Capítulo 2.

1. Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $Y_n \sim b(n,p)$.

   a) Pruebe que $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

   b) Pruebe que $1-\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 1-p$.

2. Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $E[Y_n]=\mu$ y $V[Y_n]=\frac{b}{n^p}$, con $p>0$ y $b>0$ constantes que no dependen de n. Pruebe que $Y_n \xrightarrow{P} \mu$.

3. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0,\theta]$. Muestre que $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$.

4. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{P} X$ y $X_n \xrightarrow{P} Y$. Muestre que $X=Y$ casi seguramente. Es decir, el conjunto $A=\{w\in\Omega \mid X(w)\neq Y(w)\}$, tiene probabilidad cero.

5. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0,\theta]$, con $\theta>0$. Sea $Z_n = n(\theta - X_{(n)})$. Muestre que Z_n converge en distribución y halle dicha distribución límite.

6. Sea $X_1, X_2, \cdots$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Ber(p)$ y sea $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Muestre que $\sqrt{n}\,(Y_n - p) \xrightarrow{d} Y$, donde $Y \sim n(0, p(1-p))$.

7. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson con parámetro μ. Sea $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, Muestre que $\frac{Y_n}{n}$ converge en distribución y halle dicha distribución límite.

8. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Gamma con parámetros $\alpha=\mu$ y $\beta=1$. Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Muestre que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{d} Z$, donde $Z\sim n(0,1)$.

9. Dos monedas no cargadas son lanzadas n veces. Sea X el número de veces que no aparecen caras en los n lanzamientos. Encuentre el menor valor de n tal que $P\left(0.24 \le \frac{X}{n} \le 0.26\right) \ge 0.954$ aproximadamente.