Taller Inducción Matemática

Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

1. Principio de Inducción Matemática

Desmostrar los siguientes enunciados usando inducción matemática.

1. $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \dfrac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
2. $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible por 54.
3. Definimos los *números* F_n de Fermat mediante la fórmula,

   $$F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ para } n = 0, 1, \ldots$$

   Pruebe que para todo $n \geq 1$, $F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2 = F_n$.
4. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n > n$ para todo entero $n \geq 7$.
5. Sea F_n el n-ésimo termino de la secuencia de Fibonacci. Recordemos que se define la secuencia de Fibonacci, así

   $$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{si } n \geq 0.$$

   Demostrar que para todo natural $n \geq 1$ tenemos.

   a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
   b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$
   d) $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = F_{n+1}$. Donde en la suma interpretamos $\binom{m}{k} = 0$ si $k > m$.
6. Demostrar que

   a) $n^3 - n$ es multiplo de 6 para todo natural n.
   b) $5^n - 1$ es multiplo de 24 para todo número natural n par.
   c) $2^n + 1$ es múltiplo de 3 para todo número natural n impar.

7. Definimos la secuencia $\{a_n\}$ por $a_1 = 2$ y para $n \geq 2$ el término a_n es el producto de los anteriores mas uno. Demuestre que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

8. Demuestre que $7^{2n} - 48n - 1$ es divisible por 48^2 para todo valor n.

9. Demuestre que para todo natural $n \geq 4$.

   $2^n < n!$.

   $2n^3 < 3n^2 + 3n + 1$.

10. Dado un entero positivo n, definimos $T(n, 1) = n$ y, para todo $k \geq 1$, $T(n, k+1) = n^{T(n,k)}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq 1$, $T(2010, k) < T(2, k + c)$. Determine el menor entero positivo c con esa propiedad.