

# Solución de sistemas lineales

**PhD. Alejandro Paredes**

*Facultad de Ciencias*

23 de junio de 2020

# Resumen

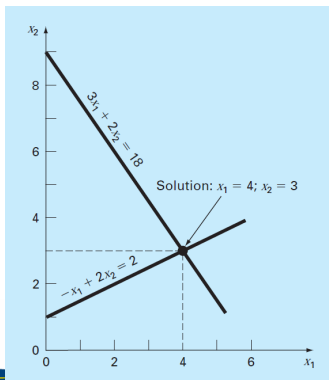
- 1 Sistemas lineales
- 2 Métodos directos e iterativos
- 3 Métodos iterativos
  - Método de Jacobi
  - Método Gauss-Seidel
  - SOR
- 4 Métodos de optimización
  - Método de máximo descenso
  - Método de gradiente conjugado
- 5 Sistemas mal condicionados.

# Sistemas lineales

Consideremos el sistema lineal simple:

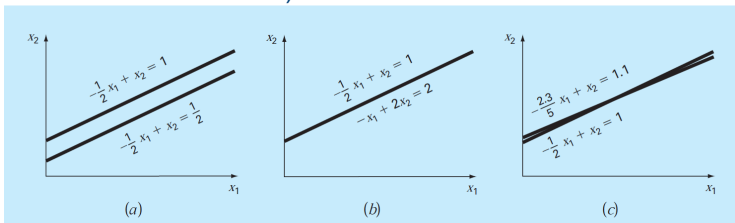
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

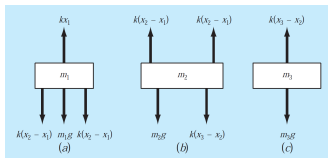
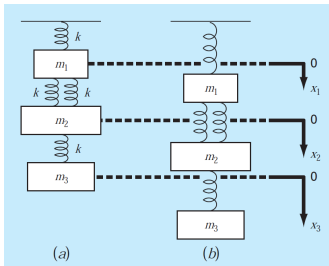


# Sistemas lineales

- a) Sistema sin solución.
- b) Sistema con soluciones infinitas.
- c) Sistema mal condicionado (extremadamente sensibles a errores de redondeo).



# Sistemas lineales en Física



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1g - kx_1$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2g - 2k(x_2 - x_1)$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_3g - k(x_3 - x_2)$$

# Sistemas lineales en Física

Si buscamos la solución estacionaria:

$$\begin{aligned}3kx_1 - 2kx_2 &= m_1g \\ -2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 &= m_2g \\ -kx_2 + kx_3 &= m_3g\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

# Métodos directos e iterativos

Según las características del problema

- ▶ Tipo de matriz (triangular, tridiagonal, llena de ceros, sin ceros, etc)
- ▶ Tamaño del problema (dimensión de la matriz).
- ▶ Condicionamiento de la matriz.

Existen dos métodos (camino) para encontrar la solución

- ▶ Métodos directos(Sustitución directa e inversa, eliminación de Gauss con y sin pivote).
- ▶ Métodos iterativos(Jacobi, Gaus-Seidel,SOR, método del gradiente).

Nota: En ningún caso se calcula  $A^{-1}$

# Métodos iterativos $\mathcal{O}(n^2)$

- ▶ Adaptados para sistemas de gran dimensión.
- ▶ Calcula soluciones aproximadas.

Sistema lineal a resolver:  
Solución :  $[-1 \quad 3 \quad 2]$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Método de Jacobi

Si no hay ceros en la diagonal principal, entonces:

$$\begin{aligned}x &= (8 - 2y - 3z)/4 \\y &= (-14 - 3x - 2z)/(-5) \\z &= (27 + 2x - 3y)/8\end{aligned}$$

Los nuevos valores de  $x, y, z$  se obtienen a partir de los antiguos

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= (8 - 2y^k - 3z^k)/4 \\y^{k+1} &= (-14 - 3x^k - 2z^k)/(-5) \\z^{k+1} &= (27 + 2x^k - 3y^k)/8\end{aligned}$$

con  $(x^0, y^0, z^0) = (0, 0, 0)$

# Método de Jacobi

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^k$$

Forma compacta:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^k]$$

Formula de recurrencia:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

# Método Gauss-Seidel

A partir del método de Jacobi

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= (8 - 2y^k - 3z^k)4 \\y^{k+1} &= (-14 - 3x^k - 2z^k)/(-5) \\z^{k+1} &= (27 + 2x^k - 3y^k)/8\end{aligned}$$

se actualizan los valores que ya se conocen

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= (8 - 2y^k - 3z^k)4 \\y^{k+1} &= (-14 - 3x^{k+1} - 2z^k)/(-5) \\z^{k+1} &= (27 + 2x^{k+1} - 3y^{k+1})/8\end{aligned}$$

es más eficiente.

# Método Gauss-Seidel-Forma compacta

El método de Gauss-Seidel se puede expresar de la siguiente manera:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^k$$

Forma compacta:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} [\mathbf{b} - \mathbf{U}\mathbf{x}^k]$$

Formula de recurrencia:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} \right)$$

# Sucesive Over Relaxation (SOR)

Descomposición de  $\mathbf{A}$  :

$$[\mathbf{D} + \omega \mathbf{L} + (1 - \omega) \mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b}$$

Forma compacta:

$$[\mathbf{D} + \omega \mathbf{L}] \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{b} - [(1 - \omega) \mathbf{L} + \mathbf{U}] \mathbf{x}^k$$

Formula de recurrencia

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - (1 - \omega) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right)$$

# Método de optimización

Consideraremos

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

donde  $b, x \in R^n$  y  $A \in R^{nn}$  es simétrica positiva definida (SPD)

Nota: SPD equivale a decir  $x^T Ax > 0 \quad \forall x$  o los autovalores de  $A$  son positivos.

Sea  $x^*$  el valor que minimiza  $\Phi(x)$

$$\nabla \Phi(x^*) = Ax^* - b = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax^* = b$$

Resolver el sistema lineal se ha convertido en un problema de optimización

# Método de máximo descenso

Planteamos que la solución se busca de manera iterativa:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k; \quad p_k : \text{vector}, \quad \alpha_k : \text{escalar}$$

se escoge una solución inicial  $x_0$  tal que  $\Phi(x_{k+1}) < \Phi(x_k)$ .  
Sabemos que:

- ▶  $\nabla\Phi(x)$  : vector con dirección de máximo incremento de la función  $\Phi(x)$ .
- ▶  $-\nabla\Phi(x)$  : localmente la dirección de máximo descenso  
 $p_k = -\nabla\Phi(x)$ .

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k), \quad \nabla\Phi(x_k) = Ax_k - b = r_k \\ \Phi(x_{k+1}) &= \frac{1}{2} (x_k - \alpha_k r_k)^T A (x_k - \alpha_k r_k) - (x_k - \alpha_k r_k)^T b \end{aligned}$$

# Método de máximo descenso

Para determinar  $\alpha_k$ , minimizamos  $\Phi(x_{k+1})$  con respecto de  $\alpha_k$

$$\Phi(x_{k+1}) = \frac{1}{2} (x_k - \alpha_k r_k)^T A (x_k - \alpha_k r_k) - (x_k - \alpha_k r_k)^T b$$

$$\frac{d}{d\alpha_k} \Phi(x_{k+1}) = r_k^T A x_k + \alpha_k r_k^T A r_k - r_k^T b = 0$$

$$\alpha_k = \frac{\nabla \Phi(x_k)^T \nabla \Phi(x_k)}{\nabla \Phi(x_k)^T A \nabla \Phi(x_k)} = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A r_k} = \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle r_k, A r_k \rangle}$$



# Método de gradiente conjugado

Conjunto de vectores conjugados  $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$  con respecto a la matriz  $A$

$$p_i^T A p_j = 0 \quad i \neq j$$

forman una base de  $R^n$ .

Definimos :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k, \quad \text{donde } r_k = Ax_k - b$$

- ▶ Se debe determinar  $\alpha_k$  y  $\beta_k$ .
- ▶ Se puede demostrar que  $r_k^T r_j = 0 \quad \forall k \neq j$

# Método de gradiente conjugado

Para determinar  $\alpha_k$  se minimiza la función  $\Phi(x_{k+1})$

$$\Phi(x_k + 1) = \frac{1}{2} (x_k + \alpha_k p_k)^T (x_k + \alpha_k p_k) - (x_k + \alpha_k p_k)^T b$$

$$\frac{d}{d\alpha_k} \Phi(x_{k+1}) = p_k^T r_k + \alpha_k p_k^T A p_k = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_k = -\frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k}}$$

usando  $p_k = -r_k + \beta_{k-1} p_{k-1}$ , tenemos

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k} - \beta_{k-1} \frac{p_{k-1}^T r_k}{p_k^T A p_k}$$

degradando sucesivamente  $p_{k-1} \approx r_{k-1}$  y usando la ortogonalidad de los  $r_k$ , tenemos

$$\boxed{\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}}$$

# Método de gradiente conjugado

Para determinar  $\beta_k$ , utilizamos

$$\begin{aligned} p_k^T A(p_{k+1} &= -r_{k+1} + \beta_k p_k) \quad \text{sabiendo que } p_k^T A p_{k+1} = 0 \\ \beta_k &= \frac{p_k^T A r_{k+1}}{p_k^T A p_k} \end{aligned}$$

utilizando las definiciones de  $p_k$  y usando la ortogonalidad de los  $r_k$  se puede mostrar que

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

# Método de gradiente conjugado

For  $k = 0, 1, 2, \dots$  until convergence

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k + \alpha_k A p_k$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

$$p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$$

End

# Método de gradiente conjugado

Para  $k = 0$  tenemos

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{p_0^T A p_0}$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$$

$$r_1 = r_0 + \alpha_0 A p_0$$

$$\beta_0 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0}$$

$$p_1 = -r_1 + \beta_0 p_0$$

- Necesitamos  $r_0 = Ax_0 - b$  y  $p_0$ .
- $x_0$  y  $p_0$  son arbitrarios.
- Tomamos  $x_0$  cualquiera (inclusive cero) y  $p_0 = r_0$ .

# Estimación del error

Error en la iteración  $i$ :

$$\delta_i = |\mathbf{X}^i - \mathbf{X}^{i-1}|, \quad i > 1$$

Criterio de convergencia:

Si  $\delta_i < \epsilon \Rightarrow$  detener método

# Sistemas mal condicionados

Si tenemos un sistema lineal

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde  $\mathbf{x}$  es la solución exacta y  $\hat{\mathbf{x}}$  es la solución aproximada. Sería deseable calcular, para alguna norma, el error

- ▶ absoluto :  $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$
- ▶ relativo  $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|/\|\mathbf{x}\|$

Ningún error se puede calcular, mejor es analizar el residuo

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$$

# Sistemas mal condicionados

Estimación del error relativo

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \mathbf{b} - A\hat{x} = A\mathbf{x} - A\hat{x} = A(\mathbf{x} - \hat{x}) \\ \mathbf{x} - \hat{x} &= A^{-1}\hat{r}\end{aligned}$$

para alguna norma  $\|\cdot\|$

$$\|\mathbf{x} - \hat{x}\| = \|A^{-1}\hat{r}\| \leq \|A^{-1}\| \|\hat{r}\| \quad \text{error absoluto acotado}$$

por otro lado tenemos  $\|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|$

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\hat{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

donde  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  es el número de condicionamiento.



# Sistemas mal condicionados

## Observaciones

- ▶  $\kappa(A)$  no depende de la norma utilizada.
- ▶ El error relativo está acotado por el valor de  $\kappa(A)$ .
- ▶  $\kappa(A) \approx 1$  se dice que el sistema está bien condicionado.
- ▶  $\kappa(A) \gg 1$  se dice que el sistema está mal condicionado. La matriz es singular y ningún método encontrará la solución.

# Sistemas mal condicionados

## Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1,2969 & 0,8648 \\ 0,2161 & 0,1441 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} 0,8642 \\ 0,1440 \end{bmatrix}$$
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0,9911 \\ 0,4870 \end{bmatrix} , \quad \hat{r} = \mathbf{b} - A\hat{x} = \begin{bmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$$

considerando la norma infinita  $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  y sabiendo que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} , \text{ entonces } \|\mathbf{x} - \hat{x}\|_{\infty} = 1,513$$

El error absoluto es del mismo orden que la solución  $\mathbf{x}$

# Sistemas mal condicionados

$$A^{-1} = 10^8 \begin{bmatrix} 0,1441 & -0,8648 \\ -0,2161 & 1,2969 \end{bmatrix} ; \quad \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$
$$\|A^{-1}\|_{\infty} = 1,513 \times 10^8 , \quad \kappa_{\infty}(A) = 3,27 \times 10^8$$

tenemos que  $\kappa_{\infty}(A) \gg 1$ , entonces la matriz esta mal condicionada.