Definiciones y Ejemplos

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Ejemplo (decaimiento radioactivo)

Isótopos radiactivos, como el Carbono–14 (usado en la datación por radiocarbono), Cesio–137 (utilizado en radioterapia) y el Uranio–235 (empleado en explosivos nucleares), presentan núcleos atómicos inestables que se transmutan en núcleos más estables, emitiendo radiación en el proceso, bajo la siguiente ley.

"la tasa de decaimiento radiactivo (es decir, la cantidad del isótopo radiactivo que sufre transmutación por unidad de tiempo) es proporcional a la cantidad del isótopo existente en cada momento."

$x(t) =$ *masa del isótopo radiactivo existente en el instante* t.

Entonces, la tasa de decaimiento radiactivo corresponde a la derivada de x *con respecto al tiempo* t. *Por lo tanto, la ley física enunciada puede modelarse matemáticamente de la forma*

$$x'(t) = -c\, x(t)$$

donde c *es una constante positiva que depende del isótopo en cuestión.*

Ejemplo (Péndulo armónico)

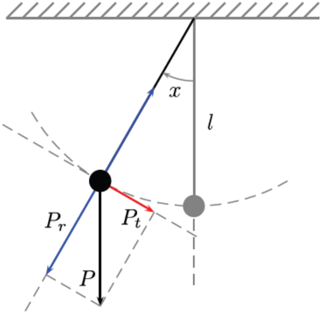
Sistema: una partícula de masa m unida a una varilla (o cuerda) rígida de longitud l y masa despreciable, que puede girar sin fricción en un campo gravitacional uniforme g.

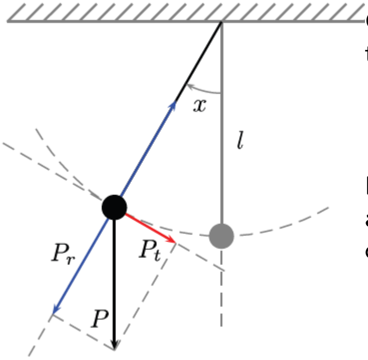
$x(t) =$ ángulo de la cuerda relativa a la vertical en el instante t.

$s(t) = l\,x(t)$ (longitud de arco que lleva la masa medida a lo largo de su trayectoria circular desde la vertical (el punto más bajo))

$l\,x''(t)$ (aceleración tangencial)

Fuerzas: sobre la masa actuan dos fuerzas: el peso $\vec{P} = m\vec{g}$ y la tensión $\vec{T}$ (a lo largo de la cuerda).





Descomposición del peso:
$P_r = P\cos x,\ P_t = -P\sin x,\ P_r.$

Descomposición del peso:
Componente radial P_r y componente tangencial P_t

$$P_r = mg\cos x, \qquad P_t = -\,mg\sin x.$$

Ecuación tangencial (dinámica angular): Como la longitud de la cuerda es constante

$$\vec{T} - P_r = 0$$

$$\boxed{x'' = -\frac{g}{l}\sin x}.$$

Definición (Ecuación Diferencial Ordinaria)

Llamamos ecuación diferencial (ordinaria) a cualquier expresión de la forma

$$x^{(k)} \;=\; F\big(t,\, x,\, x^{(1)},\, \ldots,\, x^{(k-1)}\big),$$

donde $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ *es una función continua definida en un abierto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+kd}$*; la variable* t *toma valores en* $\mathbb{R}$ *y las variables* $x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ *toman valores en* $\mathbb{R}^d$*. Los enteros* $k \geq 1$ *y* $d \geq 1$ *se llaman, respectivamente, orden y dimensión de la ecuación diferencial. Con frecuencia escribiremos* x' *y* x'' *en lugar de* $x^{(1)}$ *y* $x^{(2)}$*, respectivamente.*

Por definición, una solución de la ecuación anterior es una aplicación $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ *de clase* C^k *tal que:*

1. I *es un intervalo abierto;*
2. *el vector* $v(t) = \left(t,\, \gamma(t),\, \frac{d\gamma}{dt}(t),\, \ldots,\, \frac{d^{\,k-1}\gamma}{dt^{\,k-1}}(t)\right)$ *pertenece a* $\mathcal{U}$ *para todo* $t \in I$*;*
3. $\dfrac{d^{\,k}\gamma}{dt^{\,k}}(t) = F\big(v(t)\big)$ *para todo* $t \in I$*.*

Ejemplo

La ecuación, del decaimiento radioactivo.

$$x' = -c\,x$$

Se puede escribir como

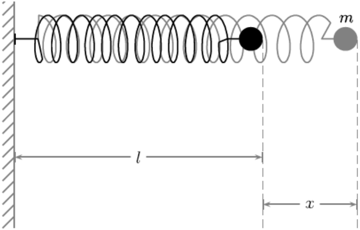
$$x' = F(t, x)$$

como $t \in \mathbb{R}$, y $F(t, x) = F(x) = -c\,x$ es continua en un abiero U que contiene a x, entonces es una ecuación diferencial ordinaria, ecuaciones diferenciales que no dependen de la variable t son llamadas de "autonomas", además la máxima derivada es (1) y la dimensión de $x(t)$ que mide la cantidad de isotopos en el instante t es 1, por tanto, es una EDO autonoma de orden 1 y dimensión 1.

Una solución para
$$x' = F(t,x)$$
es $\gamma(t) = ae^{-ct}$ con $t \in \mathbb{R}$. Esta familia tiene la propiedad que: Existe $T > 0$ talque
$$\gamma(t+T) = \frac{1}{2}\gamma(t)$$
tal $T = \dfrac{ln\,2}{c}$ el es periodo de tiempo por el cual el isótopo radioactivo cae a la mitad, llamamos a T la *vida media* del isótopo.

Ejemplo (Ley de Hooke y oscilador armónico)

Considere un sistema como el de la Imagen



Un resorte elástico está fijado a una base inmóvil y sostiene una partícula puntual de masa m en su otra extremidad; el resorte puede deformarse (estirarse/contraerse) sólo en la dirección de su eje.
ley de Hooke: "La fuerza de tensión ejercida por el resorte sobre la partícula es proporcional a la deformación con respecto a la posición de equilibrio del resorte".

Sea

$x(t) =$ deformación del resorte respecto al equilibrio en el instante t.

Entonces, la ley de Hooke afirma que la fuerza de tensión está dada por

$$f = -c\,x,$$

donde $c > 0$ es una constante llamada *coeficiente de elasticidad*, que depende de los materiales y de la geometría del resorte.

segunda ley de Newton: "la fuerza es igual al producto de la masa m por la aceleración de la partícula puntual":

$$f = m\,x'',$$

donde x'' es la segunda derivada de la deformación x respecto del tiempo

$$x'' = -\frac{c}{m}\,x$$

Es una EDO autonoma de **segundo orden y dimensión 1**, que llamaremos *oscilador armónico*.

Es fácil verificar que

$$\gamma_1(t) = \sin\left(\sqrt{\tfrac{c}{m}}\, t\right) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = \cos\left(\sqrt{\tfrac{c}{m}}\, t\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

son soluciones de la EDO del oscilador armonico.

$$x'' = F(t, x, x') = -\frac{c}{m}\, x$$

Ejemplo solución No Definida en Todo $\mathbb{R}$

Ecuación Diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \tan(x)\, y = 0$$

Solución

La función

$$y(x) = K \cos(x)$$

es una solución. Note que pese a que $y(x) = K \cos(x)$ es una función que es posible definirla en todos los reales, es solución solamente en intervalos que no incluyan los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ k \in \mathbb{Z}$ donde $\tan(x)$ no está definida.

Solución Explícita

Definición (Solución Explícita)

Una **solución explícita** de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

es una función $y = f(x)$ donde y está escrita **explícitamente** en términos de x. Es decir, se ha **despejado** y como función de x.

Ejemplo

Como los vistos anteriormente

Solución Implícita

Definición (Solución Implícita)

Una **solución implícita** de la ecuación diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

en un intervalo I está dada por una relación $g(x, y) = 0$ que cumple:

1. $g(x, y) = 0$ **define implícitamente** a y como función de x en I. Es decir, existe $\phi(x)$ tal que $(x, \phi(x))$ satisface $g(x, y) = 0$ para todo $x \in I$.
2. $\phi(x)$ es n veces diferenciable en I y, al sustituir $\phi(x)$ y sus derivadas en la EDO, ésta se verifica en todo I.

En otras palabras, la ecuación $g(x, y) = 0$ determina una familia de soluciones $\phi(x)$ sin que se haya aislado explícitamente la función y.

Ejemplo de Solución Implícita

Ejemplo

Sea $C > 0$ un número real. la relación:

$$x^2 + y^2 = C,$$

determina una **solución implícita** de la EDO

$$y\,\frac{dy}{dx} + x = 0$$

en el intervalo $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$

Verificación

- Diferenciando implícitamente $x^2 + y^2 - C = 0$, se obtiene $2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$.
- Dividiendo entre 2, $x + y\,\frac{dy}{dx} = 0$
- Las funciones $\phi(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$ (definidas en $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$) satisfacen la relación original y su derivada cumple con la EDO en dicho intervalo.

Por lo tanto, $x^2 + y^2 = C$ determina **soluciones implícitas** de la ecuación diferencial en $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$.

Definición de Problema de Valor Inicial (PVI)

Definición (Problema de Valor Inicial)

Sea una ecuación diferencial ordinaria de orden n:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Un **problema de valor inicial (PVI)** consiste en buscar una solución definida en un intervalo I que satisfaga **condiciones iniciales** en un punto $x_0 \in I$, de la forma:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes dadas. Al conjunto de la ecuación y las n condiciones iniciales se le denomina **problema de Cauchy** o **problema de valor inicial**.

Ejemplo de PVI

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x\,e^x, \quad x \neq 0,$$

y la **condición inicial**:

$$y(1) = e - 1.$$

Se busca la solución particular que satisfaga dicho valor inicial.

Solución General

Una **familia de soluciones** para esta ecuación es:

$$y(x) = x\,e^x + c\,x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Al derivar e insertar en la ecuación se verifica que cumple la EDO para cualquier c.

1

[1] familia de soluciones

Solución Particular

Para hallar c que satisfaga $y(1) = e - 1$:

$$y(1) = 1 \cdot e^1 + c \cdot 1 = e + c.$$

Entonces:

$$e + c = e - 1 \quad \Longrightarrow \quad c = -1.$$

Por lo tanto, la **solución particular** del PVI es:

$$y(x) = x\, e^x - x.$$

Definición (Linealidad)

Una **ecuación diferencial ordinaria** es **lineal** si puede escribirse en la forma:

$$a_n(t)\,\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\,\frac{dx}{dt} + a_0(t)\,x + g(t) \;=\; 0,$$

donde $a_i(t)$ y $g(t)$ son funciones que **no dependen** de la función incógnita x y ni de sus derivadas.

Ejemplos

EDO Lineal (Oscilador Armónico):

$$x'' + \frac{c}{m} x \; = \; 0,$$

EDO de segundo orden autonoma y lineal.

EDO Lineal (Ecuación de Bessel):

$$x^2 y'' \; + \; x y' \; + \; (x^2 - \nu^2) y \; = \; 0,$$

EDO de segundo orden no autonoma y lineal.

EDO No Lineal (Ecuación del Péndulo):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \; + \; \frac{g}{l} \sin(\theta) \; = \; 0,$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical, g la aceleración gravitatoria y l la longitud del péndulo.