10.1 INTRODUCCIÓN

Un experimento factorial $\mathbf{2^k}$ con **k** muy grande, se vuelve muy costoso en tiempo y recursos. Por otra parte, en muchas situaciones prácticas se sabe de antemano que ciertos efectos de interacciones no son significativos, por tanto, sería un desperdicio llevar a cabo un experimento factorial completo. Cuando **k** es muy grande, podemos usar un **experimento factorial fraccionado** donde se lleva a cabo quizá la mitad, un cuarto o incluso un octavo del plan factorial completo.

Definición: *Un experimento factorial fraccionado es aquel en el que se elige adecuadamente una parte o fracción de los tratamientos de un factorial completo, con la intención de estudiar el efecto de los factores utilizando menos corridas experimentales.*

En la siguiente tabla se muestra el número de efectos de potencial interés para diferentes experimentos factoriales $\mathbf{2^k}$, observamos que a partir de un factorial $\mathbf{2^5}$ se genera un exceso importante de información, ya que de los 31 efectos que se generan en éste, sólo 15 son potencialmente importantes (los efectos principales y las interacciones de a dos factores):

Experimento 2^k	# Total de Efectos	# Efectos no ignorables	#Efectos ignorables
$\mathbf{2^2}$	3	3	0
$\mathbf{2^3}$	7	6	1
$\mathbf{2^4}$	15	10	5
$\mathbf{2^5}$	31	15	16
$\mathbf{2^6}$	63	21	42
$\mathbf{2^7}$	127	28	99

Tabla 10.1. Efectos en factoriales 2^k. Tomado de [1]

En esta tabla se observa también que si se fraccionan experimentos factoriales con **k < 5**, en los cuales el número de efectos no ignorables supera al número de los ignorables, se perdería información relevante.

NOTAS: De acuerdo a [1], al correr una fracción de un experimento factorial $\mathbf{2^k}$ completo ocurren los siguientes hechos:

- Se pierde información, porque habrán efectos que no podrán estimarse y se tienen menos grados de libertad para el error.
- Los efectos que se pierden se esperan que sean en lo posible interacciones de alto orden, que de antemano se pueden ignorar con bajo riesgo.
- Los efectos que se pueden estimar tienen al menos un ***alias***.
- Si se elige una fracción en la cual dos efectos potencialmente importantes son ***alias***, se debe contar de antemano con una estrategia para interpretar el efecto estimado.

Definición: *Efectos **alias** son dos o más efectos con nombres distintos pero que comparten el mismo contraste de totales de tratamientos, y por lo tanto estiman el mismo efecto. Por tanto al estimar uno de ellos se estiman los demás efectos que están aliados con éste, de modo que no se pueden separar.*

10.2 CONSTRUCCIÓN DE LA FRACCIÓN ½ O EXPERIMENTO FACTORIAL FRACCIONADO 2^{k-1}

Se aplica a partir de $k \geq 3$, porque fraccionar un experimento 2^2 hace que sólo se corran dos tratamientos con los cuales sería imposible estimar los efectos principales. Para construir las dos fracciones se procede de la siguiente manera:

1. Elegir un **contraste de definición**, según el efecto a sacrificar. Este contraste lo denotaremos por **I**
2. Con base en el contraste seleccionado, dividir los tratamientos entre dos bloques, como se hizo en el caso de un factorial 2^k en dos bloques incompletos.
3. La **fracción principal** será aquella para la cual el contraste de definición tiene signo "+".
4. La **fracción complementaria** será aquella para la cual el contraste de definición tiene signo "-".
5. El efecto asociado al contraste de definición no será posible estimarlo. Este efecto *se confunde o alía* con el total de los datos, o de otro modo, con la media global μ.

Ejemplo. Fracción un medio de un factorial 2^3 o fracción 2^{3-1} : Suponga que deseamos una sola réplica de cada tratamiento y que elegimos como contraste de definición **I=ABC,**

Fracción 1 I=+ABC					**Fracción 2 I=-ABC**				
A	**B**	**C**	**ABC**	**Tratamientos**	**A**	**B**	**C**	**ABC**	**Tratamientos**
+1	-1	-1	+1	a	-1	-1	-1	-1	(1)
-1	+1	-1	+1	b	+1	+1	-1	-1	ab
-1	-1	+1	+1	c	+1	-1	+1	-1	ac
+1	+1	+1	+1	abc	-1	+1	+1	-1	bc

Tabla 10.2. Fracciones ½ de un 2^3.

De las dos fracciones posibles, el experimentador elige una para correr en el experimento los tratamientos que corresponden a tal fracción. Observar que en las corridas que forman ambas fracciones en la tabla anterior, todos los factores están dos veces en su nivel alto y dos veces en su nivel bajo. Al correr algunas de las fracciones que se muestran aquí, no se podrá estimar el efecto ABC, puesto que no tiene contraste dentro de cada fracción por la forma en que se generan las fracciones, por ejemplo en la fracción 1 ABC siempre tiene signo positivo mientras que en la 2 siempre tiene signo negativo. Por tanto el efecto ABC se confunde o alía con el total de los datos.
La representación geométrica del factorial fraccionado 2^{3-1} es como sigue.

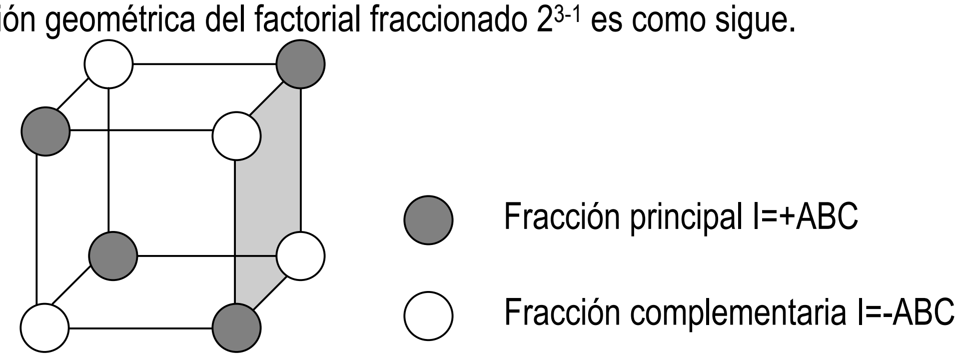


Figura 10.1. Representación de un experimento 2^{3-1}. Tomado de [1]

Note que cada fracción tiende a cubrir toda la región experimental delimitada por el cubo.

10.2.1. Estructura de alias del experimento 2^{3-1} con I=ABC

Cada efecto estimado en este experimento tiene un alias. Este experimento se generó con **I=+ABC**, que en este caso también es la **relación definidora**, pues es la que define totalmente la **estructura de alias**.

Definición: *La* ***relación definidora*** *está dada por los generadores más todos sus posibles productos módulo 2 entre sí. Si hay un generador éste es también la relación definidora.*

Definición: *La* ***estructura de alias*** *define explícitamente quienes son los alias de cada efecto. Esta estructura se deduce del generador de la fracción considerando el signo utilizado.*

Para el factorial fraccionado 2^{3-1} con I=+ABC (fracción principal), el contraste del efecto de A está dado por:

***Contraste* A=a + abc – b – c**

En tanto que para el efecto BC, en la misma fracción principal, el contraste correspondientes es:

***Contraste* BC=a + abc – b – c**

Luego ***Contraste* A= *Contraste* BC**, por tanto los efectos A y BC están aliados, por lo que al estimar el efecto de A también se está estimando a BC. Por tanto en realidad se estima la suma **A+BC** de ambos efectos y no se sabe con certeza cuál efecto predomina más.

NOTA: La estructura alias de un experimento factorial fraccionado se obtiene multiplicando cada efecto por la relación definidora, con el uso de la **multiplicación módulo 2**. **La multiplicación módulo 2** significa que al multiplicar cualquier efecto por la identidad es igual al efecto, y al multiplicar un efecto por sí mismo es igual a la identidad.

Entonces para el factorial fraccionado 2^{3-1} con I=+ABC, los alias de los efectos son:

$$A\times I=A\times ABC=BC$$
$$B\times I=B\times ABC=AC$$
$$C\times I=C\times ABC=AB$$

Luego la estructura de alias correspondiente está dado por:

$$A + BC$$
$$B + AC$$
$$C + AB$$

Si tomamos como relación definidora a **I= –A BC** para el factorial fraccionado 2^{3-1}, la estructura de alias está dada por:

$$A – BC$$
$$B – AC$$
$$C – AB$$

Por tanto al estimar los efectos principales A, B y C realmente se está estimando A – BC, B – AC y C – AB, respectivamente. Note que el signo del generador lo hereda la estructura de alias.

Por lo anterior no resulta adecuado fraccionar un factorial 2^3 puesto que cada efecto estimable tiene al menos un alias, lo cual entorpece su interpretación.

10.2.2. Interpretación de efectos alias

Para interpretar efectos aliados es necesario suponer que sólo uno de ellos es el responsable del efecto observado y que los demás efectos son nulos. Por ejemplo, si se utilizara el experimento 2^{3-1} con relación definidora I=+ABC, los efectos alias se interpretan atribuyendo (por jerarquía) el efecto observado al efecto principal de cada grupo, considerando nulas las interacciones dobles, pero resulta riesgoso suponer a priori que las interacciones dobles no afectan, de nuevo reafirmando el hecho de que no es apropiado fraccionar un factorial 2^3.

10.3 CONSTRUCCIÓN DE LA FRACCIÓN ¼ O EXPERIMENTO FACTORIAL FRACCIONADO 2^{k-2}

El procedimiento para construir este tipo de experimento es idéntico al caso de asignación de los tratamientos de un factorial 2^k a cuatro bloques incompletos, es decir, los signos de los contrastes de definición definen los tratamientos que componen a cada fracción. Por tanto se hace lo siguiente:

1. Se seleccionan dos contrastes de definición, interacciones del más alto orden posible, tal que su interacción generalizada sea también del más alto orden posible. Estos dos contrastes más su interacción generalizada definen tres efectos a sacrificar.
2. Los tratamientos se dividen entre las 4 fracciones así:
    a. Fracción 1: tratamientos donde ambos contrastes de definición son iguales a +1;
    b. Fracción 2: los tratamientos donde el primero de los contrastes es igual -1 y el segundo a +1;
    c. Fracción 3: los tratamientos donde el primero de los contrastes es igual a +1 y el segundo a -1
    d. Fracción 4: los tratamientos donde ambos contrastes de definición son iguales a -1.
3. Se elige una fracción a ser corrida, por ejemplo la fracción que contenga al tratamiento (1), esta fracción es denominada la fracción principal.
4. Se observarán en total $\frac{2^k}{4}$ tratamientos.

NOTA: También puede usarse al método de dos pasos descrito más adelante para la fracción general 2^{k-p} cuando los contrastes de definición satisfacen la condición allí dada.

Ejemplo. Suponga que una fracción ¼ de un experimento factorial 2^6 utilizamos a ACEF y BDEF como contrastes de definición, así la interacción generalizada de estos (ACEF)(BDEF)=ABCD también será sacrificada. Por tanto, En la matriz de signos del 2^6 tenemos:

A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	(1)
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	a
-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	b
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	ab
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	c
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	ac
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	bc
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	abc
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	d
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	ad
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	bd
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	abd
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	cd
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	acd
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	bcd
1	1	1	1	-1	-1	1	1	abcd
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	e
1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	ae
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	be
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	abe
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	ce
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	ace
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	bce
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	abce
-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	de
1	-1	-1	1	1	-1	1	1	ade
-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	bde
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	abde
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	cde
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	acde
-1	1	1	1	1	-1	1	-1	bcde
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	abcde

A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	f
1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	af
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	bf
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	abf
-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	cf
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	acf
-1	1	1	-1	-1	1	1	1	bcf
1	1	1	-1	-1	1	-1	1	abcf
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	df
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	adf
-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	bdf
1	1	-1	1	-1	1	1	-1	abdf
-1	-1	1	1	-1	1	1	1	cdf
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	acdf
-1	1	1	1	-1	1	1	-1	bcdf
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	abcdf
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	ef
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	aef
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	bef
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	abef
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	cef
1	-1	1	-1	1	1	1	1	acef
-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	bcef
1	1	1	-1	1	1	1	-1	abcef
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	def
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	adef
-1	1	-1	1	1	1	1	1	bdef
1	1	-1	1	1	1	-1	1	abdef
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	cdef
1	-1	1	1	1	1	1	-1	acdef
-1	1	1	1	1	1	-1	1	bcdef
1	1	1	1	1	1	1	1	abcdef

De acuerdo a las columnas ACEF y BDEF, las cuatro fracciones posibles son

Fracción principal: ACEF=+1 y BDEF=+1 (donde está el tratamiento (1) en este caso)

A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	(1)
1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	ac
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	bd
1	1	1	1	-1	-1	1	1	abcd
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	abe
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	bce
1	-1	-1	1	1	-1	1	1	ade
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	cde
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	abf
-1	1	1	-1	-1	1	1	1	bcf
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	adf
-1	-1	1	1	-1	1	1	1	cdf
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	ef
1	-1	1	-1	1	1	1	1	acef
-1	1	-1	1	1	1	1	1	bdef
1	1	1	1	1	1	1	1	abcdef

Fracción 2: ACEF=-1 y BDEF=+1 (donde está el tratamiento a en este caso)

A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	a
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	c
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	abd
-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	bcd
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	be
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	abce
-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	de
1	-1	1	1	1	-1	-1	1	acde
-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	bf
1	1	1	-1	-1	1	-1	1	abcf
-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	df
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	acdf
1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	aef
-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	cef
1	1	-1	1	1	1	-1	1	abdef
-1	1	1	1	1	1	-1	1	bcdef

Fracción 3: ACEF=1 y BDEF=-1 (donde está el tratamiento b en este caso)								
A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	b
1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	abc
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	d
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	acd
1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	ae
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	ce
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	abde
-1	1	1	1	1	-1	1	-1	bcde
1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	af
-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	cf
1	1	-1	1	-1	1	1	-1	abdf
-1	1	1	1	-1	1	1	-1	bcdf
-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	bef
1	1	1	-1	1	1	1	-1	abcef
-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	def
1	-1	1	1	1	1	1	-1	acdef

Fracción 4: ACEF=-1 y BDEF=-1 (donde está el tratamiento b en este caso)								
A	B	C	D	E	F	ACEF	BDEF	Yates
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	ab
-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	bc
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	ad
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	cd
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	e
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	ace
-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	bde
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	abcde
-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	f
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	acf
-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	bdf
1	1	1	1	-1	1	-1	-1	abcdf
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	abef
-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	bcef
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	adef
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	cdef

Entonces, si tomamos la fracción principal, de los 63 efectos posibles, se van a observar sólo 15. Al utilizar esta fracción los 16 tratamientos a correr son:

$$\{(1), \boldsymbol{ac}, \boldsymbol{bd}, \boldsymbol{ef}, \boldsymbol{abe}, \boldsymbol{abf}, \boldsymbol{ade}, \boldsymbol{adf}, \boldsymbol{bce}, \boldsymbol{bcf}, \boldsymbol{cde}, \boldsymbol{cdf}, \boldsymbol{acef}, \boldsymbol{abcd}, \boldsymbol{bdef}, \boldsymbol{abcdef}\}.$$

Los alias para los efectos se hallan mediante la multiplicación módulo 2 de la etiqueta de cada efecto por los tres efectos ACEF, BDEF y ABCD, es decir, por la relación generadora I=ACEF=BDEF=ABCD, por ende la estructura de alias para los efectos para este ejemplo es:

A+CEF+ABDEF+BCD	B+ABCEF+DEF+ACD	C+AEF+BCDEF+ABD
D+ACDEF+BEF+ABC	E+ACF+BDF+ABCDE	F+ACE+BDE+ABCDF
AB+BCEF+ADEF+CD	AC+EF+ABCDEF+BD	AD+CDEF+ABEF+BC
AE+CF+ABDF+BCDE	AF+CE+ABDE+BCDF	BE+ABCF+DF+ACDE
BF+ABCE+DE+ACDF	ADF+CDE+ABE+BCF	ABF+BCE+ADE+CDF

Observe que algunas interacciones dobles están aliadas.

Debe tenerse presente cuál es la estructura de alias para un experimento fraccionado antes de recomendar el plan experimental. Es importante la elección apropiada de los contrastes de definición pues de ésta depende la estructura de alias. Si en un caso dado son muy importantes todos los efectos principales y las interacciones dobles, debe buscarse un fraccionamiento que permita que tales efectos no queden aliados en lo posible.

10.4 EXPERIMENTO FACTORIAL FRACCIONADO 2^{k-p}

En general un experimento factorial fraccionado 2^{k-p} es una fracción $1/2^p$ del factorial completo 2^k. Para construir esta fracción se eligen $\boldsymbol{p}$ generadores iniciales, todos siendo interacciones del más alto orden posible, de manera que todos sus productos módulo 2 también sean interacciones de alto orden. Una vez elegidos estos $\boldsymbol{p}$ generadores, el diseño se puede construir siguiendo la idea de dividir los tratamientos en 2^p grupos de acuerdo a los signos de los contrastes de definición. Sin embargo, en muchos casos, se puede seguir la siguiente regla de dos pasos:

1. Se escribe el diseño 2^{k-p}, como si fuera el factorial completo para $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}$ factores, usando los primeros $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}$ factores.
2. Para los últimos $\boldsymbol{p}$ factores la columna de signos en la matriz de signos se obtiene multiplicando las columnas que indican los efectos resultantes al realizar el producto módulo 2 de los $\boldsymbol{p}$ generadores por los respectivos factores que van a sustituir en la matriz de signos. Esta regla puede aplicarse desde que el efecto resultante dependa únicamente de uno o más de los k-p primeros factores.

Por ejemplo, para un diseño 2^{6-2} usando como contrastes de definición a I=ABCE y I=BCDF, tenemos que usando el método de dividir los tratamientos según los signos para estos dos contrastes, la fracción principal que contiene a (1) satisface que ABCE=+1 y BCDF=+1, y queda conformada según la Tabla 10.3

A	B	C	D	E	F	ABCE	BCDF	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	(1)
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	bc
1	1	-1	1	-1	-1	1	1	abd
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	acd
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	ae
1	1	1	-1	1	-1	1	1	abce
-1	1	-1	1	1	-1	1	1	bde
-1	-1	1	1	1	-1	1	1	cde
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	abf
1	-1	1	-1	-1	1	1	1	acf
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	df
-1	1	1	1	-1	1	1	1	bcdf
-1	1	-1	-1	1	1	1	1	bef
-1	-1	1	-1	1	1	1	1	cef
1	-1	-1	1	1	1	1	1	adef
1	1	1	1	1	1	1	1	abcdef

Tabla 10.3: Fracción 1/4 de un factorial 2^6 con contrastes de definición ABCE=+1 y BCDF=+1

A	B	C	D	E=ABC	F=BCD	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	(1)
1	-1	-1	-1	1	-1	ae
-1	1	-1	-1	1	1	bef
1	1	-1	-1	-1	1	abf
-1	-1	1	-1	1	1	cef
1	-1	1	-1	-1	1	acf
-1	1	1	-1	-1	-1	bc
1	1	1	-1	1	-1	abce
-1	-1	-1	1	-1	1	df
1	-1	-1	1	1	1	adef
-1	1	-1	1	1	-1	bde
1	1	-1	1	-1	-1	abd
-1	-1	1	1	1	-1	cde
1	-1	1	1	-1	-1	acd
-1	1	1	1	-1	1	bcdf
1	1	1	1	1	1	abcdef

Tabla 10.4: Fracción 1/4 de un factorial 2^6 con contrastes de definición ABCE y BCDF, usando la regla de dos pasos

Observe que haciendo el producto módulo 2 entre E y I=ABCE obtenemos E=ABC y el producto módulo 2 entre F y I=BCDF obtenemos F=BCD, en ambos casos observe que en el efecto resultante no aparecen ni E ni F, entonces podemos aplicar la regla de dos pasos y obtenemos la fracción en la Tabla 10.4. Compare los tratamientos que se obtienen en tablas 10.3 y 10.4, son los mismos aunque aparecen en distinto orden (**OJO:**

si usamos los contrastes de definición ACEF y BDEF, no podemos aplicar en tal caso esta regla de dos pasos pues tendríamos E=ACF y F=BDE y cómo podemos ver, ACF y BDE involucran a las etiquetas de los factores E y F!). Suponga ahora que se quieren estudiar k=7 factores y sólo se tienen recursos para correr una octava parte del diseño 2^7 completo, por lo que se decide utilizar un diseño factorial fraccionado 2^{7-3}. Se requieren tres contrastes de definición y se pueden usar los siguientes tres generadores ±ABCE, ±BCDF y ±ACDG. Vamos a construir la fracción principal usando la regla de dos pasos con los tres generadores positivos:

A	B	C	D	E=ABC	F=BCD	G=ACD	Código Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	(1)
1	-1	-1	-1	1	-1	1	aeg
-1	1	-1	-1	1	1	-1	bef
1	1	-1	-1	-1	1	1	abfg
-1	-1	1	-1	1	1	1	cefg
1	-1	1	-1	-1	1	-1	acf
-1	1	1	-1	-1	-1	1	bcg
1	1	1	-1	1	-1	-1	abce
-1	-1	-1	1	-1	1	1	dfg
1	-1	-1	1	1	1	-1	adef
-1	1	-1	1	1	-1	1	bdeg
1	1	-1	1	-1	-1	-1	abd
-1	-1	1	1	1	-1	-1	cde
1	-1	1	1	-1	-1	1	acdg
-1	1	1	1	-1	1	-1	bcdf
1	1	1	1	1	1	1	abcdefg

Tabla 10.5: Fracción 1/8 de un factorial 2^7 con contrastes de definición ABCE, BCDF y ACDG, usando la regla de dos pasos

Si se hubiese usado la distribución de los tratamientos con base en los signos de los tres generadores I=ABCE, I=BCDF, I=ACDG, y tomando la fracción principal (la que contiene el tratamiento (1)) se obtiene el diseño en la Tabla 10.6. Luego, comparando tablas 10.5 y 10.6 vemos que se llega a la misma fracción.

NOTA: Tenga en cuenta que la relación definidora tiene tantos términos p más todos los productos módulo 2 se puedan hacer con los p generadores: $2^p - p - 1$, así cada efecto tiene $\sum_{i=1}^{p}\binom{p}{i}$ alias. De la relación definidora se obtiene la estructura de alias y la **resolución de la fracción** resultante.

Lo más complicado es hallar los mejores generadores de la fracción que se desea usar. Existen tablas para los experimentos fraccionados que proporcionan estructuras de alias, también los paquetes estadísticos están provistos de tablas donde se proporcionan generadores adecuados para diferentes valores de $\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{p}$ (en R, en la librería `FrF2` se cuenta con la función del mismo nombre). Por tanto, lo más práctico es recurrir a un software estadístico para generar la fracción deseada y su estructura de alias.

A	B	C	D	E	F	G	ABCE	BCDF	ACDG	Yates
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	(1)
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	abd
1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	abce
-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	cde
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	acf
-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	bcdf
-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	bef
1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	adef
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	bcg
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	acdg
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	aeg
-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	bdeg
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	abfg
-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	dfg
-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	cefg
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	abcdefg

Tabla 10.6: Fracción 1/8 de un factorial 2^7 con contrastes de definición ABCE=+1, BCDF=+1 y ACDG=+1, donde resultó el tratamiento (1)

Veamos por ejemplo cómo se obtiene en R un diseño factorial fraccionado 2^{6-2} con I=ABCE, e I=BCDF

```
library(FrF2)
#Generando fracción 2^6-2 con E=ABC, F=BCD
diseño1=FrF2(nruns=16,nfactors=6,generators=c("ABC","BCD"),randomize=FALSE)
diseño1
    A  B  C  D  E  F
1  -1 -1 -1 -1 -1 -1
2   1 -1 -1 -1  1 -1
3  -1  1 -1 -1  1  1
4   1  1 -1 -1 -1  1
5  -1 -1  1 -1  1  1
6   1 -1  1 -1 -1  1
7  -1  1  1 -1 -1 -1
8   1  1  1 -1  1 -1
9  -1 -1 -1  1 -1  1
10  1 -1 -1  1  1  1
11 -1  1 -1  1  1 -1
12  1  1 -1  1 -1 -1
13 -1 -1  1  1  1 -1
14  1 -1  1  1 -1 -1
15 -1  1  1  1 -1  1
16  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2.generators

design.info(diseño1)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F"

$main
character(0)

$fi2
[1] "AB=CE"    "AC=BE"    "AD=EF"    "AE=BC=DF" "AF=DE"    "BD=CF"    "BF=CD"

#o bien
aliasprint(diseño1,condense=FALSE)
$legend
```

```
[1] A=A B=B C=C D=D E=E F=F

$main
character(0)

$fi2
[1] AB=CE    AC=BE    AD=EF    AE=BC=DF AF=DE    BD=CF    BF=CD
generators(diseño1)
$generators
[1] "E=ABC" "F=BCD"
```

```
library(FrF2)
#Generando fracción 2^(7-3) con E=ABC, F=BCD, G=ACD
diseño2=FrF2(nruns=16,nfactors=7,generators=c("ABC","BCD","ACD"),randomize=FALSE)
diseño2
    A  B  C  D  E  F  G
1  -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
2   1 -1 -1 -1  1 -1  1
3  -1  1 -1 -1  1  1 -1
4   1  1 -1 -1 -1  1  1
5  -1 -1  1 -1  1  1  1
6   1 -1  1 -1 -1  1 -1
7  -1  1  1 -1 -1 -1  1
8   1  1  1 -1  1 -1 -1
9  -1 -1 -1  1 -1  1  1
10  1 -1 -1  1  1  1 -1
11 -1  1 -1  1  1 -1  1
12  1  1 -1  1 -1 -1 -1
13 -1 -1  1  1  1 -1 -1
14  1 -1  1  1 -1 -1  1
15 -1  1  1  1 -1  1 -1
16  1  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2.generators

design.info(diseño2)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F" "G=G"

$main
character(0)

$fi2
[1] "AB=CE=FG" "AC=BE=DG" "AD=CG=EF" "AE=BC=DF" "AF=BG=DE" "AG=BF=CD" "BD=CF=EG"

> #o bien
> aliasprint(diseño2,condense=FALSE)
$legend
[1] A=A B=B C=C D=D E=E F=F G=G

$main
character(0)

$fi2
[1] AB=CE=FG AC=BE=DG AD=CG=EF AE=BC=DF AF=BG=DE AG=BF=CD BD=CF=EG


generators(diseño2)
$generators
[1] "E=ABC" "F=BCD" "G=ACD"
```

10.5 ESTIMACIÓN DE EFECTOS Y SUMAS DE CUADRADOS

Los efectos y sumas de cuadrados en experimentos factoriales fraccionados 2^{k-p} se obtienen a partir de los contrastes de totales en la fracción usada en la experimentación, de manera similar a como se hace con los factoriales completos 2^k. Se obtiene un contraste por cada grupo de efectos alias y se pondera por una constante apropiada para estimar el efecto correspondiente como una diferencia de medias. Así, el efecto de un grupo de efectos alias $\boldsymbol{X}$ se estima como:

$$\textbf{Efecto } \boldsymbol{X} = \frac{(\textbf{contraste } \boldsymbol{X})}{\boldsymbol{n}2^{\boldsymbol{k-p}-1}}$$

en tanto que la suma de cuadrados correspondiente, con 1 grado de libertad se calcula como:

$$\boldsymbol{SS}_X = \frac{(\textbf{contraste } \boldsymbol{X})^2}{\boldsymbol{n}2^{\boldsymbol{k-p}}}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ el número de réplicas de los tratamientos corridos en la fracción.

10.6 EL CONCEPTO DE RESOLUCIÓN

Recordemos que en un experimento factorial fraccionado sólo pueden estimarse las sumas (o restas) de efectos aliados. La interpretación de los efectos aliados que se suman se hace fácilmente si puede suponerse que sólo uno de los sumandos es importante, de modo que el efecto total de la suma de aliados se puede atribuir a este único efecto importante. Por tanto siempre que sea posible se debe elegir diseños fraccionados en los cuales los efectos potencialmente importantes sean alias de efectos que de antemano son irrelevantes.

Bajo el principio de jerarquía en el que los efectos principales son más importantes que las interacciones dobles, y estos a su vez son más importantes que las interacciones triples, etc., se deben usar fracciones que tengan alta **resolución.**

Definición: *Un diseño factorial fraccionado 2^{k-p} es de resolución **R** si los efectos formados por la interacción de **p** factores no son alias de efectos de interacción que tengan menos de **R – p** factores.*

A mayor resolución se observa más claramente lo que sucede con los efectos potencialmente importantes.

Diseños de resolución III. En estos los efectos principales no son alias entre ellos pero algunos son alias de interacciones dobles. Ej. Para un 2^{3-1} con relación definidora I=ABC es de resolución III.

Diseños de resolución IV. Los efectos principales no están aliados entre ellos ni con interacciones dobles, pero algunas interacciones dobles están aliadas entre ellas. Ej. Para un 2^{4-1} con relación definidora I=ABCD, es de resolución IV.

Diseños de resolución V. Los efectos principales y las interacciones dobles sólo están aliados con interacciones triples o de orden superior. Ej. Un 2^{5-1} con relación definidora I=ABCDE es de resolución V.

En general, en los experimentos factoriales fraccionados 2^{k-p} la resolución está dada por el efecto de la relación definidora con el menor número de letras. Así pues, como en los factoriales fraccionados 2^{k-1} la relación definidora es el mismo generador, entonces la resolución es igual al número de letras del generador, por eso en los diseños 2^{3-1}, 2^{4-1} y 2^{5-1} la resolución es respectivamente III, IV, y V.

10.7 FACTORIAL FRACCIONADO SATURADO

Es aquél diseño que estudia los efectos principales de **k** efectos principales usando **k+1** corridas experimentales, por tanto, el número total de grados de libertad del experimento es igual al número de factores que se estudian, esto es, los grados de libertad disponibles se gastan en los efectos principales. Estos diseños son por tanto de resolución III, ya que los efectos principales se confunden con las interacciones dobles. Por ej., un diseño 2_{III}^{7-4}, que corresponde al que se presenta en la siguiente tabla:

A	B	C	D	E	F	G
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Con este diseño sólo se pueden estudiar los efectos principales, suponiendo a priori que las interacciones dobles no son importantes, lo cual conlleva un riesgo si en realidad hay interacciones dobles importantes.

10.8 ASPECTOS ADICIONALES SOBRE FACTORIALES FRACCIONADOS

1. *En general no se deben correr experimentos de resolución III, a menos que se esté dispuesto a aceptar que sólo importan los efectos principales.* En algunos procesos esto es arriesgado, en otros sin embargo, se tienen una exagerada cantidad de factores a estudiar y no queda más remedio que recurrir a una fracción de resolución III, para tener un número razonable de corridas experimentales. Aún si fueran pocos factores, si cada corrida experimental es muy costosa, es necesario recurrir a una fracción de resolución III.
2. *En la práctica se debe buscar la máxima resolución posible con un número razonable de corridas experimentales.* Para $5 < \boldsymbol{k} \leq 15$ existen fracciones de resolución IV que no requieren más de 32 corridas experimentales.
3. Si el proceso es masivo y las corridas del mismo son baratas se puede optar directamente por fracciones de resolución V; en este tipo de procesos es admisible incrementar el número de corridas experimentales hasta 64 o más.
4. *Diseños factoriales con igual resolución no implica que tengan la misma habilidad para estimar efectos potencialmente importantes.* Por ejemplo, para un diseño 2^{7-2} se tiene las siguientes dos posibles relaciones definidoras:
   $\boldsymbol{d}_1 : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{DEFG} = \boldsymbol{ABCDF} = \boldsymbol{ABCEG}$ y $\boldsymbol{d}_2 : \boldsymbol{I} = \boldsymbol{ABCF} = \boldsymbol{ADEG} = \boldsymbol{BCDEFG}$. Con ambas los diseños son de resolución IV, pero el primero tiene tres pares de interacciones dobles que son alias mientras que el segundo tiene seis pares. Luego el primero permite estimar más interacciones dobles limpiamente (que no son alias de otras interacciones dobles).

5. Si un diseño factorial fraccionado resulta ambiguo, es decir, al analizar los datos surgen dudas con la interpretación de los efectos aliados, es necesario correr otra fracción que aclare estas ambigüedades separando de los grupos alias aquellos efectos que son de interés para el estudio. Para ello se combina de manera adecuada la información de ambas fracciones para separar los efectos deseados. Lo típico es que la ambigüedad surja a posteriori después de analizar la primera fracción y observar que a la luz de estos resultados es necesario correr la fracción adicional para tener una visión más clara de lo que sucede. Para elegir la segunda fracción ésta debe ser tal que su estructura alias al combinarse con la estructura alias de la primera fracción aclare las dudas. Así dependiendo del tipo de confusión que se quiera eliminar, va a ser necesario restar o sumar las estructuras alias y luego dividir entre dos. Por ej., para un diseño 2^{3-1} con I=ABC, se confunden A y BC de la forma A+BC; si se desea separarlos, se debe correr otra fracción la cual deberá aliar en la forma A – BC, pues al combinar las dos fracciones (sumando o restando y dividiendo por dos) resulta: $\frac{(A+BC)+(A-BC)}{2}=A$ y $\frac{(A+BC)-(A-BC)}{2}=BC$. De esta forma A y BC son limpiamente estimados.

10.9 EJEMPLO: UN EXPERIMENTO 2^{7-4}

En una empresa se compró un equipo de corte. Después de dos semanas notan que el exceso de vibración en el proceso es un problema muy serio. Un equipo de mejoramiento que incluye a los ingenieros del proceso decide tratar de reducir la vibración aplicando un diseño de experimentos. El quipo identifica siete factores, todos asociados con la herramienta de corte, que pueden tener algo que ver con la cantidad de vibración:

A: tamaño de grano del material
B: longitud del material
C: diámetro del material
D: revoluciones por minuto
E: peso de la precarga
F: estructura del material
G: velocidad de alimentación

Se seleccionan dos niveles para cada factor, en los cuales llevar a cabo el experimento. Como la puesta en marcha del equipo y el tiempo de corrida tienen un alto costo, se decide usar un experimento de ocho corridas. Un miembro del grupo de mejoramiento con experiencia previa en máquinas similares asegura que los efectos de interacción entre los factores se pueden considerar despreciables, lo cual hace factible el uso de una fracción que sólo permite el estudio de los efectos principales. Los factores y sus niveles aparecen a continuación:

Factor	Descripción (unidades)	Niveles (bajo, alto)
A	Tamaño de grano (/pulg.)	80 – 120
B	Longitud (pulg.)	1.0 – 2.0
C	Diámetro (pulg.)	1.0 – 1.5

Factor	Descripción (unidades)	Niveles (bajo, alto)
D	rpm(x1000)	15 – 20
E	Peso de precarga (lbs.)	1.0 – 4.0
F	Estructura material (onzas)	1.0 – 4.0
G	Velocidad alim. (pulg./min.)	2.0 – 4.0

Considerando despreciables todos los efectos de interacción se decide correr un diseño altamente fraccionado y saturado, usando una fracción 2_{III}^{7-4}, la cual es de resolución III, es decir los efectos principales quedan confundidos con interacciones dobles. La matriz de diseño y la vibración observada se dan a continuación:

A	B	C	D	E	F	G	Vibración
-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	77.4
+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	68.3
-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	81.9
+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	66.2
-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	42.1
+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	78.3
-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	39.0
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	68.4

La estructura de alias reducida para la fracción principal que se corrió se muestra a continuación:

A+BD+CE+FG
B+AD+CF+EG
C+AE+BF+DG
D+AB+CG+EF
E+AC+BG+DF
F+AG+BC+DE
G+AF+BE+CD

Lo anterior puede determinarse en R con la siguiente programación:

```
library(rsm);library(pid);library(daewr);library(FrF2)
diseño3=FrF2(nruns=8,nfactors=7,randomize=FALSE)
diseño3
design.info(diseño3)$aliased

#o bien
aliasprint(diseño3,condense=FALSE)
generators(diseño3)
```

y produce lo siguiente:

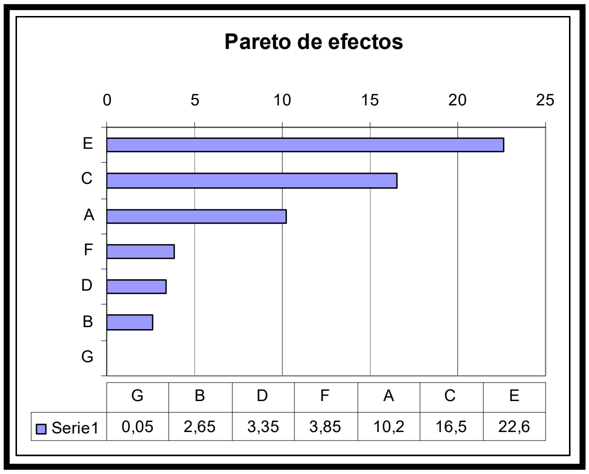
```
> diseño3
   A  B  C  D  E  F  G
1 -1 -1 -1  1  1  1 -1
2  1 -1 -1 -1 -1  1  1
3 -1  1 -1 -1  1 -1  1
4  1  1 -1  1 -1 -1 -1
5 -1 -1  1  1 -1 -1  1
```

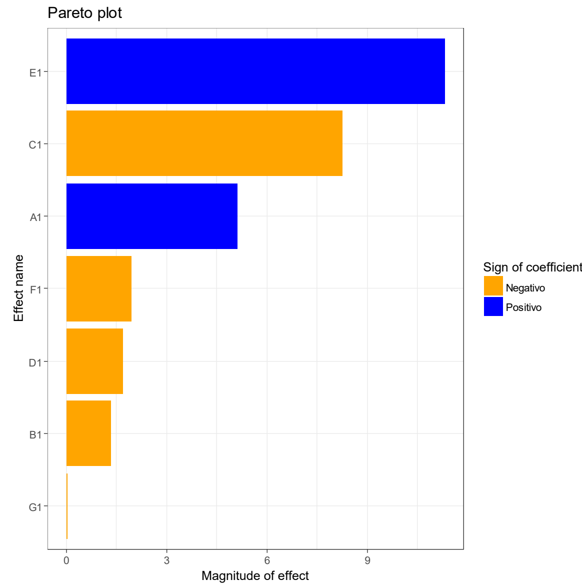
```
6  1 -1  1 -1  1 -1 -1
7 -1  1  1 -1 -1  1 -1
8  1  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2

> design.info(diseño3)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F" "G=G"

$main
[1] "A=BD=CE=FG" "B=AD=CF=EG" "C=AE=BF=DG" "D=AB=CG=EF" "E=AC=BG=DF"
[6] "F=AG=BC=DE" "G=AF=BE=CD"

$fi2
character(0)

#o bien
> aliasprint(diseño3,condense=FALSE)
$legend
[1] A=A B=B C=C D=D E=E F=F G=G

$main
[1] A=BD=CE=FG B=AD=CF=EG C=AE=BF=DG D=AB=CG=EF E=AC=BG=DF F=AG=BC=DE G=AF=BE=CD

$fi2
character(0)

> generators(diseño3)
$generators
[1] "D=AB"  "E=AC"  "F=BC"  "G=ABC"
```

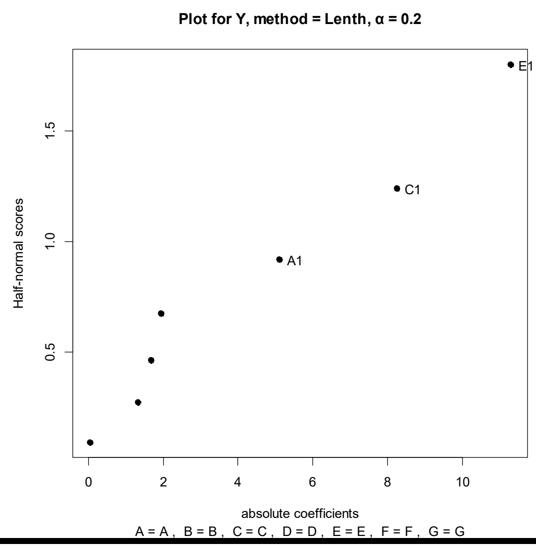
Análisis del experimento. El experimento tiene un total de siete grados de libertad que se gastan en estimar sólo a los siete efectos principales, y quedan cero grados de libertad para el error en el ANOVA. Por tanto debe recurrirse al diagrama Pareto de efectos y al gráfico de Daniel como paso previo antes del ANOVA. En la siguiente tabla se muestran las estimaciones de contrastes y efectos con los que se grafica el gráfico de Daniel y el Pareto de efectos (valores absolutos de los efectos).

MATRIZ DE DISEÑO Y VIBRACIÓN OBSERVADA								CÁLCULOS PARA CONTRASTES						
A	B	C	D	E	F	G	VIBRA	A	B	C	D	E	F	G
-1	-1	-1	1	1	1	-1	77,4	-77,4	-77,4	-77,4	77,4	77,4	77,4	-77,4
1	-1	-1	-1	-1	1	1	68,3	68,3	-68,3	-68,3	-68,3	-68,3	68,3	68,3
-1	1	-1	-1	1	-1	1	81,9	-81,9	81,9	-81,9	-81,9	81,9	-81,9	81,9
1	1	-1	1	-1	-1	-1	66,2	66,2	66,2	-66,2	66,2	-66,2	-66,2	-66,2
-1	-1	1	1	-1	-1	1	42,1	-42,1	-42,1	42,1	42,1	-42,1	-42,1	42,1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	78,3	78,3	-78,3	78,3	-78,3	78,3	-78,3	-78,3
-1	1	1	-1	-1	1	-1	39,0	-39	39	39	-39	-39	39	-39
1	1	1	1	1	1	1	68,4	68,4	68,4	68,4	68,4	68,4	68,4	68,4
							CONTRASTES	**40,8**	**-10,6**	**-66**	**-13,4**	**90,4**	**-15,4**	**-0,2**
							EFECTOS	**10,2**	**-2,65**	**-16,5**	**-3,35**	**22,6**	**-3,85**	**-0,05**

```
modelo=lm(Y~A+B+C+D+E+F+G)
> summary(modelo)
Call: lm.default(formula = Y ~ A + B + C + D + E
+ F + G)
Residuals: ALL 8 residuals are 0: no residual
degrees of freedom!
Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   65.200        NA      NA       NA
A1             5.100        NA      NA       NA
B1            -1.325        NA      NA       NA
C1            -8.250        NA      NA       NA
D1            -1.675        NA      NA       NA
E1            11.300        NA      NA       NA
F1            -1.925        NA      NA       NA
G1            -0.025        NA      NA       NA
Residual standard error: NaN on 0 degrees of
freedom. Multiple R-squared: 1,  Adjusted
R-squared: NaN F-statistic:   NaN on 7 and 0 DF,
p-value: NA
```







Los gráficos muestran en forma clara que hay tres efectos importantes: E, C, y A y cuatro despreciables. Las sumas de cuadrados de los siete contrastes se dan a continuación:

	A	B	C	D	E	F	G
CONTRASTES	40,8	-10,6	-66	-13,4	90,4	-15,4	-0,2
(CONTRASTES)²	1664,64	112,36	4356	179,56	8172,16	237,16	0,04
SS(CONTRASTE) $SS_X = \frac{(\text{contraste } X)^2}{n2^{k-p}}$	208,08	14,045	544,5	22,445	1021,52	29,645	0,005
SSE(B+D+F+G)	66,14						

Llevando al error las sumas de cuadrados de los efectos de B, D, F y G, se obtiene el siguiente ANOVA:

FUENTE	g.l	SS	CM	F_0	Valor P
A: grano	1	208,08	208,08	12,58	0,0239
C: diámetro	1	544,50	544,50	32,93	0,0046
E: precarga	1	1021,52	1021,25	61,78	0,0140
Error	4	66,14	16,535		
Total	7	1840,24			
R^2_{adj}=0.9371					

```
> anova(modelo2)
Analysis of Variance Table

Response: Y
          Df  Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
A          1  208.08  208.08  12.584 0.023854 *
C          1  544.50  544.50  32.930 0.004569 **
E          1 1021.52 1021.52  61.779 0.001416 **
Residuals  4   66.14   16.53
---
```

Aunque el SSE apenas tiene 4 grados de libertad, en este caso parece que el MSE está razonablemente estimado dado el valor del R^2_{adj}.

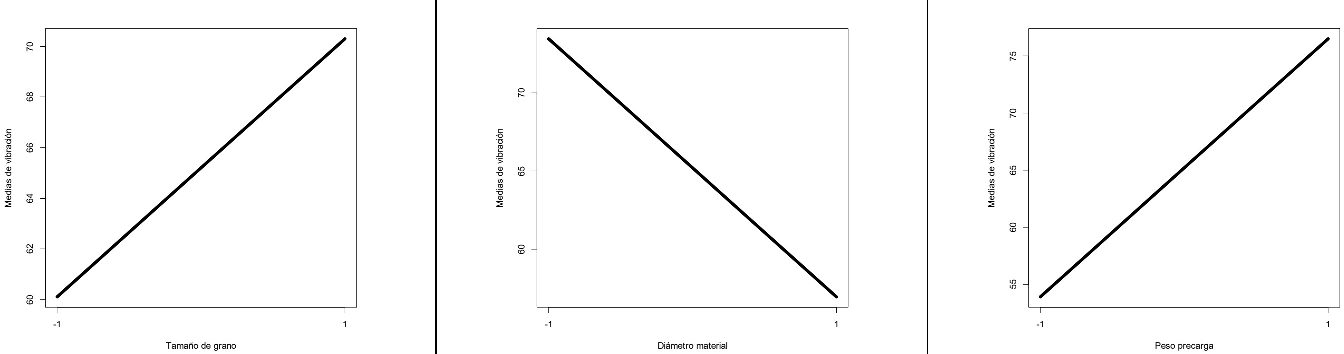
La tabla de parámetros estimados para el modelo reducido, usando R, se muestra en la siguiente salida:

```
Call: lm.default(formula = Y ~ A + C + E, data = diseño3)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   65.200      1.438  45.351 1.41e-06 ***
A1             5.100      1.438   3.547  0.02385 *
C1            -8.250      1.438  -5.738  0.00457 **
E1            11.300      1.438   7.860  0.00142 **
---
Residual standard error: 4.066 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9641,    Adjusted R-squared:  0.9371
F-statistic: 35.76 on 3 and 4 DF,  p-value: 0.002393
```

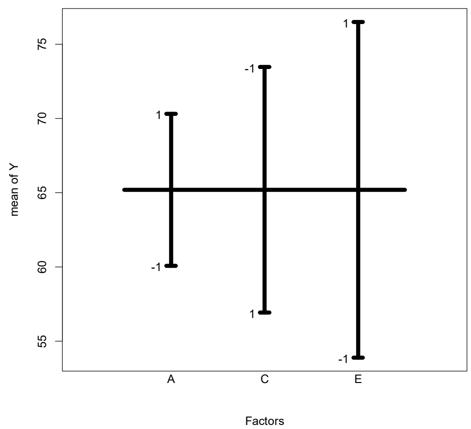
La ecuación ajustada del modelo predictivo alcanzado, usando variables codificadas como ∓ 1 es:

$$\hat{Y} = 65.2 + 5.1X_1 - 8.25X_3 + 11.3X_5$$

El objetivo del estudio es identificar la combinación de los niveles de los factores donde ocurre la menor vibración de la máquina de corte. En la siguiente figura se muestran los gráficos de medias de la vibración para los efectos activos y para cada uno se localiza el valor más bajo de la respectiva línea.



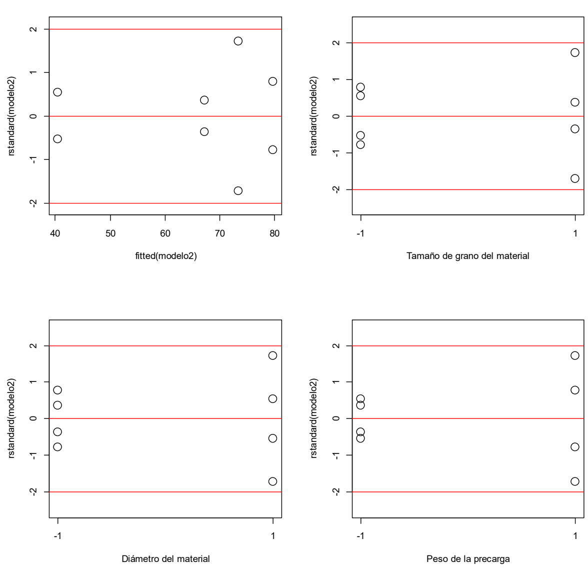
A: GRANO		C: DIÁMETRO		E: PRECARGA	
Prom. Bajo	Prom. Alto	Prom. Bajo	Prom. Alto	Prom. Bajo	Prom. Alto
60,1	70,3	73,45	56,95	53,9	76,5

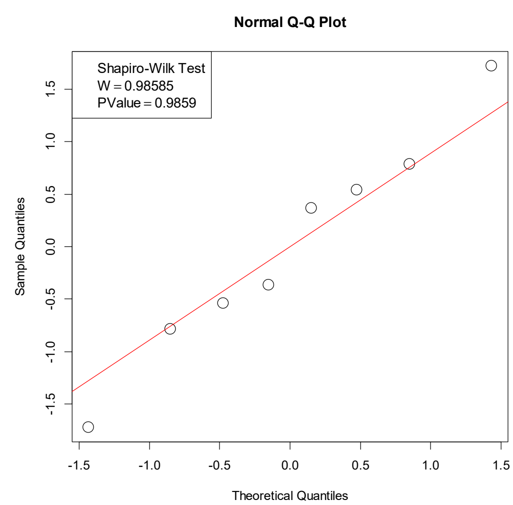


Como se aprecia en las anteriores figuras, a mayor tamaño de precarga mayor vibración, a más diámetro menor vibración y a mayor tamaño de grano más vibración. Por tanto, el tratamiento donde se tiene la menor vibración es: A (grano): en su nivel bajo, C (diámetro): en su nivel alto y E (precarga): en su nivel bajo; los niveles de los demás factores se eligen con criterios de economía (nivel más barato), de modo que en la ec. ajustada del modelo predictivo se obtiene como respuesta mínima predicha en los tratamientos considerados el siguiente valor:

$$\hat{Y} = 65.2 + 5.1 \times (-1) - 8.25 \times 1 + 11.3 \times (-1) = 40.55$$

A continuación, se muestran los gráficos de los residuos estudentizados internamente del modelo predictivo ¿qué se concluye con estos?





NOTA: Si se examinan los residuos vs. los factores excluidos ¡veremos un patrón de tendencia lineal entre el promedio de los residuos en nivel bajo y alto de cada factor excluido! Pero no podemos incluirlos dado que no hay grados de libertad para dejar a todos los siete efectos principales.

Programa R usado en ejemplo

```
library(rsm)
library(pid)
library(daewr)
library(FrF2)

diseño3=FrF2(nruns=8,nfactors=7,randomize=FALSE)
diseño3
design.info(diseño3)$aliased

#o bien
aliasprint(diseño3,condense=FALSE)

generators(diseño3)
Y=scan() #Ingresando datos del experimento. Deben estar en el orden de los tratamientos en "diseño3"
77.4
68.3
81.9
66.2
42.1
78.3
39.0
68.4

diseño3=add.response(diseño3,Y) #Juntando tabla de tratamientos con la respectiva respuestas
diseño3

attach(diseño3)
modelo=lm(Y~A+B+C+D+E+F+G) #Modelo saturado
summary(modelo)

#Gráficos para selección de efectos en modelo saturado
paretoPlot(modelo,negative=c("Negativo","orange"),positive=c("Positivo","blue"))
halfnormal(modelo,code=T,alpha=0.2,linelwd=2,linecol=2,pch.set = c(19, 16, 8))

#Modelo predictivo
modelo2=lm(Y~A+C+E)
summary(modelo2)
anova(modelo2)

mediasA=sapply(split(Y,A),mean)
plot(c(-1,1),mediasA,type="l",lwd=6,xaxt="n",xlab="Tamaño de grano",ylab="Medias de vibración")
axis(1,at=c(-1,1),labels=c(-1,1))

mediasC=sapply(split(Y,C),mean)

plot(c(-1,1),mediasC,type="l",lwd=6,xaxt="n",xlab="Diámetro material",ylab="Medias de vibración")
axis(1,at=c(-1,1),labels=c(-1,1))
mediasE=sapply(split(Y,E),mean)

plot(c(-1,1),mediasE,type="l",lwd=6,xaxt="n",xlab="Peso precarga",ylab="Medias de vibración")
axis(1,at=c(-1,1),labels=c(-1,1))

plot(diseño3, select=c("A","C","E"),lwd=6) #Graficando las medias de A, C, y E

#Análisis residuos estudentizados modelo 2
layout(rbind(c(1,1,2,2),c(3,3,4,4)))
plot(fitted(modelo2),rstandard(modelo2),cex=2,ylim=c(-2.1,2.1))
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

stripchart(rstandard(modelo2)~A,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,
           xlab="Tamaño de grano del material")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)
```

```
stripchart(rstandard(modelo2)~C,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,
           xlab="Diámetro del material")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

stripchart(rstandard(modelo2)~E,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,xlab="Peso de la precarga")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

shapiro.test(rstandard(modelo2))
win.graph()
qqnorm(rstandard(modelo2),cex=2)
qqline(rstandard(modelo2),col=2)
legend("topleft",legend=c("Shapiro-Wilk
Test",expression(W==0.98585),expression(PValue==0.9859)),cex=1.1)


#Gráficos residuos vs. factores eliminados
win.graph(width=10,height=7)
layout(rbind(c(1,2,3),c(4,5,6)))
stripchart(rstandard(modelo2)~B,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,xlab="Longitud")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

stripchart(rstandard(modelo2)~D,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,xlab="RPM(x1000)")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

stripchart(rstandard(modelo2)~F,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,xlab="Estructura material")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

stripchart(rstandard(modelo2)~G,cex=2,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,xlab="Veloc. Alimentación")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)

detach(diseño3)
```

BIBLIOGRAFÍA

[1] Gutiérrez, Pulido H. y de la Vara Salazar, R. (2004). Análisis y diseño de experimentos. McGraw-Hill Interamericana.
[2] Montgomery D. C. (2001). Design and Analysis Experiments. 5th ed. John Wiley & Sons.
[3] Montgomery D. C. (2020). Design and Analysis Experiments. 10th ed. John Wiley & Sons.