589	38.229057	0.187746
6	1992bp	0.078577	37.488162	0.155636
7	1992bo	0.017227	34.654370	0.199337
8	1992bl	0.042233	36.336460	0.167174
9	1992bh	0.045295	36.640272	0.164981

Figura 4: Lectura de archivo de supernovas tipo IA. Ejemplo grafico para los primeros 10 datos.

La Figura 4 respresenta un porción de los datos a trabajar en este enciso. Para la lectura del archivo se hizo uso del modulo *pandas* de Python. Como una primera intuición decidimos graficar los datos pertenecientes a *redshift* vs μ , la cual esta última esta relaciona con la distancia mediante la siguiente ecuación

$$\mu = 5 \log_{10}(D_L) + 25 \quad (4)$$

La graficas de *redshift* vs μ se puede observar en la Figura 5.

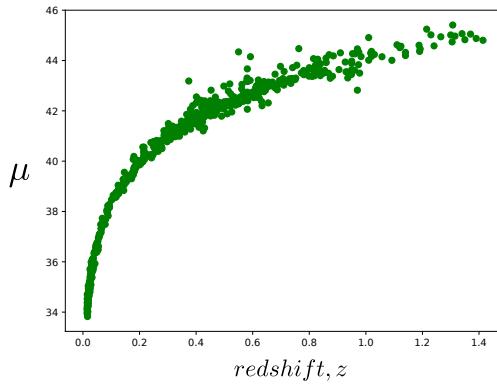


Figura 5: Lectura de archivo de supernovas tipo IA. *redshift* vs μ sin la inclusión de error.

5. Grafique μ vs *redshift,z* incluyendo las barras de error para μ . En el mismo gráfico muestre el modelo teórico esperado para un Universo sin energía oscura (con $\Omega_M = 0.3$), un Universo con exceso de energía oscura ($\Omega_M = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 1.0$), y el modelo estándar Λ CDM (plano y con $\Omega_M = 0.28$, $\Omega_\Lambda = 0.72$).

La Figura 6 ilustra las diversas graficas considerando el modelo teórico para distintos valores de energía oscura. A simple vista, todos parecen un buen conjunto de parámetros para aproximarse a los datos observados (grafica de color azul), sin embargo, el “el ajustar bien” es un concepto complejo aquí, ya que sí un modelo es buena aproximación debe ser medido bajo un modelo más plausible. Para determinar que parte del grafico ilustrado

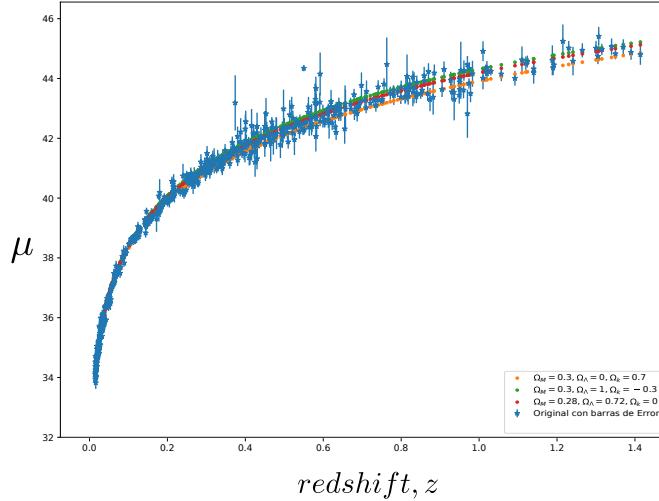


Figura 6: Lectura de archivo de supernovas tipo IA. $redshift$ vs μ , incluyendo las barras de error para μ .

en la Figura 6 corresponde a la ley de Hubble inferida en el punto 3, debemos hacer uso de la ecuación (4) para determinar el μ correspondiente del punto 3. Además, encontrar el $redshift$ de esta base de datos, se debe hacer usando la siguiente ecuación

$$z = \frac{v}{c} \quad (5)$$

donde c es la velocidad de la luz y v la correspondiente velocidad a la que se aleja la

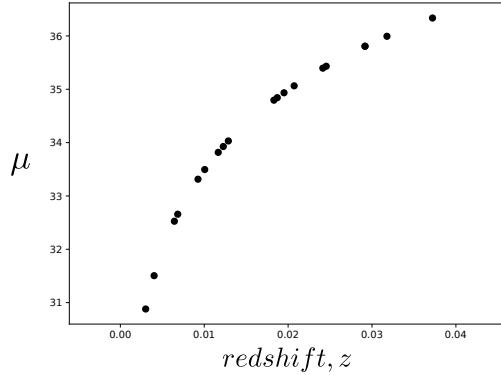


Figura 7: Grafica de la ley de Hubble haciendo un mapeo de datos a $redshift, z$ y μ por medio de las ecuaciones (4) y (5).

galaxia. En este sentido, la Figura 7 ilustra la ley de Hubble usando los datos del punto 3 bajo un *redshift*, z y μ calculado usando las ecuaciones (4) y (5).

Ahora, si hacemos un solape entre la Figura 7 y Figura 6, observaremos que la ley de Hubble si se observa como se esperaba, encajando con los datos de las supernovas, existiendo una relación que esta definida para galaxias cuyos *redshifts* son bajos. Esta esquema se puede observar en Figura 8.

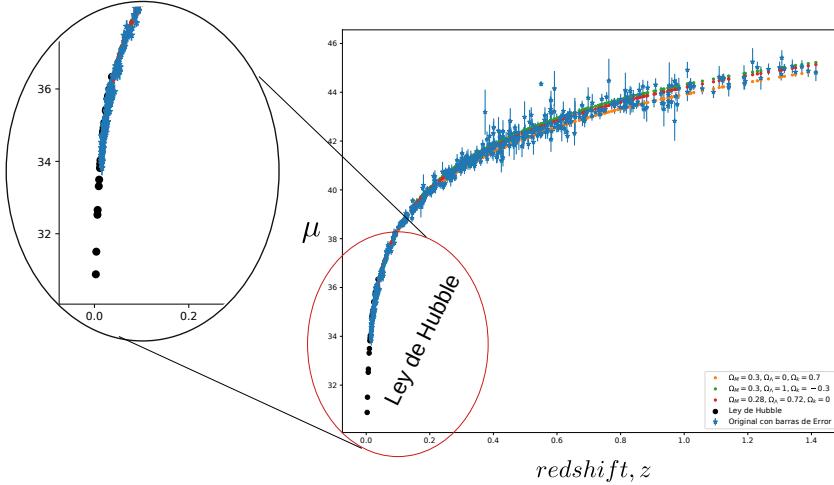


Figura 8: Grafica intencionalmente colocada para resaltar la ley de Hubble, indicando que si se observa y presenta el mismo comportamiento al usar los datos de supernovas tipo IA

6. Obtenga el mejor ajuste para los parámetros cosmológicos Ω_M , Ω_Λ y Ω_k mediante una minimización del error cuadrático.

$$D_T(z) = \begin{cases} \frac{(1+z)c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|}I), & \text{si } \Omega_M + \Omega_\Lambda > 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0} I & \text{si } \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \\ \frac{(1+z)c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|}I), & \text{si } \Omega_M + \Omega_\Lambda < 1 \end{cases} \quad (6)$$

Para encontrar el mejor conjunto de parámetros cosmológicos Ω_M , Ω_Λ y Ω_k hacemos uso de la ecuación teórica (6). La cual nos permite predecir la distancia luminosidad asociada a cada *redshift* de acuerdo a la cantidad de materia y energía oscura que exista en el Universo. Entonces, teniendo en cuenta este modelo podemos presentar una función de costo que nos permita minimizar el error cuadrático medio entre las medias observadas y las medidas teóricas que están relacionadas con la ecuación (6), además, se adiciona el error de las medidas como peso. La función de costo puede ser planteada como:

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_k \in \mathbb{R}} \quad & f(\Omega) = \frac{\|\mu_L - \mu_T\|_2^2}{e^2} \\ \text{subject to} \quad & \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

donde μ_L son las medidas de distancias observadas y μ_T se calcula usando la ecuación (4) definiendo D como la ecuación (6). Hay que tener en cuenta los valores para los parámetros Ω_M y Ω_Λ , ya que estos determinan la función a escoger en (6). De esta manera, el mejor conjunto de parámetros calculado es:

$$\Omega_M = 0.1255, \quad \Omega_\Lambda = 0.37448, \quad \Omega_k = 0.5 \quad (8)$$

En anexo se encuentra el código implementado, con comentarios generosos.

7. Recalcule los mejores parámetros cosmológicos mediante una rutina tipo Monte-Carlo Marcov chain.

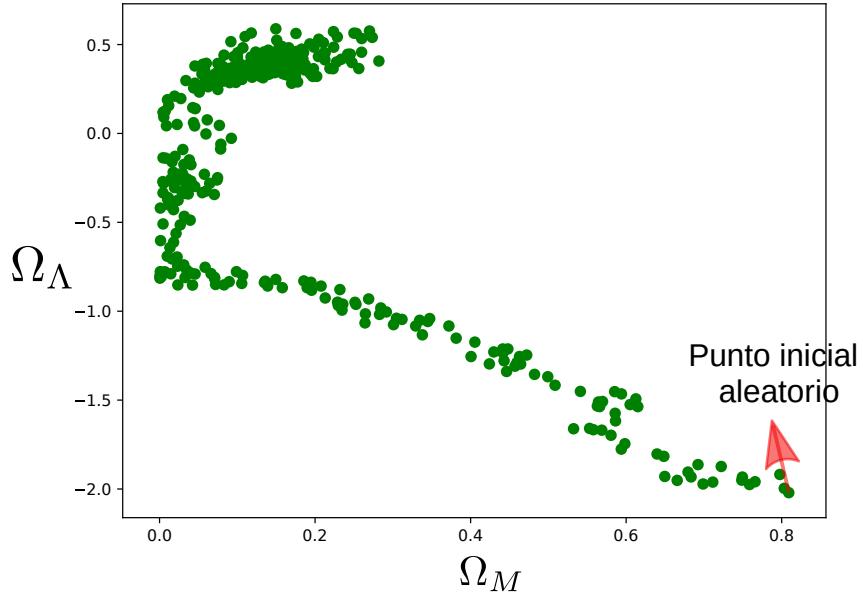


Figura 9: secuencia obtenida en un gráfico de Ω_M vs Ω_Λ usando el método Monte-Carlo

Usando esta técnica los mejores valores obtenidos fueron:

$$\Omega_M = 0.2276, \quad \Omega_\Lambda = 0.4017, \quad \Omega_k = 0.3705 \quad (9)$$

lo cual si se comparan con los calculados en el punto anterior, la ecuación (8) son aproximados, lo que quiere decir que el método de Monte-Carlo funciona. Para este proceso se realizaron 1000 iteraciones. Además, también se anexa la Figura 10 donde se muestra tres puntos de partidas distintos escogidos de manera aleatoria. Aquí es evidente la convergencia del algoritmo

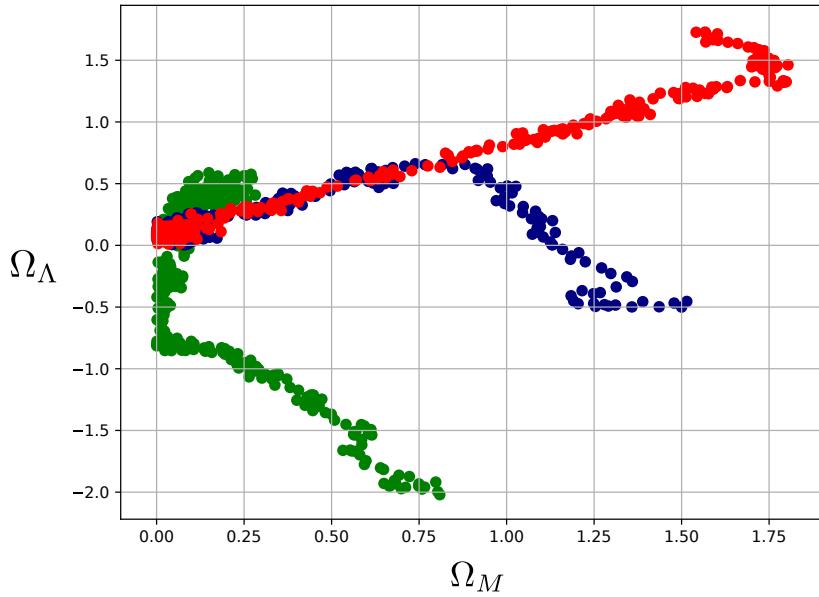


Figura 10: secuencia obtenida en un gráfico de Ω_M vs Ω_Λ usando el método Monte-Carlo para distintos puntos iniciales aleatorios

8. Mapee y grafique el comportamiento del residuo cuadrático χ^2 , teniendo en cuenta los errores.

Para este punto, primero se procedió a crear una grilla con los valores admisibles de Ω_M y Ω_Λ , es decir, la región donde Ω_M y Ω_Λ pueden tomar valores. Este proceso se puede observar en la Figura 11.

Luego, se empezó a recorrer los distintos valores de la grilla correspondiente a los valores

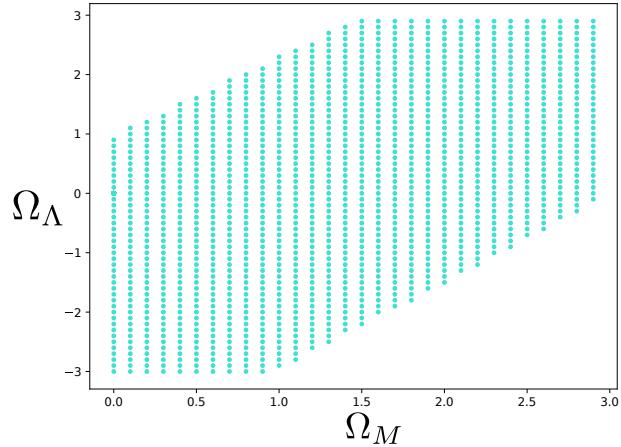


Figura 11: Grafico Ω_M vs Ω_Λ con sus valores admisibles

de Ω_M y Ω_Λ con el fin de encontrar el punto óptimo, y a partir de este, se empieza a hacer los mapas de contornos, correspondiente a los intervalos de confianza.

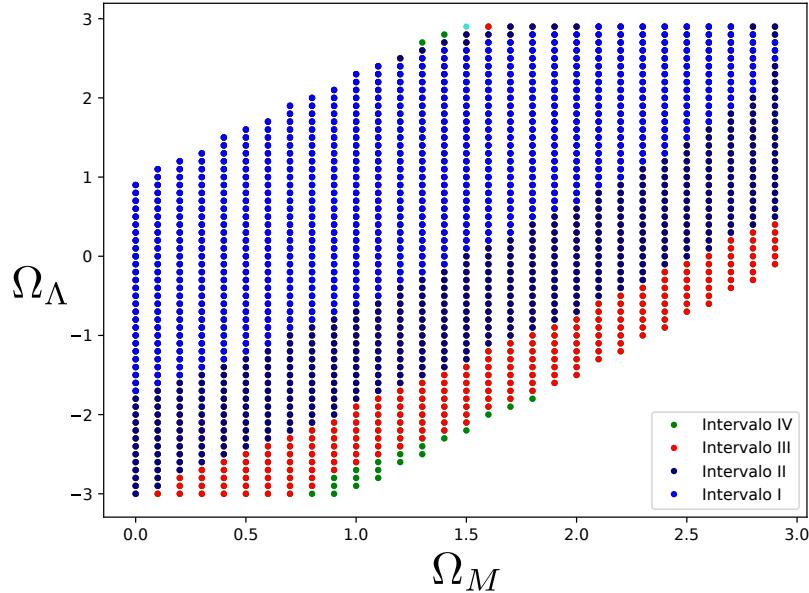


Figura 12: Grafico Ω_M vs Ω_Λ con sus valores admisibles

La Figura 12 ilustra las regiones de contorno para los de confianza en intervalos I, II, III y IV, siendo estos Intervalo I = 68.3%, Intervalo II = 90%, Intervalo III = 95.4% y Intervalo IV = 99%, respectivamente. En esta grafica se observa que los mejores conjuntos de parámetros están bien restringidos por los datos.

9. Marginalice sobre cada uno de los parámetros para obtener las funciones de densidad de probabilidad unidimensionales.

Partiendo de los χ^2 e interpretando la probabilidad de un modelo como $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda) \propto e^{-\frac{\chi^2}{2}}$ nos interesa conocer la probabilidad por separado de Ω_M y Ω_Λ haciendo el proceso de marginalización.

Las Figuras 13 y 14 representan los ajustes gaussianos a cada marginalización realizada sobre Ω_M y Ω_Λ . Los valores de los parámetros de la Gaussiana que mejor se ajustaron fueron:

- $P(\Omega_M)$
 $\sigma_M = 0.3782, \quad \mu_M = 0.8790$
- $P(\Omega_\Lambda)$
 $\sigma_\Lambda = 0.9242, \quad \mu_\Lambda = 0.8328$

10. Repita los dos puntos anteriores utilizando solamente las súper novas con *redshift* $z < 0.3$

La Figura 15 ilustra el nuevo grafico de contornos correspondiente a los intervalos de confianza. En esta Figura se logra observar que los niveles de confianza se dispersan,

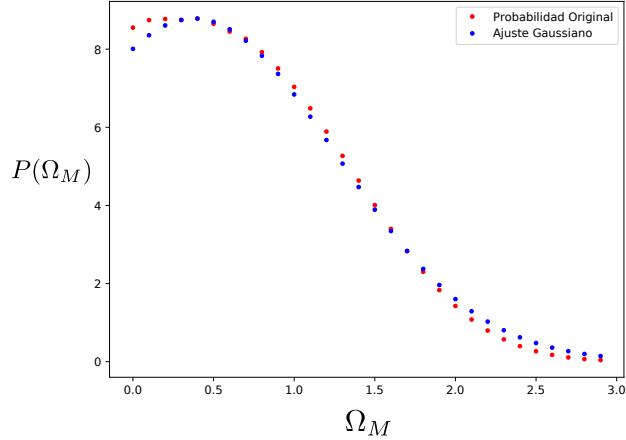


Figura 13: Función de densidad de probabilidad unidimensionales $P(\Omega_M)$

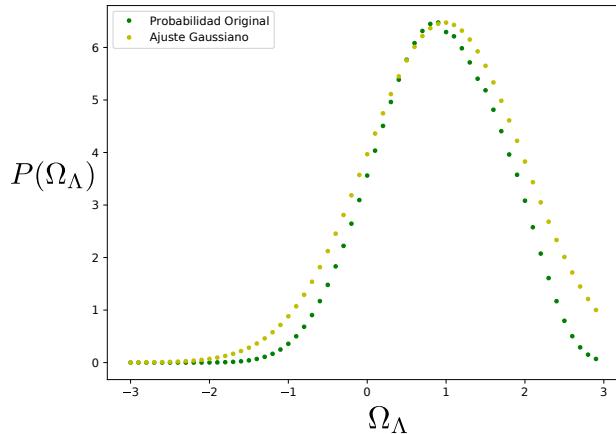


Figura 14: Función de densidad de probabilidad unidimensionales $P(\Omega_\Lambda)$

siendo un resultado no deseado, ya que no se está concentrado (mapa de contorno más grande) alrededor de un punto óptimo, es decir, casi que cualquier conjunto de parámetros sirve (que no se pueden descartar).

Las Figuras 16 y 17 ilustran los nuevos ajustes gaussianos a cada marginalización realizada sobre Ω_M y Ω_Λ . Los valores de los parámetros de la Gaussiana que mejor se ajustaron fueron:

- $P(\Omega_M)$
 $\sigma_M = 0.8237, \quad \mu_M = 3.6093$
- $P(\Omega_\Lambda)$
 $\sigma_\Lambda = 0.9823, \quad \mu_\Lambda = 0.9926$

En ese sentido, las súper novas a alto *redshift* juegan un rol importante en la determinación de los parámetros cosmológicos, dado que a partir de estos resultados los niveles de confianza se pierden y estos parámetros ya no presentan un comportamiento de densidad

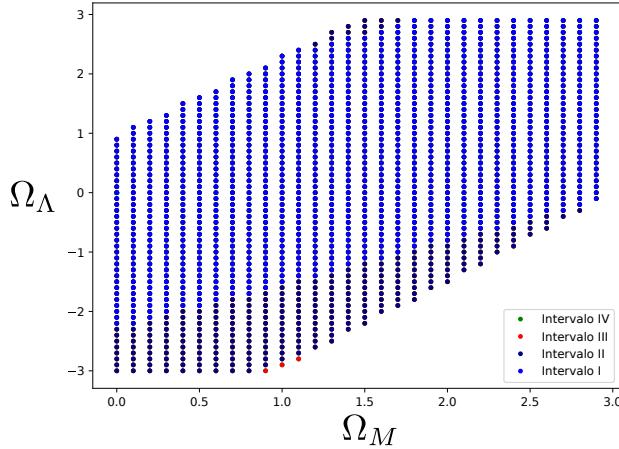


Figura 15: Grafico Ω_M vs Ω_Λ con sus valores admisibles con $redshift < 0.3$

de probabilidad gaussiano.

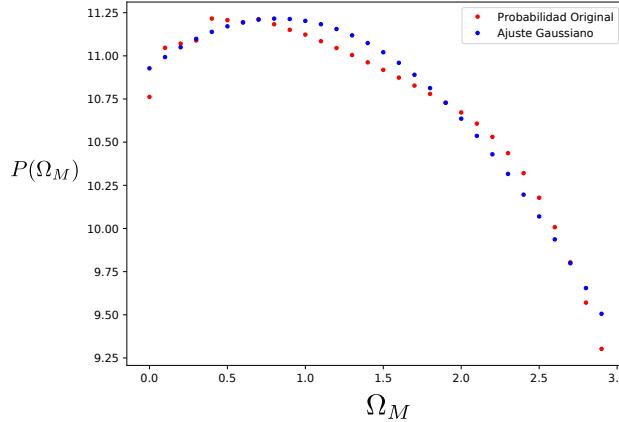


Figura 16: Función de densidad de probabilidad unidimensionales $P(\Omega_M)$ con $redshift < 0.3$

11. Volviendo al conjunto de datos completo, tome el mejor par de parámetros (del punto 7) (Ω_M, Ω_Λ) y varíelos en $\pm 1\%, \pm 5\%, \pm 20\%$.

El mejor par de parámetros del punto 7 fueron $\Omega_M = 0.12$ y $\Omega_\Lambda = 0.36$. Luego, teniendo en cuenta las perturbaciones sobre este par de parámetros construimos la tabla de *likelihoods*, Tabla 1.

Nuestro χ^2 de referencia es 909.3125 (dados el mejor par de parámetros $\Omega_M = 0.12$ y $\Omega_\Lambda = 0.36$). En este sentido, teniendo en cuenta el criterio de modelo de probabilidad por Trotta entre la relación de probabilidad (columna 4 de la Tabla 1) sea mayor a 0.993 se habla de una interpretación fuerte, la cual nuestro todo nuestro conjunto de perturbaciones lo logra. Es decir, aumentar o disminuir el mejor par de parámetros en un porcentaje los

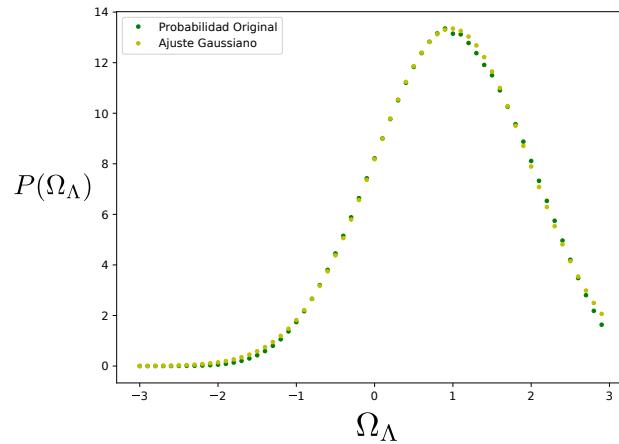


Figura 17: Función de densidad de probabilidad unidimensionales $P(\Omega_\Lambda)$ con $redshift < 0.3$

Perturbación	Ω_M	Ω_Λ	χ^2	Relación de porbabilidad (Trotta)
-1%	0.1188	0.3564	909.3489	0.99995988
-5%	0.114	0.342	909.5891	0.99969577
-20%	0.096	0.288	911.8103	0.99725303
+1%	0.1212	0.3636	909.2855	1.0000297
+5%	0.126	0.378	909.2726	1.00004381
+20%	0.144	0.432	910.6043	0.99857929

Table 1: Tabla con los *likelihoods*.

nuevos modelos obtenidos siguen siendo buenos.