coordenadas rectangulares

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

norma y dirección

suma y producto por escalar de vectores

producto interno

Sistema de coordenadas

Dado dos rectas numeradas perperdinculares (llamadas ejes "x" y "y"), con una de ellas horizontal (eje x); Dado un vector cualquiera $\overrightarrow{OX}$ siendo el O el punto de intercepción de las rectas, y siendo e_1 el vector unitario con dirección 0^o y e_2 el vector unitario en dirección de 90^o; existen números reales x, y tales que

$$\overrightarrow{OX} = xe_1 + ye_2$$

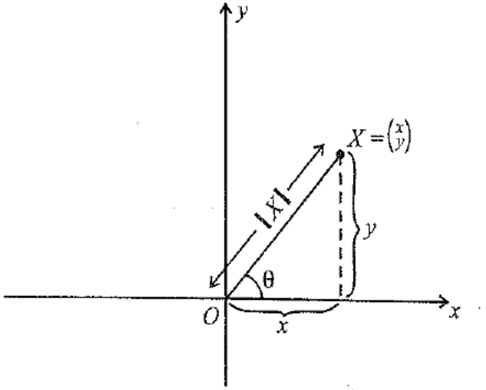
tal descomposición es unica, por tanto en adelante un vector $\overrightarrow{OX}$ queda bien definida por la pareja ordenada (x, y), que en adelante conoceremos como coordenadas rectangulares. Por tanto, definiremos

$$\overrightarrow{OX} = (x, y) = X$$

Norma

Sea el punto X con coordenadas rectangulares (x, y). La norma del vector $\|\overrightarrow{OX}\|$. Se calcula

$$\|X\| = \left\|\overrightarrow{OX}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Propiedades de la norma

1. $\|X\| \geq 0$
2. $\|X\| = 0$ si y sólo si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\|rX\| = |r| \, \|X\|$
4. $\|X + U\| \leq \|X\| + \|U\| \quad$ (Desigualdad triangular)

Dirección

Sea un vector $\mathbf{v} = (x, y)$. Su dirección θ puede obtenerse con

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{(más el ajuste que aparece en la tabla).}$$

Cuadrante	**Condición sobre** (x, y)	θ
I	$x > 0,\ y \geq 0$	$\arctan(\frac{y}{x})$
II	$x < 0,\ y > 0$	$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$
III	$x < 0,\ y < 0$	$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$
IV	$x > 0,\ y < 0$	$\arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi$

Suma y producto por escalar

Dados X, U con coordenadas rectangulares $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y un escalar r, definimos

$$X + U = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix}, \qquad rX = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}.$$

Estas operaciones han sido definidas de tal modo que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} X + U = R & \iff & \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OR} \\ rX = S & \iff & r\,\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS} \end{array}}$$

Propiedades de la suma y del producto por escalar en $\mathbb{R}^2$

Sea X, Y, $Z \in \mathbb{R}^2$ y r, $s \in \mathbb{R}$. Se cumplen:

1. $X + Y \ \in \ \mathbb{R}^2$
2. $X + Y \ = \ Y + X$
3. $(X + Y) + Z \ = \ X + (Y + Z)$
4. $X + O \ = \ X$
5. $X + (-X) \ = \ O$
6. $rX \ \in \ \mathbb{R}^2$
7. $1X \ = \ X$
8. $r\,(sX) \ = \ (rs)\,X$
9. $r\,(X + Y) \ = \ rX + rY$
10. $(r + s)\,X \ = \ rX + sX$

Distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$

La distancia entre los puntos $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es

$$\|X - U\| \; = \; \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}\,.$$

Producto escalar en $\mathbb{R}^2$

El producto escalar de los vectores $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es el escalar

$$X \cdot U \; = \; xu + yv.$$

Ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^2$

Si α es el ángulo entre los vectores no nulos X y U, entonces

$$\cos \alpha = \frac{X \cdot U}{\|X\| \, \|U\|} \, .$$

Proyección de un vector sobre otro en $\mathbb{R}^2$

Si X y U son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$ con $U \neq O$, de la ya conocida fórmula

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{OU}}\,\overrightarrow{OX} = \left(\frac{\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OU}}{\|\overrightarrow{OU}\|^2}\right)\overrightarrow{OU}$$

se sigue, pasando a vectores algebraicos, que

$$\boxed{\mathrm{Proj}_U X = \left(\frac{X\cdot U}{\|U\|}\right)\frac{U}{\|U\|} = \left(\frac{X\cdot U}{\|U\|^2}\right)U = \left(\frac{X\cdot U}{U\cdot U}\right)U}$$