Orden, notación científica

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Definición

Dado $m, n \in \mathbb{R}$, decimos que:

$$m \leq n \quad \textit{si existe un} \quad p \in \mathbb{R} \textit{ y } p \geq 0 \quad \textit{tal que} \quad n = m + p.$$

Esto es, si

$$n - m \geq 0$$

Nota: Esta relación $\leq$ define un orden sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Algunas propiedades de la Relación de Orden sobre $\mathbb{R}$

1. **Ley de la tricotomía:** Dados $m, n \in \mathbb{R}$, una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m.$$

2. **Transitividad** Si $m, n, r \in \mathbb{R}$ con $m < n$ y $n < r$, entonces $m < r$.
3. **compatibilidad con la suma** Si $m \in \mathbb{R}$ con $m < n$, entonces para todo $p \in \mathbb{R}$, $m + p < n + p$.
4. **compatibilidad con el producto positivo** Si $m \in \mathbb{R}$ con $m < n$, y $p > 0$, entonces $mp < np$.
5. **compatibilidad con el producto negativo** Si $m \in \mathbb{R}$ con $m < n$, y $p < 0$, entonces $mp > np$.

Intervalos Abiertos

Definición: Un intervalo abierto en la recta numérica incluye todos los números entre dos extremos, pero no incluye los extremos mismos.

- **Intervalo abierto con extremos finitos:**
  Un intervalo abierto entre a y b (donde $a < b$) se denota como (a, b). Esto significa que el intervalo incluye todos los números x tales que $a < x < b$, pero no incluye los puntos a y b.

  $$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

  Ejemplo: El intervalo $(1, 5)$ incluye todos los números entre 1 y 5, pero no incluye los números 1 y 5.

  $$(1, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

- **Intervalo abierto con infinito:**
  Un intervalo abierto que se extiende hacia infinito se denota como (a, ∞) o $(-\infty, b)$. Aquí, el intervalo incluye todos los números mayores que a en el caso de (a, ∞), o todos los números menores que b en el caso de $(-\infty, b)$, pero no incluye a o b.

  $$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

  $$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

  Ejemplo 1: El intervalo $(3, \infty)$ incluye todos los números mayores que 3, pero no incluye 3.

  $$(3, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

  Ejemplo 2: El intervalo $(-\infty, 0)$ incluye todos los números menores que 0, pero no incluye 0.

  $$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Intervalos Cerrados

Definición: Un intervalo cerrado en la recta numérica incluye todos los números entre dos extremos, incluyendo los extremos mismos.

- **Intervalo cerrado con extremos finitos:**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

  Ejemplo:

$$[2, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$$

- **Intervalo cerrado con infinito:**

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

  Ejemplo:

$$[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Intervalos Abierto-Cerrado y Cerrado-Abierto

- **Intervalo Abierto-Cerrado:**

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

  Ejemplo:

$$(1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$$

- **Intervalo Cerrado-Abierto:**

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

  Ejemplo:

$$[2, 7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$$

Gráfica de intervalos

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

Unión e Intersección de Conjuntos

- **Unión de Conjuntos:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo: Si $A = [1, 3]$ y $B = (2, 5]$, entonces

$$A \cup B = [1, 5]$$

- **Intersección de Conjuntos:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo: Si $A = [1, 3]$ y $B = (2, 5]$, entonces

$$A \cap B = (2, 3]$$

Complemento y Diferencia de Conjuntos

- **Complemento de un Conjunto:**

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

Ejemplo: Si $A = [1, 3]$ en el universo $U = \mathbb{R}$, entonces

$$A^c = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

- **Diferencia de Conjuntos:**

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo: Si $A = [1, 5]$ y $B = (2, 4]$, entonces

$$A - B = [1, 2] \cup (4, 5]$$

Más Ejemplos

Ejemplos de Unión:

- $[0,2) \cup [3,5] = [0,2) \cup [3,5]$
- $(-\infty,1] \cup (0,3) = (-\infty,3)$

Ejemplos de Intersección:

- $[0,4] \cap [2,6) = [2,4]$
- $(-\infty,2) \cap [1,\infty) = [1,2)$

Definición de Valor Absoluto

Definición: Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|3| = 3$
- $|-3| = 3$
- $|0| = 0$
- $|3 - \pi| = \pi - 3 \qquad (\text{porque } 3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0)$

Propiedades del Valor Absoluto

1. $|a| \geq 0$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)
4. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ talque $|x| \leq a$ entonces $-a \leq x \leq a$.
5. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ talque $|x| \geq a$ entonces $x \leq -a$ o $a \leq x$.

Distancia entre Puntos sobre la Recta Real

Definición: Si a y b son números reales, entonces la distancia entre los puntos a y b sobre la recta real se define como:

$$d(a, b) = |b - a|$$

Ejemplos:

- La distancia entre los números 5 y 1 es:

$$d(5, 1) = |5 - 1| = |4| = 4$$

- La distancia entre los números -3 y -7 es:

$$d(-3, -7) = |-3 - (-7)| = |-3 + 7| = |4| = 4$$

- La distancia entre 0 y 6 es:

$$d(0, 6) = |0 - 6| = |-6| = 6$$

Intervalos de la forma $|x - a| < b$

Definición: Un intervalo de la forma $|x - a| < b$ representa el conjunto de todos los números x cuya distancia al punto a en la recta real es menor que b. Esto se puede escribir como:

$$|x - a| < b \quad \Rightarrow \quad a - b < x < a + b$$

Ejemplo:

$$|x - 3| < 4 \quad \Rightarrow \quad -4 < x - 3 < 4$$

$$\Rightarrow \quad -4 + 3 < x < 4 + 3$$

$$\Rightarrow \quad -1 < x < 7$$

El intervalo correspondiente es $(-1, 7)$.

Intervalos de la forma $|x - a| > b$

Definición: Un intervalo de la forma $|x - a| > b$ representa el conjunto de todos los números x cuya distancia al punto a en la recta real es mayor que b. Esto se puede escribir como:

$$|x - a| > b \quad \Rightarrow \quad x < a - b \quad \text{o} \quad x > a + b$$

Ejemplo:

$$|x - 5| > 3 \quad \Rightarrow \quad x - 5 < -3 \quad \text{o} \quad x - 5 > 3$$
$$\Rightarrow \quad x < 2 \quad \text{o} \quad x > 8$$

El intervalo correspondiente es la unión de dos intervalos disjuntos: $(-\infty, 2) \cup (8, \infty)$.

Ejercicios con Desigualdades de Valor Absoluto

Ejercicio 1: Resuelve la desigualdad de la forma $|cx - a| \leq b$:

$$|2x - 4| \leq 6$$

Ejercicio 2: Resuelve la desigualdad de la forma $|cx - a| > b$:

$$|3x + 2| > 5$$

Ejercicio 3: Resuelve la desigualdad de la forma $|cx - a| < b$:

$$|-\frac{1}{4}x + 2| < 5$$

Resolución de Ejercicios con Desigualdades de Valor Absoluto

Ejercicio 1: Resuelve la desigualdad $|2x-4| \leq 6$:

$$|2x-4| \leq 6$$

Primero, planteamos las dos desigualdades correspondientes:

$$-6 \leq 2x-4 \leq 6$$

Luego, resolvemos cada parte:

$$-6 \leq 2x-4 \quad \Rightarrow \quad -6+4 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad -2 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x$$

$$2x-4 \leq 6 \quad \Rightarrow \quad 2x \leq 10 \quad \Rightarrow \quad x \leq 5$$

Por lo tanto, la solución es:

$$-1 \leq x \leq 5$$

El intervalo solución es $[-1, 5]$.

Ejercicio 2: Resuelve la desigualdad $|3x+2|>5$:

$$3x+2<-5 \quad \text{o} \quad 3x+2>5$$

$$x<-\frac{7}{3} \quad \text{o} \quad x>1$$

El intervalo solución es $(-\infty,-\frac{7}{3})\cup(1,\infty)$.

Ejercicio 3: Resuelve la desigualdad $|-\frac{1}{4}x+2|<5$:

$$-\frac{1}{4}x+2<5 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{4}x+2>-5$$

Resolviendo, obtenemos:

$$-12<x<28$$

El intervalo solución es $(-12,28)$.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. A
there was some unprocessed data that should have been added t
the final page this extra page has been added to receive it.
If you rerun the document (without altering it) this surplus page
will go away, because LaTeX now knows how many pages to expe
for this document.