Ejercicios Principio de Inducción Matemática

Prof. Jhon Fredy Tavera Bucurú

Universidad del Tolima

1. Principio de Inducción Matemática

1. Demostrar por inducción matemática que para $n \geq 1$ natural

   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

   c) $(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2(1 + 2 + \cdots + n)^4$.

   d) $sen\, x + sen\, 2x + ... + sen\,(nx) = \dfrac{sen(\frac{(n+1)x}{2})sen(\frac{nx}{2})}{sen(\frac{x}{2})}$.

   e) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \;=\; \dfrac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$.

   f) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \;=\; \dfrac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$.

   g) Si $r \neq 1$, entonces

   $$1 + r + r^2 + \cdots + r^n \;=\; \frac{1 - r^{\,n+1}}{1 - r}.$$

   h)

   $$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \;<\; \frac{n^4}{4} \;<\; 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

   i) $2^{\,2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible por 54.

2. Para representar la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de n números reales utilizamos el símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$, que definimos inductivamente de la siguiente forma:

   $$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \quad (\text{para } n \geq 1).$$

   a) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} b_i$.

   b) $\sum_{i=1}^{n}(c\, a_i) \;=\; c\sum_{i=1}^{n} a_i$.

   c) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \;=\; a_n - a_0$ (Propiedad telescópica).

   d) Demostrar que

   $$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right).$$

e) Demostrar por inducción:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i) \;=\; \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right).$$

f) Demostrar por inducción:

$$\prod_{i=1}^{n}(c\, a_i) \;=\; c^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

g)

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right) \;=\; \frac{a_n}{a_0} \quad \text{si } a_i \neq 0 \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n.$$

3. Definimos los números F_n de Fermat mediante $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, \ldots$. Pruebe que para todo $n \geq 1$,

$$F_0 F_1 \cdots F_{n-1} + 2 \;=\; F_n.$$

4. (New!)

a) Demuestre que $n! > n^2$ para todo entero $n \geq 4$, mientras que $n! > n^3$ para todo entero $n \geq 6$.

b) Use inducción matemática para derivar la siguiente fórmula para todo $n \geq 1$:

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1.$$

c) 1) Verifique que para todo $n \geq 1$,

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

2) Demuestre que

$$2^n\,(n!)^2 \leq (2n)! \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

d) Establezca la desigualdad de Bernoulli: si $1 + a > 0$, entonces

$$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

e) Para todo $n \geq 1$, pruebe lo siguiente por inducción matemática:

1)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

6. Sea F_n el n-ésimo termino de la secuencia de Fibonacci. Demostrar que para todo natural $n \leq 1$ tenemos.

a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

d) $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = F_{n+1}$. Donde en la suma interpretamos $\binom{m}{k} = 0$ si $k > m$.

7. Demostrar que

   a) $n^3 - n$ es multiplo de 6 para todo natural n.

   b) $5^n - 1$ es multiplo de 24 para todo número natural n par.

   c) $2^n + 1$ es múltiplo de 3 para todo número natural n impar.

8. Definimos la secuencia $\{a_n\}$ por $a_1 = 2$ y para $n \geq 2$ el término a_n es el producto de los anteriores mas uno. Demuestre que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

9. Demuestre que $7^{2n} - 48n - 1$ es divisible por 48^2 para todo valor n.

10. Demuestre que para todo natural $n \geq 4$.

    a) $2^n < n!$.

    b) $2n^3 < 3n^2 + 3n + 1$.

11. Para $n \geq 1$, demuestre cada una de las identidades siguientes:

    (a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

    Sugerencia: Tome $a = b = 1$ en el teorema binomial.

    (b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

    (c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1}$.

    Sugerencia: Tras expandir $n(1+b)^{n-1}$ con el teorema binomial, ponga $b = 1$; note además que $n\binom{n-1}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$.

    (d) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$.

    (e)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}.$$

    Sugerencia: Use los incisos (a) y (b).

    (f) $\binom{n}{0}\frac{1}{1} - \binom{n}{1}\frac{1}{2} + \binom{n}{2}\frac{1}{3} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

    Sugerencia: El lado izquierdo es

$$\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} - \cdots + (-1)^n\binom{n+1}{n+1}\right].$$

12. Dado un entero positivo n, definimos $T(n,1) = n$ y, para todo $k \geq 1$, $T(n,k+1) = n^{T(n,k)}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq 1$, $T(2010,k) < T(2,k+c)$. Determine el menor entero positivo c con esa propiedad.

13. Demuestre que para todo n y k enteros positivos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

14. Encontrar con demostración una expresión para el multinomio

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n.$$

En términos de los coeficientes multinomiales

$$\binom{n}{i_1,\ldots,i_k}=\frac{n!}{i_1!\cdots i_k!}$$

donde $i_1+\cdots i_k=n$.

Referencias

[1] Luis R. Jiménez B., Jorge E. Gordillo A., y Gustavo N. Rubiano O. *Teoría de números [para principiantes]*. 2. ed. Bogotá, D. C.: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2004. ISBN 958-701-372-7. Disponible en línea: PDF. [pp. 21–22].

[2] Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau C. Saldanha, y Eduardo Tengan. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA. Disponible en línea: PDF. [pp. 8–9].

[3] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. 7. ed. New York: McGraw–Hill, 2011. ISBN 978-0-07-338314-9. Disponible en línea: PDF en ResearchGate. [p. 11]