

# Equivalencias al PIM

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Prerequisitos

PIM  $\rightarrow$  PBO

Teorema (Algoritmo de la división)

PBO  $\rightarrow$  PIF

PIF  $\rightarrow$  PIM

# Equivalencias, Principio de inducción matemática

## Definición (Relación de Orden en $\mathbb{N}$ )

*Dado  $m, n \in \mathbb{N}$ , decimos que:*

$$m \leq n \quad \text{si existe un } p \in \mathbb{N} \quad \text{tal que } n = m + p.$$

*Si  $p \neq 0$  decimos que  $m < n$ .*

*Nota:* Esta relación  $\leq$  cumple ser reflexiva, antisimetrica y transitiva por tanto define una relación de orden sobre el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .

# Propiedades:

1. *Reflexiva*: Si  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $n \leq n$ .
2. *Transitiva* Si  $m, n, r \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$  y  $n \leq r$ , entonces  $m \leq r$ .
3. *Ley de la tricotomía*: Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m.$$

4. *Compatibilidad con la Suma*: Si  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ , entonces para todo  $p \in \mathbb{N}$ ,  $m + p \leq n + p$ .
5. *Compatibilidad con el Producto*: Si  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \leq n$ , entonces para todo  $p \neq 0$ ,  $mp \leq np$ .
6. Si  $m, n \in \mathbb{N}$  son tales que  $m < n$ , entonces  $m^+ \leq n$ .
7. Si  $m, n \in \mathbb{N}$  son tales que  $m < n^+$ , entonces  $m \leq n$ .
8. *Propiedad Cancelativa*: Si  $m, n, k \in \mathbb{N}$  son tales que  $mk = nk$  y  $k \neq 0$ , entonces  $m = n$ .

# Definición: Mínimo de un Conjunto

## Definición

Sea  $S$  un subconjunto no vacío de números naturales. Decimos que un elemento  $m$  es el **mínimo** de  $S$  si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $m \in S$
2.  $m \leq s$  para todo  $s \in S$

## Corolario

Si  $S \subset \mathbb{N}$  entonces  $\text{Min}(S)$  es único.

. **Demostración:** Suponga que  $r = \text{Min}(S)$  y  $r' = \text{Min}(S)$ , entonces  $r \leq s$ ,  $\forall s \in S$ , en particular  $r \leq r'$ , por un argumento similar  $r' \leq r$ , ahora por la ley de la tricotomía  $r = r'$ .  $\square$

# PIM $\rightarrow$ PBO

## Teorema

*Todo subconjunto no vacío  $S$  de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe  $m \in S$  tal que para todo  $s \in S$ ,  $m \leq s$ .*

# PIM $\rightarrow$ PBO

## Teorema

*Todo subconjunto no vacío  $S$  de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe  $m \in S$  tal que para todo  $s \in S$ ,  $m \leq s$ .*

**Demostración:** Si  $0 \in S$ , entonces el  $\text{Min}(S) = 0$ . Si  $0 \notin S$  entonces Sea

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq s \text{ para todo } s \in S\}.$$

Como  $S \neq \emptyset$ , tenemos que  $T \neq \mathbb{N}$ , Consideremos la propiedad pertenecer al conjunto  $T$ , es decir  $P(n)$  es verdadera sii  $n \in T$  y apliquemos PIM.

*Base de Inducción*

como  $0 \in T$  entonces  $P(0)$  es verdadera.



# PIM $\rightarrow$ PBO

*Paso Inductivo (falla)* Note que si el paso inductivo se cumpliera entonces  $P(n)$  seria verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$ , es decir  $T = \mathbb{N}$ , cosa que no es verdad, por tanto existe  $m \in T$  tal que  $m + 1 \notin T$ .

# PIM $\rightarrow$ PBO

*Paso Inductivo (falla)* Note que si el paso inductivo se cumpliera entonces  $P(n)$  seria verdadera  $\forall n \in \mathbb{N}$ , es decir  $T = \mathbb{N}$ , cosa que no es verdad, por tanto existe  $m \in T$  tal que  $m + 1 \notin T$ .

Ahora

- ▶  $m \in T$  entonces por definición de  $T$ , tenemos  $m \leq s$ ,  $\forall s \in S$ .
- ▶  $m \leq s$  para todo  $s \in S$ , entonces  $m$  es igual a algún elemento de  $S$  o  $m < s$  para todo  $s \in S$ . Si  $m < s$  entonces  $m + 1 \leq s$  y en consecuencia  $m + 1 \in T$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $m \in S$ .

Por lo tanto,  $m = \min S$ .



# Teorema (Algoritmo de la división)

## Teorema

Sean  $a, b$  enteros con  $b > 0$ . Entonces existen enteros únicos  $q, r$  tales que

$$a = bq + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < b.$$

## Demostración.

1 Existencia. Sea

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z} \text{ y } a - bx \geq 0\}$$

Veamos que  $S \neq \emptyset$ . Si  $a \geq 0$ ,  $a - b \cdot 0 = a \in S$ . Si  $a < 0$ , como  $b \geq 1$  tenemos que  $a - ab = a(1 - b) \geq 0$  y así  $a - ab \in S$ . Luego  $S \neq \emptyset$ .

# Teorema (Algoritmo de la división)

Ahora, por el PBO,  $S$  tiene un mínimo  $r$  y en consecuencia existe un entero  $q$  tal que

$$a - bq = r \quad \text{con} \quad 0 \leq r.$$

Por otra parte

$$r - b = (a - bq) - b = a - (q + 1)b,$$

Ya que  $a - qb$  es el menor entero positivo y  $a - (q + 1)b < a - qb$ , entonces  $a - (q + 1)b < 0$ , por tanto  $r - b < 0$  es decir  $r < b$ .

# Teorema (Algoritmo de la división)

*2 Unicidad.* Supongamos que  $a = bq + r = bq' + r'$  como el mínimo de un conjunto es único, se tiene que  $r = r' = \text{Min}(S)$  y por tanto  $q = q'$ .



# Ejemplos del Algoritmo de la División

## Ejemplo

Sea  $a = 17$  y  $b = 5$ .

# Ejemplos del Algoritmo de la División

## Ejemplo

Sea  $a = 17$  y  $b = 5$ . Como  $a > b$ , tenemos que:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

## Ejemplo

Sea  $a = 3$  y  $b = 5$ .

# Ejemplos del Algoritmo de la División

## Ejemplo

Sea  $a = 17$  y  $b = 5$ . Como  $a > b$ , tenemos que:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

## Ejemplo

Sea  $a = 3$  y  $b = 5$ . Como  $a < b$ , tenemos que:

$$3 = 5 \cdot 0 + 3, \quad 0 \leq 3 < 5$$

## Ejemplo

Sea  $a = -7$  y  $b = 5$ .



# Ejemplos del Algoritmo de la División

## Ejemplo

Sea  $a = 17$  y  $b = 5$ . Como  $a > b$ , tenemos que:

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

## Ejemplo

Sea  $a = 3$  y  $b = 5$ . Como  $a < b$ , tenemos que:

$$3 = 5 \cdot 0 + 3, \quad 0 \leq 3 < 5$$

## Ejemplo

Sea  $a = -7$  y  $b = 5$ . Como  $a$  es negativo, tenemos que:

$$-7 = 5 \cdot (-2) + 3, \quad 0 \leq 3 < 5$$

# PBO $\rightarrow$ PIF

## Teorema

Sea  $a$  un número natural. Sea  $S$  un subconjunto de  $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$  que satisface:

1.  $a \in S$ .
2. (Principio de Inducción del PIF) Para cada  $n > a$ ,  $n \in S$  siempre que  $k \in S$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a \leq k < n$ .

Entonces

$$S = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}.$$

# PBO $\rightarrow$ PIF

**Demostración:** La demostración es por contradicción.

Supongamos que  $S \neq \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$  y sea

$T = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\} - S$ . Luego  $T \neq \emptyset$  y por el PBO tiene un mínimo  $m$ .

Además, puesto que  $a \in S$  entonces  $m > a$  y para todo  $k$  tal que  $a \leq k < m$ , la minimalidad de  $m$  nos garantiza que  $k \in S$ , y por la condición 2 concluimos que  $m \in S$  lo cual es una contradicción.  $\square$

# PIF $\rightarrow$ PIM

## Teorema

Sea  $S$  un subconjunto que satisface:

1.  $a \in S$ .
2. (Principio de Inducción del PIM) Si  $n \geq a$  y  $n \in S$  entonces  $n + 1 \in S$ .

Entonces

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}.$$

**Nota:** La propiedad  $P(n)$  es verdadera sii  $n \in S$ .

# PIF $\rightarrow$ PIM

**Demostración:** Lo demostraremos buscando que se cumplan las dos condiciones para poder aplicar el PIF, note que el inciso 1 de la hipotesis es justamente la Base de Inducción del PIF, solo nos falta ver que se cumpla el Paso Inductivo del PIF.

*Paso inductivo PIF:* Sea  $k$  talque  $a \leq k \leq n$  donde  $P(k)$  es verdadero, en particular  $P(n)$  es verdadero, ahora por el paso inductivo del PIM (enciso 2 hipotesis), se tiene que  $P(n+1)$  es verdadera, por tanto se cumple el Paso inductivo del PIF.

Por PIF,  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \geq a$ , es decir

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}.$$

