Ejemplo

Suponga que se desea estudiar tiempos de falla de una proceso, se considera una verosimilitud lognormal, en este caso hay dos parámetros desconocidos μ y σ^2. Se tiene el siguiente modelo:

$$p(\mathbf{y}|\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-\mu)^2\right]$$

$$p(\mu,\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

donde $y_i = \log(t_i)$. Indique los pasos del muestreador de Gibbs para muestrear de las distribuciones posteriores de μ y σ^2.

Vamos a identificar las distribuciones de:

$$\mu \mid \sigma^2, \underset{\sim}{y} \quad ✓$$

$$\sigma^2 \mid \mu, \underset{\sim}{y} \quad ✓$$

Conjunta posterior

$$p(\mu,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{y}) \propto p(\underset{\sim}{y} \mid \mu,\sigma^2)\, p(\mu,\sigma^2)$$

$$\propto \underline{(\sigma^2)^{-n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right] \times \underline{\frac{1}{\sigma^2}}$$

$$(1)$$

$$p(\mu, \sigma^2 | \bar{y}) \propto (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu)^2\right]\frac{1}{\sigma^2}$$

$$(2) =$$

Por lo tanto, utilizando (2)

$$p(\mu | \sigma^2, \bar{y}) = \frac{p(\mu, \sigma^2, \bar{y})}{p(\sigma^2, \bar{y})}$$

$$= \frac{p(\mu, \sigma^2 | \bar{y})\, \cancel{p(\bar{y})}}{p(\sigma^2 | \bar{y})\, \cancel{p(\bar{y})}}$$

$$= \frac{p(\mu, \sigma^2 | \bar{y})}{p(\sigma^2 | \bar{y})} \text{ } \} \text{ constante}$$

$$\therefore \; p(\mu | \sigma^2, \bar{y}) \propto p(\mu, \sigma^2 | \bar{y})$$

$$p(\mu | \sigma^2, \bar{y}) \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu)^2\right]$$

$$\mu | \sigma^2, \bar{y} \sim \text{Normal}\left(\bar{y}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Con la ecuación (1) tenemos

$$p(\sigma^2 \mid \mu, \underset{\sim}{y}) \propto (\sigma^2)^{-n/2-1}$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right]$$

$$\sigma^2 \mid \mu, \underset{\sim}{y} \sim \text{Gamma-Inversa}\left(\frac{n}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{2}\right)$$

Algoritmo del muestreador de Gibbs

0. Inicializar $j=0$, $\mu^{(0)}$ y $\sigma^{2(0)}$
1. Generar $\mu^{(1)}$ de una distribución $N\left(\bar{y}, \frac{\sigma^{2(0)}}{n}\right)$
2. Generar $\sigma^{2(1)}$ de una distribución Gamma-Inversa $\left(\frac{n}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu^{(1)})^2}{2}\right)$

3. Incremente j y regrese al paso 1.