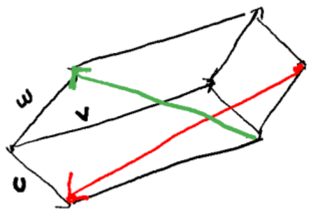
Ejercicios 1

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

1. escribe el vector verde y el rojo en terminos de los vectores u, v, w.



2. (new!) Sean $\vec{U}$, $\vec{V}$ y $\vec{W}$ vectores geométricos en el plano tales que

$$\|\vec{V}\| = 4, \qquad \|\vec{U}\| = 3, \qquad \|\vec{W}\| = 2,$$

$$\text{dir}(\vec{V}) = 140°, \qquad \text{dir}(\vec{U}) = 80°, \qquad \text{dir}(\vec{W}) = 20°.$$

   a) Determine $\|\vec{V} + \vec{U}\|$ y $\text{dir}(\vec{V} + \vec{U})$.

   b) Determine $\|\vec{V} + \vec{U} + 2\vec{W}\|$ y $\text{dir}(3(\vec{V} + \vec{U} + 2\vec{W}))$.

3. Un equipo de rescate sale del puesto de mando (punto A) y sigue una ruta con brújula para bordear barrancos y lagunas: camina 1 km hacia el **norte geográfico**; luego gira a la **derecha** 30° y camina 1 km; después gira a la **izquierda** 60° y camina 1 km; más adelante gira a la **derecha** 45° y camina 1 km; finalmente gira a la **izquierda** 90° y camina 1 km.

   (a) ¿Cuánto debe girar a la **derecha** para volver a caminar en dirección al **norte geográfico**?

   (b) ¿Cuánto debe girar y en qué dirección (**izquierda** o **derecha**) y cuántos **kilómetros** debe caminar para regresar al punto de partida A?

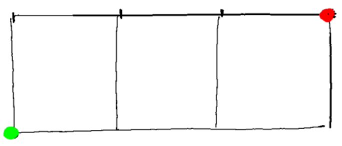
4. Suponga que una persona camina 1 km en dirección al norte geografico. Luego gira a la derecha $15^o\ 14'$ y camina 1 km más, luego gira a la izquierda $34^0\ 14''$ y camina 1 km más, finalmente gira a la izquierda $13^o\ 13'\ 25''$ y camina 1 km más.

   a) Cuanto debe girar a la derecha para poder caminar otra vez en dirección hacia el norte georafico?

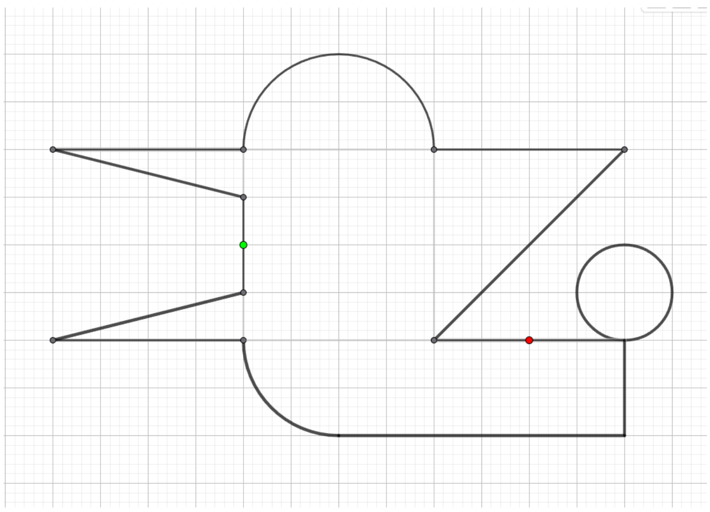
   b) Cuanto debe girar y en que dirección (izquierda o derecha) y cuantos kilometros debe caminar para poder regresar al punto de partida?

5. Probar que $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

6. En la figura se observa un punto **verde** (punto de partida) y un punto **rojo** (punto de llegada). El área central marcada corresponde a un **cuadrado** que no puede ser atravesado ni tocado en la trayectoria. Determine el conjunto mínimo de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$ que, sumados en orden, describan un camino que parta desde el punto verde y termine en el punto rojo, rodeando el cuadrado central y evitando cualquier contacto con sus lados o vértices. Presente el diagrama con los vectores en orden,la norma y la dirección de cada vector y la comprobación de que su suma lleva exactamente desde el punto de partida hasta el punto de llegada.



7. En la figura se observa un punto **verde** (origen) y un punto **rojo** (destino). La región demarcada con **línea negra más gruesa** (bucle superior, corredor inferior y curva circular a la derecha) representa un *obstáculo*: la trayectoria *no puede tocarlo ni cruzarlo.* Defina la menor cantidad de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ que, sumados en ese orden, conduzcan desde el punto verde hasta el punto rojo sin interceptar dicho obstáculo. Entregue: (i) el croquis con los vectores dibujados en orden, (ii) las normas y direcciones de los vectores; compruebe usando geogebra).



8. Probar que $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

6. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores del plano. Probar que

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{w}.$$

7. Sea $\vec{v}$ un vector tal que $\|\vec{v}\| = 4$ y $\text{dir}(\vec{v}) = 45°$.

   a) Dibujar un vector $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}\| = 9$ y $\text{dir}(\vec{x}) = \text{dir}(\vec{v})$.

   b) Dibujar un vector $\vec{y}$ tal que $\|\vec{y}\| = 5$ y la dirección de $\vec{y}$ es la opuesta a la dirección de $\vec{v}$.

   c) Expresar los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como múltiplos escalares del vector $\vec{v}$.

8. Sean A, B, C y D puntos del plano tales que D esté sobre el segmento $\overline{AB}$ y su distancia al punto A es $\frac{2}{3}$ de la distancia entre A y B. Si E es el punto medio del segmento de recta $\overline{AC}$, expresar el vector $\overrightarrow{DE}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

9. Suponiendo que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, expresar $\overrightarrow{DE}$ en términos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.

10. Considere un cuadrilátero $ABCD$ y sean P, Q, R, S los puntos medios de sus lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Demostrar, utilizando vectores geométricos, que P, Q, R, S son los vértices de un paralelogramo. *(Ayuda: vea el ejemplo 1.9).*

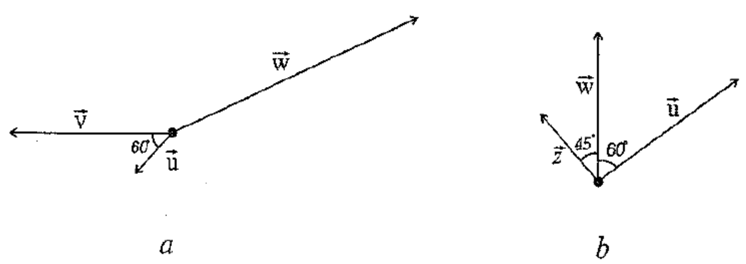
11. Demostrar vectorialmente que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

12. Dados los vectores geométricos $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ tales que $\|\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{w}\| = 10$, $\text{dir}(\vec{v}) = 60°$, $\text{dir}(\vec{u}) = 120°$ y $\text{dir}(\vec{w}) = 180°$:

    a) Dibujar los vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

    b) Encontrar la descomposición de $\vec{w}$ en las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; es decir, hallar escalares a, b tales que
    $$\vec{w} = a\,\widehat{\vec{u}} + b\,\widehat{\vec{v}},$$
    donde $\widehat{\vec{u}}$ y $\widehat{\vec{v}}$ son los vectores unitarios en las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

13. Los vectores geométricos $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ que se muestran en la figura (no incluida) son tales que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\|\vec{w}\| = 5$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{w}$ es de 150°. Hallar la descomposición de $\vec{w}$ en las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que
$$\vec{w} = a\,\widehat{\vec{u}} + b\,\widehat{\vec{v}}.$$



14. Sean $\vec{u}$, $\vec{w}$ y $\vec{z}$ los vectores en la figura (b), tales que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{w}\| = 5$ y $\|\vec{z}\| = 4$.

    a) Encontrar la magnitud de $\vec{u} + \vec{w} + \vec{z}$ y el ángulo entre este vector y el vector $\vec{u}$.

    b) Hallar los escalares a y b tales que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{z}$.

    c) Hallar la descomposición de $\vec{u}$ en las direcciones de $\vec{z}$ y $\vec{w}$. Ilustrarlo gráficamente.

15. Sea $\vec{u}$ el vector tal que $\|\vec{u}\| = 5$ y $\text{dir}(\vec{u}) = 30°$. Para todo vector que satisfaga las condiciones dadas en cada literal, dibujar $\text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ y calcular su magnitud.

    a) $\|\vec{v}\| = 4$, $\text{dir}(\vec{v}) = 150°$.

    b) $\|\vec{v}\| = 6$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mide 60°.

16. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores tales que $\|\vec{u}\| = 6$ y $\|\vec{v}\| = 10$.

a) Suponiendo que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de $120°$, hallar el escalar a tal que $\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = a\,\vec{u}$.

b) ¿Cuál es la *componente escalar* de $\vec{v}$ en la dirección del vector $\vec{u}$?

17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores tales que $\|\vec{u}\| = 7$, $\operatorname{dir}(\vec{u}) = 120°$, $\|\vec{v}\| = 8$ y $\operatorname{dir}(\vec{v}) = 225°$.

    a) Dibujar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

    b) Descomponer gráficamente el vector $\vec{u}$ como la suma de un vector $\vec{p}$ paralelo al vector $\vec{v}$ y un vector $\vec{q}$ perpendicular a $\vec{u}$. Hallar las magnitudes de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

18. Se coloca un objeto que pesa 6 libras sobre una rampa con una inclinación de $30°$. Hallar la magnitud de la fuerza que se requiere para evitar que el objeto ruede por la rampa.

19. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores tales que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\|\vec{w}\| = 2$ y sea

$$\vec{z} = 2\,\vec{u} - \vec{v} + 3\,\vec{w}.$$

    Calcular $\vec{z} \cdot \vec{v}$ sabiendo que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de $60°$ y el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es de $120°$.

20. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores. Probar que:

    a) $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\,(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2$.

    b) $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2$.

21. Calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sabiendo que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ y $\|\vec{w}\| = 7$.

22. Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores. Probar:

    a) (**Teorema de Pitágoras**) $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares si y sólo si

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

    b) (**Ley del paralelogramo**)

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\big(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2\big).$$

    (Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus cuatro lados.)

    c) (**Identidad de polarización**)

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 4\,(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

23. Demostrar, empleando la identidad de polarización, que las diagonales de un paralelogramo tienen igual longitud si y sólo si el paralelogramo es un rectángulo.

24. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores geométricos tales que $\|\vec{v}\| = 4$, $\|\vec{w}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\vec{u}$ es unitario. Si $\|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes:

    a) Calcular el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

    b) Calcular la magnitud de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.

25. Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores geométricos tales que $\|\vec{v}\| = 4$, $\|\vec{w}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\vec{u}$ es unitario. Si $\|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes:

a) Calcular el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcular la magnitud de la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.

26. Hallar la descomposición canónica de cada uno de los siguientes vectores:

    a) $\vec{v}$ tal que $\|\vec{v}\| = 6$ y $\operatorname{dir}(\vec{v}) = 225°$.

    b) $\vec{u}$ tal que $\|\vec{u}\| = 5$ y $\operatorname{dir}(\vec{u}) = 270°$.

    c) $\vec{w}$ tal que $\|\vec{w}\| = 3$ y $\operatorname{dir}(\vec{w}) = \frac{\pi}{6}$ radianes.

27. Si $\vec{x} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j}$, hallar:

    a) La magnitud y dirección de $\vec{x}$.

    b) La descomposición canónica del vector $\vec{w}$ de magnitud 7 y dirección opuesta a la de $\vec{x}$.

    c) La descomposición canónica de cada uno de los vectores de longitud $4\sqrt{2}$ que forma ángulo de 45° con el vector $\vec{x}$.

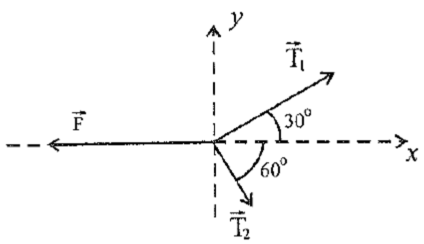
28. Sean $\vec{u} = 2\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j}$, $\vec{v} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\vec{w} = -2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$. Hallar la descomposición canónica, la magnitud y la dirección de los siguientes vectores:

    a) $2\,\vec{u} - \vec{v}$.

    b) $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

    c) $3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - \vec{w}$.

29. Considerar el diagrama de fuerzas de la siguiente figura.



    La fuerza $\vec{F}$ tiene una magnitud de 20 newtons y el sistema se encuentra en equilibrio, es decir, $\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$. Hallar la descomposición canónica de $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$.

30. Realizar los ejercicios 12 y 13 (sección 1.4), utilizando la descomposición canónica de los vectores dados.

31. Sean $\vec{u} = -3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$, $\vec{v} = 5\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\vec{w} = 7\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Calcular:

    a) $\vec{u} \cdot (2\vec{v} - \vec{w})$.

    b) $\|\vec{u}\|\,(\vec{v} \cdot \vec{w})$.

    c) $\big\|\,(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}\,\big\|$.

32. Calcular $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

    a) Si $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$ y el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{\pi}{3}$ radianes.

    b) Si $\vec{v} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$ y $\vec{w} = 2\,\mathbf{i}$.

33. Para cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dados a continuación, determinar si ellos son perpendiculares, si el ángulo entre ellos es agudo o si el ángulo entre ellos es obtuso. Calcular la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

   a) $\vec{u} = 6\,\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \vec{v} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$.

   b) $\vec{u} = -6\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}, \quad \vec{v} = 4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$.

   c) $\vec{u} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \vec{v} = \mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$.

34. Sean $\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$ y $\vec{u}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$.

   a) Probar que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son perpendiculares.

   b) Hallar la descomposición de cada uno de los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $-2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}$ en las direcciones de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

35. Sea $\vec{w} = 7\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j}$. Para cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dados a continuación:

   a) Determinar si existen escalares a y b tales que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

   b) Si la respuesta en (a) es afirmativa, hallar los valores de a y b.

   a) $\vec{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \vec{v} = 2\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$.

   b) $\vec{u} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}, \quad \vec{v} = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$.

36. Sean $\vec{u} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$ y $\vec{v} = \mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}$. Encontrar los valores de α para los cuales se satisface la condición dada en cada caso.

   a) $\vec{u} \perp \vec{v}$.

   b) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{4}$ radianes.

37. Para el par de vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dados en cada literal, calcular el producto escalar, el coseno del ángulo entre ellos, determinar si son perpendiculares, verificar la desigualdad de Cauchy–Schwarz y hallar $\operatorname{proj}_{\vec{w}}\vec{v}$ y $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$.

   a) $\vec{v} = 4\,\mathbf{i}, \qquad \vec{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

   b) $\vec{v} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \frac{2}{3}\,\mathbf{j}$.

   c) $\vec{v} = -2\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j}, \qquad \vec{w} = \frac{3}{2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{6}\,\mathbf{j}$.

38. Sean $\vec{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ y $\vec{v} = c\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{j}$, con $\vec{v} \neq \vec{0}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre a, b, c, d para que $\vec{v}$ y $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ tengan:

   a) la misma dirección;

   b) dirección contraria.

39. Para cada par de puntos dados, encontrar el punto R tal que el cuadrilátero $OPRQ$ sea un paralelogramo.

   a) $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   b) $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

40. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la descomposición canónica de cada uno de los vectores $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PR}$.

b) Mostrar que los puntos P, Q y R no son colineales.

c) Si M es el punto medio del segmento $\overline{PR}$, hallar la descomposición canónica y la magnitud de $\overrightarrow{QM}$.

d) Si B es el baricentro del triángulo PQR, hallar la descomposición canónica y la magnitud del vector $\overrightarrow{QB}$.

e) Encontrar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$.

f) Sea S el punto de intersección de la bisectriz del ángulo entre $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$ con el segmento $\overline{PR}$. Hallar la descomposición canónica de $\overrightarrow{QS}$.

41. Sean $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puntos de $\mathbb{R}^2$. Calcular $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{PQ}} \overrightarrow{RS}$ y $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{RS}} \overrightarrow{PQ}$.

42. Un triángulo tiene como vértices los puntos $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Hallar:

   a) Cada uno de sus ángulos interiores.

   b) El área del triángulo.

43. Sea $\vec{u}$ un vector no nulo y sea $\vec{z}$ un vector cualquiera. Probar que, para cualquier escalar no nulo r,
$$\operatorname{proj}_{r\vec{u}} \vec{z} = \operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{z}.$$

44. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores geométricos no nulos. Mostrar que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si y sólo si $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \vec{u}$.

Referencias

[1] Abraham Asmar Charris, Patricia Restrepo de Peláez, Rosa Franco Arbeláez y Fernando Vargas Hernández. *Geometría vectorial y analítica: una introducción al álgebra lineal*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín (Centro de Publicaciones), 2007. 554 pp. ISBN 978-958-8256-38-2. Disponible en: `https://davidbuiles.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/03/geometria-vectorial-y-analitica.pdf`.