Planos II

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

UT

Construcción de una base ortonormal de un plano vía Gram–Schmidt

Ecuación normal de un plano

Proyección ortogonal de un vector sobre un plano

Distancia de un punto a una recta

Distancia de un punto a un plano generado por vectores ortonormales

Construcción de una base ortonormal de un plano vía Gram–Schmidt

Sea $\mathbb{R}^3$ y sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores no paralelos, es decir, linealmente independientes. Entonces:

- El plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

$$\Pi = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{s\vec{a} + t\vec{b} : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Buscamos construir, mediante el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, un par de vectores ortonormales

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \Pi$$

  tales que:

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \Pi = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}.$$

- La idea es tomar como base inicial el par $(\vec{a}, \vec{b})$ y ortogonalizarlo paso a paso, normalizando al final para obtener una base ortonormal del mismo plano.

Algoritmo

Entrada: Vectores no paralelos $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. **Salida:** Vectores ortonormales $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ que generan el mismo plano.

1. **Primer vector ortonormal:**
   - Suponemos $\vec{a} \neq \vec{0}$ y definimos
   $$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$
2. **Ortogonalización del segundo vector:**
   - Consideramos la componente de $\vec{b}$ ortogonal a $\vec{e}_1$:
   $$\vec{b}_\perp = \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{e}_1)\, \vec{e}_1.$$
   - Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos, se tiene $\vec{b}_\perp \neq \vec{0}$.
3. **Segundo vector ortonormal:**
   - Normalizamos la componente ortogonal:
   $$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_\perp}{\|\vec{b}_\perp\|}.$$

Entonces $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal de $\Pi = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Ecuación normal de un plano

Sea un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.

Definición (vector normal)

Un vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ se llama *normal* al plano Π si es ortogonal a todo vector contenido en el plano, es decir,

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{para todo } \vec{v} \in \Pi \text{ tal que } \vec{v} \text{ es dirección del plano.}$$

Sea $\vec{p}_0 \in \Pi$ un punto fijo del plano y $\vec{n}$ un vector normal.

Ecuación normal del plano

Un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ pertenece al plano Π si y solo si

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}_0) = 0.$$

Si $\vec{n} = (A, B, C)$ y $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación anterior equivale a

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

o bien

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

para una constante $D \in \mathbb{R}$ apropiada.

Proyección ortogonal de un vector sobre un plano

Sea un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por un punto $\vec{p}_0$ y está generado por un par de vectores ortonormales $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, es decir:

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \Pi = \{\, \vec{p}_0 + s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 : s, t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Definición (proyección ortogonal sobre un plano)

Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, definimos la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre el plano Π como

$$\mathrm{proj}_\Pi(\vec{v}) := \vec{p}_0 + \left((\vec{v} - \vec{p}_0) \cdot \vec{e}_1\right) \vec{e}_1 + \left((\vec{v} - \vec{p}_0) \cdot \vec{e}_2\right) \vec{e}_2.$$

El vector

$$\vec{v} - \mathrm{proy}_\Pi(\vec{v})$$

es ortogonal al plano Π y representa el *componente ortogonal* de $\vec{v}$ respecto de Π.

Distancia de un punto a una recta

Sea una recta $\ell \subset \mathbb{R}^3$ dada en forma paramétrica por

$$\ell = \{ \vec{p}_0 + t\vec{v} : t \in \mathbb{R} \},$$

donde $\vec{p}_0$ es un punto sobre la recta y $\vec{v} \neq \vec{0}$ es un vector director.

Definición (distancia de un punto a una recta)

Sea $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ un punto arbitrario. La distancia de $\vec{P}$ a la recta ℓ se define como

$$d(\vec{P}, \ell) := \min_{t \in \mathbb{R}} \left\| \vec{P} - (\vec{p}_0 + t\vec{v}) \right\|.$$

Sea $\hat{\vec{v}} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ el vector director unitario y

$$\vec{w} = \vec{P} - \vec{p}_0.$$

Entonces:

$$d(\vec{P}, \ell) = \left\| \vec{w} - proy_v w \right\| = \left\| \vec{w} - (\vec{w} \cdot \hat{\vec{v}})\, \hat{\vec{v}} \right\|.$$

Distancia de un punto a un plano generado por vectores ortonormales

Sea un plano

$$\Pi = \{\, \vec{p}_0 + s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 : s, t \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{R}^3,$$

donde $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ forman un par de vectores ortonormales:

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

Sea $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ un punto arbitrario y definamos

$$\vec{w} = \vec{P} - \vec{p}_0.$$

Definición (distancia de un punto a un plano ortonormalmente generado)

La distancia de $\vec{P}$ al plano Π se define como

$$\begin{aligned} d(\vec{P}, \Pi) &:= \|\vec{w} - proy_{\Pi} w\| \\ &= \|\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{e}_1)\,\vec{e}_1 - (\vec{w} \cdot \vec{e}_2)\,\vec{e}_2\|\,. \end{aligned}$$