proyección y producto interno

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

proyección ortogonal

producto escalar

Proyección de $\vec{z}$ sobre $\vec{u}$

- Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, entonces $\vec{p}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$ y por tanto
$$\vec{p} = \|\vec{p}\| \, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$
- Como $\cos\alpha = \dfrac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{z}\|}$, es decir, $\|\vec{p}\| = \|\vec{z}\| \cos\alpha$, se sigue que
$$\vec{p} = (\|\vec{z}\| \cos\alpha) \, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$
- Así,
$$\mathrm{Proy}_{\vec{u}}\ \vec{z} = (\|\vec{z}\| \cos\alpha) \, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad \left(\text{equivalentemente } \ \mathrm{Proy}_{\vec{u}}\ \vec{z} = \tfrac{\vec{z}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\, \vec{u}\right).$$

Proyección de $\vec{z}$ sobre $\vec{u}$ (caso $90^\circ < \alpha < 180^\circ$)

- Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, entonces $\vec{p}$ tiene dirección opuesta a $\vec{u}$. Por tanto,

$$\vec{p} = \|\vec{p}\|\left(-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right).$$

- Ahora,

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{z}\|} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{p}\| = \|\vec{z}\| \cos(180^\circ - \alpha).$$

- Como $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, se sigue que

$$\|\vec{p}\| = -\|\vec{z}\|\cos\alpha,$$

  y por ende

$$\vec{p} = \left(-\|\vec{z}\|\cos\alpha\right)\left(-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right).$$

- Así (como en el caso anterior),

$$\mathrm{Proy}_{\vec{u}}\ \vec{z} = \left(\|\vec{z}\|\cos\alpha\right)\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad \left(\text{equivalentemente } \mathrm{Proy}_{\vec{u}}\ \vec{z} = \tfrac{\vec{z}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}\right).$$

Nótese que esta fórmula también es válida si $\alpha = 180^\circ$, pues en

Resumen: proyección de $\vec{z}$ sobre $\vec{u}$

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo y $\vec{z}$ un vector cualquiera.

- Si $\vec{z} = \vec{0}$, entonces $\text{Proy}_{\vec{u}}\, \vec{z} = \vec{0}$.
  En este caso, la componente escalar de $\vec{z}$ en la dirección de $\vec{u}$ es 0.
- Si $\vec{z} \neq \vec{0}$ y α es el ángulo entre $\vec{z}$ y $\vec{u}$,

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\, \vec{z} = (\|\vec{z}\| \cos \alpha) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

  En este caso, la componente escalar de $\vec{z}$ en la dirección de $\vec{u}$ es $\|\vec{z}\| \cos \alpha$.

Producto interno (escalar)

Definición (Producto escalar de dos vectores)

En general, dados dos vectores geométricos cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{u}$, se define el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$ así:

- *Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.*
- *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ y α es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$, entonces*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{u}\| \cos \alpha.$$

Consecuencias del producto escalar

Una consecuencia inmediata de la definición es

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{u}}$$

Además, como $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, se tiene

$$-\|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| \;\leq\; \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| \cos\alpha \;\leq\; \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|,$$

y por tanto, para $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$-\|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\| \;\leq\; \vec{v} \cdot \vec{u} \;\leq\; \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|.$$

Equivalente y más compacto:

$$\boxed{|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|}$$

Esta desigualdad, válida también si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, se conoce como la **desigualdad de Cauchy–Schwarz**.

Propiedades del producto interno

El producto escalar tiene las siguientes propiedades, válidas para cualesquiera vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y cualquier escalar r:

1. **Simetría:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. **Cuadrado de la norma:** $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
3. **Homogeneidad:** $(r\vec{u}) \cdot \vec{v} = r(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (r\vec{v})$.
4. **Distributividad:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}.$$