Composición y transformación

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

2024

Cálculo de un Logaritmo: Ejemplo

Definición: El logaritmo base a de un número b es el exponente x al que hay que elevar la base a para obtener b:

$$\log_a(b) = x \quad \text{si y sólo si} \quad a^x = b.$$

Ejemplo: Calculemos $\log_2(8)$.

1. **Planteamiento:** Queremos encontrar el valor de x tal que:
$$2^x = 8.$$
2. **Resolviendo la ecuación:** Sabemos que:
$$2^3 = 8.$$
Por lo tanto:
$$x = 3.$$
3. **Resultado:**
$$\log_2(8) = 3.$$

Comprobación: Elevemos la base 2 al exponente 3:

$$2^3 = 8 \quad \text{(correcto)}.$$

Propiedades de la Función Logarítmica

La función logarítmica tiene varias propiedades fundamentales que son útiles en matemáticas y otras disciplinas. Sean $a > 0$, $b > 0$, y $c > 0$, y sea x un número real:

1. **Logaritmo del producto:**
$$\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c).$$
2. **Logaritmo del cociente:**
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c).$$
3. **Logaritmo de una potencia:**
$$\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b).$$
4. **Cambio de base:**
$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}, \quad c > 0 \text{ y } c \neq 1.$$
5. **Logaritmo de la base:**
$$\log_a(a) = 1.$$

El Número de Euler e

Definición: El número de Euler, denotado por e, es una constante matemática fundamental que aparece en diversos campos como el cálculo, la teoría de números y las ciencias aplicadas. Su valor aproximado es:

$$e \approx 2.718281828459.$$

Propiedades y Definición Formal:

- El número e se define como el límite:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Es la base de los logaritmos naturales, es decir:

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

Razones Trigonométricas

En un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas relacionan los ángulos y los lados del triángulo. Dadas las siguientes definiciones: - θ: Ángulo de referencia. - cateto opuesto: El lado opuesto al ángulo θ. - cateto adyacente: El lado adyacente al ángulo θ. - hipotenusa: El lado más largo del triángulo.
Definiciones:

$$\begin{aligned}
\text{Seno (sin)}: &\quad \sin(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \\
\text{Coseno (cos)}: &\quad \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \\
\text{Tangente (tan)}: &\quad \tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}.
\end{aligned}$$

Razones Recíprocas:

$$\begin{aligned}
\text{Cosecante (csc)}: &\quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}},\\
\text{Secante (sec)}: &\quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}},\\
\text{Cotangente (cot)}: &\quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.
\end{aligned}$$

Note que:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Identidades Trigonométricas Más Importantes

Las identidades trigonométricas son ecuaciones fundamentales que relacionan las funciones trigonométricas entre sí.

1. Identidades Fundamentales:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta).$$

2. Identidades de Ángulos Complementarios:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta).$$

3. Identidades de Suma y Diferencia:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b).$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b).$$

Composición de Funciones

Definición Formal: Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, la **composición** de g con f, denotada por $(g \circ f)(x)$, se define como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

donde $x \in A$, $f(x) \in C$, y el dominio de $g \circ f$ es el conjunto:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}.$$

Importante: Para que la composición esté bien definida, el **rango** de f debe estar contenido en el **dominio** de g ($\mathrm{Im}(f) \subseteq C$).

Ejemplo: Sean:

$$f(x) = x^2, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

La composición $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2}.$$

Dominio: El dominio de $g \circ f$ es:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

Resultado:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Por lo tanto, la composición es:

$$(g \circ f)(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Transformaciones de Funciones

Las transformaciones de funciones permiten modificar la gráfica de una función de diversas maneras. Estas incluyen traslaciones, dilataciones y contracciones. Sean $f(x)$ una función y $c > 0$ una constante:

1. **Traslaciones:**
   - **Traslación vertical:** $f(x) + c$
     - Desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia arriba si $c > 0$, o hacia abajo si $c < 0$.
   - **Traslación horizontal:** $f(x + c)$
     - Desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia la izquierda si $c > 0$, o hacia la derecha si $c < 0$.

2. **Dilataciones y Contracciones:**
   - **En el eje y:** $c \cdot f(x)$
     - Si $c > 1$, la gráfica se dilata (se estira) verticalmente.
     - Si $0 < c < 1$, la gráfica se contrae (se comprime) verticalmente.
   - **En el eje x:** $f(c \cdot x)$
     - Si $c > 1$, la gráfica se contrae horizontalmente.
     - Si $0 < c < 1$, la gráfica se dilata horizontalmente.

Ejemplo: Para $f(x) = x^2$:

- $f(x) + 3$: Traslación hacia arriba 3 unidades.
- $f(x - 2)$: Traslación hacia la derecha 2 unidades.
- $2f(x) = x^2$: Contracción vertical por un factor de 2.
- $f(2x) = (2x)^2$: Contracción horizontal por un factor de 2.

Estas transformaciones permiten ajustar la forma y la posición de la gráfica para representar diferentes situaciones.