Orden Superior Lineal

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Definición

Una *ecuación diferencial ordinaria de segundo orden* es una relación de la forma

$$y'' = F(t, y, y'),$$

donde

- t es la variable independiente (por ejemplo, tiempo).
- $y = y(t)$ es la función incógnita.
- $y' = \frac{dy}{dt}$ y $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$ son la primera y la segunda derivada de y respecto a t.
- $F\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función dada, continua (y con las propiedades que se requieran) en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, abierto.

Una solución de la EDO en I es una función $y\colon I \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable que satisface la ecuación para todo $t \in I$.

Teorema

Sea $y'' = f(t, y, y')$ *donde* f *es lineal, con coeficientes constantes y homogenea; es decir* $f(t, y, y') = ay + by', \;\; a, b \in \mathbb{R}$. *Entonces dado un valor inicial* (t_0, y_0) *existe una unica función* γ *tal que*

1. $\gamma(t_0) = y_0$
2. $\gamma'(t_0) = y_0'$,
3. $\gamma''(t) = a(\gamma(t)) + b(\gamma'(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración

Consideremos

$$y'' = a\,y + b\,y',$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Definimos el sistema de primer orden

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$Y' = f(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ a\, y_1 + b\, y_2 \end{pmatrix}$$

Demostraremos que $f(t, Y)$ es lipschitziana en la segunda variable. Sean dos vectores $Y = (y_1, y_2)$ y $Z = (z_1, z_2)$ valen

$$f(Y) - f(Z) = \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ a(y_1 - z_1) + b(y_2 - z_2) \end{pmatrix}.$$

Usando la norma euclídea,

$$\|f(Y) - f(Z)\|^2 = (y_2 - z_2)^2 + \big(a(y_1 - z_1) + b(y_2 - z_2)\big)^2.$$

Como $(u + v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$

se tiene que

$$\|f(Y)-f(Z)\|^2 \leq (y_2-z_2)^2 + 2\big(a^2(y_1-z_1)^2 + b^2(y_2-z_2)^2\big)$$

. Luego

$$\|f(Y)-f(Z)\|^2 \leq \max\{\,2a^2,\, 1+2b^2\}\,\big[(y_1-z_1)^2 + (y_2-z_2)^2\big]$$

es decir,

$$\|f(Y)-f(Z)\| \leq L\,\|Y-Z\|,$$

con $L=\sqrt{\max\{2a^2,\, 1+2b^2\}}$. Por tanto f es globalmente Lipschitz en la segunda variable Y, para todo $(t_0, Y_0) = (t_0, y_0, y_0')$ y, en particular es localmente Lipschitz.

$\Rightarrow$ El teorema de existencia y unicidad de Picard–Lindelöf se cumple para todo valor inicial. $\square$

Teorema

Sea $y'' = f(t, y, y')$ *donde* f *es lineal, con funciones en los coeficientes* g_0, g_1 *continuas y acotadas en el intervalo* $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$*; es decir*

$$f(t, y, y') = g_0(t)\, y + g_1(t)\, y' + h(t),$$

con h *continua. Entonces dado un valor inicial* (t_0, y_0, y_0') *existe una única función* γ *tal que*

1. $\gamma(t_0) = y_0$,
2. $\gamma'(t_0) = y_0'$,
3. $\gamma''(t) = g_0(t)\,\gamma(t) + g_1(t)\,\gamma'(t) + h(t) \quad \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Demostración

Sea

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema equivalente es

$$Y' = F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ g_0(t)\, y_1 + g_1(t)\, y_2 + h(t) \end{pmatrix}.$$

Para $Y = (y_1, y_2)$ y $Z = (z_1, z_2)$,

$$F(t, Y) - F(t, Z) = \begin{pmatrix} y_2 - z_2 \\ g_0(t)\,(y_1 - z_1) + g_1(t)\,(y_2 - z_2) \end{pmatrix}.$$

Como g_0, g_1 están acotadas en $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, existe $M > 0$ tal que $|g_0(t)|, |g_1(t)| \leq M$ para todo $t \in I$. Entonces

$$\|F(t,Y) - F(t,Z)\|^2 = (y_2 - z_2)^2 + \big(g_0(t)(y_1 - z_1) + g_1(t)(y_2 - z_2)\big)^2$$

$$\leq (y_2 - z_2)^2 + \big(M\,|y_1 - z_1| + M\,|y_2 - z_2|\big)^2 \leq (1 + 2M^2)\,\|Y - Z\|^2.$$

De aquí

$$\|F(t,Y) - F(t,Z)\| \leq L\,\|Y - Z\|, \quad L = \sqrt{1 + 2M^2},$$

y F es localmente Lipschitz en Y (uniformemente en t).

$\Rightarrow$ Por Picard–Lindelöf existe y es única la solución local para cualquier dato inicial (t_0, y_0, y_0').

Teorema (Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones lineales de orden n)

Dada la ecuación diferencial lineal de orden n,

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t),$$

supongamos que $g(t)$, $a_i(t)$ con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son funciones continuas en un intervalo (a, b) que contiene al punto t_0 y que $a_n(t) \neq 0$ en (a, b).

Entonces, para cualquier elección de los valores iniciales $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, existe una única solución $y(t)$ en todo el intervalo (a, b) del problema con valor inicial

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

Definición de operador diferencial

Un **operador diferencial** convierte una función derivable en otra función. Se representa comúnmente por la letra mayúscula D, donde

$$D(y) = \frac{dy}{dt}.$$

Derivadas de orden superior se escriben como:

$$D^2 y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad D^n y = \frac{d^n y}{dt^n}.$$

Un **operador diferencial de n-ésimo orden** o **operador polinomial** se define como:

$$L = a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t),$$

donde $a_i(t)$ son funciones continuas y reales.

Ecuaciones diferenciales lineales en forma operativa

Cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse en términos del operador diferencial D. **Ejemplo:**

$$y'' + 5y' + 6y = 5t - 3$$

puede escribirse usando D como

$$D^2y + 5Dy + 6y = 5t - 3,$$

si $L = D^2 + 5D + 6$, entonces

$$L(y) = 5t - 3.$$

Forma compacta:

Usando un operador polinomial L, las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas de orden n se escriben como:

$$L(y) = 0 \quad \text{y} \quad L(y) = g(t),$$

Propiedad de linealidad del operador diferencial

La **linealidad** del operador diferencial del n-ésimo orden L se deduce directamente de dos propiedades básicas de la derivada D:

- $D(cf(t)) = c\,Df(t)$ para toda constante c.
- $D(f(t)+g(t)) = Df(t) + Dg(t)$.

Así, si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones derivables y α, β son constantes, entonces el operador L cumple ser lineal:

$$L\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t)).$$

Teorema (Principio de superposición; ecuaciones homogéneas)

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden

$$L(y) = 0$$

en un intervalo I. Entonces, la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t),$$

donde c_i (para $i = 1, 2, \ldots, k$) son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo I.

Demostración

Sea $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t)$, donde cada $y_i(t)$ es solución de la ecuación homogénea $L(y_i) = 0$.

Por la propiedad de **linealidad** del operador L, tenemos:

$$L(y) = L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_i).$$

Pero cada $L(y_i) = 0$ por hipótesis, por lo que:

$$L(y) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto, $y(t)$ también es solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. $\square$

Teorema: Soluciones de la EDO Lineal homogenea = espacio vectorial

Sea la EDO lineal homogénea de orden n

$$L[y] \;=\; D^n y + a_{n-1}(t)\, D^{n-1} y + \cdots + a_1(t)\, Dy + a_0(t)\, y \;=\; 0,$$

con $L(y)$ continua. Entonces el conjunto de soluciones de $L[y] = 0$, es un espacio vectorial.

Demostración

Sea $k = 0, \ldots, n-1$, considere las n funciones

$$\Phi_k(t) \quad \text{tal que} \quad \Phi_k^{(j)}(t_0) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Que son solución a cada uno de los respectivos problemas de valor inicial. Por el teorema de Existencia y unicidad, cada Φ_k existe y es única.

Demostraremos que el conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ es igual al espacio generado por el conjunto de funciones Φ_k, es decir

$$S =< \Phi_0, \cdots \Phi_{n-1} >$$

Sean Φ una solución arbitraria de $L[y] = 0$ y definamos las constantes

$$\alpha_k \; = \; \Phi^{(k)}(t_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Consideramos la función

$$\rho(t) \; = \; \Phi(t) \; - \; \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, \Phi_k(t).$$

Como ρ es una combinación lineal de soluciones, entonces es tambien una solución. Además, para cada $j = 0, \ldots, n-1$,

$$\rho^{(j)}(t_0) = \Phi^{(j)}(t_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, \Phi_k^{(j)}(t_0) = \alpha_j \; - \; \alpha_j = 0.$$

Por el Teorema de existencia y unicidad, la única solución con $\rho^{(j)}(t_0) = 0$ para $j = 0, \dots, n-1$ es la solución trivial $\rho(t) \equiv 0$. Por tanto

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, \Phi_k(t),$$

lo que muestra que $\{\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1}\}$ genera $\mathcal{S}$. $\square$

Definición: dependencia e independencia lineal

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y consideremos un conjunto de funciones

$$f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots,\ f_n(t) \quad \text{en } I.$$

Decimos que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es *linealmente dependiente* en I si existen constantes

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,$$

no todas cero, tales que

$$c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t) + \cdots + c_n\, f_n(t) \;=\; 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Si no existe tal combinación no trivial, entonces $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es *linealmente independiente* en I.

Ejemplo – Dependencia lineal de funciones

El conjunto de funciones

$$f_1(t) = \cos^2 t, \quad f_2(t) = \sin^2 t, \quad f_3(t) = \sec^2 t, \quad f_4(t) = \tan^2 t$$

es linealmente dependiente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3 \sec^2 t + c_4 \tan^2 t = 0,$$

donde

$$c_1 = c_2 = 1, \quad c_3 = -1, \quad c_4 = 1.$$

Aquí se usa que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ y que $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$.

Ejercicio — Dependencia lineal de funciones

Sea el conjunto de funciones definido en el intervalo $(0, \infty)$:

$$f_1(t) = \sqrt{t} + 5, \quad f_2(t) = \sqrt{t} + 5t, \quad f_3(t) = t - 1, \quad f_4(t) = t^2.$$

Determine las constantes a, b, c tales que

$$f_2(t) = a\, f_1(t) + b\, f_3(t) + c\, f_4(t)$$

para todo $t \in (0, \infty)$.

Sugerencia: agrupe los términos semejantes y compare coeficientes para determinar los valores de a, b y c.

Definición del Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones

$$f_0(t),\ f_1(t),\ \ldots,\ f_{n-1}(t)$$

tiene al menos $n-1$ derivadas en un intervalo I. El *Wronskiano* de estas funciones se define como el determinante

$$W(f_0,\ldots,f_{n-1})(t) = \begin{vmatrix} f_0(t) & f_1(t) & \cdots & f_{n-1}(t) \\ f_0'(t) & f_1'(t) & \cdots & f_{n-1}'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n-1)}(t) & f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas sucesivas.

Proposición (Wronskiano entonces LI)

Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones con al menos $n-1$ derivadas continuas.
Supongamos que el **Wronskiano**

$$W(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})(t_0) \neq 0$$

para algún $t_0 \in (a, b)$. Entonces, el conjunto $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\}$ es **linealmente independiente** en (a, b).

Demostración

Supongamos, por contradicción, que las funciones son linealmente dependientes. Entonces existen constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, no todas cero, tales que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi_i(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Derivando $n-1$ veces:

$$\begin{aligned}
\alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(t) &= 0 \\
\alpha_0\varphi_0'(t) + \alpha_1\varphi_1'(t) + \cdots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}'(t) &= 0 \\
&\vdots \\
\alpha_0\varphi_0^{(n-1)}(t) + \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n-1)}(t) &= 0
\end{aligned}$$

Evaluando en $t = t_0$, se obtiene un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones.

El sistema obtenido en $t = t_0$ se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \cdots & \varphi_{n-1}(t_0) \\ \varphi_0'(t_0) & \varphi_1'(t_0) & \cdots & \varphi_{n-1}'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(t_0) & \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por hipótesis, esta matriz tiene determinante distinto de cero, por lo tanto el sistema solo admite la solución trivial:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0,$$

lo cual contradice la suposición inicial. **Conclusión:** las funciones son linealmente independientes. $\square$

Ejemplo — L.I. pero Wronskiano nulo

Sean las funciones definidas en $\mathbb{R}$:

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = |t|^3.$$

Estas funciones son **linealmente independientes** en $\mathbb{R}$, ya que no existe una constante c tal que $|t|^3 = c\, t^3$ para todo t (por la discontinuidad de la derivada en $t = 0$).

Sin embargo, sus derivadas coinciden para todo t, y su Wronskiano:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = 0 \quad \text{para todo } t.$$

Pues si la matriz tiene dos columnas iguales su determinante es igual a cero. **Conclusión:** la independencia lineal no implica que el Wronskiano sea distinto de cero.

Proposición

Sean $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ las soluciones de

$$L[y] = a_n(t)D^n y + \cdots + a_1(t)Dy + a_0(t)y = 0$$

con condiciones iniciales en t_0

$$\Phi_k^{(j)}(t_0) \ = \ \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Entonces el conjunto de soluciones $\{\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}\}$ es Linealmente Independiente.

Demostración

Resta demostrar que el Wronskiano

$$W(\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1})(t) \; = \; \det\left[\Phi_k^{(j)}(t)\right]_{0 \le j,k \le n-1}$$

es diferente de cero en algún punto. Note que al evaluar la matriz $\left[\Phi_k^{(j)}(t)\right]_{j,k}$ en $t = t_0$ obtenemos la matriz identidad

$$\left[\Phi_k^{(j)}(t_0)\right]_{0 \le j,k \le n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es 1. Por tanto $W(\Phi_0, \ldots, \Phi_{n-1})(t_0) = 1 \neq 0$.

$\square$

Teorema: Soluciones de la EDO Lineal homogenea = espacio vectorial de dimensión n

Sea

$$L[y] \;=\; D^n y + a_{n-1}(t)\, D^{n-1} y + \cdots + a_1(t)\, Dy + a_0(t)\, y \;=\; 0$$

una EDO lineal homogénea de orden n definida en un intervalo I. Entonces el conjunto de soluciones

$$\mathcal{S} = \{\, y : I \to \mathbb{R} : L[y] = 0\}$$

es un espacio vectorial de dimensión n, cuya base canónica está dada por las soluciones fundamentales $\{\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}\}$ con condiciones iniciales en t_0

$$\Phi_k^{(j)}(t_0) \;=\; \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \qquad j, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Teorema (Isomorfismo con $\mathbb{R}^n$)

Sea

$$L[y] \;=\; D^n y + a_{n-1}(t)\, D^{n-1} y + \cdots + a_1(t)\, Dy + a_0(t)\, y = 0$$

una EDO lineal homogénea de orden n en un intervalo I, y sea

$$\mathcal{S} = \{\, y : I \to \mathbb{R} \mid L[y] = 0 \}.$$

Definimos

$$\Psi_{t_0} : \mathcal{S} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^n, \quad \Psi_{t_0}(y) = \big(y(t_0),\, y'(t_0),\, \ldots,\, y^{(n-1)}(t_0)\big).$$

Entonces Ψ_{t_0} es un isomorfismo de espacios vectoriales, y por tanto $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^n$.

Demostración

- **Linealidad:** Para $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

  $$\Psi_{t_0}(\alpha y_1 + \beta y_2) = ((\alpha y_1 + \beta y_2)(t_0), \dots) = \alpha\,\Psi_{t_0}(y_1) + \beta\,\Psi_{t_0}(y_2).$$

- **Inyectividad:** Si $\Psi_{t_0}(y) = 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces

  $$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

  Como y satisface $L[y] = 0$ y todas sus condiciones iniciales son cero, por unicidad deducimos $y(t) \equiv 0$. Luego $\ker \Psi_{t_0} = \{0\}$.

Sobreyectividad: Sea $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Por el teorema de existencia, existe una única solución $y \in \mathcal{S}$ con

$$y^{(j)}(t_0) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Entonces

$$\Psi_{t_0}(y) = \mathbf{c}.$$

Esto muestra que Ψ_{t_0} es sobreyectiva.

Al ser Ψ_{t_0} lineal, inyectiva y sobreyectiva, concluimos que Ψ_{t_0} es un isomorfismo. $\square$