1. Sistemas de Ecuaciones Lineales+

Definición: Una ecuación lineal con n incógnitas es una ecuación en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

Donde $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, c$ son números reales y $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$ son incognitas.

NOTE QUE EL GRADO DE TODAS LAS VARIABLES $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ES 1.

Ejercicio: ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es una ecuación lineal?

¿Ecuación Lineal?	Si	No	Comentarios
$2x_1 + 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = -5$	X		CUMPLE CON LA DEFINICIÓN
$3x - 2y + z = -\frac{7}{2}$	X		CUMPLE CON LA DEFINICIÓN
$x^2 + 3x + y = 5$		X	EL GRADO DE x^2 ES 2
$x_1x_2 + 3x_3 = 5$		X	HAY UN TÉRMINO $x_1 \cdot x_2$
$\frac{1}{x} + y = 2$		X	EL GRADO DE x ES -1 PORQUE $\frac{1}{x} = -1$
$\sqrt{x} + 5z = -1$		X	EL GRADO DE x ES $1/2$ PORQUE $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Definición: Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones donde cada una de las ecuaciones es lineal.

Ejemplo: El siguiente es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x + 4y = 7 & (2) \end{cases}$

Observe que si hacemos $x = 3$ y $y = 1$ y sustituimos ambos valores en el sistema anterior, vemos que ambos valores satisfacen cada ecuación.

SUSTITUYENDO EN (1)	SUSTITUYENDO EN (2)
$2(3) - (1) = 5$	$(3) + 4(1) = 7$
$6 - 1 = 5$	$3 + 4 = 7$
$5 = 5$ ✓	$7 = 7$ ✓

Cuando una asignación como la anterior hace verdadera cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales, entonces esta asignación es llamada **una solución del sistema lineal.**

Algunos métodos para resolver o encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales son:

1. Método de Sustitución
2. Método de Eliminación
3. Método Gráfico

Ejercicio: Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} x - y = 4 & \to \text{ECUACIÓN } 1 \\ 2x + y = 2 & \to \text{ECUACIÓN } 2 \end{cases}$ por cada uno de los siguientes métodos.

Método de Sustitución

Pasos LA IDEA ES DESPEJAR UNA VARIABLE DE UNA ECUACIÓN Y SUSTITUIR EN LA OTRA.

Resolver para una variable	Sustituir EN LA OTRA ECUACIÓN	Sustituir hacia atrás
DESPEJANDO PARA x EN 1 $x - y = 4 \Rightarrow x = 4 + y$	SUSTITUYENDO $x = 4 + y$ EN 2 $2x + y = 2$ $2(4+y) + y = 2$ $8 + 2y + y = 2$ $8 + 3y = 2$ $3y = 2 - 8$ $y = \frac{-6}{3}$ $\boxed{y = -2}$	SUSTITUYENDO $y = -2$ EN 1 $x - y = 4$ $x - (-2) = 4$ $x + 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $\boxed{x = 2}$

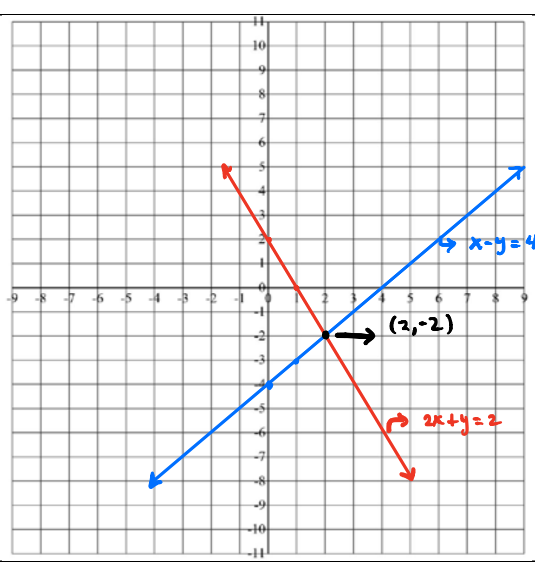
Método de Eliminación

Pasos LA IDEA ES AJUSTAR LOS COEFICIENTES DE UNA VARIABLE DE TAL FORMA QUE AL SOMAR LAS NUEVAS ECUACIONES ESTA VARIABLE SE ELIMINA.

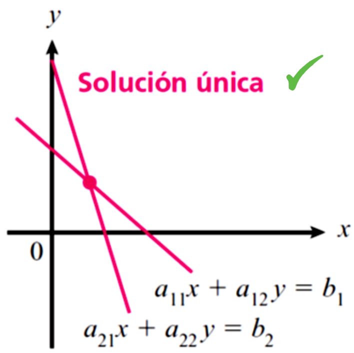
Ajustar los coeficientes	Sumar las ecuaciones	Sustituir hacia atrás
MULTIPLICAR 1 POR -2 $\begin{cases} (x - y = 4) \times (-2) \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + 2y = -8 & 3 \\ 2x + y = 2 & 2 \end{cases}$	SUMANDO 3 Y 2 $\begin{array}{r} -2x + 2y = -8 \\ + \quad 2x + y = 2 \\ \hline 0 + 3y = -6 \end{array}$ $y = \frac{-6}{3}$ $\boxed{y = -2}$	SUSTITUYENDO $y = -2$ EN 1 $x - y = 4$ $x - (-2) = 4$ $x + 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $\boxed{x = 2}$

Método de Gráfico

Pasos

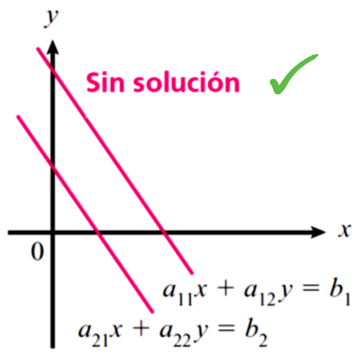
Escribir cada ecuación en la forma: $y = mx + b$	Graficar cada ecuación	Encontrar los puntos de intersección
ECUACIÓN 1 $x - y = 4$ $\Rightarrow y = x - 4$ ECUACIÓN 2 $2x + y = 2$ $\Rightarrow y = -2x + 2$	Ec. 1 $\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{array}$ Ec. 2 $\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{array}$ 	LA INTERSECCIÓN DE AMBAS RECTAS ES $(2,-2)$ LUEGO $\boxed{x = 2 \quad y = -2}$

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera.



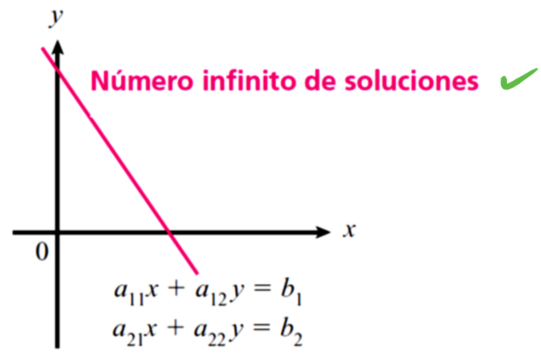
a) Rectas no paralelas; un punto de intersección

Sistema Consistente independiente



b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección

Sistema Inconsistente



c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

Sistema Consistente Dependiente

Ejercicio 1: Resuelva el siguiente sistema lineal $\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 4x - 8y = 16 \end{cases}$ ECUACIÓN ① ECUACIÓN ②

$(3x - 6y = 12) \times (-4) \Rightarrow -12x + 24y = -48$ ③

$(4x - 8y = 16) \times (3) \Rightarrow 12x - 24y = 48$ ④

SUMANDO ③ y ④

$$\begin{array}{r} -12x + 24y = -48 \\ +\quad 12x - 24y = 48 \\ \hline 0 + 0 = 0 \end{array}$$

SI ESTO SUCEDE EL SISTEMA TIENE INFINITAS SOLUCIONES $\Leftarrow$ $0 = 0$

Ejercicio 2: Resuelva el siguiente sistema lineal $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ ECUACIÓN ① ECUACIÓN ②

$(x + 3y = 5) \times (-2) \Rightarrow -2x - 6y = -10$ ③

$(2x - y = 3) \times (1) \Rightarrow 2x - y = 3$ ④

SUMANDO ③ y ④

$$\begin{array}{r} -2x - 6y = -10 \\ +\quad 2x - y = 3 \\ \hline 0 - 7y = -7 \end{array} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

SUSTITUYENDO EN ① TENEMOS

$x + 3(1) = 5$

$x + 3 = 5$

$\boxed{x = 2}$

SISTEMA CON ÚNICA SOLUCIÓN

Ejercicio 3: Resuelva el siguiente sistema lineal $\begin{cases} 8x - 2y = 5 \\ -12x + 3y = 7 \end{cases}$ ECUACIÓN ① ECUACIÓN ②

$(8x - 2y = 5) \times (3) \Rightarrow 24x - 6y = 15$ ③

$(-12x + 3y = 7) \times (2) \Rightarrow -24x + 6y = 14$ ④

SUMANDO ③ Y ④

$$\begin{array}{rrcl} & 24x - 6y & = & 15 \\ + & -24x + 6y & = & 14 \\ \hline & 0 + 0 & = & 29 \end{array}$$

SI ESTO SUCEDE EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIONES $\Leftarrow$ $0 = 29$ (FALSO!)

Modelación con sistemas lineales

Problema

La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

EL PROBLEMA IMPLICA ENCONTRAR 2 NÚMEROS $\Rightarrow \begin{cases} x: \text{ NÚMERO MAYOR} \\ y: \text{ NÚMERO MENOR} \end{cases}$

MODELADO

- $\underbrace{\text{SUMA DE DOS NUMEROS}}_{x+y}$, $\underbrace{\text{ES}}_{=}$ $\underbrace{\text{EL DOBLE}}_{2}$ $\underbrace{\text{DE SU DIFERENCIA}}_{(x-y)}$. $\Rightarrow x + y = 2(x - y) \Rightarrow x - 3y = 0$
- $\underbrace{\text{EL NÚMERO MAYOR}}_{x}$, $\underbrace{\text{ES}}_{=}$ $\underbrace{\text{6 MAS QUE}}_{6+}$ $\underbrace{\text{EL DOBLE DEL MENOR}}_{2y}$ $\Rightarrow x = 6 + 2y$

EL SISTEMA RESULTANTE ES $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ SOLUCIONARLO!