Conjuntos Numéricos y sus Propiedades Algebraicas

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Contenido

Conjunto de los números naturales, se construye con la siguiente regla

1. 1 es natural
2. Si n es natural entonces $n + 1$ es natural

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

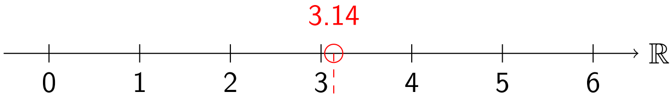
El conjunto de los enteros constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

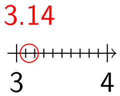
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Si en una recta definimos un punto como el cero, y escogemos una unidad de medida, creamos puntos equidistantes, asociando a la derecha del cero ordenadamente los números naturales y a la izquierda sus negativos, podemos representar los números enteros gráficamente.

Números Reales ($\mathbb{R}$)

Podemos entender los números reales como aquellos que pueden representarse como un punto en la recta numérica.





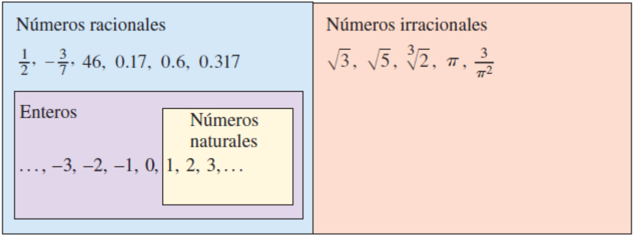
Representación decimal

Sea x un número real

1. Si x coincide con una marca entera n, su escritura decimal es n seguida de ceros.
2. Si no es entero: ubica los dos enteros consecutivos cuyas marcas encierran a x; llama n al menor. Divide el tramo entre esas marcas en 10 partes iguales, numeradas 0–9 desde n. La parte que contiene a x determina d_1.
3. Dentro de esa parte, vuelve a dividir en 10 partes iguales y numéralas 0–9 desde el extremo junto a n; la que contiene a x determina d_2. Repite indefinidamente para $d_3, d_4, \ldots$
4. Si en algún paso x cae exactamente en una marca de subdivisión, detén el proceso y completa con ceros. Decimos que tiene representación finita.

Resultado: la expresión decimal es $n.d_1 d_2 d_3 \ldots$. Si x es negativo, aplica el procedimiento a su distancia a 0 y antepone "$-$". (Se elige siempre la versión que termina en ceros.)

- Los **números racionales ($\mathbb{Q}$)** tienen una representación decimal finita o periódica. Ejemplo: 0.75, $0.\overline{3}, 0.14\overline{6}$... etc.
- Los **números irracionales ($\mathbb{I}$)** tienen una representación decimal infinita y no periódica, como $\pi = 3.14159265\ldots$ o $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ etc.



Pertenecer y Estar Contenido

- **Pertenecer** ($\in$): Un elemento pertenece a un conjunto si está incluido en él. Por ejemplo, $3 \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.
- **Estar Contenido** ($\subseteq$): Un conjunto A está contenido en un conjunto B si todos los elementos de A también son elementos de B. Por ejemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

Definición (Números Reales)

Los números reales son un cuerpo ordenado y completo

Axiomas de Cuerpo $(F, +, \cdot)$

Estructura aditiva $(F, +)$

- **Clausura:** $a, b \in F \Rightarrow a + b \in F$.
- **Asociatividad:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Conmutatividad:** $a + b = b + a$.
- **Neutro aditivo:** existe $0 \in F$ tal que $a + 0 = a$.
- **Inverso aditivo:** para todo $a \in F$ existe $-a \in F$ con $a + (-a) = 0$.

Estructura multiplicativa $(F \setminus \{0\}, \cdot)$

- **Clausura:** $a, b \in F \Rightarrow a \cdot b \in F$.
- **Asociatividad:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Conmutatividad:** $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Neutro multiplicativo:** existe $1 \in F$ tal que $a \cdot 1 = a$ y $1 \neq 0$.
- **Inverso multiplicativo:** para todo $a \in F \setminus \{0\}$ existe $a^{-1} \in F$ con $a \cdot a^{-1} = 1$. Decimos que

$$a^{-1} := \frac{1}{a}$$

Vinculación suma–producto

- **Distributividad:** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Definición

Sean a, b números enteros. Si existe un número entero k tal que $b = a \cdot k$. Decimos que a es un divisor de b y que b es un múltiplo de a.

Ejemplo: Los divisores positivos de 12 son: $1, 2, 3, 4, 6, 12$.
Ejemplo: Los multiplos positivos de 12 son: $12, 24, 36, 48, \dots$.

Máximo común divisor (MCD): mayor entero que divide a todos. Ej.: $\mathrm{MCD}(24, 36) = 12$. Además

$$\mathrm{MCD}(\mathrm{MCD}(a, b), c) = \mathrm{MCD}(a, b, c)$$

.

Mínimo común múltiplo (m.c.m.): menor entero positivo múltiplo de todos. Ej.: $\mathrm{mcm}(8, 12) = 24$. Además

$$\mathrm{mcm}(\mathrm{mcm}(a, b), c) = \mathrm{mcm}(a, b, c)$$

.

Definición: Un número primo es un número natural mayor que 1 que solo tiene dos divisores: 1 y él mismo.
Ejemplo: Los primeros 10 números primos son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Existen infinitos números primos

Teorema (Teorema Fundamental de la Aritmética)

Todo número natural mayor que 1 puede descomponerse de manera única como un producto de números primos, salvo el orden de los factores.

Ejemplo:

- $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
- $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

- **Definición:** Los números enteros incluyen los números naturales, sus opuestos y el cero.
- **Ejemplos:** $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
- **Usos:** Representar ganancias y pérdidas, temperaturas bajo cero, etc.

- $(-1) \cdot a = -a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $-(-a) = a$.
- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.
- $a - b = a + (-b)$.
- $-(a + b) = -a - b, \quad -(a - b) = -a + b$.

Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Definición

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como una división de dos enteros, con denominador (el que divide) distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

- **Definición:**
- **Ejemplos:** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{-51}{7}, \frac{2}{-9}$ etc
- **Usos:** Fracciones, porcentajes, razones, etc.

Signo Negativo en Fracciones

Propiedad: En una fracción, el signo negativo puede estar:

- En el numerador.
- En el denominador.
- Delante de toda la fracción.

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} \quad (b \neq 0)$$

Ej.:

$$\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} = \frac{3}{-4}$$

Todas representan el mismo número racional negativo.

Suma de Fracciones con el Mismo Denominador

Definición: Para sumar fracciones con el mismo denominador, sumamos los numeradores y conservamos el denominador.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5} = \frac{(2+3)+7}{5} = \frac{12}{5}$$

Multiplicación de Fracciones

Definición: Para multiplicar fracciones, multiplicamos los numeradores y los denominadores.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Observación: Es usado en porcentajes, escalas, razones y proporciones, conversiones etc...

Fracciones Equivalentes

Definición: Dos fracciones son *equivalentes* si representan el mismo valor numérico, aunque tengan numeradores y denominadores diferentes.

$$\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b} \cdot \frac{k}{k} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0, k \neq 0)$$

Ej.:

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Aquí, $k = 3$ y $\frac{k}{k} = 1$, por lo que la fracción no cambia su valor.

División de Fracciones

División: Multiplicamos por el recíproco.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$$

Ley de extremos y medios: En el producto de fracciones, los *extremos* son a y d, y los *medios* son b y c.

Ej.:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{{\color{blue}5} \times {\color{blue}4}}{{\color{red}6} \times {\color{red}3}} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}.$$

Aquí 5 y 4 son los **extremos**, mientras que 6 y 3 son los **medios**.

Suma de Fracciones con Distinto Denominador

Procedimiento:

1. Hallar el **mínimo común múltiplo** (MCM) de los denominadores.
2. Convertir cada fracción a una equivalente con ese denominador.
3. Sumar los numeradores y mantener el denominador común.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{MCM}}{b}}{\text{MCM}} + \frac{c \cdot \frac{\text{MCM}}{d}}{\text{MCM}}$$

Ejemplo: Sumar

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

1. MCM de $3, 5, 4, 6$ es 60.
2. Fracciones equivalentes:
$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}, \quad \frac{2}{5}=\frac{24}{60}, \quad \frac{3}{4}=\frac{45}{60}, \quad \frac{5}{6}=\frac{50}{60}$$
3. Suma:
$$\frac{20}{60}+\frac{24}{60}+\frac{45}{60}+\frac{50}{60}=\frac{139}{60}$$
4. Resultado final:
$$\frac{139}{60}=2+\frac{19}{60}=2\frac{19}{60}$$

Ejercicios

1. Un rectángulo de área 160 m^2 es dividido en 4 partes, de modo que:
   - La primera parte es el 15% del área del rectángulo
   - La segunda parte es el 30% del área del rectángulo
   - La tercera parte son las dos terceras partes de la primera parte
   - Determine el área de la cuarta parte en mm^2.

   ¿Cuál es el área de cada una de las 4 partes?

2. La distancia entre dos puntos en un plano a escala 1:250 es de 3,5 cm. Determine la distancia real y exprésela en términos de jemes, una medida tradicional de aproximadamente $13cm$. y brazas una medida tradicional de aproximadamente $167cm$

Simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{\left[\left(\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{-3}{4}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{12}}{\left(\dfrac{7}{8}\cdot\dfrac{2}{5}\right)-\left(\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{2}\right)}\right)-\left(\dfrac{5}{3}-1\tfrac{1}{6}\right)\right]\cdot\dfrac{3}{7}-\left(\dfrac{-11}{12}-\dfrac{5}{18}\right)}{\left(1-\left[\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right]\right)}.$$