Casos de Factorización

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2024

Introducción a la Factorización

La **factorización** es el proceso de expresar una expresión algebraica como el producto de sus factores. Es una herramienta fundamental en álgebra que simplifica expresiones y resuelve ecuaciones polinómicas.
En esta presentación, exploraremos los casos comunes de factorización:

1. Factor común
2. Diferencia de cuadrados
3. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
4. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
5. Fórmula cuadrática
6. Teorema de la raíz racional
7. División sintética

Factor Común

Definición

*El **factor común** consiste en identificar y extraer el mayor factor común de todos los términos de una expresión algebraica.*

Ejemplo

Factorizar $2x + 6$.

Solución:

$$2x + 6 = 2(x + 3)$$

Ejemplo

Factorizar $6x^3y^2 - 9x^2y + 15xy^3$.

Solución:

$$\begin{aligned} 6x^3y^2 - 9x^2y + 15xy^3 &= 3xy(2x^2y - 3x + 5y^2) \\ &= 3xy(2x^2y - 3x + 5y^2) \end{aligned}$$

Diferencia de Cuadrados

Teorema

*La **diferencia de cuadrados** se factoriza como:*

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 - 9$.

Solución:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Ejemplo

Factorizar $16x^4 - 25y^2$.

Solución:

$$16x^4 - 25y^2 = (4x^2+5y)(4x^2-5y)$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Definición

Un trinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza buscando dos números m y n tales que:

$$m + n = b \quad y \quad m \cdot n = c$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 + 5x + 6$.

Solución: *Buscamos m y n:*

$$m + n = 5, \quad m \cdot n = 6$$

Los números son 2 y 3.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 - x - 12$.

Solución: *Buscamos* m *y* n:

$$m + n = -1, \quad m \cdot n = -12$$

Los números son -4 *y* 3.

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Definición

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se busca descomponer el término medio en dos términos que permitan agrupar y factorizar.

Ejemplo

Factorizar $2x^2 + 7x + 3$.
Solución: *Buscamos m y n tales que:*

$$m + n = 7, \quad m \cdot n = 2 \times 3 = 6$$

Los números son 6 y 1. Descomponemos:

$$2x^2 + 6x + x + 3 = (2x^2 + 6x) + (x + 3)$$

Factorizamos:

$$2x(x + 3) + 1(x + 3) = (x + 3)(2x + 1)$$

Ejemplo

Factorizar $6x^2 - 19x + 10$.

Solución: *Buscamos* m *y* n:

$$m + n = -19, \quad m \cdot n = 6 \times 10 = 60$$

Los números son -15 *y* -4. *Descomponemos:*

$$6x^2 - 15x - 4x + 10 = (6x^2 - 15x) - (4x - 10)$$

Factorizamos:

$$3x(2x - 5) - 2(2x - 5) = (2x - 5)(3x - 2)$$

Fórmula Cuadrática

Teorema

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ *son:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Resolver $x^2 - 4x + 3 = 0.$

Solución:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \implies x = 3 \text{ ó } x = 1$$

La factorización es:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Ejemplo

Resolver $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Solución:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Entonces:

$$x = \frac{4}{4} = 1 \quad \acute{o} \quad x = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

La factorización es:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

O multiplicando:

$$2x^2 + 3x - 5 = (2x-5)(x+1)$$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Definición

*Un **trinomio cuadrado perfecto** es una expresión de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$, que se factoriza como $(a \pm b)^2$.*

Ejemplo

Factorizar $x^2 + 6x + 9$.

Solución:

Observamos que $9 = 3^2$ y $6x = 2 \cdot x \cdot 3$.

Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Ejemplo (completar el cuadrado)

Factorizar $x^2 + 10x + 24$ completando el cuadrado.

Solución:

Primero, completamos el cuadrado:

$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 24 = x^2 + 10x + 25 - 25 + 24$$

Simplificamos:

$$= (x+5)^2 - 1$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$= [(x+5)+1][(x+5)-1] = (x+6)(x+4)$$

Por lo tanto, la factorización es:

$$x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

Teorema de la Raíz Racional

Teorema

Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ tiene coeficientes enteros y p/q es una raíz racional en su forma reducida, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Ejemplo

Encontrar las raíces racionales de $x^3 - 4x^2 + x + 6$.
Solución: *Los posibles valores de p (divisores de 6):*
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Los posibles valores de q (divisores de 1): ± 1.
Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Probamos $x = 1$:

$$1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$$

Probamos $x = 2$:

$$8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

Entonces $x = 2$ es una raíz. Podemos factorizar usando división sintética o polinomios.

Ejemplo

Encontrar las raíces racionales de $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$.

Solución: *Divisores de* 12: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$.

Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3/2, \pm 6$, *etc.*

Probamos $x = 2$:

$$16 - 12 - 16 + 12 = 0$$

Entonces $x = 2$ *es una raíz.*

División Sintética

Definición

*La **división sintética** es un método abreviado para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x - r)$.*

Ejemplo

Dividir $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *entre* $(x - 2)$.
Solución:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - 4x + 3$*, y el residuo es* 0*.*

Ejemplo

Dividir $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$ *entre* $(x - 2)$*.*

Solución:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 2 & -3 & 1 & -8 & 4 \\ & & 4 & 2 & 6 & -4 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

El cociente es $2x^3 + x^2 + 3x - 2$*, y el residuo es* 0*.*

Conclusiones

La factorización es esencial para simplificar expresiones y resolver ecuaciones polinómicas. Comprender y dominar los diferentes métodos de factorización nos permite abordar problemas algebraicos más complejos con confianza.

- Identificar el caso de factorización adecuado es clave.
- Practicar con diversos ejemplos fortalece la comprensión.
- La combinación de métodos puede ser necesaria para polinomios de grado superior.