Equivalencias al PIM

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Prerequisitos

PIM $\rightarrow$ PBO

Teorema (Algoritmo de la división)

PBO $\rightarrow$ PIF

PIF $\rightarrow$ PIM

Equivalencias, Principio de inducción matemática

Definición (Relación de Orden en $\mathbb{N}$)

Dado $m, n \in \mathbb{N}$, decimos que:

$$m \leq n \quad \textit{si existe un} \quad p \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad n = m + p.$$

Si $p \neq 0$ decimos que $m < n$.

Nota: Esta relación $\leq$ cumple ser reflexiva, antisimetrica y transitiva por tanto define una relación de orden sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Propiedades:

1. *Reflexiva:* Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n \leq n$.
2. *Transitiva* Si $m, n, r \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y $n \leq r$, entonces $m \leq r$.
3. *Ley de la tricotomía:* Dados $m, n \in \mathbb{N}$, una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

$$m < n, \quad m = n, \quad n < m.$$

4. *Compatibilidad con la Suma:* Si $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces para todo $p \in \mathbb{N}$, $m + p \leq n + p$.
5. *Compatibilidad con el Producto:* Si $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, entonces para todo $p \neq 0$, $mp \leq np$.
6. Si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m < n$, entonces $m^+ \leq n$.
7. Si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m < n^+$, entonces $m \leq n$.
8. *Propiedad Cancelativa:* Si $m, n, k \in \mathbb{N}$ son tales que $mk = nk$ y $k \neq 0$, entonces $m = n$.

Definición: Mínimo de un Conjunto

Definición

*Sea S un subconjunto no vacío de números naturales. Decimos que un elemento m es el **mínimo** de S si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $m \in S$
2. $m \leq s$ *para todo* $s \in S$

Corolario

Si $S \subset \mathbb{N}$ *entonces* $Min(S)$ *es único.*

. **Demostración:** Suponga que $r = Min(S)$ y $r' = Min(S)$, entonces $r \leq s$, $\forall s \in S$, en particular $r \leq r'$, por un argumento similar $r' \leq r$, ahora por la ley de la tricotomia $r = r'$. $\square$

PIM $\rightarrow$ PBO

Teorema

Todo subconjunto no vacío S de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe $m \in S$ tal que para todo $s \in S$, $m \leq s$.

PIM $\rightarrow$ PBO

Teorema

Todo subconjunto no vacío S de números naturales posee un mínimo. Es decir, existe $m \in S$ tal que para todo $s \in S$, $m \leq s$.

Demostración: Si $0 \in S$, entonces el $Min(S) = 0$. Si $0 \notin S$ entonces Sea

$$T = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq s \text{ para todo } s \in S\}.$$

Como $S \neq \emptyset$, tenemos que $T \neq \mathbb{N}$, Consideremos la propiedad pertenecer al conjunto T, es decir $P(n)$ es verdadera sii $n \in T$ y apliquemos PIM.

Base de Inducción

como $0 \in T$ entonces $P(0)$ es verdadera.

PIM $\rightarrow$ PBO

Paso Inductivo (falla) Note que si el paso inductivo se cumpliera entonces $P(n)$ seria verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $T = \mathbb{N}$, cosa que no es verdad, por tanto existe $m \in T$ tal que $m + 1 \notin T$.

PIM $\rightarrow$ PBO

Paso Inductivo (falla) Note que si el paso inductivo se cumpliera entonces $P(n)$ seria verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $T = \mathbb{N}$, cosa que no es verdad, por tanto existe $m \in T$ tal que $m + 1 \notin T$.
Ahora

- $m \in T$ entonces por definición de T, tenemos $m \leq s$, $\forall s \in S$.
- $m \leq s$ para todo $s \in S$, entonces m es igual a algún elemento de S o $m < s$ para todo $s \in S$. Si $m < s$ entonces $m + 1 \leq s$ y en consecuencia $m + 1 \in T$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $m \in S$.
  Por lo tanto, $m = \min S$. $\square$

Teorema (Algoritmo de la división)

Teorema

Sean a, b enteros con $b > 0$. Entonces existen enteros únicos q, r tales que

$$a = bq + r \quad \textit{con} \quad 0 \leq r < b.$$

Demostración.

1 Existencia. Sea

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z} \text{ y } a - bx \geq 0\}$$

Veamos que $S \neq \varnothing$. Si $a \geq 0$, $a - b0 = a \in S$. Si $a < 0$, como $b \geq 1$ tenemos que $a - ab = a(1 - b) \geq 0$ y así $a - ab \in S$. Luego $S \neq \varnothing$.

Teorema (Algoritmo de la división)

Ahora, por el PBO, S tiene un mínimo r y en consecuencia existe un entero q tal que

$$a - bq = r \quad \text{con} \quad 0 \leq r.$$

Por otra parte

$$r - b = (a - bq) - b = a - (q+1)b,$$

Ya que $a - qb$ es el menor entero positivo y $a - (q+1)b < a - qb$, entonces $a - (q+1)b < 0$, por tanto $r - b < 0$ es decir $r < b$.

Teorema (Algoritmo de la división)

2 Unicidad. Supongamos que $a = bq + r = bq' + r'$ como el minimo de un conjunto es único, se tiene que $r = r' = Min(S)$ y por tanto $q = q'$.

$\square$

Ejemplos del Algoritmo de la División

Ejemplo

Sea $a = 17$ *y* $b = 5$.

Ejemplos del Algoritmo de la División

Ejemplo

Sea $a = 17$ *y* $b = 5$*. Como* $a > b$*, tenemos que:*

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

Ejemplo

Sea $a = 3$ *y* $b = 5$*.*

Ejemplos del Algoritmo de la División

Ejemplo

Sea $a = 17$ *y* $b = 5$*. Como* $a > b$*, tenemos que:*

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \;\; 0 \leq 2 < 5$$

Ejemplo

Sea $a = 3$ *y* $b = 5$*. Como* $a < b$*, tenemos que:*

$$3 = 5 \cdot 0 + 3, \;\; 0 \leq 3 < 5$$

Ejemplo

Sea $a = -7$ *y* $b = 5$*.*

Ejemplos del Algoritmo de la División

Ejemplo

Sea $a = 17$ *y* $b = 5$. *Como* $a > b$, *tenemos que:*

$$17 = 5 \cdot 3 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$$

Ejemplo

Sea $a = 3$ *y* $b = 5$. *Como* $a < b$, *tenemos que:*

$$3 = 5 \cdot 0 + 3, \quad 0 \leq 3 < 5$$

Ejemplo

Sea $a = -7$ *y* $b = 5$. *Como* a *es negativo, tenemos que:*

$$-7 = 5 \cdot (-2) + 3, \quad 0 \leq 3 < 5$$

PBO $\rightarrow$ PIF

Teorema

Sea a un número natural. Sea S un subconjunto de $\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$ que satisface:

1. $a \in S$.
2. *(Principio de Inducción del PIF) Para cada $n > a$, $n \in S$ siempre que $k \in S$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq k < n$.*

Entonces

$$S = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}.$$

PBO $\rightarrow$ PIF

Demostración: La demostración es por contradicción.
Supongamos que $S \neq \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$ y sea
$T = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\} - S$. Luego $T \neq \varnothing$ y por el PBO tiene un mínimo m.
Además, puesto que $a \in S$ entonces $m > a$ y para todo k tal que $a \leq k < m$, la minimalidad de m nos garantiza que $k \in S$, y por la condición 2 concluimos que $m \in S$ lo cual es una contradicción. $\square$

PIF $\to$ PIM

Teorema

Sea S un subconjunto que satisface:

1. $a \in S$.
2. *(Principio de Inducción del PIM) Si $n \geq a$ y $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$.*

Entonces

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}.$$

Nota: La propiedad $P(n)$ es verdadera sii $n \in S$.

PIF $\rightarrow$ PIM

Demostración: Lo demostraremos buscando que se cumplan las dos condiciones para poder aplicar el PIF, note que el enciso 1 de la hipotesis es justamente la Base de Inducción del PIF, solo nos falta ver que se cumpla el Paso Inductivo del PIF.
Paso inductivo PIF: Sea k talque $a \leq k \leq n$ donde $P(k)$ es verdadero, en particular $P(n)$ es verdadero, ahora por el paso inductivo del PIM (enciso 2 hipotesis), se tiene que $P(n+1)$ es verdadera, por tanto se cumple el Paso inductivo del PIF.
Por PIF, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq a$, es decir $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq a\}$. $\square$

Ejemplo (PIF por PBO)

Sea $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. *Sean* α, β *las raíces de* $x^2 = x + 1$, *esto es*

$$\mathbf{P}(n): \quad F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Probar por PIM que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *es verdadera*

Note que; $n = 0$: $\frac{1-1}{\alpha-\beta} = 0 = F_0$; $\quad n = 1$: $\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 = F_1$.
Ahora, considere el conjunto

$$S = \{n \geq 0 : \ \mathbf{P}(n) \text{ es falsa}\}$$

Supongamos por reducción al absurdo que S es no vacío, entonces por PBO, existe $m = \min S$ (necesariamente $m \geq 2$). Entonces $\mathbf{P}(m-1)$ y $\mathbf{P}(m-2)$ son verdaderas.

Usando la recurrencia de Fibonacci y la hipótesis para $m-1, m-2$:

$$\begin{aligned}
F_m &= F_{m-1} + F_{m-2} \\
&= \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{m-2} - \beta^{m-2}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^{m-2}(\alpha + 1) - \beta^{m-2}(\beta + 1)}{\alpha - \beta}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha^2 = \alpha + 1$ y $\beta^2 = \beta + 1$, se obtiene

$$F_m = \frac{\alpha^{m-2}\alpha^2 - \beta^{m-2}\beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta},$$

esto es, $\mathbf{P}(m)$ es verdadera, lo que es absurdo, pues contradice la existencia de m.

Conclusión. $S = \varnothing$ y, por tanto, $\mathbf{P}(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$:

Ejemplo (PIF por PIM)

Sea $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. *Sean* α, β *las raíces de* $x^2 = x + 1$, *esto es*

$$\mathbf{P}(n): \quad F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Probar por PIM que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(n)$ *es verdadera*

Note que; $n = 0$: $\frac{1-1}{\alpha-\beta} = 0 = F_0$; $\quad n = 1$: $\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 = F_1$.

Consideremos el conjunto

$$S = \{n \geq 2 : \ \mathbf{P}(n) \text{ es falsa}\}$$

Y supongamos por reducción al absurdo que S es no vacío.
Sea

$$T = \{n \geq 0 : \ \mathbf{P}(n) \text{ es verdadera y } n \leq s, \ \forall\, s \in S\}$$

Considere la propiedad Q, de modo de que $Q(n)$ es verdadera sii $n \in T$

Demostración

Base de Inducción sobre Q.
$n = 0$: $\frac{1-1}{\alpha-\beta} = 0 = F_0$; entonces $P(0)$ es verdadera
$n = 1$: $\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 = F_1$; entonces $P(1)$ es verdadera
Como 0,1 son menores que cualquier otro natural, se tiene que $Q(0)$, $Q(1)$ es verdadera.

Paso Inductivo sobre Q.

Ya que $S \neq \emptyset$ entonces $T \neq \mathbb{N}$, por tanto existe un n tal que $\mathbf{Q}(n)$ es verdadera pero $\mathbf{Q}(n+1)$ no lo es.

Es decir, $\mathbf{P}(n)$ es veradera y $n \leq s \; \forall s \in S$, por otro lado $\mathbf{P}(n+1)$ no es veradera o $n+1 \not\leq s \; \forall s \in S$. Sin embargo si $\mathbf{P}(n+1)$ no es veradera por definición de S, $n+1 \in S$.

Por construcción de T, para todo $0 \leq k \leq n$ se tiene que $\mathbf{P}(k)$ es verdadero, en particular $P(n-1)$ es verdadera tambien.

Por definición de la secuencia de números de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

además se puede probar que

$$F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

Esto es $\mathbf{P}(n+1)$ es verdadera, lo cúal es absurdo. Portanto $S = \emptyset$.