Productos notables y Factorización

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2024

Productos Notables

Productos Notables: A continuación se presentan algunas de las identidades algebraicas más utilizadas:

- **Trinomio cuadrado perfecto:**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- **Diferencia de cuadrados:**

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- **Binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial, dado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Diferencia de potencias:**

$$(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = a^n - b^n$$

Ejemplos: Uso de las Fórmulas de Productos Notables

Ejemplo 1: Calcula $(3x+5)^2$ utilizando la fórmula del trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}(3x+5)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 \\ &= 9x^2 + 30x + 25\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcula $(x^2-2)^3$ utilizando la fórmula del cubo de un binomio:

$$\begin{aligned}(x^2-2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2^2) - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

Ejemplos: Uso de las Fórmulas de Productos Notables

Ejemplo 3: Calcula $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ utilizando la fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) &= (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 \\ &= 4x^2 - y\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Calcula $(x + y - 1)(x + y + 1)$ utilizando la fórmula de la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1\end{aligned}$$

Introducción a la Factorización

La **factorización** es el proceso de expresar una expresión algebraica como el producto de sus factores. Es una herramienta fundamental en álgebra que simplifica expresiones y resuelve ecuaciones polinómicas.

En esta presentación, exploraremos los casos comunes de factorización:

1. Factor común
2. Diferencia de cuadrados
3. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
4. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
5. Fórmula cuadrática
6. Teorema de la raíz racional
7. División sintética

Factor Común

Definición

*El **factor común** consiste en identificar y extraer el mayor factor común de todos los términos de una expresión algebraica.*

Ejemplo

Factorizar $2x + 6$.

Solución:

$$2x + 6 = 2(x + 3)$$

Ejemplo

Factorizar $6x^3y^2 - 9x^2y + 15xy^3$.

Solución:

$$\begin{aligned} 6x^3y^2 - 9x^2y + 15xy^3 &= 3xy(2x^2y - 3x + 5y^2) \\ &= 3xy(2x^2y - 3x + 5y^2) \end{aligned}$$

Diferencia de Cuadrados

Teorema

*La **diferencia de cuadrados** se factoriza como:*

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 - 9$.

Solución:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

Ejemplo

Factorizar $16x^4 - 25y^2$.

Solución:

$$16x^4 - 25y^2 = (4x^2 + 5y)(4x^2 - 5y)$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Definición

Un trinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$ se factoriza buscando dos números m y n tales que:

$$m + n = b \quad y \quad m \cdot n = c$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 + 5x + 6$.
Solución: *Buscamos m y n:*

$$m + n = 5, \quad m \cdot n = 6$$

Los números son 2 y 3.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Ejemplo

Factorizar $x^2 - x - 12$.

Solución: *Buscamos* m *y* n*:*

$$m + n = -1, \quad m \cdot n = -12$$

Los números son -4 *y* 3.

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Definición

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se busca descomponer el término medio en dos términos que permitan agrupar y factorizar.

Ejemplo

Factorizar $2x^2 + 7x + 3$.

Solución: *Buscamos m y n tales que:*

$$m + n = 7, \quad m \cdot n = 2 \times 3 = 6$$

Los números son 6 *y* 1. *Descomponemos:*

$$2x^2 + 6x + x + 3 = (2x^2 + 6x) + (x + 3)$$

Factorizamos:

$$2x(x + 3) + 1(x + 3) = (x + 3)(2x + 1)$$

Ejemplo

Factorizar $6x^2 - 19x + 10$.

Solución: *Buscamos* m *y* n*:*

$$m + n = -19, \quad m \cdot n = 6 \times 10 = 60$$

Los números son -15 *y* -4. *Descomponemos:*

$$6x^2 - 15x - 4x + 10 = (6x^2 - 15x) - (4x - 10)$$

Factorizamos:

$$3x(2x - 5) - 2(2x - 5) = (2x - 5)(3x - 2)$$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Definición

Un ***trinomio cuadrado perfecto*** *es una expresión de la forma* $a^2 \pm 2ab + b^2$*, que se factoriza como* $(a \pm b)^2$*.*

Ejemplo

Factorizar $x^2 + 6x + 9$*.*

Solución:

Observamos que $9 = 3^2$ *y* $6x = 2 \cdot x \cdot 3$*.*

Por lo tanto:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Ejemplo (completar el cuadrado)

Factorizar $x^2 + 10x + 24$ *completando el cuadrado.*

Solución:

Primero, completamos el cuadrado:

$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 24 = x^2 + 10x + 25 - 25 + 24$$

Simplificamos:

$$= (x+5)^2 - 1$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$= [(x+5)+1][(x+5)-1] = (x+6)(x+4)$$

Por lo tanto, la factorización es:

$$x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$$

Ejemplos

1. $\dfrac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \cdot \dfrac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$
2. Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Fórmula Cuadrática

Teorema

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ *son:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Resolver $x^2 - 4x + 3 = 0.$

Solución:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \implies x = 3 \text{ ó } x = 1$$

La factorización es:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Ejemplo

Resolver $2x^2 + 3x - 5 = 0.$

Solución:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Entonces:

$$x = \frac{4}{4} = 1 \quad ó \quad x = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

La factorización es:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

O multiplicando:

$$2x^2 + 3x - 5 = (2x - 5)(x + 1)$$

Teorema de la Raíz Racional

Teorema

Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ tiene coeficientes enteros y p/q es una raíz racional en su forma reducida, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n.

Ejemplo

Encontrar las raíces racionales de $x^3 - 4x^2 + x + 6$.
Solución: *Los posibles valores de p (divisores de 6):*
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Los posibles valores de q (divisores de 1): ± 1.
Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
Probamos $x = 1$:

$$1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$$

Probamos $x = 2$:

$$8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

Entonces $x = 2$ es una raíz. Podemos factorizar usando división sintética o polinomios.

Ejemplo

Encontrar las raíces racionales de $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$*.*
Solución: *Divisores de* 12*:* $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$*.*
Divisores de 2*:* $\pm 1, \pm 2$*.*
Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3/2, \pm 6$*, etc.*
Probamos $x = 2$*:*

$$16 - 12 - 16 + 12 = 0$$

Entonces $x = 2$ *es una raíz.*

División Sintética

Definición

*La **división sintética** es un método abreviado para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x - r)$.*

Ejemplo

Dividir $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *entre* $(x - 2)$.

Solución:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - 4x + 3$, *y el residuo es* 0.

Ejemplo

Dividir $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 4$ *entre* $(x - 2)$.

Solución:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 2 & -3 & 1 & -8 & 4 \\ & & 4 & 2 & 6 & -4 \\ \hline & 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

El cociente es $2x^3 + x^2 + 3x - 2$, *y el residuo es* 0.

Conclusiones

La factorización es esencial para simplificar expresiones y resolver ecuaciones polinómicas. Comprender y dominar los diferentes métodos de factorización nos permite abordar problemas algebraicos más complejos con confianza.

- Identificar el caso de factorización adecuado es clave.
- Practicar con diversos ejemplos fortalece la comprensión.
- La combinación de métodos puede ser necesaria para polinomios de grado superior.

Temporary page!

LATEX was unable to guess the total number of pages correctly. A
there was some unprocessed data that should have been added t
the final page this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page
will go away, because LATEX now knows how many pages to expe
for this document.