Trabajo 2

Actuaria de seguros de contingencia de vida

Docente:

Norman Diego Giraldo Gomez

Integrantes:

Andrea Serrano Santos

Iván Andrés Velasco Arias

Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín

Escuela de Estadística

Mayo 2022

1. Un departamento de estructuración de un Banco diseña una anualidad a $n = 20$ años, financiada mediante tasas de rendimiento aleatorio de un fondo de fiducia. La anualidad es de tipo Geométrico con pagos mes vencido, con valor inicial de $C = 2$ unidades monetarias. Se pacta una tasa de incremento de costo de vida anual, de $i_q = 0{,}02$ efectiva anual. Desarrolle los siguientes puntos.

   a) Calcule valor de la anualidad geométrica cierta, asumiendo una tasa efectiva anual de i = 0.07, con $m = 12$, $q = 1$, ver (5.64), pag. 178. Calcule un vector con los pagos pactados c_k, $k = 1, 2, ..., n \times m$, y reporte su grafica.

   Solución a)

   Para calcular el valor de la anualidad geométrica nos basamos en su fórmula:

$$valor\ anualidad = P \times m \times (G^{(q)}a)_{\overline{n}|}{}^{(m)}$$

   Donde:

   -El problema nos dice que m toma el valor de 12

   -El valor inicial P es de 2

   -Y $(G^{(q)}a)_{\overline{n}|}{}^{(m)}$ se calcula con la fórmula

$$(G^{(q)}a)_{\overline{n}|}{}^{(m)} := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{\frac{-k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor}$$

$$(G^{(1)}a)_{\overline{20}|}{}^{(12)} := \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{240}(1+0{,}07)^{\frac{-k}{12}}(1+0{,}02)^{\lfloor\frac{k}{12}\rfloor} = 12,73103$$

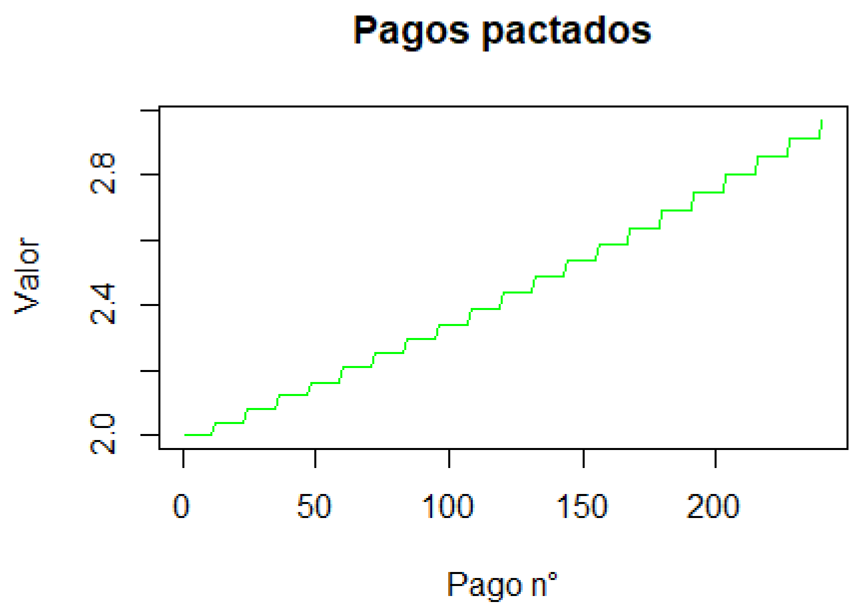
   Entonces hacemos la operacion y obtenemos que

$$valor\ anualidad = 305{,}5448$$

   El vector de los vectores pagados se calcula por la fórmula

$$c_k = C * (1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor} = 2 * (1+0{,}02)^{\lfloor\frac{k}{12}\rfloor}$$

   Entonces la grafica del vector con los pagos pactados es



Código en R

```
Gavqmn = function(i,m,q,n,iq){
  try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
  try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
  v = (1+i)^(1)
  t = seq(1,n*m,1)
  res = (1/m)*sum((1+i)^(-t/m)*(1+iq)^(floor(t*q/m)/q))
  return(res)}

i = 0.07; n = 20; iq=0.02; m=12; q=1; C=2;

A = C*m*Gavqmn(i,m,q,n,iq)

#Pagos pactados
N <- n*m
ck <- c()
for (k in 1:N) {
  pp <- C*(1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
  ck <- cbind(ck, pp)
}
ck <- as.vector(ck)

plot(ck, type = "l", col = "green", main = "Pagos pactados",
```

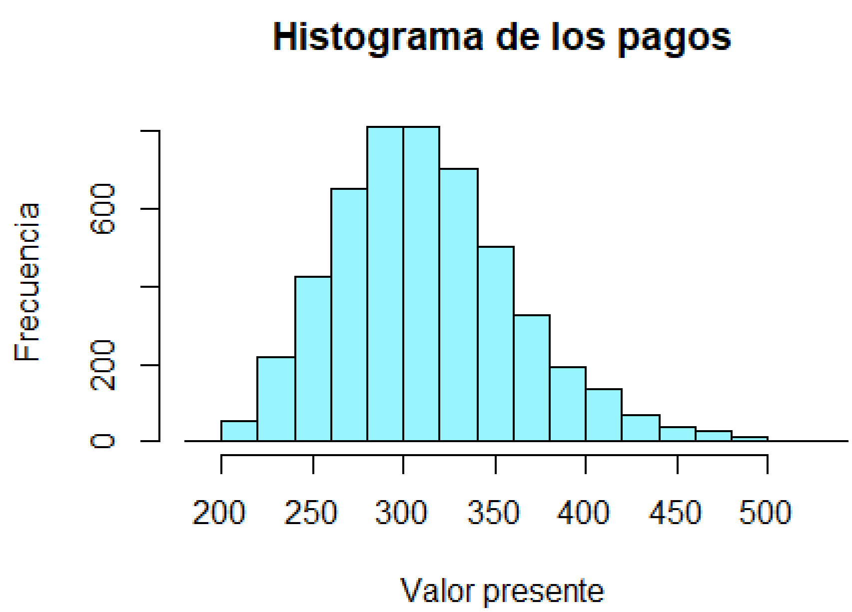
```
xlab = "Pago n°", ylab = "Valor")
```

b) Simule una muestra de tamaño $N = 5000$ del valor presente V de los pagos pactados, descontados con la tasa LogNormal. Reporte el histograma, la media, la desviación estándar de V. Ver la sección §5.4.4. Use tasas de rendimiento iid LogNormales, con parámetros

```
im = (1+i)^(1/m)-1
delta.m = log(1+im) # tasa promedio mensual
sigma.m = 0.02      # volatilidad mensual
```

Solución b)

- La media del valor presente V de los pagos pactados y nos da un valor de 312.5369.
- La desviación estándar de V y nos da 50.43457.
- El histograma:



Código en R

```
#Parametros
im = (1+i)^(1/m)-1
delta.m = log(1+im) # tasa promedio mensual
sigma.m = 0.02      # volatilidad mensual
```

```
N <- 5000
VP <- double(N)

#Fijar una semilla
set.seed(1234)

for (j in 1:N){
  exp.delta = rlnorm(n*m, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
  VP[j] = sum(ck/cumprod(exp.delta))
}

hist(VP, 20, xlab = "Valor presente", ylab = "Frecuencia",
     main = "Histograma de los pagos", col = "#98F5FF",
     xlim = c(180, 530))
mean(VP)
sd(VP)
```

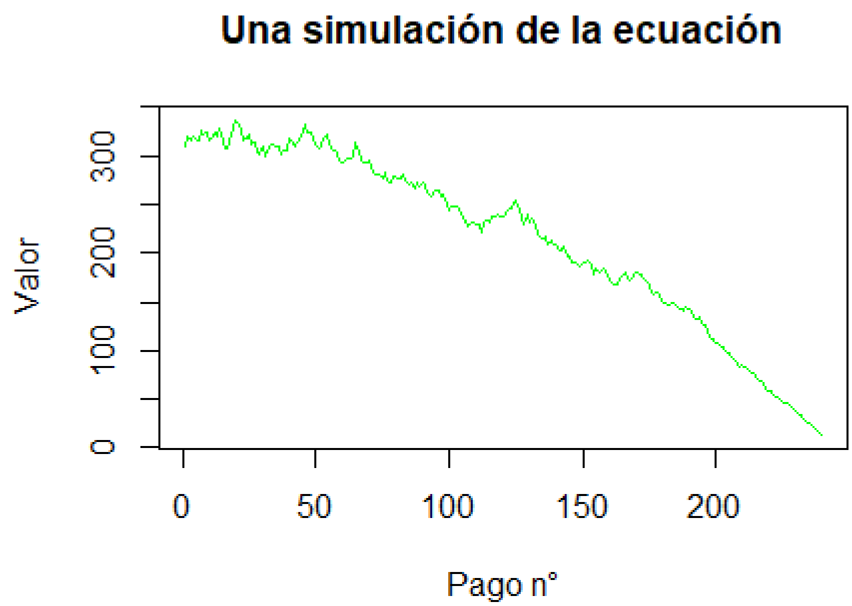
c) En esta anualidad el saldo final $F(nm)$ puede ser un valor positivo. Este evento se denomina generación de excedente. Calcule el valor esperado $E(F(nm)|F(nm) > 0)$ de los casos que terminan en excedentes. Sugerencia: simule muchas veces la ecuación de flujo (5.68), pag. 179, y registre los valores finales $F(nm) > 0$ y luego calcule la media de los mismos.

Solución c)

La ecuación de flujo (5.68) dada por

$$F(k) = \left[(1 + i_m(k))F(k-1) - \frac{1}{m}(1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor \frac{qk}{m} \rfloor}\right]_+, k = 1, 2, ..., nm$$

Simulamos varias veces la ecuación de flujo y registramos los valores finales a los cuales le sacamos una media y su valor es de 191.0288 de 1000 simulaciones



Código en R

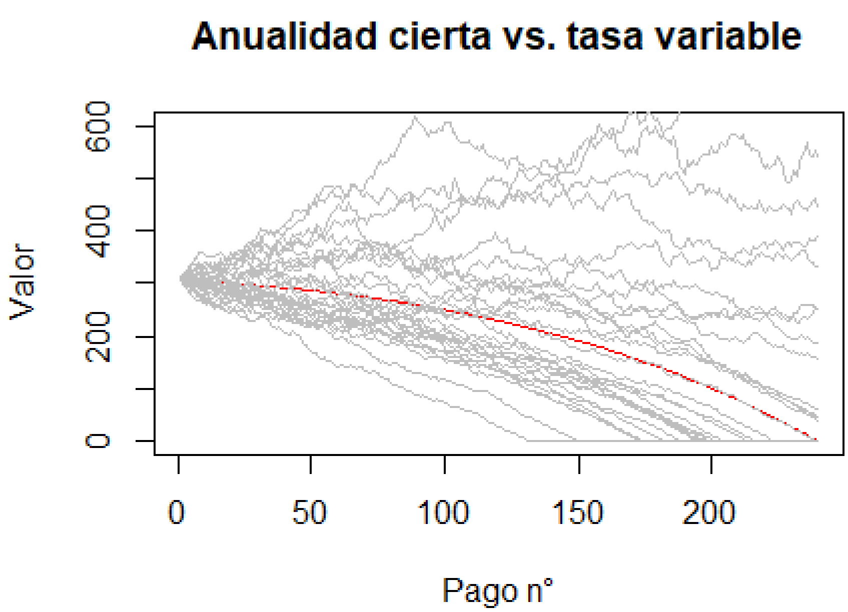
```
N <- n*m
FF <- double(n*m)
exp.delta = rlnorm(1, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
FF[1] <- exp.delta * A - ck[1]

#Fijar una semilla
set.seed(5678)

v <- 0
for (j in 1:1000) {
  for (k in 2:N) {
    exp.delta = rlnorm(1, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
    FF[k] <- exp.delta * FF[k-1]-ck[k]
    FF[k] <- max(0, FF[k])
  }
  #Contar los casos que terminan en excedentes
  if (FF[240]>0){
    v <- cbind(v, FF[240])
  }
}

mean(v)
```

```
plot(FF, type = "l", col = "green",
     main = "Una simulación de la ecuación",
     xlab = "Pago n°", ylab = "Valor")
```

d) Calcule la probabilidad $P(V < C_p)$ con la muestra simulada de V . Por qué es equivalente a la probabilidad de excedentes?. Sugerencia: vea la ecuación (5.15), pag. 154. También, la propiedad (5.49c) pag. 170, dice cómo cambia el precio de una anualidad cuando crece la tasa, aplíquelo a este problema con V el precio de la anualidad.

Solución d)

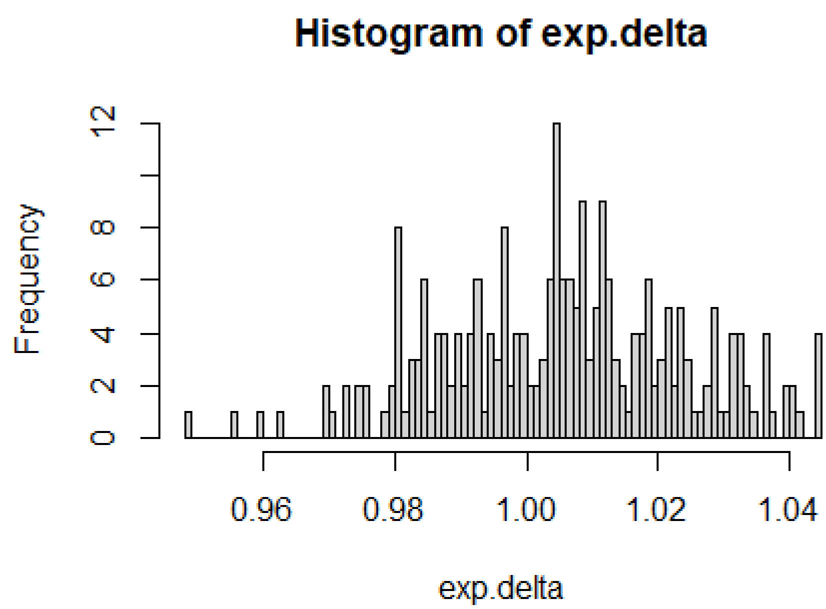
Cómo podemos observar en la gráfica siguiente, se puede detectar la línea roja la anualidad cierta, y en las grises observamos las anualidades con tasas variables siendo estas las variables excedentes, y para poder hallar la probabilidad de $P(V < Cp)$ simplemente miramos cuantas de las líneas grises terminan con un valor mayor a cero, es decir, contamos aquellas que están encima de la línea roja total y así podemos obtener nuestro resultado. Entonces $P(V < Cp)$ es aproximadamente 0.43, es decir, solo 43 % de las simulaciones terminan en ganancia.



La ecuación (5.15) es

$$F(k) = exp\left(\sum_{s=1}^{k} \delta_m(s)\right)\left[F(0) - \sum_{j=1}^{k} c(j)exp\left(-\sum_{s=1} \delta_m(s)\right)\right]$$

Cuando $F(0)$ es mayor que $\sum_{j=1}^{k} c(j)exp\left(-\sum_{s=1} \delta_m(s)\right)$ el flujo de caja es positivo, es decir, terminan en excedentes. También tenemos que cuando la tasa es muy alta el precio de la anualidad decrece. Como evidenciado en una de las simulaciones de la exponencial de delta, se ve que la tasa es muy positiva.



Código en R

```
im <- (1+i)^(1/m)-1

FA <- double(n*m)
FA[1] <- (1+im) * A - ck[1]

#Fijar una semilla
set.seed(1234)

for (k in 2:N) {
  exp.delta = rlnorm(1, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
  FA[k] <- (1+im) * FA[k-1]-ck[k]
```

```
  FA[k] <- max(0, FA[k])
}
#saldos de la anualidad cierta
plot(time(FA), FA, col = "red", type = "l", ylim = c(0, 600),
     main = "Anualidad cierta vs. tasa variable",
     xlab = "Pago n°", ylab = "Valor")

#Fijar una semilla
set.seed(5678)

c <- 0
for (j in 1:30) {
  for (k in 2:N) {
    exp.delta = rlnorm(1, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
    FF[k] <- exp.delta * FF[k-1]-ck[k]
    FF[k] <- max(0, FF[k])
  }
  #Contar
  if (FF[240]>0){
    c <- c + 1
  }
  #Graficar tasas variables
  lines(time(FF), FF, col = "grey")
}
p <- c/30
```