Ejercicios corte II

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

Universidad del Tolima

1. Divisibilidad, MCD

1. Probar que si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$.
2. Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6. Si además el primero es par, el producto es múltiplo de 24.
3. Probar que $100 \mid \big(11^{10} - 1\big)$.
4. Probar que para todo $n \geq 1$, $30 \mid \big(n^5 - n\big)$.
5. Probar que si $n = rs$ con $r > 0$ y $s > 0$ entonces $(r!)^s \mid n!$.
6. Sean n y m enteros positivos y $a > 1$. Probar que
$$(a^n - 1) \mid (a^m - 1) \quad \text{si y sólo si} \quad n \mid m.$$
7. Probar que todo cuadrado perfecto es de la forma $4k$ o $4k + 1$ para algún entero k.
8. Probar que si a y b son impares entonces $a^2 + b^2$ no es un cuadrado perfecto.
9. Hallar el MCD de cada par de números y expresarlo como combinación lineal de ellos:
$$(382,\, 26), \qquad (-275,\, 726), \qquad (1137,\, 419), \qquad (-2947,\, -3997).$$
10. Usar el algoritmo extendido de Euclides para encontrar enteros x, y tales que:
$$\begin{aligned} 1426x + 343y &= 3, & 630x + 132y &= 12, \\ 936x + 666y &= 18, & 4001x + 2689y &= 4. \end{aligned}$$
11. Probar que si $(a, b) = c$ entonces $(a^2,\, b^2) = c^2$.
12. Probar que si $(a, b) = 1$ entonces $(a + b,\, ab) = 1$.
13. Probar que si $(a, b) = 1$ y $c \mid b$ entonces $(a, c) = 1$.
14. Probar que si $(a, b) = 1$ entonces $(2a + b,\, a + 2b) = 1$ o 3.
15. Probar que si $(b, c) = 1$ entonces $(a,\, bc) = (a, b)\,(a, c)$.
16. Probar que si $(a, b) = 1$ entonces, para todo $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, se tiene $(a^m,\, b^n) = 1$.
17. Probar que si $d \mid nm$ y $(n, m) = 1$ entonces existen d_1, d_2 tales que
$$d = d_1 d_2, \qquad d_1 \mid m, \qquad d_2 \mid n, \qquad (d_1, d_2) = 1.$$

18. Probar que no existen enteros x, y tales que
$$x + y = 200 \quad \text{y} \quad (x, y) = 7.$$

19. Probar que existe un número infinito de pares de enteros x, y que satisfacen
$$x + y = 203 \quad \text{y} \quad (x, y) = 7.$$

20. Probar que si $ad - bc = \pm 1$ entonces la fracción
$$\frac{a+b}{c+d}$$
es irreducible.

21. Evaluar $(ab,\, p^4)$ y $(a+b,\, p^4)$ si p es primo, $(a,\, p^2) = p$ y $(b,\, p^3) = p^2$.

22. Sea p un primo impar y $(a, b) = 1$. Probar que
$$\left(a+b,\; \frac{a^p + b^p}{a+b}\right) = 1 \text{ o } p.$$

Definición (números de Fibonacci). La sucesión de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ se define por
$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ para } n \geq 1.$$

23. Probar que para todo entero positivo n se cumple
$$(\, f_{n+3},\, f_n\,) \in \{1,\, 2\}.$$

24. Probar que si $m = qn + r$ entonces
$$(\, f_m,\, f_n\,) = (\, f_r,\, f_n\,).$$

25. Probar que para todo par de enteros positivos n, m,
$$(\, f_n,\, f_m\,) = f_{(n,m)}.$$

26. Probar que para todo par de enteros positivos m, n,
$$f_n \mid f_m \quad \Longleftrightarrow \quad n \mid m.$$

27. Sean a, m, n enteros positivos con $n \neq m$. Probar que
$$\left(a^{2^n} + 1,\; a^{2^m} + 1\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \text{ es par,} \\ 2, & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases}$$

28. (IMO 1959). Mostrar que la fracción $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible para todo n natural.

29. Encontrar todos los enteros positivos tales que:

    a) $n + 1 \mid n^3 - 1$.

b) $2n-1 \mid n^3+1$.

c) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{143}$.

d) $2n^3+5 \mid n^4+n+1$.

30. Demuestre:

    a) Si $m \mid a-b$, entonces $m \mid a^k-b^k$ para todo natural k.

    b) Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y a, b son enteros cualesquiera, entonces $a-b \mid f(a)-f(b)$.

    c) Si k es un natural impar, entonces $a+b \mid a^k+b^k$.

31. Mostrar que:

    a) $2^{15}-1$ y $2^{10}+1$ son primos entre sí.

    b) $2^{32}+1$ y $2^{24}+1$ son primos entre sí.

32. Demostrar que $(n-1)^2 \mid n^k-1$ si y sólo si $n-1 \mid k$.

33. (IMO 1992). Encontrar todos los enteros a, b, c con $1 < a < b < c$ tales que $(a-1)(b-1)(c-1)$ es divisor de $abc-1$.

    Sugerencia. Mostrar primero que $a \leq 4$ y considerar los posibles casos.

34. Sea $S := 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ con $n > 1$. Probar que S no es un entero.

    Sugerencia. Sea k el mayor entero tal que $2^k \leq n$ y sea P el producto de todos los números impares $\leq n$. Probar que
    $$2^{k-1} \cdot P \cdot S$$
    es una suma cuyos términos, a excepción de $2^{k-1} \cdot P \cdot \dfrac{1}{2^k}$, son enteros.

2. MCD y mcm

35. Probar que $a \mid b$ si y sólo si $[a, b] = |b|$.

36. Probar que si $[a, b] = (a, b)$ y $a > 0$, $b > 0$ entonces $a = b$.

37. Probar que $(a, b) = (a+b, [a, b])$.

38. Probar que $[ka, kb] = |k|\,[a, b]$, con $k \neq 0$.

39. Si k es un múltiplo común de a y b, probar que
    $$\left|\frac{k}{\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)}\right| = [a, b].$$

40. Sea d un entero positivo tal que $d \mid a$ y $d \mid b$. Probar que
    $$\left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right] = \frac{[a, b]}{d}.$$

41. Sean d y g enteros positivos. Probar que existen enteros a y b tales que $(a, b) = d$ y $[a, b] = g$ si y sólo si $d \mid g$.

42. Probar que la ecuación $ax + by = c$ tiene soluciones enteras x, y si y sólo si $(a, b) \mid c$.

43. Probar que $(a, b) = (a, b,\ ax + by)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

44. Hallar enteros a y b tales que $a + b = 216$ y $[a, b] = 480$.

45. Hallar todos los números a y b que satisfacen $(a, b) = 24$ y $[a, b] = 1440$.

46. Hallar $(20n^2+19n+4,\ 4n+3)$ y $[\,20n^2+19n+4,\ 4n+3\,]$, donde n es un entero positivo.

47. Calcular $(4410,\ 1404,\ 8712)$ y expresarlo como combinación lineal de los números dados.

48. Hallar $(112,\ 240,\ 192,\ 760)$ y expresarlo como combinación lineal de los números dados.

49. Hallar enteros x, y, z, w tales que

$$75x + 111y + 87z + 120w = 6.$$

50. Si p y q son primos impares diferentes y $n = pq$, ¿cuántos enteros en el conjunto $2, 3, \ldots, n$ no son primos relativos con n?

51. Probar que $|abc| = (ab,\ ac,\ bc)\,[a, b, c]$.

52. Probar que $|abc| \;\geq\; (a, b, c)\,[a, b, c]$.

53. Dar un ejemplo para ilustrar que $(a, b, c)\,[a, b, c]$ no siempre es abc.

3. primos

54. Probar que todo primo diferente de 2 o 3 es de la forma $6k + 1$ o $6k - 1$.

55. Probar que todo entero de la forma $3k + 2$ tiene un factor primo de la misma forma.

56. Probar que todo entero de la forma $4k + 3$ tiene un factor primo de la misma forma.

57. Demostrar que existen infinitos primos de la forma $4k + 3$.

58. Si p, q son primos tales que $p \geq q \geq 5$, probar que $24 \mid (p^2 - q^2)$.

59. Demostrar que $3, 5, 7$ son los *únicos* primos triples (es decir, los únicos tales que p, $p + 2$ y $p + 4$ son todos primos).

60. Si $2^n - 1$ es primo, probar que n es primo.

61. Si 2^n+1 es primo, probar que n es una potencia de dos. *Sugerencia:* si k es impar, entonces $(x + 1) \mid (x^k + 1)$.

62. Sean p y q primos diferentes de 2 y 3. Probar que si $p-q$ es una potencia de dos, entonces $p + q$ es divisible por 3.

63. Hallar una sucesión de veinte enteros consecutivos y compuestos.

Referencias

[1] Luis R. Jiménez B., Jorge E. Gordillo A., y Gustavo N. Rubiano O. *Teoría de números [para principiantes]*. 2. ed. Bogotá, D. C.: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2004. ISBN 958-701-372-7. Disponible en línea: PDF. [Ejercicios 2.1 pp. 37] [Ejercicios 2.2 pp. 45] [Ejercicios 2.3 pp. 50] [Ejercicios 2.4 pp. 57].

[2] Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, y Eduardo Tengan. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA. Disponible en línea: PDF. [pp. 31–34].