Capítulo 1

Análisis de redes en el dominio del tiempo

1.1 Introducción

Las redes eléctricas generalmente se encuentran en estado estable casi todo el tiempo, sin embargo, cuando se conecta o desconecta la red de las fuentes existe un periodo de tiempo muy corto en que las señales toman valores de voltaje o corriente muy elevados comparados al del estado estable; este periodo de tiempo generalmente se le llama *estado transitorio.* Las perturbaciones originadas en la señal pueden dañar los equipos o cambiar sus parámetros.

El cálculo de los parámetros de voltaje y corriente para inductores y capacitores implican derivadas con respecto al tiempo. Estos elementos conectados en la red dan origen a ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden.

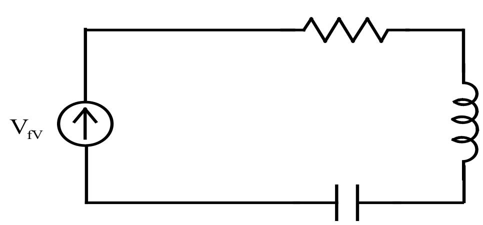
Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una variable independiente.

En nuestro curso, *v(t)* e *i(t)*, son las variables dependientes y t la variable independiente

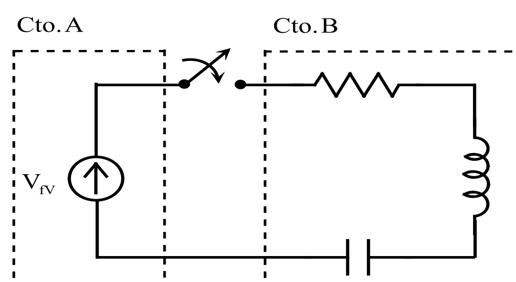
La solución de una ecuación diferencial es una función que no contienen derivadas o diferenciales y que satisface a dicha ecuación. Para nuestro caso se le denomina respuesta.

1.2 respuesta libre, respuesta forzada y respuesta total de circuitos RC, RL Y RLC

En la teoría de Circuitos c.a. y c.d., la solución de las redes eléctricas fue en el estado estable, quiere decir que las redes se encontraban conectadas a la fuente ya desde mucho tiempo de tal manera que habían alcanzado su estado estable. Para este curso se analiza el comportamiento justamente después de conectar la red a la fuente obteniendo el estado transitorio.



Red para estado estable



Red para estado transitorio

El análisis consiste en establecer ecuaciones que den la respuesta en función del tiempo medido a partir del instante en que se altera el equilibrio, mediante el interruptor.

Para la solución se deben tener en cuenta los siguientes tiempos en nuestro circuito de interés:

1. $t < 0$ o $t = 0^-$. Tiempo transcurrido antes de accionar el interruptor. Este tiempo se considera desde $-\infty$ a un instante antes de $t = 0$ cuya respuesta obtenida es la condición inicial. Los parámetros a calcular son:

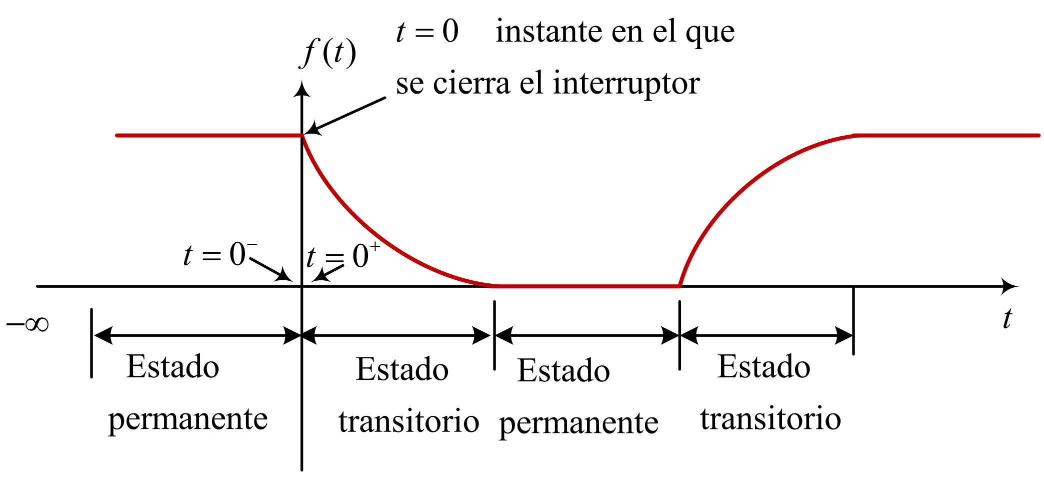
   $$q(0^-), i_L(0^-), \Psi(0^-), V_C(0^-)$$

2. $t = 0$ Es cuando se abre o cierra el interruptor desconectando o conectando el circuito, iniciando el análisis. Los parámetros a calcular son:

   $$q(0), i_L(0), \Psi(0), V_C(0), V_L(0), i_C(0)$$

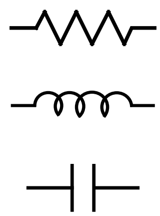
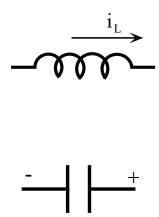
3. $t > 0$ o t=0^+. Corresponde a un instante después de $t = 0$ y es partir de este instante que se hace el análisis con ecuaciones diferenciales.

En la siguiente gráfica se muestra la diferencia entre estado transitorio y estado permanente.



Gráfica que muestra los diferentes tiempos y estados de la red eléctrica.

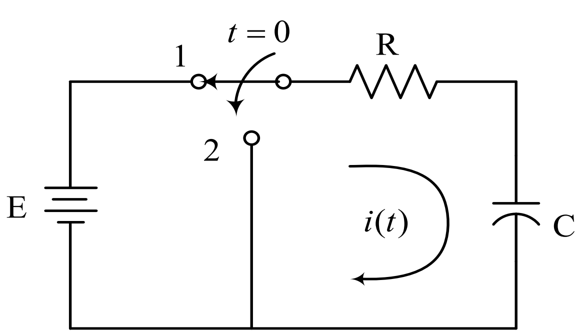
En la tabla siguiente se muestra el comportamiento de los elementos básicos pasivos según el tiempo y estado en que se encuentran

		Instante en el que inicia el transitorio	El elemento alcanza el estado permanente
	elemento	$t = 0$	$t = \infty$
Sin condiciones iniciales		Circuito abierto Corto circuito	Corto circuito Circuito abierto
Con condiciones iniciales		Corriente inicial Voltaje inicial	Corto circuito Circuito abierto

Respuesta libre en circuitos RC

Se llama respuesta libre porque la red queda libre de fuentes cuando se acciona el interruptor.

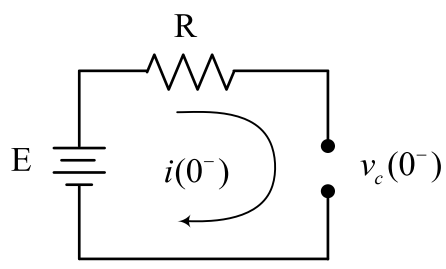
Calcular $i(t)$ suponiendo que el circuito ha permanecido conectado un tiempo extremadamente largo.



Solución

1. Para t<0 o $t = 0^-$ calcular las condiciones iniciales.

Se observa que el elemento que almacena energía es el capacitor, además ha permanecido conectado durante mucho tiempo, eso quiere decir que ya se cargó, entonces se comporta como un circuito abierto. La red resultante es:



Según la configuración de la red, la tensión del capacitor, más la tensión del resistor, es igual a la tensión de la fuente.

$vc(0^-) + v_R(0^-)=E$

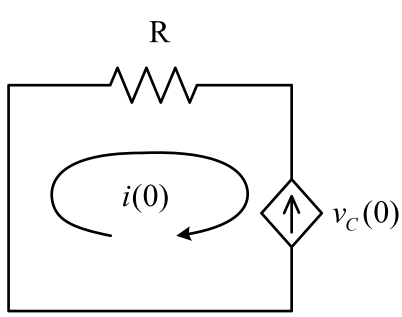
además, la corriente del circuito es cero porque el capacitor está abierto, $i(0^-)=0$

Entonces, $v_R(0^-)=Ri(0^-)=R*(0)=0$

La ecuación quedará como $vc(0^-) =E$

2. Para $t = 0$ **se acciona el interruptor,** pasando del número 1 al número 2.

la red resultante



Como la capacitancia es la propiedad del elemento para oponerse a los cambios instantáneos de tensión, implica que:

$vc(0^-) = vc(0) =E$

Aplicando LVK

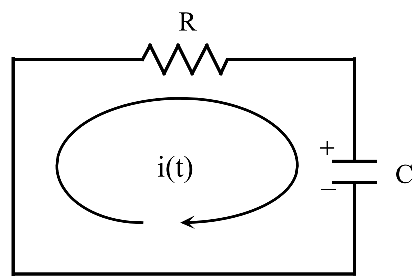
$v_R(0)+v_C(0)=0$

$$R\ i(0) = -v_C(0)$$

$$i(0) = -\frac{v_C(0)}{R}$$

El signo $-$ indica que el sentido es contrario al propuesto y es debido a la descarga del capacitor.

3. Para $t > 0$ ó $t = 0^+$ inicia el estado transitorio y el circuito es:



La polaridad indica que el capacitor está cargado y por lo tanto tiene condiciones iniciales.

Por LVK se plantea la ecuación para $t > 0$

$$v_R(t) + v_C(t) = 0 \qquad (1)$$

Además, la tensión de resistor y capacitor se calcula con: $v_R(t) = Ri(t)$ y

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Sustituyendo en (1)

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0$$

Como la ecuación resultante no es una ecuación diferencial se debe derivar, dando el resultado

$$R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

Realizando el cambio $\frac{d}{dt} = D$

$$RDi(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

Factorizando y haciendo el comentario en la ecuación

$$\underbrace{\left(RD+\frac{1}{C}\right)}_{=0}\underbrace{i(t)}_{\neq 0}=0$$

El producto de los dos factores en la ecuación anterior debe ser igual cero. Pero *i(t)* no puede ser cero porque es la solución.

$$RD+\frac{1}{C}=0$$

Despejando D

$$D=-\frac{1}{RC} \quad \text{raíz}$$

Ahora proponiendo la solución para *i(t)*

$$i(t)=Ke^{Dt}=Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Para calcular la constante arbitraria K se utilizan las condiciones en t=0, por lo tanto, se debe evaluar la propuesta en t=0.

Evaluando $i(0)=Ke^{-\frac{1}{RC}(0)}=Ke^{1}=K$

Pero del paso 2 $\quad i(0)=-\frac{v_C(0)}{R}$ implica que $K=-\frac{v_C(0)}{R}$

Sustituyendo en la solución propuesta se obtiene la solución.

$$i(t)=-\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{[A]}$$

Ahora la **caída de tensión para el resistor** se calcula con la ley de Ohm

$$v_R(t)=Ri(t)$$

$$v_R(t)=-R\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$v_R(t)=\text{-}v_C(0)e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{[V]}$$

Para la tensión del capacitor se despeja de la ecuación (1)

$$v_C(t) = -v_R(t)$$

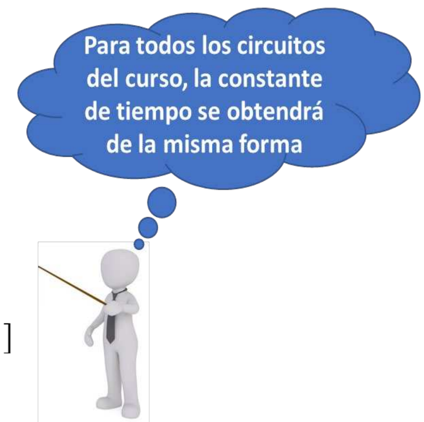
$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [\text{V}]$$

Para graficar tenemos que hacer referencia a la constante de tiempo

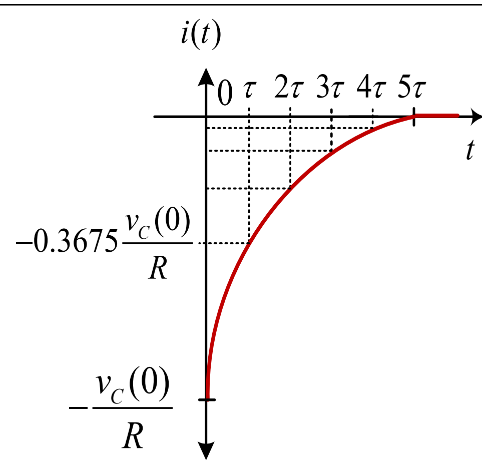
Constante de tiempo τ. Es la medida de rapidez con la que disminuye el transitorio.

La constante de tiempo se calcula obteniendo la inversa del coeficiente que acompaña a *t* en la exponencial

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [\text{V}] \qquad \tau = \frac{1}{\frac{1}{RC}} = RC \quad [\text{seg}]$$



Para obtener las gráficas se sustituye la constante de tiempo en la variable independiente de las diferentes respuestas

t	$i(t) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$ [A]	$i(t)$	Grafica para la función corriente del circuito RC en respuesta libre
0	$i(0) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(0)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{0}$	$-\frac{v_C(0)}{R}$	
τ	$i(\tau) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(RC)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-1}$	-0.367 $\frac{v_C(0)}{R}$	
2τ	$i(2\tau) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(2RC)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-2}$	-0.135 $\frac{v_C(0)}{R}$	
3τ	$i(3\tau) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(3RC)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-3}$	-0.049 $\frac{v_C(0)}{R}$	
4τ	$i(4\tau) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(4RC)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-4}$	-0.018 $\frac{v_C(0)}{R}$	
5τ	$i(5\tau) = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-\frac{1}{RC}(5RC)} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-5}$	-0.006 $\frac{v_C(0)}{R}$	

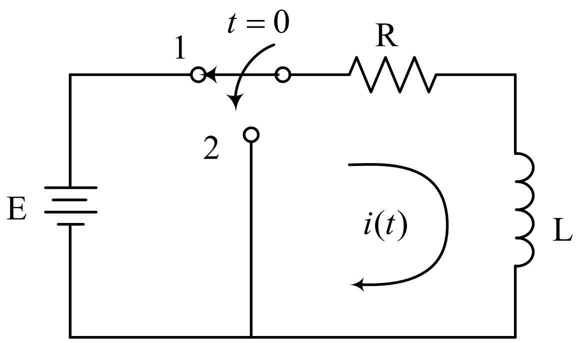
En 5τ se considera que el transitorio ha terminado

Tarea

Graficar las funciones de caída de tensión para resistor y capacitor

Respuesta libre en circuito RL

Calcular $i(t)$ suponiendo que el circuito ha permanecido conectado un tiempo extremadamente largo.



Solución

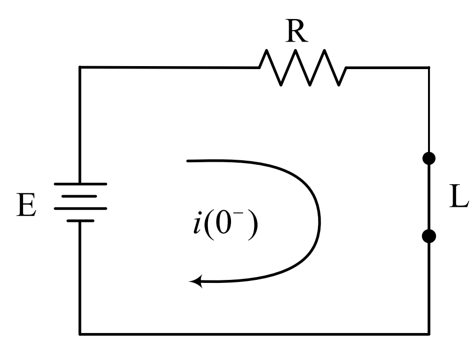
1. Para t<0 o $t = 0^{-}$ calcular las condiciones iniciales.

Se observa que el elemento que almacena energía es el inductor, además ha permanecido conectado durante mucho tiempo, eso quiere decir que ya se cargó, entonces se comporta como un corto circuito. La red resultante es:

Como el inductor ha alcanzado su estado permanente, entonces se comporta como cortocircuito y almacena energía en forma de campo magnético.

Se observa que la corriente del inductor es la corriente total.

Aplicando la ley de ohm se obtiene la condición inicial.

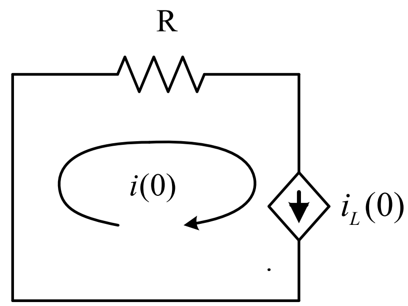


$$i_L(0^{-}) = i(0^{-})$$

$$i\left(0^{-}\right)=\frac{E}{R}\ [\mathrm{A}]$$

2. Para $t = 0$ **se acciona el interruptor,** pasando del número 1 al número 2.

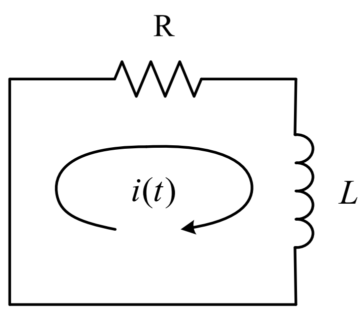
la red resultante



Como la inductancia es la propiedad del elemento para oponerse a los cambios instantáneos de corriente, implica que:

$$i_L(0^{-})=i(0^{-})=\frac{E}{R}$$

3. Para $t > 0$ ó $t = 0^{+}$ inicia el estado transitorio y el circuito es:



Para obtener la ecuación diferencial se aplica LVK

$$v_R(t)+v_L\left(t\right)=0 \quad (1)$$

Además, se sabe que: $v_R(t)=Ri\left(t\right)$ y $v_L(t)=\mathrm{L}\dfrac{di(t)}{dt}$

Sustituyendo

$$L\frac{di}{dt}+Ri(t)=0$$ y considerando el operador $D=\dfrac{d}{dt}$

$$\underbrace{\left(DL+R\right)}_{=0}\underbrace{i(t)}_{\neq 0}=0$$

Del primer término la raíz será:

$$D = -\frac{R}{L}$$

la solución propuesta

$$i(t) = Ke^{Dt} = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

Para calcular la constante arbitraria K se utilizan las condiciones en t=0, por lo tanto, se debe evaluar la propuesta en t=0.

Evaluando $i(0) = Ke^{-\frac{R}{L}(0)} = Ke^{1} = K$

Pero del paso 2 $\quad i(0) = \frac{E}{R}$ implica que $K = \frac{E}{R}$

Sustituyendo en la solución propuesta se obtiene la solución.

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \quad [A]$$

Ahora la **caída de tensión para el resistor** se calcula con la ley de Ohm

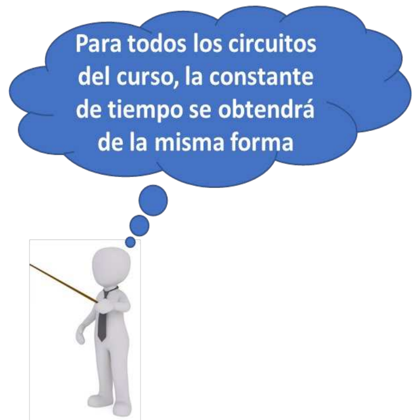
$$v_R(t) = Ri(t)$$
$$v_R(t) = R\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$v_R(t) = Ee^{-\frac{R}{L}t} \quad [V]$$

Para la tensión del inductor se despeja de la ecuación (1)

$$v_L(t) = -v_R(t)$$
$$v_L(t) = -Ee^{-\frac{R}{L}t} \quad [V]$$

Para graficar tenemos que hacer referencia a la constante de tiempo

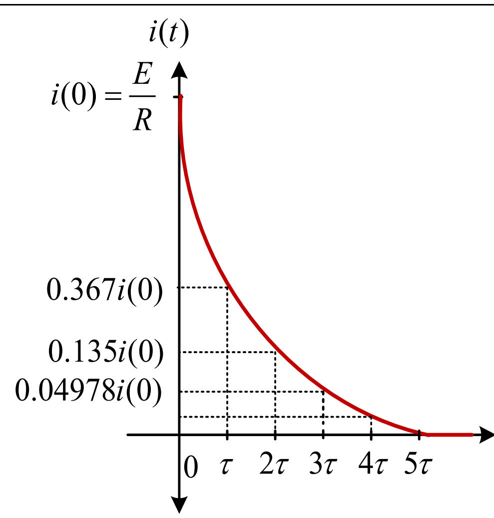
La constante de tiempo se calcula obteniendo la inversa del coeficiente que acompaña a t en la exponencial



$$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\ \ [\mathrm{A}] \qquad \tau=\frac{1}{\frac{R}{L}}=\frac{L}{R}\ \ [\mathrm{seg}]$$

Para obtener las gráficas se sustituye la constante de tiempo $\tau=\frac{L}{R}$ en la variable independiente ***t*** de las diferentes respuestas.

Para la función corriente $i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\ \ [\mathrm{A}]$

t	$i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\ \ [\mathrm{A}]$	$i(t)$	Grafica para la función corriente del circuito RL en respuesta libre
0	$i(0)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(0)}$	$\frac{E}{R}$	
τ	$i(\tau)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(\frac{L}{R})}=\frac{E}{R}e^{-1}$	$0.367\frac{E}{R}$	
2τ	$i(2\tau)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(2\frac{L}{R})}=\frac{E}{R}e^{-2}$	$0.135\frac{E}{R}$	
3τ	$i(3\tau)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(3\frac{L}{R})}=\frac{E}{R}e^{-3}$	$0.04978\frac{E}{R}$	
4τ	$i(4\tau)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(4\frac{L}{R})}=\frac{E}{R}e^{-4}$	$0.018\frac{E}{R}$	
5τ	$i(5\tau)=\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}(5\frac{L}{R})}=\frac{E}{R}e^{-5}$	$0.0067\frac{E}{R}$	

Tarea

Realizar las graficas para las funciones tensión del resistor y del inductor.