UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Ciencia de la Computación

Curso: Matemática Computacional CC3M2-A Semestre 2023-I

Práctica Dirigida N° 8

1. En cada pieza de un juego de dominó hay dos símbolos, que pueden ser idénticos, pertenecientes al conjunto $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. El orden de los dos símbolos en la pieza no es significativo. Dos piezas no pueden ser idénticas.

   a) ¿Cuántas piezas hay en un juego de dominó?

   b) Considere el experimento que consiste en sacar una ficha de dominó al azar. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un dominó que contiene al menos un seis?

2. Considere tres grupos de estudiantes del curso que contengan el mismo número n de estudiantes cada uno. Queremos elegir un comité de representantes que contenga 3 miembros. Los estudiantes son todos elegibles y el orden en el comité no es significativo.

   a) ¿Cuántos comités diferentes podemos formar si elegimos a los estudiantes al azar entre los 3n estudiantes?

   b) ¿Cuántos comités diferentes podemos formar si elegimos un estudiante por grupo?

   c) ¿Cuántos comités diferentes podemos formar si elegimos tres estudiantes del mismo grupo?

   d) ¿Cuántos comités diferentes podemos formar si elegimos dos estudiantes del mismo grupo y un estudiante de otro grupo?

3. En un determinado país, alrededor del 30 % de los hombres fuman cigarrillos normales y el 10 % de los hombres usan cigarrillos electrónicos. La proporción de hombres que no fuman ningún tipo de cigarrillo es en un 63 %.

   a) ¿Cuál es la proporción de hombres que fuman ambos tipos de cigarrillos?

   b) ¿Cuál es la proporción de hombres que solo fuman cigarrillos normales y no usan cigarrillos electrónicos ?

   c) ¿Son independientes los eventos N = "fumar el cigarrillo normal" y E = "usar el cigarrillo electrónico" ? ¿Por qué ?

4. En una empresa dos talleres fabrican las mismas piezas. El taller 1 fabrica dos veces en un día más piezas que el taller 2. El porcentaje de piezas defectuosas es de 3 % para el taller 1 y de 4 % para el taller 2. Se toma al azar una pieza de la producción de un día. Determinar :

   a) La probabilidad de que esta pieza provenga del taller 1.

b) La probabilidad de que esta pieza provenga del taller 1 y que sea defectuosa.

c) La probabilidad de que esta pieza venga del taller 1 sabiendo que es defectuosa.

5. En una clase, el 15 % de las notas de matemáticas son desaprobatorias, el 25 % de las notas de física son desaprobatorias y el 10 % de los estudiantes tienen calificaciones desaprobatorias en ambos cursos.

   a) Un estudiante tiene una nota desaprobatoria en física. Calcule la probabilidad de que el también tenga una nota desaprobatoria en matemáticas.

   b) Un estudiante tiene una nota desaprobatoria en matemáticas. Calcule la probabilidad de que también tenga una nota desaprobatoria en física

6. Un embarazo ectópico tiene el doble de probabilidades de desarrollarse cuando la mujer embarazada fuma que cuando no lo hace. El 32 % de las mujeres embarazadas fuman, es decir, $P(F) = 0.32$

   a) ¿Cuál es la probabilidad, $P(F^C)$, que la mujer embarazada no fume?

   b) Si la probabilidad de que el “embarazo sea ectópico sabiendo que la mujer fuma”, $P(E|F)$ es $2p$ y la probabilidad de que el “embarazo sea ectópico sabiendo que la mujer no “fuma”, $P(E|F^C)$ es p ¿Qué porcentaje de mujeres con embarazo ectópico, son fumadoras?

7. La ley de Benford establece que en una gran variedad de conjuntos de datos de la vida real, el primer dígito sigue aproximadamente una distribución particular con un 30 % de probabilidad de 1, un 18 % de probabilidad de 2 y, en general,

$$P(D = j) = \log_{10}\left(\frac{j+1}{j}\right), \text{ for } j \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\},$$

   donde, D es el primer dígito de un elemento elegido al azar. Verifique si este es una fmp válida.

8. En un torneo de ajedrez se juegan 10 partidas de forma independiente. Cada juego termina en una victoria para un jugador con probabilidad 0.4 y termina en empate con probabilidad 0.6. Calcula la probabilidad de que exactamente 5 juegos terminen en empate.

9. Hay dos monedas, una con probabilidad de caer cara p_1 y la otra con probabilidad de caer cara p_2. Una de las monedas se elige al azar (con las mismas probabilidades para las dos monedas). Luego se lanzan $n \geq 2$ veces. Sea X el número de veces que sale Cara.

   - ¿Cuál es la fmp de X?
   - ¿La distribución de X es Binomial?
   - Si $p_1 = p_2$ ¿la distribución de X es Binomial?

10. Hay n huevos, cada uno de los cuales eclosiona un pollito con probabilidad p (independiente). Cada uno de estos pollitos sobrevive con probabilidad r, de forma independiente. Sea H el número de huevos que eclosionan y X el número de crías que sobreviven. Encuentre la distribución de H y la distribución de X.

11. Sea X el número de compras que un cliente hará en el sitio en línea de una determinada empresa en un período de tiempo específico. Suponga que el fmp de X es:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Esta distribución se llama distribución de Poisson con parámetro λ.

- Hallar $P(X \geq 1)$ y $P(X \geq 2)$
- Suponga que la empresa solo conoce a las personas que han realizado al menos una compra en su sitio. Cuál es la fmp de X dado que $X \geq 1$.

12. Sea X el número de Caras en 10 lanzamientos justos de monedas.

- Encuentre la fmp condicional de X , dado que los dos primeros lanzamientos arrojan cara.
- Encuentre la fmp condicional de X , dado que al menos dos lanzamientos caen cara

13. Un libro tiene n errores tipográficos. Dos correctores, Ana y Lyn, leyeron el libro de forma independiente. Ana detecta cada error tipográfico con probabilidad p_1 y lo pierde con probabilidad $q_1 = 1 - p_1$, de forma independiente, y lo mismo ocurre con Lyn, que tiene probabilidades p_2 de detectar cada error tipográfico y fallar $q_2 = 1 - p_2$. Sea X el número de errores tipográficos detectados por Ana, Y el número detectado por Lyn y Z el número detectado por al menos uno de los dos correctores.

- Encontrar la distribución de Z
- Asumiendo que $p_1 = p_2$. Encontrar la distribución condicional de X dado que $X + Y = t$

14. Sea la variable aleatoria X con distribución Unif$(0, 1)$. Considere $Y = g(X)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1/3 \\ 2 & \text{si } x > 1/3 \end{cases}$$

- Hallar la fmp de Y
- Calcular $E[Y]$

15. Sea X una variable aleatoria con fdp $f_X(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ para $\lambda > 0$

- Verificar que F_X es una fdp
- Calcular $E[X]$, $\mathrm{Var}(X)$

16. La distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X , Y están dadas de forma parcial en la siguiente tabla

- Complete la tabla
- ¿ Las variables aleatorias X, Y son independientes?
- Determine $E[XY]$
- Muestre que X y Y no están correlacionadas.
- Determine $\mathrm{Var}(X + Y)$

b	a			$\mathrm{P}(Y=b)$
	0	1	2	
-1	...	...	...	$1/2$
1	...	$1/2$	...	$1/2$
$\mathrm{P}(X=a)$	$1/6$	$2/3$	$1/6$	1

17. Sean X, Y variables aleatorias con distribución conjunta dado en la siguiente tabla:

b	a			
	1	2	3	4
1	$16/136$	$3/136$	$2/136$	$13/136$
2	$5/136$	$10/136$	$11/136$	$8/136$
3	$9/136$	$6/136$	$7/136$	$12/136$
4	$4/136$	$15/136$	$14/136$	$1/136$

Calcule las siguientes probabilidades

- $P(X=Y)$
- $p(X+Y=5)$
- $P(1<X\leqslant 3, 1<Y\leqslant 3)$
- $P((X,Y)\in\{1,4\}\times\{1,4\})$

18. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribuciones de probabilidades dados por: $P(X=0)=P(X=1)=1/2$ y $P(Y=0)=P(Y=2)=1/2$

- Calcular la distribución de $Z=X+Y$
- Sean $\tilde{Y}$ y $\tilde{Z}$ variables aleatorias independientes, donde $\tilde{Y}$ tiene la misma distribución que Y y $\tilde{Z}$ tiene la misma distribución de Z. Calcule la distribución de $\tilde{X}=\tilde{Z}-\tilde{Y}$

19. Suponga que la función de distribución conjunta de X y Y está dado por:

$$F(x,y)=1-e^{-2x}-e^{-y}-e^{-(2x+y)} \text{ si } x>0, y>0$$

y $F(x,y)=0$ en otro caso.

- Determine las funciones de distribuciones marginales de X y Y.
- Determine las funciones de densidad de probabilidad conjunta de X y Y.
- Determine la función de densidad de probabilidad marginal de X y Y
- Determinar si X y Y son independientes.

20. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas, con función de densidad conjunta dada por:

$$f(x,y)=\frac{12}{5}xy(1+y) \text{ para } 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,$$

y $f(x,y)=0$ en otro caso. Calcular $P(X<Y)$

b	a: $c-1$	c	$c+1$	$\mathrm{P}(Y=b)$
$c-1$	$2/45$	$9/45$	$4/45$	$1/3$
c	$7/45$	$5/45$	$3/45$	$1/3$
$c+1$	$6/45$	$1/45$	$8/45$	$1/3$
$\mathrm{P}(X=a)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

21. Suponga que X y Y son variables aleatorias discretas tomando valores $c-1$, c y $c+1$. La siguiente tabla nos da sus distribuciones marginal y conjunta:

- Considere $c=0$ y calcule la esperanza de X, de Y y la covarianza entre X y Y.
- Mostrar que X y Y no están correlacionadas
- ¿ X y Y son independientes ?

22. Considere las variables aleatorias X, Y con densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{2}{75}(2x^2y + xy^2) \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant 3, 1 \leqslant y \leqslant 2$$

y densidades de probabilidad marginal

$$f_X(x) = \frac{2}{225}(9x^2 + 7x) \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant 3$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{25}(3y^2 + 12y) \text{ para } 1 \leqslant y \leqslant 2$$

- Calcule $E[X]$, $E[Y]$ y $E[X+Y]$
- Calcule $E[X^2]$, $E[Y^2]$, $E(XY)$ y $E[(X+Y)^2]$
- Calcule $\mathrm{Var}(X+Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ y verifique que $\mathrm{Var}(X+Y) \neq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

23. Sea X y Y dos variables aleatorias independientes, donde X tiene una distribución $N(2,5)$ y Y tiene una distribución $N(5,9)$. Definamos $Z = 3X - 2Y + 1$:

- Calcule $E[Z]$ y $\mathrm{Var}(Z)$
- Cuál es la distribución de Z
- Calcule $P(Z \leqslant 6)$