Aplicaciones

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

mezclas

enfriamento de Newton

trayectorias ortogonales

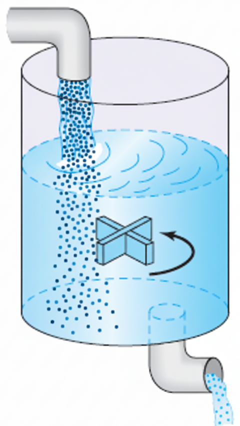
Problema de mezcla

Inicialmente un tanque contiene 120 litros de agua pura. Al tanque entra a razón de 2 litros/min, una mezcla que contiene una concentración de γ g/litro de sal y la mezcla bien revuelta sale del tanque a la misma razón. Encuentre una expresión en términos de γ para la cantidad de sal en el tanque en cualquier instante t. Halle también la cantidad límite de sal.

Balance de sal

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{C_{\text{entra}}(t)\, Q_{\text{entra}}(t)}_{\text{razón de entrada de la sal}} - \underbrace{C_{\text{sale}}(t)\, Q_{\text{sale}}(t)}_{\text{razón de salida de la sal}}$$

- $A(t)$ = Cantidad de Sal (masa) en el tanque en el instante t
- $C_{\text{entra}}(t)$ = concentración de sal en el flujo de entrada en el instante t.
- $Q_{\text{entra}}(t)$ = caudal (velocidad de flujo) de entrada en el instante t.
- $C_{\text{sale}}(t)$ = concentración de sal en el tanque (supuesto perfectamente mezclado) en el instante t.



Problema de difusión de monóxido de carbono

Suponga que un recinto que contiene 1200 m^3 de aire originalmente está libre de monóxido de carbono. A partir del instante $t = 0$, se introduce al recinto humo de cigarro, que contiene 4% de monóxido de carbono, a razón de 0.1 m^3/min y se permite que la mezcla bien circulada salga a la misma razón.

a) Halle una expresión para la concentración $x(t)$ de monóxido de carbono en el recinto, en cualquier instante $t > 0$.

b) La exposición prolongada a una concentración de monóxido de carbono no tan baja como 0.00012 es dañina para el organismo humano. Halle el instante τ en el que se alcanza esta concentración.

Enfriamento de una taza de cafe a temperatura ambiente

Suponga que la temperatura de una taza de café obedece la ley de Newton del enfriamiento. Si el café tiene una temperatura de 200°F cuando acaba de servirse y un minuto después se ha enfriado hasta 190°F en un recinto cuya temperatura es de 70°F, determine cuándo el café alcanza una temperatura de 150°F.

▸ Explorar en Desmos

Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - T_m)$$

- $T(t)$ = temperatura del objeto en el instante t.
- T_m = temperatura del medio ambiente (constante).
- k = constante de proporcionalidad (negativa si el objeto se enfría).
- t = tiempo.

Trayectorias ortogonales

Dos curvas se cortan ortogonalmente si las respectivas rectas tangentes, en los puntos de intersección, son rectas perpendiculares. Cuando todas

las curvas de una familia $F(x, y, c_1) = 0$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $G(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son ortogonales.

Cálculo de trayectorias ortogonales

Sea la familia de curvas $F(x, y, c_1) = 0$, al derivar implícitamente $H(x, y, y', c_1) = 0$; usando F y H eliminamos c_1, obteniendo $T(x, y, y') = 0$; despejando y',

$$\frac{dy}{dx} = r(x, y)$$

La ecuación de la familia ortogonal es dada, en forma diferencial, por la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{r(x, y)}.$$

- *Esta expresión está inspirada en el hecho que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es* -1.

Ejercicio

Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = e^{kx}$.

Ejercicio

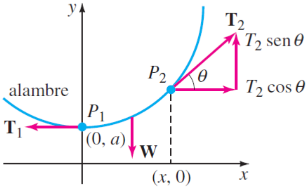
Una silla de montar que tiene la forma de la superficie $z = y^2 - x^2$ está a la intemperie, bajo la lluvia. Hallar las trayectorias que seguirán las gotas de agua que caen por ella. Esbozar un gráfico para convencerse de que la respuesta es razonable.

▸ Ver en Desmos

Cable suspendido: modelo y equilibrio

Consideremos un elemento del cable desde el punto más bajo P_1 (en $x = 0$) hasta un punto P_2 (en $x > 0$). Sobre el elemento actúan:

- Tensión en P_1: $\vec{T}_1$ (horizontal) con magnitud T_1 (constante).
- Tensión en P_2: $\vec{T}_2$, formando un ángulo θ con el eje x.
- Carga vertical total acumulada entre P_1 y P_2: W (hacia abajo).



Por equilibrio estático (componentes en x y y):

$$T_1 = T_2 \cos \theta, \qquad W = T_2 \sin \theta.$$

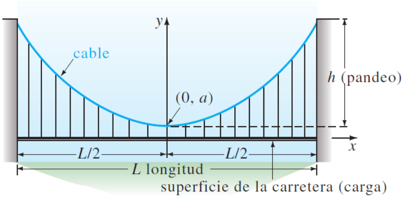
Dividiendo: $\tan \theta = \frac{W}{T_1}$. Por tanto.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{W}{T_1}}$$

Puente suspendido.

La carga dominante es la de la calzada, *uniforme por unidad de longitud horizontal*. Sea r la carga distribuida (p.ej. N/m o lb/ft):

$$\text{carga por } \Delta x \approx r\,\Delta x.$$



Acumulando desde el centro ($x = 0$) hasta x:

$$W(x) = \int_0^x r\,d\xi = r\,x.$$

Sustituyendo en el balance:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W(x)}{T_1} = \frac{r}{T_1}\,x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y(x) = a + \frac{r}{2T_1}\,x^2}$$

donde $a = y(0)$ es la cota del punto más bajo.

(La "equidistribución" significa que cada pequeño tramo horizontal aporta la misma carga por metro; con tirantes igualmente espaciados)

Sea L la distancia entre apoyos y el **pandeo** h (diferencia entre la altura de los apoyos y el mínimo). En $x = \pm L/2$ se tiene $y(\pm L/2) = a + h$. Evaluando, obtenemos:

$$h = \frac{r}{2T_1}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \implies \boxed{T_1 = \frac{rL^2}{8h}}.$$

Sustituyendo en $y(x)$ para eliminar r/T_1:

$$\boxed{y(x) = a + \frac{4h}{L^2}x^2, \qquad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}}$$

La curva es **parabólica** porque la carga es uniforme por unidad *horizontal*. (Con peso propio del cable por unidad de *longitud del cable* se obtendría una catenaria.)