

suma y producto por escalar en vectores geométricos

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

suma de vectores

Producto por escalar

Propiedades de la suma de vectores

1. $\vec{u} + \vec{v}$ es un vector geométrico.
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$
4. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Ejercicio (Ecuación)

Sean \vec{u} y \vec{v} vectores dados. Expresar en términos de \vec{u} y \vec{v} el vector \vec{x} tal que

$$\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$$

Usando las propiedades de la suma, se prueba que $\vec{x} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Definición (Diferencia entre vectores)

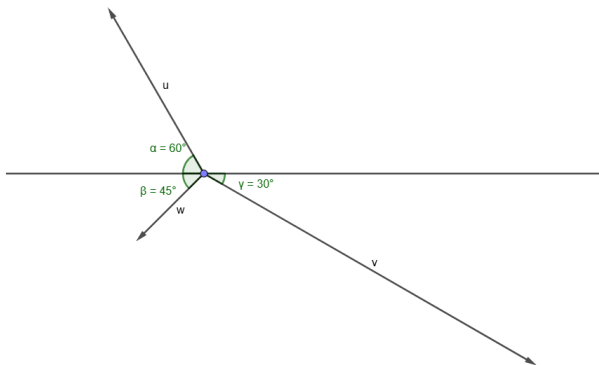
Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} , la diferencia $\vec{u} - \vec{v}$ se define como el vector que sumado a \vec{v} nos da \vec{u} . (Ver la figura 1.19). Ahora, según se acaba de ver en el ejemplo anterior, tal vector es $\vec{u} + (-\vec{v})$; así que

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Ejemplo

Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} como se muestran en la figura 1.21, con $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\|\vec{w}\| = 1$.

Dibuje $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ y halle tanto su magnitud como su dirección.



Desigualdad Triangular

Si \vec{u} y \vec{v} son vectores no paralelos, considere el triángulo construido a partir de ellos, podemos concluir que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Puesto que "la longitud de un lado en cualquier triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados".

Además, si \vec{u} y \vec{v} son paralelos se da la igualdad

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \text{ por tanto}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

(1.1)

la cual es denominada **desigualdad triangular**.

Definición producto por escalar

Sea $a \in \mathbb{R}$, que llamaremos escalar y \vec{u} un vector geometrico definimos el **producto por escalar** $a\vec{u}$ como:

- ▶ Si $a > 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ entonces $a\vec{u}$ es el vector con la misma dirección de \vec{u} y con magnitud $a\|\vec{u}\|$.
- ▶ Si $a < 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$ entonces $a\vec{u}$ es el vector con dirección opuesta a la de \vec{u} y con magnitud $|a|\|\vec{u}\|$, donde $|a|$ es el valor absoluto de a .
- ▶ Si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $a\vec{u} = \vec{0}$.

De la definición, podemos decir que

- ▶ $\|a\vec{u}\| = |a|\|\vec{u}\|$
- ▶ $a\vec{u} = \vec{0}$ si y sólo si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$
- ▶ $a\vec{u}$ es un vector geometrico paralelo a \vec{u}
- ▶ $1\vec{u} = \vec{u}$

Además, se pueden probar las siguientes propiedades

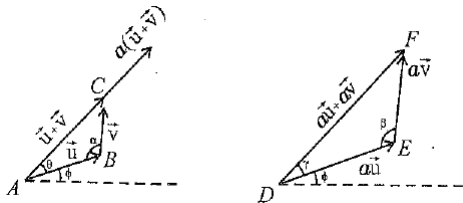
1. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
3. $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Demostración, $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Es claro que esta propiedad es válida si $a = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$.

Supongamos $a > 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$ y probemos que las normas y las direcciones de los vectores $a(\vec{u} + \vec{v})$ y $a\vec{u} + a\vec{v}$ son iguales.

Considere los triángulos ABC y DEF



$\alpha = \beta$ (ya que \vec{u} es paralelo a $a\vec{u}$ y \vec{v} lo es a $a\vec{v}$), además

$$\frac{|EF|}{|DE|} = \frac{\|a\vec{v}\|}{\|a\vec{u}\|} = \frac{a\|\vec{v}\|}{a\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

por lo que los lados son proporcionales. Entonces por LAL, $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$.

Como consecuencia de esa semejanza tenemos que

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AB|}$$

y así

$$\frac{\|a\vec{u} + a\vec{v}\|}{\|\vec{u} + \vec{v}\|} = \frac{\|a\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = a.$$

Luego,

$$\|a\vec{u} + a\vec{v}\| = a\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|a(\vec{u} + \vec{v})\|$$

es decir, los vectores $a\vec{u} + a\vec{v}$ y $a(\vec{u} + \vec{v})$ tienen la misma norma.

Veamos ahora que también tienen la misma dirección:

Por una parte,

$$\begin{aligned} \text{dir}(a(\vec{u} + \vec{v})) &= \text{dir}(\vec{u} + \vec{v}) \quad (\text{pues } a > 0) \\ &= \theta + \phi \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$\text{dir}(a\vec{u} + a\vec{v}) = \gamma + \phi.$$

Ahora, por la semejanza de los triángulos ABC y DEF se tiene que $\theta = \gamma$, así

$$\text{dir}(a(\vec{u} + \vec{v})) = \text{dir}(a\vec{u} + a\vec{v}).$$

Por tanto,

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

De manera análoga se puede verificar la validez si $a < 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$. □

Definición (Vector unitario, normalización)

Un vector geométrico se dice **unitario** si su magnitud es 1. Dado un vector \vec{v} , $\vec{v} \neq \vec{0}$, el vector

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

tiene la misma dirección de \vec{v} pues $\frac{1}{\|\vec{v}\|} > 0$, y es unitario ya que

$$\|\vec{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \right) \|\vec{v}\| = 1.$$

Nos referiremos al proceso de hallar el vector unitario $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ a partir de un vector no nulo \vec{v} , como **normalización** de \vec{v} .

Obsérvese que para todo vector no nulo \vec{v} , se tiene que

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{u}$$

donde \vec{u} es el vector unitario con la misma dirección de \vec{v} .

Proposición

Sean \vec{u} y \vec{v} no nulos.

\vec{u} y \vec{v} son paralelos si y sólo si \vec{v} es múltiplo escalar de \vec{u} o \vec{u} es múltiplo escalar de \vec{v} .

Demostración

Por definición de producto por escalar, si \vec{v} es múltiplo escalar de \vec{u} o \vec{u} es múltiplo escalar de \vec{v} entonces \vec{u} y \vec{v} son paralelos.

Por otro lado, si son paralelos, entonces \vec{u} y \vec{v} tienen la misma dirección, un vector unitario en la dirección tanto de \vec{u} como de \vec{v} es $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ y por tanto

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \left(\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right) = \left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|} \right) \vec{u}$$

Luego, \vec{v} es múltiplo escalar de \vec{u} . De manera analoga se prueba que \vec{u} es múltiplo escalar de \vec{v} □