

Ejercicios 3

Prof. Jhon Freddy Tavera Bucurú

2025

1. Resuelva la EDO usando transformada de Laplace

a) $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2.$

b) $y' - y = 1 + te^t, \quad y(0) = 0.$

c) $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

d) $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

e) $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

f) $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 5, & t \geq 1. \end{cases}$$

g) $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & t \geq 1. \end{cases}$$

h) $y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

i) $y'' - 5y' + 6y = U(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

j) $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$ donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

2. Resuelva la ecuación use la transformada de Laplace de una convolución.

a) $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t - \tau) d\tau.$

b) $f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin t.$

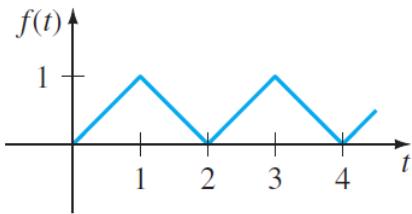
c) $t - 2f(t) = \int_0^t (e^\tau - e^{-\tau}) f(t - \tau) d\tau.$

$$d) \quad y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0.$$

$$e) \quad \frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0.$$

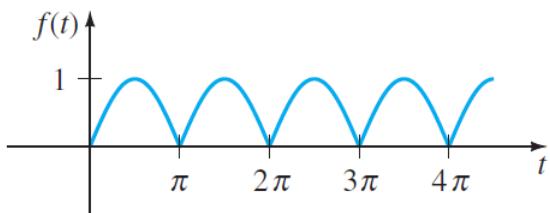
3. Calcule la transformada de Laplace de cada función periódica

a) .



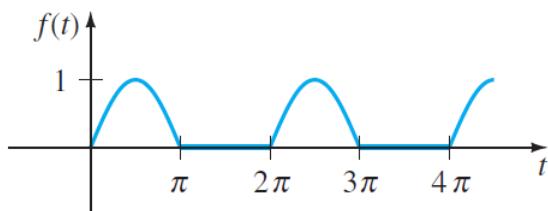
función triangular

b) .



rectificación de onda completa de $\operatorname{sen} t$

c) .



rectificación de media onda de $\operatorname{sen} t$

4. Calcule las soluciones de cada sistema de ecuaciones diferenciales e ilustre el diagrama de fase

a)

$$\begin{aligned} x' &= -5x + 3y, \\ y' &= 2x + 7y. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y, \\ y' &= x + 2y. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y, \\ y' &= x - 3y. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y, \\y' &= -x - \frac{1}{2}y.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x' &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y, \\y' &= -x + \frac{1}{2}y.\end{aligned}$$

5. a) Determine las condiciones de la constante real μ tal que $(0, 0)$ sea un centro para el sistema lineal

$$\begin{aligned}x' &= -\mu x + y, \\y' &= -x + \mu y.\end{aligned}$$

- b) Determine una condición de la constante real μ tal que $(0, 0)$ sea un punto espiral estable del sistema lineal

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x + \mu y.\end{aligned}$$

- c) Demuestre que $(0, 0)$ siempre es un punto crítico inestable del sistema lineal

$$\begin{aligned}x' &= \mu x + y, \\y' &= -x + y,\end{aligned}$$

donde μ es una constante real y $\mu \neq -1$. ¿Cuándo $(0, 0)$ es un punto silla inestable? ¿Cuándo $(0, 0)$ es un punto espiral inestable?

Referencias

- [1] Dennis G. Zill y Michael R. Cullen, *Ecuaciones diferenciales: con problemas con valores en la frontera*, 7a ed., trad. Ana Elizabeth García Hernández; rev. téc. Ernesto Fillo López, México, D.F.: Cengage Learning Editores, 2009. ISBN 978-607-481-314-2.