UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Ciencia de la Computación

Curso: Matemática Computacional CC3M2-A — Semestre 2023-I

Sexta Práctica Dirigida

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son convexos o no.
   - $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + z = 1\}$
   - $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$
   - $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2 + y^2\}$
   - $M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \log x + xy \geq 0,\ x \geq 1\}$
   - $M_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 \geq 0,\ x \geq 0\}$
   - $M_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : ye^{-x} - x \geq 1\}$
   - $M_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x} \leq y\}$
   - $M_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x \leq 0\}$
   - $M_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \log y^4 \leq 120, y \geq 2\}$
   - $M_{10} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq, \forall\, y \in S\}$ para algun S

2. Verificar si las siguientes funciones son convexas o no
   - $f_1(x, y) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$
   - $f_2(x, y) = xy$
   - $f_3(x, y) = x^3 + 2y^2 + 3x$
   - $f_4(x) = \sup_{y \in \mathrm{Dom} f}\{x^T y - f(y)\}$
   - $f_5(x, y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}, x > 0, y > 0$
   - $f_6(x, y) = \log(e^x + e^y) - \log x, x > 0$
   - $f_7(x, y) = |x + y|$
   - $f_8(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0$
   - $f_9(x, y) = -\log(cx + dy),\ c, d \in \mathbb{R}$
   - $f_{10}(x, y) = \|Ax - b\|_2^2$

3. Verificar las condiciones de optimalidad en el punto $(x_1, x_2) = (2, 4)$ para el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 \leq x_2 \\ & x_2 \leq 4 \end{array}$$

4. Considere el siguiente problema no lineal

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   Calcule los multiplicadores de Lagrange en el punto $(2,1)$

5. Verificar si el punto $(x_1, x_2) = (4/5, 8/5)$ es una solución local / global para el problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

6. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \min & 2e^{x_1-1} + (x_2-x_1)^2 + x_3^2 \\ \text{s.a.} & x_1x_2x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \geq c \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   Hallar los valores de c para el cual el punto $\bar{x} = (1,1,1)$ cumple las condiciones de KKT.

7. considere el problema

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \text{s.a.} & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1 \\ & (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \leq 1 \end{array}$$

   Encontrar la solución óptima y verificar si satisface las condiciones de KKT.

8. Dado el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - x_2^3 \\ \text{s.a.} & x_2 \leq 0 \end{array}$$

   Determinar si es un problema de optimización convexo.

9. Hallar los puntos de Karush-Kuhn-Tucker del siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{optimizar} & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 - 2 \quad = 0 \end{array}$$

10. Dado el problema de optimización:

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - x_2^3$$

   a) Hallar los puntos estacionarios
   b) Hallar los mínimos locales

11. Dado la función $f(x) = x_1^3 + x_2^2$, hallar los puntos estacionarios y determinar si corresponde a un mínimo local de la función.

12. Dado la función $f(x) = x_1^4 + x_2^2$, hallar los puntos estacionarios y determinar si corresponde a un mínimo local.

13. Hallar los puntos que satisfacen las condiciones necesarias para un extremo, es decir, mínimo local o máximo local de una función

$$\frac{x_1 + x_2}{3 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}$$

14. Encontrar el mínimo de la función $f(x) = (x_2^2 - x_1)^2$ entre los puntos que satisfacen las condiciones necesarias para un valor extremo.

15. Considere el problema sin restricciones

$$\min_x \quad f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$$

Encontrar los puntos estacionarios y determinar si corresponden a un mínimo local.

16. Considere el problema sin restricciones

$$\min_x \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

Hallar los puntos estacionarios y determinar si corresponde a valores extremos.

17. José construye cables eléctricos utilizando dos tipos de aleaciones metálicas. La aleación 1 es 55 % aluminio y 45 % cobre, mientras que la aleación 2 es 75 % aluminio y 25 % cobre. Los precios a la que José puede comprar las dos aleaciones depende de la cantidad que compre. El costo total de comprar x_1 toneladas de aleación 1 viene dado por:

$$5x_1 + 0.01x_1^2$$

y el costo total de comprar x_2 toneladas de aleación 2 viene dado por:

$$4x_2 + 0.02x_2^2$$

Formule un problema de optimización no lineal para determinar las cantidades que minimiza el costo de las dos aleaciones que debe usar José para producir 10 toneladas de cable que sea al menos 30 % cobre. Resuelva el problema.

18. Emma participa en una carrera de bicicletas de L km. Ella planea llevar agua en la espalda para mantenerse hidratada durante la carrera. Si v denota su velocidad promedio durante la carrera en km/h y w el volumen de agua que lleva en la espalda, entonces ella consume agua a una tasa promedio de $cv^3(w+1)^2$ litros por hora. Formule un problema de optimización no lineal para determinar cuánta agua Emma debe cargar y la velocidad promedio a la que debe andar en bicicleta para minimizar su tiempo de carrera.

19. Vishnu tiene \$ 35 para gastar en cualquier combinación de tres bienes diferentes: manzanas, naranjas y plátanos. Las manzanas cuestan \$ 2 cada una, las naranjas \$ 1.50 cada una y las bananas \$ 5 cada una. Vishnu mide su felicidad al consumir manzanas, naranjas y plátanos usando una función de utilidad. Si Vishnu consume x_1 manzanas, x_2 naranjas y x_3 plátanos, entonces su utilidad viene dada por:

$$3\log(x_1) + 0.4\log(x_2 + 2) + 2\log(x_3 + 3).$$

Formule un problema de optimización no lineal para determinar cómo debería gastar Vishnu sus \$ 35.

20. Una empresa debe decidir dónde ubicar un único centro de distribución para dar servicio a N minoristas ubicados en una determinada región. La ubicación del minorista n está en las coordenadas (x_n, y_n). Cada semana V_n camiones salen del centro de distribución llevando mercancías al punto de venta n y luego regresa al centro de distribución. Todos estos camiones pueden viajar en caminos rectos desde el centro de distribución hasta el punto de venta. La empresa desea determinar dónde colocar el centro de distribución para minimizar la distancia total que todos los los camiones deben viajar cada semana. Formule el problema de optimización correspondiente.

n	x_n	y_n	V_n
1	7	2	7
2	5	−3	10
3	−6	4	15

Suponga que le dan los datos resumidos en la tabla para una ubicación de tres instancias de este problema. Partiendo del punto $x_0 = (0, 0)$ realizar iteraciones con el Algoritmo Genérico para problemas de optimización no lineal sin restricciones usando la dirección de búsqueda de descenso máximo y una búsqueda de línea exacta para resolver este problema. ¿Se puede garantizar que el punto en el que termina el algoritmo es local o global? ¿óptimo? Justifique su respuesta.

21. Partiendo con el punto $x_0 = (0, 0)$ resolver la el problema de la ubicación de la instalación anterior usando el Algoritmo Genérico para problemas de optimización no lineal sin restricciones utilizando la dirección de búsqueda del método de Newton y la regla de Armijo con $\sigma = 10^{-1}$, $\beta = 1/2$ y $s = 1$. Es el punto en el que el algoritmo termina garantizado para ser un óptimo local o global? Justificar la respuesta.

22. Una empresa debe determinar las dimensiones de una caja de cartón para maximizar su volumen. La caja puede utilizar como máximo 60 cm^2 de cartón. Por razones estructurales, la cara inferior y superior de la caja deben ser de triple peso (es decir, tres piezas de cartón). Formular el problema de optimización respectivo. Escribir la función objetivo penalizada y la función Lagrangiana aumentada para el problema con pesos de penalización, ρ, ϕ y multiplicadores de Lagrange, λ.

23. Resuelva el problema planteado en el ejercicio 22 usando el Algoritmo basado en penalizaciones para problemas de optimización no lineal con restricciones utilizando las siguientes reglas:

    a) Utilizar la función objetivo penalizada calculada en el ejercicio 22

    b) Comenzar en el punto $(l, a, h) = (0, 0, 0)$ y con pesos de penalización 1 en todas las restricciones.

    c) Utilice la dirección de búsqueda de descenso máximo con una búsqueda de línea exacta.

    d) Si después de realizar una iteración se viola una restricción, aumente el peso de la penalización en esa restricción en 1. De lo contrario, mantenga el mismo peso de penalización en esa restricción para la próxima iteración.

24. Resuelva el problema del ejercicio 22 usando el algoritmo basado en multiplicadores para problemas de optimización no lineal con restricciones utilizando las siguientes reglas:

   a) Utilice la función Lagrangiana aumentada calculada en el el ejercicio 22.

   b) Comenzar en el punto $(l, a, h) = (0, 0, 0)$ con pesos de penalización y multiplicadores de Lagrange 1 en todas las restricciones.

   c) Utilice la dirección de búsqueda de descenso máximo con una búsqueda de línea exacta.

   d) Si después de realizar una iteración se viola una restricción, aumente el peso de la penalización en esa restricción en 1. De lo contrario, mantenga el peso de penalización en esa restricción para la próxima iteración.