Ejercicios Primer Orden: Métodos y Aplicaciones

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

Universidad del Tolima

1. Resuelva la EDO (Variable Separable)

   a) $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)^2.$
   b) $dy - (y-1)^2\,dx = 0.$
   c) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0.$
   d) $e^{xy}\,\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}.$
   e) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2.$
   f) $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2+1), \qquad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$
   g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, \qquad y(2) = 2.$
   h) $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \qquad y(-1) = -1.$
   i) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1, \qquad y(0) = \dfrac{5}{2}.$
   j) $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0, \qquad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2. Resuelva la EDO, (Lineal)

   a) $x\,y' + (1+x)\,y = e^{-x}\sin(2x).$
   b) $y\,dx - 4\big(x + y^6\big)\,dy = 0.$
   c) $y\,dx = \big(ye^y - 2x\big)\,dy.$
   d) $\cos x\,\dfrac{dy}{dx} + (\sin x)\,y = 1.$
   e) $\cos^2 x\,\sin x\,\dfrac{dy}{dx} + (\cos^3 x)\,y = 1.$
   f) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + (x+2)\,y = 2x\,e^{-x}.$
   g) $(x+2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy.$
   h) $\dfrac{dr}{d\theta} + r\,\sec\theta = \cos\theta.$

i) $\dfrac{dP}{dt} + 2t\,P = P + 4t - 2.$

j) $\dfrac{dy}{dx} + (3x+1)\,y = e^{-3x}.$

k) $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2.$

3. Exactas

a) **Resolver el problema de valor inicial respectivo:**

1) $(4x^8y^2 - 6x^2y - 2x - 3)\,dx + (2x^4y - 2x^8)\,dy = 0, \qquad y(1) = 3.$
2) $\big(-4y\cos x + 4\cos x\sin x + \sec^2 x\big)\,dx + \big(4y - 4\sin x\big)\,dy = 0, \qquad y\big(\tfrac{\pi}{4}\big) = 0.$
3) $(y^3 - x)e^x\,dx + 3y^2(e^x + y)\,dy = 0, \qquad y(0) = 0.$
4) $(\sin x - y\sin x)\,dx + (\cos x + y)\,dy = 0, \qquad y(0) = 1.$

b) **Problemas:**

1) Encontrar condiciones para las constantes A, B, C, D tales que la ecuación

$$(Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy = 0$$

sea exacta.

2) Demostrar que la ecuación $y' + y = 0$ es exacta si la multiplicamos por e^x y hallar la solución general.

c) **Ecuaciones diferenciales con factor integrante:**

1) *Encontrar el factor integrante y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:*
   a' $2xy^2\,dx + 3x^2y\,dy = 0.$
   b' $(x - y)\,dx + x\,dy = 0.$
2) *Ecuaciones diferenciales de primer orden:*
   a' $(2y^3 + 6xy^2)\,dx + (3xy^2 + 4x^2y)\,dy = 0.$
   b' $(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$
   c' $(x^2y + 4xy + 2y)\,dx + (x^2 + x)\,dy = 0.$
   d' $\big(y\ln|y| + ye^x\big)\,dx + \big(x + y\cos y\big)\,dy = 0.$

d) **Factor integrante de la forma $\mu(xy)$ y un caso general:**

1) *Encontrar el factor integrante $\mu(xy)$ y resolver:*
   a' $y\,dx + (x - 3x^2y^2)\,dy = 0.$
   b' $y\,dx + (x - 3x^3y^2)\,dy = 0.$
   c' $y(x^2y^2 + xy)\,dx + x(x^2y^2 - 1)\,dy = 0.$
2) *Suponga que a, b, c, d son constantes tales que $cb - ad \neq 0$ y sean p, q, r, s números reales arbitrarios. Demostrar que*

$$y\big(ax^py^q + bx^ry^s\big)\,dx + x\big(cx^py^q + dx^ry^s\big)\,dy = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$, donde α y β son constantes adecuadas.

4. Homogeneas

a) **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:**

1) $y' = \dfrac{y+x}{x}$.
2) $y' = \dfrac{x}{2y-x}$.
3) $y' = \dfrac{y}{x+y}$.
4) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

b) **Hallar la solución del problema de valor inicial dado:**

1) $(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy, \qquad y(-1)=0.$
2) $(xe^{y/x}+y)\,dx = x\,dy, \qquad y(1)=0.$
3) $(xy-y^2)\,dx - x^2\,dy = 0, \qquad y(1)=1.$

c) **Homogéneas y sustitución:**

1) Demostrar que si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas de orden n, la sustitución $u = y/x$ transforma la ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

en una ecuación de variables separables.

5. coeficientes lineales

a) **Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales:**

1) $(x+2y-4)\,dx - (2x-4y)\,dy = 0.$
2) $(3x+2y+1)\,dx - (3x+2y-1)\,dy = 0.$
3) $(x+y-1)\,dx + (2x+2y-3)\,dy = 0.$
4) $(x+y)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0.$
5) $(x+2y)\,dx + (3x+6y+3)\,dy = 0.$

6. Bernoulli

a) **Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de Bernoulli:**

1) $x\,y' + y = y^2 \ln|x|.$
2) $y' + y = x\,y^3.$
3) $(1-x^3)\,\dfrac{dy}{dx} - 2(1+x)\,y = y^{5/2}.$

7. $y' = ky$

a) Se sabe que la población de una comunidad crece con una razón proporcional al número de personas presentes en el tiempo t. Si la población inicial P_0 se duplicó en 5 años, ¿en cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

b) Suponga que se sabe que la población de la comunidad del problema 1 es de 10 000 después de tres años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en $t = 10$? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 10$?

c) La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

d) La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2 000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

e) El isótopo radiactivo del plomo Pb-209 decae con una razón proporcional a la cantidad presente al tiempo t y tiene una vida media de 3,3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90 %?

f) Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3 %. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 24 horas.

g) Calcule la vida media de la sustancia radiactiva del problema 6.

h) 1) El problema con valores iniciales $\frac{dA}{dt} = kA$, $A(0) = A_0$, es el modelo de decaimiento de una sustancia radiactiva. Demuestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.

2) Demuestre que la solución del problema con valores iniciales del inciso (a) se puede escribir como $A(t) = A_0\, 2^{-t/T}$.

3) Si una sustancia radiactiva tiene vida media T dada en el inciso (a), ¿cuánto tiempo le tomará a una cantidad inicial A_0 de sustancia decaer a $\frac{1}{4}A_0$?

8. Ley de enfriamento de Newton

a) Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70°F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10°F. Después de medio minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15°F?

b) Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5°F. Después de 1 minuto, el termómetro indica 55°F y después de 5 minutos indica 30°F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?

c) Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2°C en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98°C?

d) Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a 0°C y a 100°C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100°C, se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90°C. Después de 2 minutos se saca la barra del tanque A y de inmediato se sumerge en el tanque B. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva a 100°C. ¿Cuánto tiempo total se llevó el proceso, y cuánto tomará a la barra alcanzar 99,9°C?

9. Mezclas

a) Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Salmuera que tiene 1 g de sal por litro entra al tanque con una razón de 4 L/min; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $A(t)$ (en gramos) de sal que hay en el tanque al tiempo t.

a) Suponga ahora que al tanque entra agua pura.

b) Un gran tanque de 500 galones está lleno de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Determine la cantidad $A(t)$ (en libras) de sal que hay en el tanque al tiempo t.

a) ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque al tiempo t? ¿Y al tiempo $t = 5$ min? ¿Cuál es la concentración en el tanque después de un largo tiempo, es decir, conforme $t \to \infty$? ¿Para qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de ese valor límite?

suponga que la solución sale con una razón de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

c) Determine la cantidad de sal en el tanque al tiempo t en el ejemplo 5 si la concentración de sal que entra es variable y está dada por $c_{\text{entra}}(t) = 2 + \sin(t/4)$ lb/gal. Sin trazar la gráfica, indique en qué curva solución del PVI se parecerá. Después utilice el método de Euler (con paso $h = 10$) para trazar la gráfica de la solución en el intervalo $[0, 300]$. Repita para $h = 1/2$.

d) Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los que se disolvieron 10 libras de sal. La salmuera tiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón y entra al tanque a razón de 6 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 4 gal/min. Determine la cantidad (en libras) de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

10. Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia:

    a) $x^2 + 2xy - y^2 = k$.

    b) $x^2 + (y - k)^2 = k^2$.

    c) $y = -x - 1 + c_1 e^x$.

    d) $y^2 = 4px$.

    e) $xy = kx - 1$.

    f) $y = \dfrac{1}{x + c_1}$.

    g) $y = x^c, \quad \text{para } x > 0,\ c > 0$.

11. modelos

    a) **Modelo poblacional.** En un modelo del cambio de población $P(t)$ de una comunidad, se supone que
    $$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$
    donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente.

    1) Determine $P(t)$ si $\dfrac{dB}{dt} = k_1 P$ y $\dfrac{dD}{dt} = k_2 P$.
    2) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

    b) **Caja deslizándose.** Una caja de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de la caja al tiempo t para cada uno de los casos:

    i) No hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.
    ii) Hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.
    iii) Hay fricción cinética y hay resistencia del aire.

En los casos *ii)* y *iii)* utilice que la fuerza de fricción que se opone al movimiento es μN, donde μ es el coeficiente de fricción cinética y N es la componente normal del peso. En el caso *iii)* suponga además que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea.

c) **Resistencia del aire.** Una ecuación diferencial para la velocidad v de una masa m que cae sujeta a una resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \qquad k > 0.$$

La dirección positiva es hacia abajo.

1) Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.
2) Utilice la solución del inciso (a) para determinar la velocidad límite (terminal) de la masa.
3) Si la distancia s (medida desde el punto donde se suelta la masa sobre el suelo) satisface $ds/dt = v(t)$, encuentre una expresión explícita para $s(t)$ si $s(0) = 0$.

Referencias

[1] Dennis G. Zill y Michael R. Cullen, *Ecuaciones diferenciales: con problemas con valores en la frontera*, 7. ed., trad. Ana Elizabeth García Hernández; rev. téc. Ernesto Fillo López, México, D.F.: Cengage Learning Editores, 2009. ISBN 978-607-481-314-2. Disponible en: [Link de Descarga AQUI].

[2] Luz Marina Moya y Edixon Rojas. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: Técnicas de resolución.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, D.C., Colombia, junio de 2020. Disponible en: `https://repositorio.unal.edu.co/items/3aa24d0b-136b-466d-8c02-1801ace5c185`.

[3] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 7th ed., Brooks/Cole, Cengage Learning, 2009. ISBN 978-0-495-10836-8.