Ejercicios: Existencia y Unicidad de EDO's

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

1 Taller

1. ¿Para cuáles valores de t_0 y y_0 aplica el Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad de Picard al problema de valor inicial

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0,$$

con cada una de las siguientes funciones $f(t,y)$?. Sugerencia: Derive parcialmente, y en los valores donde la derivada no exista verifique si es o no localmente lipschitziana en la segunda variable.

   (a) $f(t,y) = \ln\big(t^2 + y^2\big)$
   (b) $f(t,y) = t^2\, y^{-1}$
   (c) $f(t,y) = \tan(b\,y), \quad b = \text{constante}$
   (d) $f(t,y) = \sqrt{t^2 + y^2 - b^2}, \quad 0 < b = \text{constante}$
   (e) $f(t,y) = t^{1/3} + y^{2/3}$
   (f) $f(t,y) = t^{1/3} + y^{4/3}$

2. Sea $f(t,y)$ un polinomio en t y y. Prueba que cualquier PVI

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

tiene solución única en un intervalo que contiene a t_0.

3. Sea

$$y' = t + y^2, \quad y(1) = 2.$$

   - Demuestra que no es resoluble por los métodos usuales de EDO de primer orden (lineal, homogénea, exacta, variable separable).
   - Demuestra que la EDO tiene solución única en $(1,2)$.
   - Calcula una aproximación a la solución en el valor inicial $(1,2)$ usando 3 iteraciones de Picard:

4. Sea

$$y' = t^2 + y^3, \quad y(3) = 1.$$

- Demuestra que no es resoluble por los métodos usuales de EDO de primer orden (lineal, homogénea, exacta, variable separable).
- Demuestra que la EDO tiene solución única en $(3, 1)$.
- Calcula una aproximación a la solución en el valor inicial $(3, 1)$ usando 3 iteraciones de Picard:

5. En cada uno de los problemas siguientes aplique el método de aproximaciones sucesivas para resolver el problema con valor inicial dado. Haga $\phi_0(x) = 0$ y determine $\phi_n(x)$ para un valor arbitrario de n. Si es posible, exprese $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ en términos de funciones elementales.

   a). $y' = 2(y + 1), \quad y(0) = 0$

   b). $y' = xy + 1, \quad y(0) = 0$

   c). $y' = -y - 1, \quad y(0) = 0$

   d). $y' = x^2y - x, \quad y(0) = 0$

References

[1] Viana, Marcelo; Espinar, José; Mesa, Heber; Goedert, Guilherme. *EDO@IMPA: Livro de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Disponible en: https://edo.impa.br/Livro.

[2] Cushing, J. M. C. *Analysis of Ordinary Differential Equations*. Tucson, AZ: Department of Mathematics, University of Arizona, 2018. Disponible en: https://math.arizona.edu/~rsims/ma355/math-355-sv.pdf. :contentReference[oaicite:0]index=0

[3] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4ª ed., 2ª reimpresión. Traducción de Hugo Villagómez Velázquez; revisión de José H. Pérez Castellanos. México, D.F.: Editorial Limusa, S.A. de C.V., Grupo Noriega Editores, 2000. ISBN 968-18-4974-4.

[4] Figueiredo, Djairo Guedes de; Neves, Aloísio Freiria. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. ISBN 978-85-244-0282-1. :contentReference[oaicite:1]index=1