suma y producto por escalar en vectores geométricos

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

suma de vectores

Producto por escalar

Propiedades de la suma de vectores

1. $\vec{u} + \vec{v}$ es un vector geométrico.
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$
4. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Ejercicio (Ecuación)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores dados. Expresar en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector $\vec{x}$ tal que

$$\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$$

Usando las propiedades de la suma, se prueba que $\vec{x} = \vec{u} + (-\vec{v})$

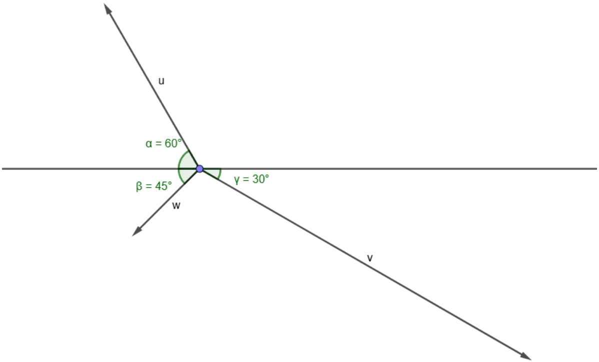
Definición (Diferencia entre vectores)

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la diferencia $\vec{u}-\vec{v}$ se define como el vector que sumado a $\vec{v}$ nos da $\vec{u}$. (Ver la figura 1.19). Ahora, según se acaba de ver en el ejemplo anterior, tal vector es $\vec{u}+(-\vec{v})$; así que

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Ejemplo

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como se muestran en la figura, con $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\|\vec{w}\| = 1$.
Dibuje $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ y halle tanto su magnitud como su dirección.



1

[1] Ejercicio1

Desigualdad Triangular

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no paralelos, considere el triángulo construido a partir de ellos, podemos concluir que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Puesto que "la longitud de un lado en cualquier triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados".
Además, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos se da la igualdad $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, por tanto

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \tag{1.1}$$

la cual es denominada **desigualdad triangular**.

Definición producto por escalar

Sea $a \in \mathbb{R}$, que llamaremos escalar y $\vec{u}$ un vector geometrico definimos el **producto por escalar** $a\vec{u}$ como:

- Si $a > 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ entonces $a\vec{u}$ es el vector con la misma dirección de $\vec{u}$ y con magnitud $a\|\vec{u}\|$.
- Si $a < 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ entonces $a\vec{u}$ es el vector con dirección opuesta a la de $\vec{u}$ y con magnitud $|a|\|\vec{u}\|$, donde $|a|$ es el valor absoluto de a.
- Si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $a\vec{u} = \vec{0}$.

De la definición, podemos decir que

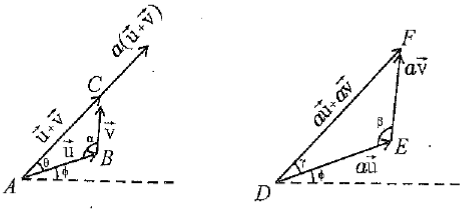
- $\|a\vec{u}\| = |a|\|\vec{u}\|$
- $a\vec{u} = \vec{0}$ si y sólo si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$
- $a\vec{u}$ es un vector geometrico paralelo a $\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Además, se pueden probar las siguientes propiedades

1. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Demostración, $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Es claro que esta propiedad es válida si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$. Supongamos $a > 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ y probemos que las normas y las direcciones de los vectores $a(\vec{u}+\vec{v})$ y $a\vec{u} + a\vec{v}$ son iguales. Considere los triángulos ABC y DEF



$\alpha = \beta$ (ya que $\vec{u}$ es paralelo a $a\vec{u}$ y $\vec{v}$ lo es a $a\vec{v}$), además

$$\frac{|EF|}{|DE|} = \frac{\|a\vec{v}\|}{\|a\vec{u}\|} = \frac{a\|\vec{v}\|}{a\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

por lo que los lados son proporcionales. Entonces por LAL, $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$.

Como consecuencia de esa semejanza tenemos que

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

y así

$$\frac{\|a\vec{u} + a\vec{v}\|}{\|\vec{u} + \vec{v}\|} = \frac{\|a\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = a.$$

Luego,

$$\|a\vec{u} + a\vec{v}\| = a\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|a(\vec{u} + \vec{v})\|$$

es decir, los vectores $a\vec{u} + a\vec{v}$ y $a(\vec{u} + \vec{v})$ tienen la misma norma.

Veamos ahora que también tienen la misma dirección:
Por una parte,

$$\begin{aligned} dir(a(\vec{u}+\vec{v})) &= dir(\vec{u}+\vec{v}) \quad (\text{pues } a>0) \\ &= \theta+\phi \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$dir(a\vec{u}+a\vec{v}) = \gamma+\phi.$$

Ahora, por la semejanza de los triángulos ABC y DEF se tiene que $\theta=\gamma$, así

$$dir(a(\vec{u}+\vec{v})) = dir(a\vec{u}+a\vec{v}).$$

Por tanto,

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}.$$

De manera análoga se puede verificar la validez si $a<0$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$. $\square$

Definición (Vector unitario, normalización)

Un vector geométrico se dice **unitario** si su magnitud es 1. Dado un vector $\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, el vector

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

tiene la misma dirección de $\vec{v}$ pues $\frac{1}{\|\vec{v}\|} > 0$, y es unitario ya que

$$\|\vec{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \right) \|\vec{v}\| = 1.$$

Nos referiremos al proceso de hallar el vector unitario $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ a partir de un vector no nulo $\vec{v}$, como **normalización** de $\vec{v}$.
Obsérvese que para todo vector no nulo $\vec{v}$, se tiene que

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}$$

donde $\vec{u}$ es el vector unitario con la misma dirección de $\vec{v}$.

Proposición

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos.
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si y sólo si $\vec{v}$ es múltiplo escalar de $\vec{u}$ o $\vec{u}$ es múltiplo escalar de $\vec{v}$.

Demostración

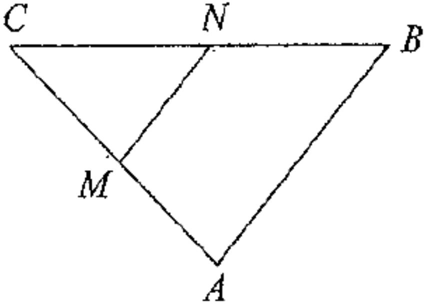
Por definición de producto por escalar, si $\vec{v}$ es múltiplo escalar de $\vec{u}$ o $\vec{u}$ es múltiplo escalar de $\vec{v}$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.
Por otro lado, si son paralelos, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección o direcciones opuestas, portanto sus vectores unitarios difieren, a lo sumo, por un signo. Caso sean iguales

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \left(\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right) = \left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \right) \vec{u}$$

Luego, $\vec{v}$ es múltiplo escalar de $\vec{u}$. De manera analoga se prueba con los vectores unitarios opuestos. $\square$

Ejercicio

Sea el triángulo con vértices A, B, C y los puntos medios M, N de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.



Entonces

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Demostración

En primer lugar, tenemos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}.$$

Ahora, como M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, entonces

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Luego,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

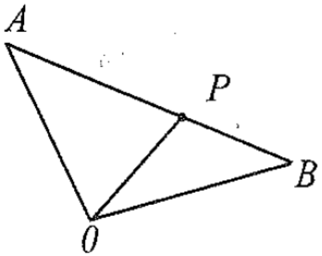
Teorema de la proporción

Sean *m y n números positivos y sea P el punto de un segmento* $\overline{AB}$ *que lo divide* $(A - P - B)$ *de tal modo que*

$$\frac{\|\overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|} = \frac{m}{n}$$

Si O es cualquier punto del plano, entonces

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$



Demostración

Note que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}.$$

y como

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PB},$$

se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{PB}.$$

Como, además,

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \\
(1 + \frac{m}{n})\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{OP} &= \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposición

En todo triángulo, las tres medianas se cortan en un punto (llamado **baricentro**) cuya distancia a cada vértice es igual a $2/3$ de la longitud de la mediana trazada desde dicho vértice.
En el siguiente ejemplo se muestra una manera de probar este resultado empleando vectores geométricos.

Demostración

Sea P el punto de la mediana relativa al lado $\overline{BC}$ tal que su distancia al vértice A es $\frac{2}{3}$ de la longitud de dicha mediana. Probar que

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Proposición (Descomposición de un vector)

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores no paralelos, entonces para todo vector $\vec{z}$ existen únicos escalares a y b tales que

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

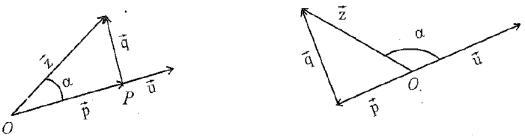
Nos referiremos a esta expresión como la descomposición de $\vec{z}$ en las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Definición (Proyección ortogonal)

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo dado y sea $\vec{z}$ un vector cualquiera. $\vec{z}$ puede descomponerse, de manera única, en la forma

$$\vec{z} = \vec{p} + \vec{q}$$

con $\vec{p}$ paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{q}$ perpendicular a $\vec{u}$.



Caso a : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ *Caso b* : $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

El vector $\vec{p}$ se llama ***proyección ortogonal*** *de $\vec{z}$ sobre $\vec{u}$ y se denota $Proy_{\vec{u}}\vec{z}$. Obsérvese que:*

- *Si $\vec{z}$ es paralelo a $\vec{u}$, entonces $Proy_{\vec{u}}\vec{z} = \vec{z}$.*
- *Si $\vec{z}$ es perpendicular a $\vec{u}$, entonces $Proy_{\vec{u}}\vec{z} = \vec{0}$.*