Principio de Inducción matemática

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Principio de Inducción Matemática (PIM)

Principio de Inducción Fuerte (PIF)

Principio de Inducción Matemática

Principio de Inducción Matemática (PIM)

Sea $P(n)$ una propiedad del número natural n.
Ejemplos de propiedades:

- n puede ser factorizado en un producto de números primos.

Principio de Inducción Matemática (PIM)

Sea $P(n)$ una propiedad del número natural n.
Ejemplos de propiedades:

- n puede ser factorizado en un producto de números primos.
- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- La ecuación $2x + 3y = n$ admite solución con x e y enteros positivos.

Cómo Probar $P(n)$ usando el PIM

Para probar que $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$, se utiliza el Principio de Inducción Matemática (PIM), que consiste en verificar dos cosas:

1. **Base de la Inducción:** $P(n_0)$ es verdadera.
2. **Paso Inductivo:** Si $P(n)$ es verdadera para algún número natural $n \geq n_0$, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

Conclusión:

Cómo Probar $P(n)$ usando el PIM

Para probar que $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$, se utiliza el Principio de Inducción Matemática (PIM), que consiste en verificar dos cosas:

1. **Base de la Inducción:** $P(n_0)$ es verdadera.
2. **Paso Inductivo:** Si $P(n)$ es verdadera para algún número natural $n \geq n_0$, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

Conclusión: Si ambos pasos se cumplen, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Por qué funciona el Principio de Inducción Finita

En la **base de la inducción**, verificamos que la propiedad es válida para un valor inicial $n = n_0$.

Por qué funciona el Principio de Inducción Finita

En la **base de la inducción**, verificamos que la propiedad es válida para un valor inicial $n = n_0$.
El **paso inductivo** nos asegura que si la propiedad en n es verdadera (la llamada *hipótesis de inducción*) tambien lo será para $n+1$. Como en n_0 la propiedad es verdadera, tambien lo será en n_0+1.

Una vez verificados la base y el paso inductivo, se crea una **cadena de implicaciones**:

$$
\begin{aligned}
&P(n_0) \text{ es verdadera (base)} \Rightarrow \\
&P(n_0+1) \text{ es verdadera} \Rightarrow \\
&P(n_0+2) \text{ es verdadera} \Rightarrow \\
&P(n_0+3) \text{ es verdadera} \Rightarrow \dots
\end{aligned}
$$

De este modo, $P(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$.

Ejemplo 1

Queremos demostrar que, para todo entero positivo n, se cumple:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esta es la propiedad P que debemos de probar para todo n natural, es decir que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1

Paso 1: Base de la inducción
Comprobamos que la propiedad es verdadera para $n_0 = 1$, es decir que $P(1)$ es verdadera:

$$1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Paso 2:Paso inductivo
(Hipotesis de Inducción) Suponemos que la propiedad es verdadera para n, es decir $P(n)$ es verdadera:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y probamos que $P(n+1)$ es verdadera

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Ejemplo 1

Para mostrar que la igualdad es cierta para $n+1$. Sumamos $(n+1)$ a ambos lados de la hipótesis de inducción:

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

Simplificamos el lado derecho:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Conclusión:
Por el Principio de Inducción Matemática (PIM), la propiedad es verdadera para todo número natural n, $n>1$.

Ejemplo 2

Queremos demostrar que $M_n = n(n^2 - 1)(3n + 2)$ es múltiplo de 24, para todo $n \in \mathbb{N}$

Paso 1: Base de la inducción

Verificamos que para $n = 0$, $M_0 = 0$, que es un múltiplo de 24.

Paso 2: Paso Inductivo

Supongamos que $P(k)$ es verdadera (hipotesis de inducción), es decir $M_k = k(k^2 - 1)(3k + 2)$ es divisible por 24 para algún k.

Ejemplo 2

Queremos demostrar que $M_n = n(n^2 - 1)(3n + 2)$ es múltiplo de 24, para todo $n \in \mathbb{N}$

Paso 1: Base de la inducción

Verificamos que para $n = 0$, $M_0 = 0$, que es un múltiplo de 24.

Paso 2: Paso Inductivo

Supongamos que $P(k)$ es verdadera (hipotesis de inducción), es decir $M_k = k(k^2 - 1)(3k + 2)$ es divisible por 24 para algún k.
Y probemos que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir que M_{k+1} también es divisible por 24.

Calculamos la diferencia:

$$\begin{aligned}
M_{k+1} - M_k =& \big((k+1)((k+1)^2-1)(3(k+1)+2)\big) - \big(k(k^2-1)(3k+2)\big) \\
=& \big((k+1)((k^2+2k)(3(k+1)+2)\big) - (k(k-1)(k+1)(3k+2)) \\
=& \; k(k+1)\left[(k+2)(3k+5) - (k-1)(3k+2)\right] \\
=& \; 12k(k+1)^2.
\end{aligned}$$

Simplificamos y reorganizamos:

$$M_{k+1} - M_k = 12k(k+1)^2$$

Dado que el producto de $k(k+1)^2$ es múltiplo de 24 (ya que k y $k+1$ son consecutivos), se concluye que M_{k+1} es divisible por 24.

Calculamos la diferencia:

$$
\begin{aligned}
M_{k+1} - M_k &= \big((k+1)((k+1)^2-1)(3(k+1)+2)\big) - \big(k(k^2-1)(3k+2)\big) \\
&= \big((k+1)((k^2+2k)(3(k+1)+2)\big) - (k(k-1)(k+1)(3k+2)) \\
&= k(k+1)\left[(k+2)(3k+5) - (k-1)(3k+2)\right] \\
&= 12k(k+1)^2.
\end{aligned}
$$

Simplificamos y reorganizamos:

$$M_{k+1} - M_k = 12k(k+1)^2$$

Dado que el producto de $k(k+1)^2$ es múltiplo de 24 (ya que k y $k+1$ son consecutivos), se concluye que M_{k+1} es divisible por 24.
Conclusión:
Por el Principio de Inducción Matemática (PIM),
$M_n = n(n^2-1)(3n+2)$ es múltiplo de 24 para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 3

Queremos demostrar que

$$senx + sen2x + ... + sen(kx) = \frac{sen(\frac{(k+1)x}{2})sen(\frac{kx}{2})}{sen(\frac{x}{2})} \qquad (1)$$

Para todo k natural.
Lo demostraremos por PIM

1. **Base inductiva** (para el primer elemento de ($k = 1$)

$$\frac{sen(\frac{(1+1)x}{2})sen(\frac{(1)x}{2})}{sen(\frac{x}{2})} \tag{2}$$

$$= \frac{sen(\frac{(2)x}{2})sen(\frac{x}{2})}{sen(\frac{x}{2})} = sen\frac{2x}{2} = senx = \sum_{j=1}^{1} sen(jx) \tag{3}$$

Se cumple la base inductiva $k = 1$

Paso Inductivo (Hipotesis de Inducción) Supongamos que $P(k)$ es verdadera, es decir, que

$$senx + sen2x + ... + sen(kx) = \frac{sen(\frac{(k+1)x}{2})sen(\frac{kx}{2})}{sen(\frac{x}{2})} \tag{4}$$

Y problemos que $P(k+1)$ es verdadera (Tesis de Inducción), es decir

$$senx + sen2x + ... + sen(kx) + sen(k+1)x = \frac{sen(\frac{(k+2)x}{2})sen(\frac{(k+1)x}{2})}{sen(\frac{x}{2})} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&= sen x + sen 2x + ... + sen(kx) + sen(k+1)x \\
&= \frac{sen(\frac{(k+1)x}{2}) sen(\frac{kx}{2})}{sen(\frac{x}{2})} + sen(k+1)x \\
&= \frac{sen(\frac{(k+1)x}{2}) sen(\frac{kx}{2}) + sen(\frac{x}{2}) sen(k+1)x}{sen(\frac{x}{2})}
\end{aligned}
$$

Usando la identidad del ángulo doble en la función $sen(k+1)x$

$$sen 2\theta = 2 sen\theta \; cos\theta$$

Tenemos

$$\frac{sen(\frac{(k+1)x}{2})\left(sen(\frac{kx}{2})+2sen(\frac{x}{2})cos(\frac{(k+1)x}{2})\right)}{sen(\frac{x}{2})} \tag{6}$$

Ahora, usando la identidad

$$sen\theta\ cos\rho = \frac{sen(\theta+\rho)-sen(\rho-\theta)}{2}$$

tenemos

$$\begin{aligned} sen\frac{x}{2}\ \cos\frac{(k+1)x}{2} &= \frac{sen(\frac{x}{2}+\frac{x(k+1)}{2})-sen(\frac{x(k+1)}{2}-\frac{x}{2})}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(sen\left(\frac{xk}{2}+x\right)-sen\left(\frac{kx}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Reemplazando

$$\frac{sen(\frac{(k+1)x}{2})sen(\frac{(k+2)x}{2})}{sen(\frac{x}{2})}$$

Por tanto $P(k+1)$ es verdadera. Entonces por PIM la $P(k)$ $\forall\, k \geq 1$.

Principio de Inducción Matemática Fuerte

Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)

Una variante del Principio de Inducción Matemática (PIM) es el **Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)**,
también conocido como *principio de inducción fuerte* o *principio de inducción completa*, en el que se debe mostrar:

1. **Base de la Inducción:** $P(n_0)$ es verdadera.

Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)

Una variante del Principio de Inducción Matemática (PIM) es el **Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)**, también conocido como *principio de inducción fuerte* o *principio de inducción completa*, en el que se debe mostrar:

1. **Base de la Inducción:** $P(n_0)$ es verdadera.
2. **Paso Inductivo:** Si $P(k)$ es verdadera para todo natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$,

Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)

Una variante del Principio de Inducción Matemática (PIM) es el **Principio de Inducción Matemática Fuerte (PIF)**, también conocido como *principio de inducción fuerte* o *principio de inducción completa*, en el que se debe mostrar:

1. **Base de la Inducción:** $P(n_0)$ es verdadera.
2. **Paso Inductivo:** Si $P(k)$ es verdadera para todo natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

La secuencia de Fibonacci F_n está definida recursivamente por:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{y} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Así, sus primeros términos son:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad \ldots$$

Ejemplo 1: Formula determinista secuencia de Fibonacci

Se desea mostrar que, si F_n es el n-esimo número de Fiboncaci:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

donde

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

son las raíces de $x^2 = x + 1$. Esta es la propiedad $P(n)$.

Demostración

Base de Inducción Tenemos que:

$$F_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = 0 \quad \text{y} \quad F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$$

Paso Inductivo supongamos que $P(k)$ es verdadera para todo $0 \leq k \leq n$, es decir

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \;\; \forall\, 0 \leq k \leq n$$

y probemos que $P(n+1)$ es verdadera.

Dado que:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Sustituyendo la fórmula de la hipótesis de inducción:

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

Simplificando:

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^n(\alpha + 1) - \beta^n(\beta + 1)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Concluimos que:

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Por lo tanto, $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq 0$, es decir la fórmula es válida para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 2: Coeficiente Binomial son enteros

Queremos demostrar que, para cualquier $n \geq m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, el coeficiente binomial:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

es un número entero.

Base de la inducción:
Procederemos por inducción sobre la variable t, definida como la suma de $m+n$, es decir $t=m+n$. Si $t=0$, entonces $m=n=0$ y:

$$\binom{0}{0}=1$$

es un número entero.

Antes de desarrollar el paso inductivo, observemos primero que para $0 < m < n$ tenemos la siguiente identidad de binomios:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Esta identidad sigue directamente de las definiciones:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \\ &= \frac{(n-1)!((n-m)+m)}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}.\end{aligned}$$

Paso Inductivo

Ahora supongamos que $\binom{n}{m}$ es entero para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq k \leq t$ (hipótesis de inducción).

Note que podemos suponer también que $0 < m < n$, ya que si $m = n$ o $m = 0$, tenemos $\binom{n}{m} = 1$, y el resultado es trivial.

Entonces, si $m + n = t + 1$, tenemos que:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Y como $(n-1) + m \leq t$ y $(n-1) + (m-1) \leq t$ por hipotesis de inducción $\binom{n}{m}$ es entero, pues cada sumando en la derecha es entero por la hipótesis de inducción. Como $P(t+1)$ es verdadera, entonces por Principio de Inducción matemática Fuerte $P(t)$ es verdadera $\forall t \geq 0$.

Es decir, el coeficiente binomial es entero para cualquier $n \geq m$.