Propiedades de la potenciación, Notación cientifica

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2025

Notación Exponencial

Definición: Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n-ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.

Observación Importante

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

(b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Observación Importante

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

(b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

(c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo al 3.

Leyes de Exponentes

Ley

1. $a^1 = a$
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4. $(a^m)^n = a^{mn}$
5. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Ejemplo

1. $4^1 = 4$
2. $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
3. $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$
4. $(3^2)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$
5. $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$
6. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$

Las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

Ejemplo 1

Simplifica la siguiente expresión utilizando las leyes de exponentes:

$$\frac{(2^3 \cdot 3^2)^2 \cdot 6^{-3}}{(4 \cdot 9)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
(2^3 \cdot 3^2)^2 &= (2^3)^2 \cdot (3^2)^2 \\
(2^3)^2 \cdot (3^2)^2 &= 2^6 \cdot 3^4 \\
(4 \cdot 9)^2 &= 4^2 \cdot 9^2 \\
4^2 \cdot 9^2 = (2^2)^2 \cdot (3^2)^2 &= 2^4 \cdot 3^4 \\
6^{-3} = (2 \cdot 3)^{-3} &= 2^{-3} \cdot 3^{-3} \\
\frac{2^6 \cdot 3^4 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3}}{2^4 \cdot 3^4} &= \frac{2^{6-3-4} \cdot 3^{4-3-4}}{1} \\
&= 2^{-1} \cdot 3^{-3} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3^3} = \frac{1}{2 \cdot 27} = \frac{1}{54}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Simplifica la siguiente expresión utilizando las leyes de exponentes y la descomposición en factores primos:

$$\frac{(8a^2 \cdot 27b^{-3})^2 \cdot (16a^{-3} \cdot 9b^4)}{(32a^{-4} \cdot 81b^3)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned} 8 = 2^3, \quad 27 = 3^3, \quad 16 = 2^4 \\ 32 = 2^5, \quad 81 = 3^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } (8a^2 \cdot 27b^{-3})^2 &= \left(2^3 a^2 \cdot 3^3 b^{-3}\right)^2 \\ &= 2^6 \cdot a^4 \cdot 3^6 \cdot b^{-6} \\ (16a^{-3} \cdot 9b^4) &= 2^4 \cdot a^{-3} \cdot 3^2 \cdot b^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 2 cont.)

$$\begin{aligned}
(32a^{-4} \cdot 81b^3)^2 &= \left(2^5 a^{-4} \cdot 3^4 b^3\right)^2 \\
&= 2^{10} \cdot a^{-8} \cdot 3^8 \cdot b^6 \\
\frac{2^6 \cdot a^4 \cdot 3^6 \cdot b^{-6} \cdot 2^4 \cdot a^{-3} \cdot 3^2 \cdot b^4}{2^{10} \cdot a^{-8} \cdot 3^8 \cdot b^6} &= \frac{2^{6+4-10} \cdot a^{4-3+8} \cdot 3^{6+2-8} \cdot b^{-6+4-6}}{1} \\
&= 2^0 \cdot a^9 \cdot 3^0 \cdot b^{-8} \\
&= a^9 \cdot \frac{1}{b^8} \\
&= \frac{a^9}{b^8}
\end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{a^9}{b^8}$

Definición de una Raíz n y Ejemplos

Definición: Si n es cualquier entero positivo, entonces la **raíz** n **principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2^3 = 8$
- $\sqrt[4]{16} = 2$, porque $2^4 = 16$
- $\sqrt[2]{25} = 5$, porque $5^2 = 25$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$, porque $(-2)^5 = -32$

Definición de Exponentes Racionales y Ejemplos

Definición: Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Ejemplos:

(a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Propiedades de Raíces n

Propiedad

1. Bajo cuidado se cumplen las mismas propiedades que se tenian cuando los exponentes son enteros
2. $\sqrt[n]{a^n} = a \quad$ si n es impar
3. $\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad$ si n es par

Ejemplo

1. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
2. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt[5]{25^5} = 25$
3. $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

Ejemplo 1 Raíces Racionales

Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{16}}{\sqrt[6]{64}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8} &= 2, \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8 \\
\sqrt[4]{16} &= 2, \quad \text{ya que} \quad 2^4 = 16 \\
\sqrt[6]{64} &= 2, \quad \text{ya que} \quad 2^6 = 64 \\
\frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{16}}{\sqrt[6]{64}} &= \frac{2 \cdot 2}{2} = 2
\end{aligned}$$

Respuesta: 2

Ejemplo 2 Raíces Racionales

Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{8x^6} \cdot \sqrt[4]{16y^8}}{\sqrt[6]{64z^{12}}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8x^6} &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^6} \\
&= 2 \cdot x^2, \quad \text{ya que} \quad 2^3 = 8 \quad \text{y} \quad (x^2)^3 = x^6 \\
\sqrt[4]{16y^8} &= \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{y^8} \\
&= 2 \cdot y^2, \quad \text{ya que} \quad 2^4 = 16 \quad \text{y} \quad (y^2)^4 = y^8
\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Raíces Racionales (cont.)

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{64z^{12}} &= \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{z^{12}} \\
&= 2 \cdot z^2, \quad \text{ya que} \quad 2^6 = 64 \quad \text{y} \quad (z^2)^6 = z^{12} \\
\frac{\sqrt[3]{8x^6} \cdot \sqrt[4]{16y^8}}{\sqrt[6]{64z^{12}}} &= \frac{2x^2 \cdot 2y^2}{2z^2} \\
&= \frac{4x^2y^2}{2z^2} = 2\frac{x^2y^2}{z^2}
\end{aligned}$$

Respuesta: $2\frac{x^2y^2}{z^2}$

Ejemplo 3 Raíces Racionales

Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{2^{-2} \cdot \sqrt[3]{16x^{-6}} \cdot \sqrt[4]{81y^8}}{\sqrt[6]{64z^{-12}}}$$

Solución:

Primero, simplificamos

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{16x^{-6}} &= \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{x^{-6}} \\ &= 2^{4/3} \cdot x^{-2} \\ \text{ya que } 16 = 2^4 &\text{ y } (-6) \div 3 = -2 \\ \text{Luego, simplificamos } \sqrt[4]{81y^8} &\to \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{y^8} \\ &= 3 \cdot y^2, \quad \text{ya que } 81 = 3^4 \text{ y } 8 \div 4 = 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Raices racionales (cont.))

Continuamos con la simplificación de la expresión:

$$\begin{aligned}
&\text{Ahora, simplificamos} \\
\sqrt[6]{64z^{-12}} &= \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{z^{-12}} \\
&= 2^1 \cdot z^{-2}, \\
\text{ya que } 64 = 2^6 &\text{ y } (-12) \div 6 = -2 \\
\text{Por lo tanto:} \\
\frac{2^{-2} \cdot 2^{4/3} \cdot x^{-2} \cdot 3 \cdot y^2}{2^1 \cdot z^{-2}} &= \frac{3 \cdot x^{-2} \cdot y^2 \cdot 2^{-2+4/3}}{2^1 \cdot z^{-2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Raices racionales (cont.)

Continuamos con la simplificación final:

$$2^{-2+4/3-1} = 2^{4/3-3} = 2^{-5/3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{3 \cdot x^{-2} \cdot y^2 \cdot 2^{-5/3}}{z^{-2}} = 3 \cdot 2^{-5/3} \cdot x^{-2} \cdot y^2 \cdot z^2$$

Respuesta: $3 \cdot 2^{-5/3} \cdot x^{-2} \cdot y^2 \cdot z^2$

- $\dfrac{123}{10} = 123 \cdot 10^{-1} = 12.3$ (la coma se mueve 1 lugar a la izquierda)
- $\dfrac{123}{100} = 123 \cdot 10^{-2} = 1.23$ (2 lugares)
- $\dfrac{123}{1\,000} = 123 \cdot 10^{-3} = 0.123$ (3 lugares)
- $\dfrac{123}{10\,000} = 123 \cdot 10^{-4} = 0.0123$ (4 lugares)
- $\dfrac{123}{1\,000\,000} = 123 \cdot 10^{-6} = 0.000123$ (6 lugares)

Regla clave: Dividir por 10^n es multiplicar por 10^{-n} y equivale a mover la *coma decimal* n lugares a la izquierda.

Sistema Decimal

Forma general (sin barra):

$$x = \left[\, a_m a_{m-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} \,\right]_{10}, \qquad a_k \in \{0, \dots, 9\}$$

$$\boxed{x = \sum_{k=-n}^{m} a_k \, 10^k}$$

Ejemplos:

$$123.456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$$0.305 = 0 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$$

Nota: si prefieres la coma decimal: escribe 123,456 en lugar de 123.456.

Notación científica

Definición. Todo número real (no nulo) puede escribirse como

$$x = a \times 10^n, \quad 1 \leq |a| < 10, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Números muy grandes

- $300\,000\,000 = \mathbf{3.0 \times 10^8}$ (velocidad de la luz en m/s)
- $149\,600\,000\,000$ m $= \mathbf{1.496 \times 10^{11}}$ m (Tierra–Sol)
- $602\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = \mathbf{6.022 \times 10^{23}}$ (Nº de Avogadro)

Números muy pequeños

- $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,00167$ kg $= \mathbf{1.67 \times 10^{-27}}$ kg (masa de un protón)
- $0.000\,000\,000\,0529$ m $= \mathbf{5.29 \times 10^{-11}}$ m (radio de Bohr)
- $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,9109$ kg $= \mathbf{9.109 \times 10^{-31}}$ kg (masa del electrón)

Nota: En calculadoras/computación se usa `E`: por ejemplo, $1.23 \times 10^{-4} \equiv$ `1.23e-4`.