Ejemplo

Considere nuevamente el problema de determinar la probabilidad de que una mujer sea portadora del gen de la hemofilia ($\theta = 1$) o no ($\theta = 0$). En este caso hay dos modelos que compiten, M_1 : la mujer está afectada y M_2: la mujer no está afectada. Concluya sobre la selección de estos modelos utilizando el factor de Bayes.

La mujer tiene 2 hijos sanos

$y_i = 0$ si está sano

$y_i = 1$ si está enfermo $\qquad i = 1, 2$

Mamá $\langle X, X$ $\qquad$ Papá $\langle X, Y$

$M_1 : \theta = 1$

$M_2 : \theta = 0$

Mujer $\langle X, X$

hijo

$$B_{12} = \frac{p(\underset{\sim}{y} \mid M_1)}{p(\underset{\sim}{y} \mid M_2)}$$

$$p(y_1 = 0, y_2 = 0 \mid \theta = 1)$$

$$= p(y_1 = 0 \mid \theta = 1)\, p(y_2 = 0 \mid \theta = 1)$$

independencia condicional

$$= 0.5\,(0.5)$$

$$= 0.25$$

$$p(y_1=0, y_2=0 \mid \theta=0)$$

$$= p(y_1=0 \mid \theta=0)\, p(y_2=0 \mid \theta=0)$$

$$= (1)(1) = 1$$

$$B_{12} = \frac{0.25}{1} = 0.25$$ Apoyo el modelo 2

$$B_{21} = \frac{1}{0.25} = 4$$ Evidencia positi-va a favor del modelo 2.

Ejemplo

Se quiere ver si la distribución del genero es equitativa en una población de venados. Con este fin se observaron 28 venados y se encontraron 20 machos y 8 hembras. Sea Y la cantidad de machos y p la proporción de machos, de acuerdo con el objetivo se desea comparar los modelos $M_1 : p = 0.5$ y $M_2 : p \neq 0.5$. Suponga que $p \sim U(0,1)$.

$$Y \sim \text{Binomial}(\underline{28}, p)$$

$$M_1 : p = 0.5$$

$$M_2 : p \neq 0.5$$

$$p \sim U(0,1)$$

$$y = \underline{20}$$

$$B_{12} = \frac{m_1(y)}{m_2(y)}$$

$$m_1(y) = m_1(20) = \binom{28}{20} 0.5^{20} \, 0.5^{8}$$

$$= 0.0116$$

$$m_2(y) = m_2(20) = \int_0^1 \binom{28}{20} p^{20} (1-p)^{8} \times 1 \, dp$$

$$m_2(y) = \binom{28}{20} \frac{\Gamma(21)\Gamma(9)}{\Gamma(30)}$$

$$\times \int_0^1 \frac{\Gamma(30)}{\Gamma(21)\Gamma(9)} p^{20+1-1} (1-p)^{8+1-1} \, dp \xrightarrow{} 1$$

---

si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$

$$p(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

$$\underline{0 < x < 1}$$

$$m_2(y) = \binom{28}{20} \frac{\Gamma(21)\Gamma(9)}{\Gamma(30)}$$

Si n es entero $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$m_2(20) = \frac{28!}{\cancel{20!}\,\cancel{8!}} \times \frac{\cancel{20!}\,\cancel{8!}}{29!} = \frac{1}{29}$$

$$= 0.0345$$

$$B_{12} = \frac{m_1(20)}{m_2(20)} = \frac{0.0116}{0.0345} = 0.336$$

Apoya el modelo 2

$$B_{21} = \frac{m_2(20)}{m_1(20)} = 2.97$$

Apoyo débil al modelo 2.

Vamos a realizar un análisis de sensibilidad con respecto a la a priori

Suponga que se elige como a priori una Beta(a, a).

Si $a = 1$ entonces tenemos una uniforme $(0,1)$

Si a se hace "grande" la a priori se concentra cada vez más alrededor de 0.5

Para esta a priori se tiene

$$m_2(20) = \int_0^1 \binom{28}{20} p^{20} (1-p)^{8} \, * \, \frac{\Gamma(2a)}{(\Gamma(a))^2} \, p^{a-1} (1-p)^{a-1} \, dp$$

$$= \binom{28}{20} \frac{\Gamma(20+a)\,\Gamma(8+a)}{\Gamma(28+2a)} \times \frac{\Gamma(2a)}{(\Gamma(a))^2} \underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(28+2a)}{\Gamma(20+a)\,\Gamma(8+a)} \, p^{20+a-1} (1-p)^{8+a-1} \, dp}_{\to 1}$$

$$= \frac{28!}{20! \cdot 8!} \times \frac{\Gamma(20+a)\,\Gamma(8+a)\,\Gamma(2a)}{\Gamma(28+2a)\,(\Gamma(a))^2}$$

$$= \frac{\Gamma(29)}{\Gamma(21)\,\Gamma(9)} \times \frac{\Gamma(20+a)\,\Gamma(8+a)\,\Gamma(2a)}{\Gamma(28+2a)\,(\Gamma(a))^2}$$

$$B_{21} = \frac{m_2(y)}{m_1(y)} = \frac{\Gamma(29) \times \Gamma(20+a)\,\Gamma(8+a)\,\Gamma(2a)}{\Gamma(21)\,\Gamma(9)\,\Gamma(28+2a)\,(\Gamma(a))^2 \times 0.0116}$$