# Ejercicios

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

1. Para cada ecuación diferencial, compruebe que la familia indicada la satisface (mencione un intervalo $I$ de definición adecuado).

   a) $\dfrac{dP}{dt} = P(1-P), \qquad P(t) = \dfrac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}.$

   b) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1, \qquad y(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt + c_1 e^{-x^2}.$

   c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0, \qquad y(x) = c_1 e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x}.$

   d) $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2, \qquad y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2.$

2. Determine los valores de $m$ tales que $y = e^{mx}$ sea solución de cada ecuación diferencial.

   a) $y' + 2y = 0.$

   b) $5y' = 2y.$

   c) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

   d) $2y'' + 7y' - 4y = 0.$

3. Determine los valores de $m$ tales que $y = x^m$ sea solución de cada ecuación diferencial.

   a) $x\, y'' + 2y' = 0.$

   b) $x^2 y'' - 7xy' + 15y = 0.$

4. Use que $y(x) = c$ es constante $\Leftrightarrow$ $y'(x) = 0$ (y, si aplica, $y''(x) = 0$) para decidir si la ecuación diferencial admite soluciones constantes.

   a) $3x\, y' + 5y = 10.$

   b) $y' = y^2 + 2y - 3.$

   c) $(y-1)\, y' = 1.$

   d) $y'' + 4y' + 6y = 10.$

5. Compruebe que el par de funciones dado resuelve el sistema correspondiente en $(-\infty, \infty)$.

   a) $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y; \qquad x(t) = e^{-2t} + 3e^{6t}, \quad y(t) = -e^{-2t} + 5e^{6t}.$

   b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t; \qquad x(t) = \cos 2t + \sin 2t + \tfrac{1}{5}e^t, \quad y(t) = -\cos 2t - \sin 2t - \tfrac{1}{5}e^t.$

6. Dado que $y = \sin x$ es solución explícita de $y' = \sqrt{1-y^2}$, encuentre un intervalo de definición $I$ adecuado para esa solución (*nota:* $I$ no es $(-\infty, \infty)$).

7. a) Justifique por qué es razonable suponer que la ecuación $y'' + 2y' + 4y = 5\sin t$ admite una solución particular de la forma $y = A\sin t + B\cos t$ con $A, B$ constantes.

   b) Determine los valores de $A$ y $B$ tales que $y = A\sin t + B\cos t$ sea solución particular de la ecuación dada.

8. Cada figura representa la gráfica de una solución implícita $G(x, y) = 0$ de una E.D. $y' = f(x, y)$. En cada caso la relación $G(x, y) = 0$ implícitamente define varias soluciones de la E.D.:

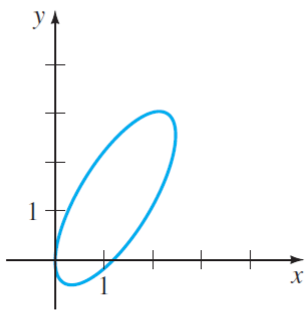


Figura 1:

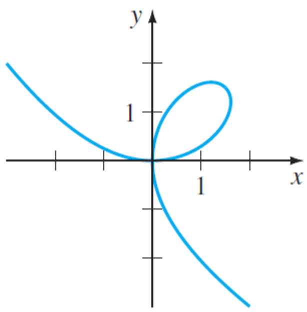


Figura 2:

En cada gráfica identifique y dibuje los tramos que representan soluciones de la E.D.. Recordando que una solución como minimo es una función derivable definida en un intervalo abierto $I$.

9. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y(a - by)$, donde $a$ y $b$ son constantes positivas.

   a) Ya sea por inspección o por los métodos sugeridos en los problemas 33 a 36, determine dos soluciones constantes de la ED.

   b) Usando sólo la ecuación diferencial, determine los intervalos en el eje $y$ en los que una solución no constante $y = \phi(x)$ es creciente. Determine los intervalos en los que $y = \phi(x)$ es decreciente.

c) Utilizando sólo la ecuación diferencial, explique por qué $y = \dfrac{a}{2b}$ es la coordenada $y$ de un punto de inflexión de la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$.

d) En los mismos ejes coordenados, trace las gráficas de las dos soluciones constantes en el inciso a). Estas soluciones constantes parten el plano $xy$ en tres regiones. En cada región, trace la gráfica de una solución no constante $y = \phi(x)$ cuya forma se sugiere por los resultados de los incisos b) y c).

10. Considere la ecuación diferencial $y' = y^2 + 4$.

a) Explique por qué no existen soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Describa la gráfica de una solución $y = \phi(x)$. Por ejemplo, ¿puede una curva solución tener un extremo relativo?

c) Explique por qué $y = 0$ es la coordenada $y$ de un punto de inflexión de una curva solución.

d) Trace la gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de la ecuación diferencial cuya forma se sugiere en los incisos a) a c).

# Referencias

[1] Dennis G. Zill y Michael R. Cullen, *Ecuaciones diferenciales: con problemas con valores en la frontera*, 7a ed., trad. Ana Elizabeth García Hernández; rev. téc. Ernesto Fillo López, México, D.F.: Cengage Learning Editores, 2009. ISBN 978-607-481-314-2.

[2] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 7th ed., Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009. ISBN 978-0-495-10836-8.