Ejercicios Corte 2

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

1. Coordenadas rectangulares

1. Sean $P = (4, 3)$ y $Q = (1, -3)$. Hallar:

   a) El punto R tal que Q es el punto medio del segmento $\overline{PR}$.

   b) El punto S del segmento $\overline{PQ}$ tal que $\dfrac{\|PS\|}{\|SQ\|} = \dfrac{2}{3}$.

   c) El punto M sobre el segmento de recta $\overline{PQ}$ cuya distancia a P es $\dfrac{2}{3}$ de la distancia de P a Q.

2. Sean $\vec{V} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{U} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{Z} = \vec{U} - 2\vec{W} + \vec{V}$. Hallar:

   a) La magnitud y la dirección de $\vec{Z}$.

   b) La descomposición canónica de $\vec{Z}$.

   c) Todos los escalares a tales que $\|a\vec{V}\| = 15$.

   d) La distancia entre los vectores $\vec{V}$ y $\vec{U}$.

   e) El ángulo entre los vectores $\vec{W}$ y $-2\vec{V}$.

   f) El ángulo entre los vectores $\vec{V}$ y $\vec{U}$.

   g) El vector unitario con dirección opuesta a la del vector $\vec{V} + \vec{W}$.

   h) El escalar b tal que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$ sea ortogonal al vector $\vec{W}$.

3. Sean $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Probar que P, Q y R son tres de los vértices de un cuadrado $PQRS$.

   b) Hallar el vértice S del cuadrado $PQRS$.

   c) Calcular el área del cuadrado $PQRS$.

4. Dos vértices de un triángulo equilátero son $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y el origen.

   a) Hallar el tercer vértice (2 soluciones).

   b) Hallar el área del triángulo.

5. Sean $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ vectores en $\mathbb{R}^2$. En cada una de las expresiones siguientes se pueden introducir paréntesis de una sola manera para obtener una expresión que tenga sentido. Introducir los paréntesis y efectuar las operaciones si $\vec{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{W} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) $\vec{U} \cdot \vec{V}\vec{W}$
   b) $\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{W}$
   c) $\vec{U}/\vec{V} \cdot \vec{W}$

6. Sean $\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{V} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{W} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcular:

   a) $\vec{U} \cdot \vec{V}$
   b) $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W})$
   c) $(2\vec{U} - \vec{V}) \cdot (3\vec{W})$
   d) $\operatorname{Proy}_{\vec{W}} \vec{U}$
   e) $\|\vec{U}\| \, (\vec{V} \cdot \vec{W})$
   f) $\| \, (\vec{U} \cdot \vec{V}) \, \vec{W} \|$

7. Sean $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y r un real positivo. Describir, mediante una ecuación en x, y, el conjunto de todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tales que $\|P - P_0\| = r$. Interpretar geométricamente dicho conjunto.

8. Describir, mediante una ecuación en x, y, el conjunto de todos los puntos $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que satisfacen las condiciones indicadas en cada literal.

   a) P equidista de los puntos $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   b) La suma de las distancias de P a $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y a $F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es igual a 4.
   c) La distancia de P a $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el doble de su distancia al punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. Sean X y U puntos del plano que no están en una misma línea recta que pasa por el origen.

   a) Probar que el área A del paralelogramo cuyos vértices son O, X, U y $X + U$ es

   $$A = \|\vec{U}\| \, \|\vec{X} - \operatorname{Proy}_{\vec{U}} \vec{X}\| = \|\vec{X}\| \, \|\vec{U} - \operatorname{Proy}_{\vec{X}} \vec{U}\|.$$

   b) ¿Cuántos paralelogramos se pueden construir de tal manera que tres de sus vértices sean los puntos O, X y U? ¿Qué relación existe entre las áreas de esos paralelogramos?
   c) Sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ vértices de un triángulo en $\mathbb{R}^2$ (suponiendo que A, B, C no son colineales). Determinar:

      a) El área del triángulo ABC (expresar el resultado en función de x_i, y_i).

b) Las coordenadas del baricentro G del triángulo.

c) La ecuación de la **bisectriz interna** del ángulo $\widehat{BAC}$.

d) La ecuación de la **mediatriz** del lado BC.

10. Sean U_1 y U_2 vectores no nulos y ortogonales de $\mathbb{R}^2$, y sea W cualquier vector de $\mathbb{R}^2$. Probar que:

    a) $W = \operatorname{Proy}_{U_1} W + \operatorname{Proy}_{U_2} W$.

    b) Si U_1 y U_2 son unitarios, entonces $W = (W \cdot U_1)\, U_1 + (W \cdot U_2)\, U_2$.

11. Sea U un vector no nulo. Probar que, para cualquier vector X, el vector $X - \operatorname{Proy}_U X$ es ortogonal a U, mostrando que

$$U \cdot \big(X - \operatorname{Proy}_U X\big) = 0.$$

2. rectas y planos

En los ejercicios 1 y 2, escriba la ecuación de la recta que pasa por P con vector normal $\mathbf{n}$ en (a) forma normal y (b) forma general.

1. $P = (0,0)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $P = (2,1)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 3-6, escriba la ecuación de la recta que pasa por P con vector director $\mathbf{d}$ en (a) forma vectorial y (b) forma paramétrica.

3. $P = (1,0)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. $P = (3,-3)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $P = (0,0,0)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

6. $P = (-3,1,2)$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 y 8, escriba la ecuación del plano que pasa por P con vector normal $\mathbf{n}$ en (a) forma normal y (b) forma general.

7. $P = (0,1,0)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $P = (-3,1,2)$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, escriba la ecuación del plano que pasa por P con vectores directores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en (a) forma vectorial y (b) forma paramétrica.

9. $P = (0,0,0)$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $P = (4,-1,3)$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12, proporcione la ecuación vectorial de la recta que pasa por P y Q.

11. $P = (1,-2)$, $Q = (3,0)$

12. $P = (4,-1,3)$, $Q = (2,1,3)$

En los ejercicios 13 y 14, proporcione la ecuación vectorial del plano que pasa por P, Q y R.

13. $P = (1,1,1)$, $Q = (4,0,2)$, $R = (0,1,-1)$

14. $P = (1,0,0)$, $Q = (0,1,0)$, $R = (0,0,1)$

15. Encuentre las ecuaciones paramétricas y una ecuación en forma vectorial para las rectas en $\mathbb{R}^2$ con las siguientes ecuaciones:
    (a) $y = 3x - 1$
    (b) $3x + 2y = 5$

16. Considere la ecuación vectorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ corresponden a distintos puntos P y Q en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
    a) Demuestre que esta ecuación describe el segmento de recta $\overline{PQ}$ cuando t varía de 0 a 1.
    b) ¿Para cuál valor de t, $\mathbf{x}$ es el punto medio de $\overline{PQ}$ y cuál es $\mathbf{x}$ en ese caso?
    c) Encuentre el punto medio de $\overline{PQ}$ cuando $P = (2,-3)$ y $Q = (0,1)$.
    d) Encuentre el punto medio de $\overline{PQ}$ cuando $P = (1,0,1)$ y $Q = (4,1,-2)$.
    e) Encuentre los dos puntos que dividen $\overline{PQ}$ del inciso (c) en tres partes iguales.
    f) Encuentre los dos puntos que dividen $\overline{PQ}$ del inciso (d) en tres partes iguales.

17. Sugiera una "demostración vectorial" del hecho de que, en $\mathbb{R}^2$, dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

18. La recta ℓ pasa a través del punto $P = (1,-1,1)$ y tiene vector director $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para cada uno de los siguientes planos $\mathcal{P}$, determine si ℓ y $\mathcal{P}$ son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos.
    a) $2x + 3y - z = 1$
    b) $4x - y + 5z = 0$

c) $x - y - z = 3$

d) $4x + 6y - 2z = 0$

19. El plano $\mathcal{P}_1$ tiene la ecuación $4x - y + 5z = 2$. Para cada uno de los planos $\mathcal{P}$ del ejercicio 18, determine si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}$ son paralelos, perpendiculares o ninguno de los dos.

20. Encuentre la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa a través de $P = (2, -1)$ y es perpendicular a la recta con ecuación general $2x - 3y = 1$.

21. Encuentre la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa a través de $P = (2, -1)$ y es paralela a la recta con ecuación general $2x - 3y = 1$.

22. Encuentre la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa a través de $P = (-1, 0, 3)$ y es perpendicular al plano con ecuación general $x - 3y + 2z = 5$.

23. Encuentre la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa a través de $P = (-1, 0, 3)$ y es paralela a la recta con ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

24. Encuentre la forma normal de la ecuación del plano que pasa por $P = (0, -2, 5)$ y es paralelo al plano con ecuación general $6x - y + 2z = 3$.

25. Un cubo tiene vértices en los ocho puntos (x, y, z), donde x, y y z son 0 o 1.

    a) Encuentre las ecuaciones generales de los planos que determinan las seis caras (lados) del cubo.

    b) Encuentre la ecuación general del plano que contiene la diagonal desde el origen hasta $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano xy.

26. Encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos que son equidistantes de los puntos $P = (1, 0, -2)$ y $Q = (5, 2, 4)$.

27. En los ejercicios 27 y 28, encuentre la **distancia desde el punto Q hasta la recta ℓ.**

    27. $Q = (2, 2)$, ℓ con ecuación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

    28. $Q = (0, 1, 0)$, ℓ con ecuación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

28. En los ejercicios 29 y 30, encuentre la **distancia desde el punto Q hasta el plano $\mathcal{P}$.**

    29. $Q = (2, 2, 2)$, $\mathcal{P}$ con ecuación $x + y - z = 0$

    30. $Q = (0, 0, 0)$, $\mathcal{P}$ con ecuación $x - 2y + 2z = 1$

29. Encuentre el punto R sobre ℓ que esté más cerca de Q en el ejercicio 27.

30. Encuentre el punto R sobre ℓ que esté más cerca de Q en el ejercicio 28.

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \overrightarrow{PR}$$

33. Encuentre el punto R sobre $\mathcal{P}$ que esté más cerca de Q en el ejercicio 29.

34. Encuentre el punto R sobre $\mathcal{P}$ que esté más cerca de Q en el ejercicio 30.

En los ejercicios 35 y 36, encuentre la distancia entre las rectas paralelas.

35.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

36.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 37 y 38, encuentre la distancia entre los planos paralelos.

37. $2x + y - 2z = 0$ y $2x + y - 2z = 5$

38. $x + y + z = 1$ y $x + y + z = 3$

39. Demuestre la siguiente fórmula para calcular la distancia desde un punto $B = (x_0, y_0)$ hasta una recta ℓ en el plano $\mathbb{R}^2$, cuya ecuación general es $ax + by = c$:

$$d(B, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esta fórmula representa la distancia perpendicular desde el punto B a la recta ℓ, es decir, la longitud del segmento más corto que une el punto con la recta.

40. Demuestre la siguiente fórmula para calcular la distancia desde un punto $B = (x_0, y_0, z_0)$ hasta un plano $\mathcal{P}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$, cuya ecuación general es $ax + by + cz = d$:

$$d(B, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esta fórmula representa la distancia perpendicular desde el punto B al plano $\mathcal{P}$. Es el valor absoluto de la proyección del vector que va del origen al punto B sobre el vector normal al plano, dividido por la magnitud del vector normal.

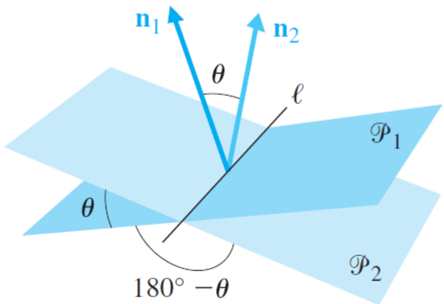
41. Demuestre que, en $\mathbb{R}^2$, la distancia entre rectas paralelas con ecuaciones $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_1$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_2$ está dada por:

$$\frac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{n}\|}$$

42. Demuestre que la distancia entre planos paralelos con ecuaciones $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=d_1$ y $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=d_2$ está dada por:

$$\frac{|d_1-d_2|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Si dos planos no paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tienen vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ y θ es el ángulo entre $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, entonces se define el ángulo entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ como θ o como $180°-\theta$, cualquiera que sea un ángulo agudo. (como en la siguiente Figura)



43. En los ejercicios 43–44, encuentre el ángulo agudo entre los planos con las ecuaciones dadas.

    43. $x+y+z=0$ y $2x+y-2z=0$
    44. $3x-y+2z=5$ y $x+4y-z=2$

44. En los ejercicios 45–46, demuestre que el plano y la recta con las ecuaciones dadas se intersectan, y luego encuentre el ángulo agudo de intersección entre ellos.

    45. El plano dado por $x+y+2z=0$ y la recta dada por

$$\begin{aligned}x&=2+t\\y&=1-2t\\z&=3+t\end{aligned}$$

    46. El plano dado por $4x-y-z=6$ y la recta dada por

$$\begin{aligned}x&=t\\y&=1+2t\\z&=2+3t\end{aligned}$$

45. Los ejercicios 47–48 exploran un planteamiento para el problema de encontrar la proyección de un vector sobre un plano. Como muestra la figura 1.69, si $\mathcal{P}$ es un plano a través del origen en $\mathbb{R}^3$ con vector normal $\mathbf{n}$, y $\mathbf{v}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathbf{p}=\text{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v})$ es un vector en $\mathcal{P}$ tal que $\mathbf{v}-c\mathbf{n}=\mathbf{p}$ para algún escalar c.

    47. Con el hecho de que $\mathbf{n}$ es ortogonal a todo vector en $\mathcal{P}$ (y por tanto a $\mathbf{p}$), calcule c y en consecuencia encuentre una expresión para $\mathbf{p}$ en términos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$.
    48. Use el método del ejercicio 47 para encontrar la proyección de

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

sobre los planos con las siguientes ecuaciones:

1) $x + y + z = 0$
2) $3x - y + z = 0$
3) $x - 2z = 0$
4) $2x - 3y + z = 0$

Referencias

[1] Abraham Asmar Charris, Patricia Restrepo de Peláez, Rosa Franco Arbeláez y Fernando Vargas Hernández. *Geometría vectorial y analítica: una introducción al álgebra lineal.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín (Centro de Publicaciones), 2007. [pp 73-78]. ISBN 978-958-8256-38-2. Disponible en: `https://davidbuiles.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/03/geometria-vectorial-y-analitica.pdf`.

[2] Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, una introducción moderna* (3ª ed.). Cengage Learning Editores.