Existencia y Unicidad

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Reducción de orden

Sea

$$x^{(k)}(t) = F(t,\, x(t),\, x'(t),\, \ldots,\, x^{(k-1)}(t))$$

una EDO de orden k y dimensión d. Defina

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x'(t),\\
x_2'(t) &= x''(t),\\
&\vdots\\
x_{k-1}'(t) &= x^{(k-1)},\\
x_k'(t) &= x^{(k)}(t) = F(t, x,\, x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t)).
\end{aligned}$$

Si $y(t) = (x(t), x_1(t), \ldots, x_{k-1}(t)) \in \mathbb{R}^{kd}$ la EDO puede ser reescrita como una EDO de orden 1 y dimensión kd.

$$\boxed{y'(t) = G(t, y(t))}$$

$$G(t, y) = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ F(t, x, x_1, \ldots, x_{k-1})) \in \mathbb{R}^{kd}.$$

Teorema (Existencia y unicidad (Picard))

Supóngase que $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *es continua y localmente lipschitziana en la variable espacial* x. *Considérese la ecuación diferencial de primer orden*

$$x'(t) = F(t, x(t)).$$

Entonces:

1. *Para todo* $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ *existen un intervalo abierto* $I \subset \mathbb{R}$ *con* $t_0 \in I$ *y una solución* $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ *de la ecuación tal que* $\gamma(t_0) = x_0$.
2. *Si* $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ *y* $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ *son soluciones y existe* $t_0 \in I_1 \cap I_2$ *con* $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$, *entonces* $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ *para todo* $t \in I_1 \cap I_2$.

En las condiciones del punto (1), diremos que γ *es solución con condición inicial* $\gamma(t_0) = x_0$.

Definición (lipschitziana)

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $F : X \to Y$ se dice lipschitziana si existe una constante $C > 0$ tal que

$$d_Y(F(x_1), F(x_2)) \;\leq\; C\, d_X(x_1, x_2) \qquad \textit{para cualesquiera } x_1, x_2 \in X.$$

A tal C se le llama constante de Lipschitz de F; cuando queremos explicitar su valor diremos que F es C-lipschitziana.

Definición (Localmente lipschitziana en la segunda variable)

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$. Decimos que F es localmente lipschitziana en x si, para todo $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, existen $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$ y $C = C(t_0, x_0) > 0$ tales que

$$B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0) \subset \mathcal{U} \quad \textit{y} \quad \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \;\leq\; C\, \|x_1 - x_2\|$$

para todo $t \in B_\delta(t_0)$ y cualesquiera $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$.

Ejemplo (Una función que *no* es localmente lipschitziana)

Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(t, x) = x^{2/3}$. *Afirmamos que* f *no es localmente lipschitziana en* $x = 0$.

En efecto, si existieran $\delta > 0$ *y* $L > 0$ *tales que* $|f(0, w) - f(0, y)| \leq L|w - y|$ *para cualesquiera* $w, y \in (-\delta, \delta)$, *tomando* $y = 0$ *se tendría*

$$|w|^{2/3} \leq L|w| \qquad (|w| < \delta).$$

Obtenemos $|w|^{-1/3} \leq L$, *lo cual es imposible al hacer* $w \to 0$. *Por tanto* f *no es localmente lipschitziana en* $x = 0$.

Ejemplo (Clase C^1 en la segunda variable $\Rightarrow$ localmente lipschitziana)

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *abierto y* $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ *de clase* C^1 *en la segunda variable* x*, es decir,* $\partial_x F(t,x)$ *es continua. Entonces* F *es localmente lipschitziana en* x*.*

Demostración

En efecto, fijado $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$*, por continuidad de* $\partial_x F$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$K := \sup\{\|\partial_x F(t,x)\| : \; t \in B_\delta(t_0), \; x \in B_\delta(x_0)\} < \infty.$$

Para $t \in B_\delta(t_0)$ *y* $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$*, por el Teorema del Valor Medio en varias variables,*

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \leq K \, \|x_1 - x_2\|.$$

Así, F *es* K*-lipschitziana en* x *sobre* $B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0)$*. Obsérvese que ni siquiera es necesario que* $\partial_x F$ *sea continua: basta que sea localmente acotada.*

Definición (Espacio métrico)

Sea M un conjunto no vacío. Una Métrica en un conjunto M es una función

$$d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$$

que asocia a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ un número real $d(x, y)$ llamado la distancia de x a y satisfaciendo las siguientes condiciones $\forall x, y, z \in M$:

1. $d(x, x) = 0$;
2. *Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$,*
3. *(Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$,*
4. *(Desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

El par (M, d) se denomina espacio métrico.

Ejemplo (Métrica cero–uno (o discreta))

Sea M un conjunto no vacío. Definimos $d : M \times M \to [0, \infty)$ por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & si\ x = y, \\ 1, & si\ x \neq y. \end{cases}$$

Entonces (M, d) es un espacio métrico.

Ejemplo (Métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$)

En $M = \mathbb{R}^n$ definimos $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ por

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

La no negatividad e identidad son evidentes, la simetría proviene de $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, y la desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Cauchy–Schwarz.

Teorema (Punto fijo para contracciones)

Sea (M, d) un espacio métrico completo y sea $T : M \to M$ una contracción, es decir, existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \qquad \textit{para todo } x, y \in M.$$

Entonces:

1. *Existe un único punto $x^* \in M$ tal que $T(x^*) = x^*$.*
2. *Para cualquier $x_0 \in M$, la sucesión definida por $x_{n+1} = T(x_n)$ converge a x^* (y, en particular, $d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)$).*

Demostración

Dado el punto (t_0, y_0). Sea el cerrado $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(y_0, \delta)$, considere

$$S = \{\gamma(t) : \gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \overline{B}(y_0, \delta),\ continuas\}$$

Se puede probar que (S, d) es un espacio metrico donde la distancia d se define como

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$$

Sea la función $\mathcal{L} : S \to S$, definida como

$$\mathcal{L}(\gamma) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(r, \gamma(r))\, dr$$

Se puede probar que $\mathcal{L}$ es una contracción es decir

$$\|\mathcal{L}(\gamma_1) - \mathcal{L}(\gamma_2)\| \leq \alpha \|\gamma_1 - \gamma_2\| \quad 0 < \alpha < 1$$

EL teorema del punto fijo de Banach nos asegura que una contracción en un espacio metrico, simpre tiene un punto fijo (la imagen es igual al punto). Es decir, existe un γ_0 talque $\mathcal{L}(\gamma_0) = \gamma_0$.

$$\gamma_0(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(r, \gamma_0(r))\, dr$$

$\gamma_0(t)$ es la solución de la EDO, que pasa por el punto (t_0, y_0). $\square$

Ejemplos

1. $y' = 3y + 2$ en el valor inicial $t = 2, y = 1$

Ver en Desmos

Teorema

Sea $f(t, y)$ con $t, y \in \mathbb{R}$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I \times [a, b]$, entonces f es lipschitziana en $I \times (a, b)$.

Demostración

sean $(t, y_0), (t, y_1)$, considere la función $\gamma(s) = (t, y_0 + s(y_1 - y_0))$, la función compuesta $f(\gamma(s)) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es derivable

$$
\begin{aligned}
\frac{d(f(\gamma(s))}{ds}(s) &= \nabla f(\gamma(s)) \cdot \left(\frac{d(t)}{ds}, \frac{d(y_0 + s(y_1 - y_0))}{ds} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma(s)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(s)) \right) \cdot (0, (y_1 - y_0)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(s))(y_1 - y_0)
\end{aligned}
$$

Por el Teorema del valor medio, Existe un $s_0 \in (0,1)$ talque

$$\begin{aligned} f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) &= (f(\gamma))'(s_0)(1-0) \\ &= \frac{d(f(\gamma(s))}{ds}(s_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(s_0))(y_1 - y_0) \end{aligned}$$

ya que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua, entonces es acotada en un intervalo cerrado, por tanto existe M talque

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(s))| \leq M \quad \forall\, s \in (0,1)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_0)| &= |\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(s_0))(y_1 - y_0)| \\ &\leq M|y_1 - y_0| \end{aligned}$$

□

Ejemplo: función derivable y no continua entonces no Lipschitz

- Sea la función

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \begin{cases} y^2 \sin(y^{-2}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

  Note que g en continua en todo $[-1,1]$, pues $\forall y \neq 0$ $y^2 \sin(y^{-2})$ es continua, y $\lim_{y\to 0}(y^2 \sin(y^{-2})) = 0 = g(0)$

- Además, es derivable en todo $y \in [-1,1]$:

$$g'(y) = \begin{cases} 2y\sin(y^{-2}) - \dfrac{2}{y}\cos(y^{-2}), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

  Pues
  $g'(0) = \lim_{h\to 0}(h^2 \sin(h^{-2}) - 0)/h) = \lim_{h\to 0}(h \sin(h^{-2})) = 0.$

- Por otro lado note que g' no es continua

$$\lim_{y\to 0}(2y\sin(y^{-2})) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\left(-\tfrac{2}{y}\cos(y^{-2})\right) = \pm\infty.$$

  Pues g' tiene una asíntota en $y = 0$.

- Sea ahora la EDO

$$y' = F(t, y) = g(y).$$

  F es continua por que g lo es, además $\partial F/\partial y = g'(y)$ esta definida $\forall (t, y)$ en un cerrado alrededor de $(0, 0)$. Considere la sucesión de pares que se aproximan a $(0, 0)$

$$(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k + \frac{\pi}{2}}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Probaremos que el cociente

$$\frac{\|F(t, y_k^{(1)}) - F(t, y_k^{(2)})\|}{\|y_k^{(1)} - y_k^{(2)}\|}$$

No se puede acotar por una constante. Evaluando

$$\frac{|g(y_k^{(1)}) - g(y_k^{(2)})|}{|y_k^{(1)} - y_k^{(2)}|} = \frac{|\,(y_k^{(1)})^2 \sin((y_k^{(1)})^{-2}) - (y_k^{(2)})^2 \sin((y_k^{(2)})^{-2})|}{|\frac{1}{\sqrt{2\pi k + \frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}|}.$$

Como $\sin(2\pi k) = 0$ y $\sin(2\pi k + \frac{\pi}{2}) = 1$, el numerador se reduce a

$$\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}.$$

Tenemos que estudiar

$$\frac{\frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}}{\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi k+\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right|}.$$

Racionalizamos usando

$$\left|\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right| = \frac{|\sqrt{b}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a\,b}}, \quad a = 2\pi k+\tfrac{\pi}{2},\ b = 2\pi k.$$

Por tanto el cociente resulta

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{|\sqrt{b}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a\,b}}} = \frac{\sqrt{b}/\sqrt{a}}{|\sqrt{b}-\sqrt{a}|} = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{2\pi k+\frac{\pi}{2}}}\left(\sqrt{2\pi k}+\sqrt{2\pi k+\tfrac{\pi}{2}}\right).$$

Al hacer $k\to\infty$,

$$\frac{\sqrt{2\pi k}}{\sqrt{2\pi k+\frac{\pi}{2}}}\left(\sqrt{2\pi k}+\sqrt{2\pi k+\tfrac{\pi}{2}}\right) \longrightarrow +\infty,$$

El cociente diverge y F no es localmente Lipschitz en $y=0$.

Ejemplo, no derivable pero si lipschitz

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(t, y) = |y|.$$

- Note que $\partial f / \partial y(0)$ no existe.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{d}{dy}|y| = \begin{cases} +1, & y > 0, \\ -1, & y < 0, \end{cases}$$

- Pero para cualesquiera y_1, y_2,

$$\big| f(t, y_1) - f(t, y_2) \big| = \big| \, |y_1| - |y_2| \, \big| \ \leq \ |y_1 - y_2|,$$

de modo que f es globalmente (y por ende localmente) Lipschitz en la segunda variable con constante $L = 1$.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly.
there was some unprocessed data that should have been added
the final page this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page
will go away, because LaTeX now knows how many pages to expe
for this document.