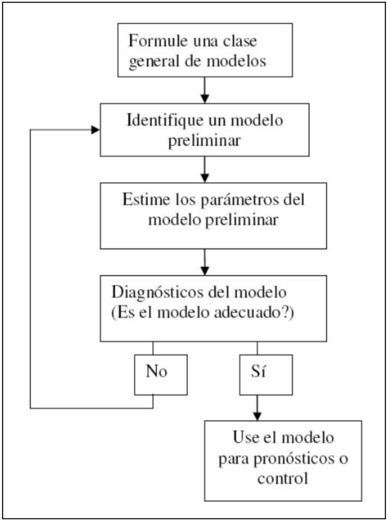
# Series de tiempo univariadas - Presentación 12

Mauricio Alejandro Mazo Lopera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Escuela de Estadística
Medellín

Se recomienda seguir los siguientes pasos para ajustar un modelo de series de tiempo:



Uno de los objetivos principales a la hora de ajustar un modelo ARMA($p$, $q$) a una serie de tiempo es realizar pronósticos, es decir, predecir valores futuros.

Uno de los objetivos principales a la hora de ajustar un modelo ARMA($p$, $q$) a una serie de tiempo es realizar pronósticos, es decir, predecir valores futuros.

Si denotamos la serie de tiempo por $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$ entonces los valores que queremos predecir podemos denotarlos como $X_{n+m}$, para $m = 1, 2, \ldots$, basados en los datos $\boldsymbol{X}_n$.

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$):

Uno de los objetivos principales a la hora de ajustar un modelo ARMA($p$, $q$) a una serie de tiempo es realizar pronósticos, es decir, predecir valores futuros.

Si denotamos la serie de tiempo por $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$ entonces los valores que queremos predecir podemos denotarlos como $X_{n+m}$, para $m = 1, 2, \ldots$, basados en los datos $\boldsymbol{X}_n$.

Cuando se pronostica, el objetivo es producir pronósticos que no tengan error o que el error sea tan pequeño como sea posible. Esto conduce a la obtención de **pronósticos con error cuadrático medio mínimo**.

Consideremos un modelo ARMA($p$, $q$) que sea **estacionario** e **invertible** y supongamos, sin pérdida de generalidad, que su media es cero. Este modelo lo denotamos por

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Como este proceso es estacionario, entonces podemos reescribirlo como:

$$X_t = \psi(B)w_t$$

donde $\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j$ (con $\psi_0 = 1$).

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$):

Consideremos un modelo ARMA($p$, $q$) que sea **estacionario** e **invertible** y supongamos, sin pérdida de generalidad, que su media es cero. Este modelo lo denotamos por

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Como este proceso es estacionario, entonces podemos reescribirlo como:

$$X_t = \psi(B)w_t$$

donde $\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ (con $\psi_0 = 1$). Esto lleva a que:

$$X_t = w_t + \psi_1 w_{t-1} + \psi_2 w_{t-2} + \psi_3 w_{t-3} + \cdots$$

Suponga que nuestro interés se centra en pronosticar el valor de $X_t$, $h$ periodos adelante basados en la historia hasta el periodo $t = n$, es decir usando $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$. Esto nos lleva a queres pronosticar:

$$X_{n+h} = w_{n+h} + \psi_1 w_{n+h-1} + \psi_2 w_{n+h-2} + \psi_3 w_{n+h-3} + \cdots$$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$):

Suponga que nuestro interés se centra en pronosticar el valor de $X_t$, $h$ periodos adelante basados en la historia hasta el periodo $t = n$, es decir usando $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$. Esto nos lleva a queres pronosticar:

$$X_{n+h} = w_{n+h} + \psi_1 w_{n+h-1} + \psi_2 w_{n+h-2} + \psi_3 w_{n+h-3} + \cdots$$

Si denotamos por $\widehat{X}_n(h)$ al predictor de $X_{n+h}$, entonces podemos definir al error de predicción como:

$$e_n(h) = X_{n+h} - \widehat{X}_n(h)$$

# Pronósticos con modelos ARMA$(p,\, q)$:

Suponga que nuestro interés se centra en pronosticar el valor de $X_t$, $h$ periodos adelante basados en la historia hasta el periodo $t = n$, es decir usando $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$. Esto nos lleva a queres pronosticar:

$$X_{n+h} = w_{n+h} + \psi_1 w_{n+h-1} + \psi_2 w_{n+h-2} + \psi_3 w_{n+h-3} + \cdots$$

Si denotamos por $\widehat{X}_n(h)$ al predictor de $X_{n+h}$, entonces podemos definir al error de predicción como:

$$e_n(h) = X_{n+h} - \widehat{X}_n(h)$$

El "mejor predictor" ("Best Linear Predictor"), $\widehat{X}_n(h)$, es aquel que minimiza

$$E\left[e_n(h)^2\right]$$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$):

Suponga que nuestro interés se centra en pronosticar el valor de $X_t$, $h$ periodos adelante basados en la historia hasta el periodo $t = n$, es decir usando $\boldsymbol{X}_n = \{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1\}$. Esto nos lleva a queres pronosticar:

$$X_{n+h} = w_{n+h} + \psi_1 w_{n+h-1} + \psi_2 w_{n+h-2} + \psi_3 w_{n+h-3} + \cdots$$

Si denotamos por $\widehat{X}_n(h)$ al predictor de $X_{n+h}$, entonces podemos definir al error de predicción como:

$$e_n(h) = X_{n+h} - \widehat{X}_n(h)$$

El "mejor predictor" ("Best Linear Predictor"), $\widehat{X}_n(h)$, es aquel que minimiza

$$E\left[e_n(h)^2\right]$$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$):

Se puede probar (ver página 89 del TEXTO 3 - TEÓRICO - Wei-Time series analysis.pdf), que:

$$\widehat{X}_n(h) = \psi_h w_n + \psi_{h+1} w_{n-1} + \psi_{h+2} w_{n-2} + \cdots$$

este predictor recibe el nombre **predictor $h$ periodos adelante (o de horizonte $h$)** de $X_t$, basado en la historia hasta el periodo $n$.

Se puede probar (ver página 89 del TEXTO 3 - TEÓRICO - Wei-Time series analysis.pdf), que:

$$\widehat{X}_n(h) = \psi_h w_n + \psi_{h+1} w_{n-1} + \psi_{h+2} w_{n-2} + \cdots$$

este predictor recibe el nombre **predictor $h$ periodos adelante (o de horizonte $h$)** de $X_t$, basado en la historia hasta el periodo $n$.

Este pronóstico tiene un conjunto de propiedades que permiten construir predicciones junto con intervalos de predicción.

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Propiedades

1. $\widehat{X}_n(h) = E(X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Propiedades

1. $\widehat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)$
2. El error de pronóstico es $e_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j w_{n+h-j}$

1. $\widehat{X}_n(h) = E(X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)$
2. El error de pronóstico es $e_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j w_{n+h-j}$
3. $E[e_n(h)] = 0$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Propiedades

1. $\widehat{X}_n(h) = E(X_{n+h}|X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)$
2. El error de pronóstico es $e_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j w_{n+h-j}$
3. $E[e_n(h)] = 0$
4. $Var[e_n(h)] = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Propiedades

1. $\widehat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots)$
2. El error de pronóstico es $e_n(h) = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j w_{n+h-j}$
3. $E[e_n(h)] = 0$
4. $Var[e_n(h)] = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2$
5. Para un proceso Gaussiano (normal), el intervalo de predicción con una confianza de $(1 - \alpha)$ está dado por:

$$\widehat{X}_n(h) \pm z_{\alpha/2} \sigma_w \left[ \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \right]^{1/2}$$

6. Si $h = 1$, $e_n(1) = X_{n+1} - \widehat{X}_n(1) = w_{n+1}$, es decir, los errores de pronóstico 1 periodo adelante NO son correlacionados y cuando tienen distribución normal son independientes.

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Propiedades

6. Si $h = 1$, $e_n(1) = X_{n+1} - \widehat{X}_n(1) = w_{n+1}$, es decir, los errores de pronóstico 1 periodo adelante NO son correlacionados y cuando tienen distribución normal son independientes.

7. Para $h > 1$ los errores de pronósticos están correlacionados, cuando se calculan para diferentes origenes, es decir, $Cov[e_n(h), e_{n-j}(h)] \neq 0$, para $j < h$.

6. Si $h = 1$, $e_n(1) = X_{n+1} - \widehat{X}_n(1) = w_{n+1}$, es decir, los errores de pronóstico 1 periodo adelante NO son correlacionados y cuando tienen distribución normal son independientes.

7. Para $h > 1$ los errores de pronósticos están correlacionados, cuando se calculan para diferentes origenes, es decir, $Cov[e_n(h), e_{n-j}(h)] \neq 0$, para $j < h$.

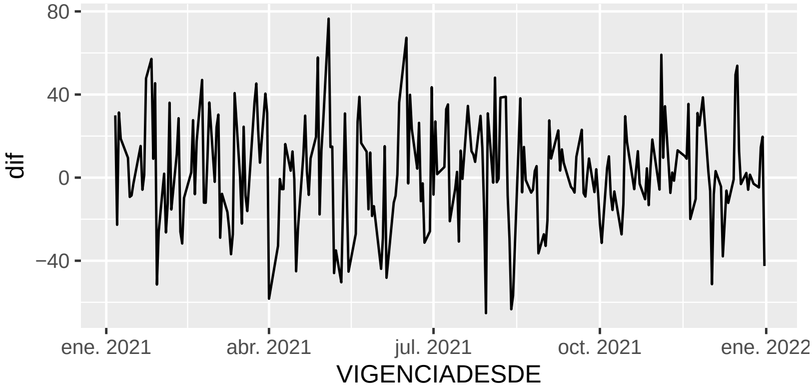
8. Para diferentes horizontes, los errores de pronóstico basados en el mismo origen están correlacionados, es decir, $Cov[e_n(h), e_n(s)] \neq 0$.

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 1

Volvamos al ejemplo que vimos en la Presentación 11 relacionado con la TRM del año 2021:

```r
# Cargamos los paquetes:
require(tidyverse)
require(magrittr)
require(lubridate)

# Leemos la BD:
datos_trm <- read_csv("../../DATOS/trm_historico.csv")

# Damos formato a las fechas:
datos_trm$VIGENCIADESDE %<>% as.Date(format="%d/%m/%Y")
datos_trm$VIGENCIAHASTA %<>% as.Date(format="%d/%m/%Y")

#Ordenamos la BD por VIGENCIADESDE:
datos_trm %<>% arrange(-desc(VIGENCIADESDE))

# Filtramos al año 2021 creando otro data frame:
datos_trm_2<-datos_trm%>%filter(year(VIGENCIADESDE)%in%c(2021))
```

```
# Creamos la serie de diferencias:
datos_trm_2$dif <- c(NA, diff(datos_trm_2$VALOR))
datos_trm_2 %>% ggplot(aes(x=VIGENCIADESDE, y=dif))+
  geom_line()
```

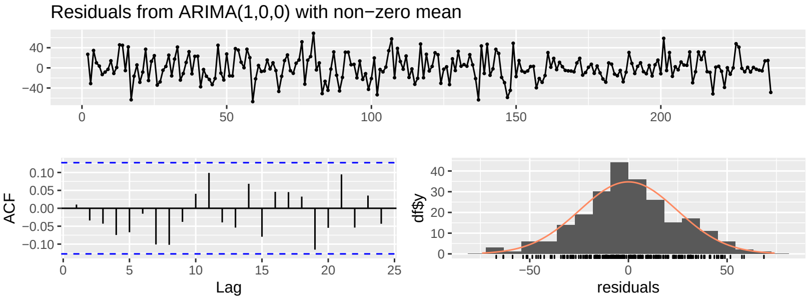


Una función eficiente para chequear los supuestos del modelo con respecto al ruido blanco se encuentra en el paquete **forecast** y se denota por **checkresiduals**:

```
require(forecast)
modelo1 <- arima(datos_trm_2$dif, order=c(1, 0, 0))
modelo1 %>% checkresiduals(lag=25)
```

Los resultados se encuentran en la siguiente diapositiva:

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 1




```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(1,0,0) with non-zero mean
## Q* = 25.984, df = 23, p-value = 0.3016
##
## Model df: 2.   Total lags used: 25
```

El paquete **forecast** tiene la función **forecast** que permite obtener pronósticos $h$ periodos a futuro:

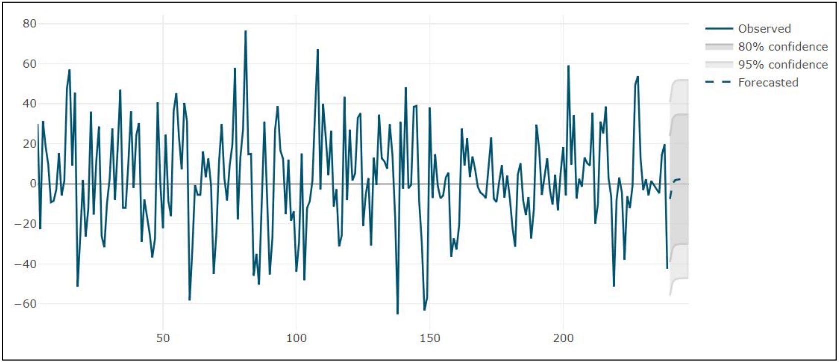
```
require(forecast)
trm_dif_pron <- forecast(modelo1, h=8)
trm_dif_pron
```

```
##     Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
## 239     -7.5673431 -39.16403 24.02934 -55.89030 40.75561
## 240      0.1549917 -32.20367 32.51365 -49.33331 49.64329
## 241      1.8611411 -30.53426 34.25654 -47.68334 51.40562
## 242      2.2380927 -30.15910 34.63528 -47.30913 51.78532
## 243      2.3213752 -30.07590 34.71865 -47.22598 51.86873
## 244      2.3397754 -30.05751 34.73706 -47.20759 51.88714
## 245      2.3438407 -30.05344 34.74112 -47.20352 51.89121
## 246      2.3447388 -30.05254 34.74202 -47.20263 51.89210
```

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 1

Con la función **plot_forecast** del paquete **TSstudio** podemos visualizar el resultado:

```
require(TSstudio)
plot_forecast(trm_dif_pron)
```



Una estategia para entender cómo funciona un método estadístico es a través de simulaciones. Consideremos simular un modelo ARMA(3,2) dado por:

$$X_t = 1.5 + 0.7X_{t-1} - 0.9X_{t-2} + 0.5X_{t-3} + w_t + 0.6w_{t-1} - 0.3w_{t-2}$$

Verificamos si es estacionario e invertible:

```
# Estacionariedad:
c(1,-0.7,0.9,-0.5) %>% polyroot() %>% abs()
```

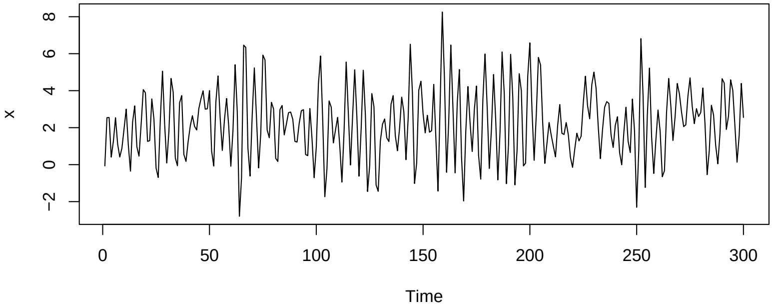
```
## [1] 1.092226 1.092226 1.676504
```

```
# Invertibilidad:
c(1,0.6,-0.3) %>% polyroot() %>% abs()
```

```
## [1] 1.081666 3.081666
```

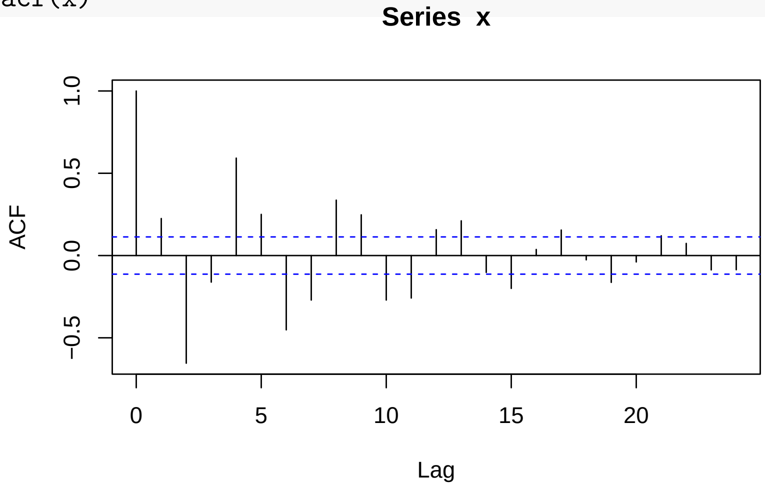
Simulamos una serie de tamaño $n = 300$ y con $\sigma_w = 0.8$:

```
set.seed(365)
c <- (1.5/(1-0.7+0.9-0.5)) # ¿Esto por qué?
x <- c + arima.sim(n=300, list(ar = c(0.7,-0.9,0.5),
                              ma=c(0.6,-0.3)), sd = 0.8)
plot(x)
```



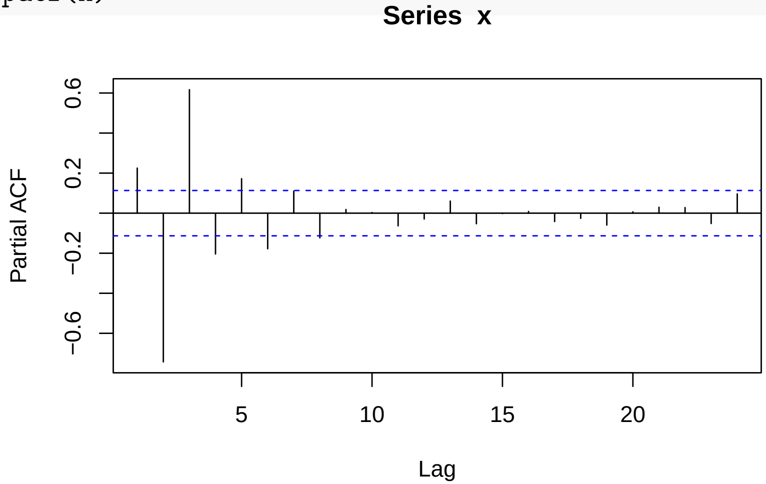
Las ACF y PACF muestrales son:

```
acf(x)
```



# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 2

```
pacf(x)
```



# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 2

Planteamos varios modelos ARMA($p$, $q$):

```
modelo2a <- arima(x, order=c(1, 0, 1))
modelo2b <- arima(x, order=c(2, 0, 1))
modelo2c <- arima(x, order=c(1, 0, 2))
modelo2d <- arima(x, order=c(2, 0, 2))
modelo2e <- arima(x, order=c(2, 0, 3))
modelo2f <- arima(x, order=c(3, 0, 2))
modelo2g <- arima(x, order=c(3, 0, 3))
```

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 2

Planteamos varios modelos ARMA($p$, $q$):

```
cbind(AIC(modelo2a,modelo2b,modelo2c,modelo2d,modelo2e,
      modelo2f,modelo2g),BIC(modelo2a,modelo2b,
      modelo2c,modelo2d,modelo2e,modelo2f,modelo2g)[2])
```

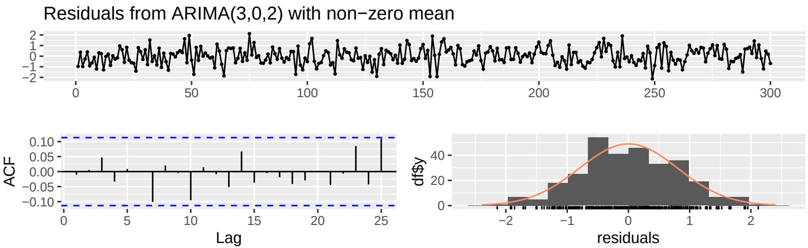
```
##          df       AIC       BIC
## modelo2a  4 1002.7493 1017.5644
## modelo2b  5  762.5832  781.1021
## modelo2c  5  988.6464 1007.1653
## modelo2d  6  746.1097  768.3324
## modelo2e  7  743.1414  769.0679
## modelo2f  7  736.4247  762.3512
## modelo2g  8  738.0354  767.6657
```

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 2

De los AIC y BIC anteriores, el mejor modelo es el **modelo2f** lo cual era de esperarse, ya que así fueron simulados los datos en **x**.

De los AIC y BIC anteriores, el mejor modelo es el **modelo2f** lo cual era de esperarse, ya que así fueron simulados los datos en **x**. Chequeamos los residuos:

```
modelo2f %>% checkresiduals(lag=25)
```




```
##
##  Ljung-Box test
##
## data:  Residuals from ARIMA(3,0,2) with non-zero mean
## Q* = 18.534, df = 19, p-value = 0.4871
##
## Model df: 6.   Total lags used: 25
```

# Pronósticos con modelos ARMA($p$, $q$): Ejemplo 2

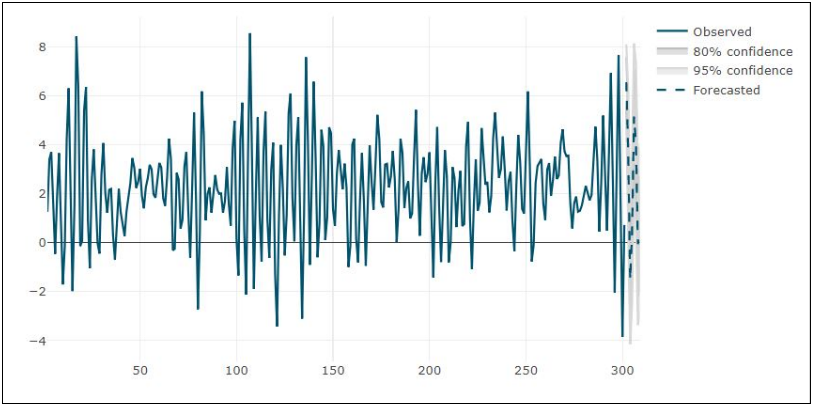
Procedemos entonces a realizar los pronósticos:

```r
require(forecast)
x_pron <- forecast(modelo2f, h=8)
x_pron
```

```
##     Point Forecast      Lo 80     Hi 80       Lo 95    Hi 95
## 301     -0.2633159 -1.2876751 0.7610432 -1.82993803 1.303306
## 302      1.4202531 -0.2772701 3.1177762 -1.17588453 4.016391
## 303      4.0061887  2.2948110 5.7175663  1.38886239 6.623515
## 304      2.9473055  1.0511569 4.8434540  0.04739651 5.847214
## 305      0.7332791 -1.1879907 2.6545489 -2.20504947 3.671608
## 306      1.3922545 -0.7103888 3.4948977 -1.82346085 4.607970
## 307      3.3070392  1.2034006 5.4106778  0.08980155 6.524277
## 308      2.9802050  0.7796724 5.1807376 -0.38521916 6.345629
```

Con la función **plot_forecast** del paquete **TSstudio** podemos visualizar el resultado:

```
require(TSstudio)
plot_forecast(x_pron)
```



# Modelos ARIMA($p$, $d$, $q$):

Hasta ahora hemos visto que un modelo ARMA($p$, $q$) puede ser escrito como:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

# Modelos ARIMA($p$, $d$, $q$):

Hasta ahora hemos visto que un modelo ARMA($p$, $q$) puede ser escrito como:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

Una extensión a este modelo ARMA($p$, $q$) se conoce como modelo ARIMA($p$, $d$, $q$) que se plantea como:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

donde $d \geq 1$ es un entero que se conoce como parámetro de diferenciación o simplemente orden de diferenciación.

# Modelos ARIMA($p$, $d$, $q$):

El factor polinómico $(1 - B)^d$ se incluye en el modelo con el fin de convertir una serie no estacionaria en estacionaria y así poder aplicar el modelo ARMA($p$, $q$).

El factor polinómico $(1 - B)^d$ se incluye en el modelo con el fin de convertir una serie no estacionaria en estacionaria y así poder aplicar el modelo ARMA($p$, $q$).

Cuando se realiza el gráfico de la serie de tiempo original y se observa que no tiene una media constante (los valores no oscilan horizontalmente alrededor de un valor fijo) se recomienda aplicar la diferenciación. En general, este comportamiento va acompañado de una ACF que cae muy lentamente a cero debido a las tendencias.

El factor polinómico $(1 - B)^d$ se incluye en el modelo con el fin de convertir una serie no estacionaria en estacionaria y así poder aplicar el modelo ARMA($p$, $q$).

Cuando se realiza el gráfico de la serie de tiempo original y se observa que no tiene una media constante (los valores no oscilan horizontalmente alrededor de un valor fijo) se recomienda aplicar la diferenciación. En general, este comportamiento va acompañado de una ACF que cae muy lentamente a cero debido a las tendencias.

Lo anterior se puede ver reforzado por una prueba de raíces unitarias conocida como prueba de Dickey-Fuller y para entender cómo funciona consideremos la parte AR($p$) de un modelo ARMA($p$, $q$) (no se considera la parte MA($q$) porque esta siempre es estacionaria):

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1}$, así

$$\phi(B) \;\; = \;\; \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

# Prueba de raíces unitarias:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1}$, así

$$\begin{aligned}\phi(B) &= \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B) \\ &= (1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B)\end{aligned}$$

# Prueba de raíces unitarias:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1}$, así

$$\begin{aligned}
\phi(B) &= \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B) \\
&= (1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) \\
&= (1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B)
\end{aligned}$$

# Prueba de raíces unitarias:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1}$, así

$$\begin{aligned}
\phi(B) &= \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B) \\
&= (1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) \\
&= (1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B)
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1}$, así

$$\begin{aligned}
\phi(B) &= \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B) \\
&= (1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) \\
&= (1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B)
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
\phi(B)X_t &= \alpha + \theta(B)w_t \\
\left[(1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B)\right] X_t &= \alpha + \theta(B)w_t
\end{aligned}$$

# Prueba de raíces unitarias:

$$\phi(B)X_t = \alpha + \theta(B)w_t$$

Si asumimos que este polinómio tiene una raíz igual a $1/\phi$, entonces se debe cumplir que:

$$\phi(B) = \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B)$$

donde $\eta_{p-1}(B) = 1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1}B^{p-1}$, así

$$\begin{aligned}
\phi(B) &= \eta_{p-1}(B)(1 - \phi B) \\
&= (1 - \eta_1 B - \eta_2 B^2 - \cdots - \eta_{p-1}B^{p-1})(1 - \phi B) \\
&= (1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1}B^{p-1})(1 - \phi B)
\end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
\phi(B)X_t &= \alpha + \theta(B)w_t \\
\left[(1 - \phi B) - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1}B^{p-1})(1 - \phi B)\right] X_t &= \alpha + \theta(B)w_t \\
(1 - \phi B)X_t - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1}B^{p-1})(1 - \phi B)X_t &= \alpha + \theta(B)w_t
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$X_t - \phi X_{t-1} - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) X_t \quad = \quad \alpha + \theta(B) w_t$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X_t - \phi X_{t-1} - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) X_t &= \alpha + \theta(B) w_t \\ X_t - \phi X_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} &= \alpha + \theta(B) w_t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} X_t - \phi X_{t-1} - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1-\phi B)X_t &= \alpha + \theta(B)w_t \\ X_t - \phi X_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} &= \alpha + \theta(B)w_t \end{aligned}$$

Así,

$$X_t = \phi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B)w_t$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
X_t - \phi X_{t-1} - (\eta_1 B + \eta_2 B^2 + \cdots + \eta_{p-1} B^{p-1})(1 - \phi B) X_t &= \alpha + \theta(B) w_t \\
X_t - \phi X_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} &= \alpha + \theta(B) w_t
\end{aligned}
$$

Así,

$$
X_t = \phi X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t
$$

Una prueba para saber si existe una raíz unitaria consiste en contrastar:

$$
H_0 : \phi = 1 \quad \text{versus} \quad H_a : \phi < 1
$$

# Prueba de raíces unitarias:

Una forma equivalente se obtiene restando $X_{t-1}$ a ambos lados:

$$X_t - X_{t-1} = \phi X_{t-1} - X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

# Prueba de raíces unitarias:

Una forma equivalente se obtiene restando $X_{t-1}$ a ambos lados:

$$X_t - X_{t-1} = \phi X_{t-1} - X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

$$\nabla X_t = \gamma \nabla X_t + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

Una forma equivalente se obtiene restando $X_{t-1}$ a ambos lados:

$$X_t - X_{t-1} = \phi X_{t-1} - X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

$$\nabla X_t = \gamma \nabla X_t + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

donde $\gamma = \phi - 1$, entonces para saber si existe una raíz unitaria se contrastan las hipótesis:

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \gamma < 0$$

# Prueba de raíces unitarias:

Una forma equivalente se obtiene restando $X_{t-1}$ a ambos lados:

$$X_t - X_{t-1} = \phi X_{t-1} - X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

$$\nabla X_t = \gamma \nabla X_t + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1 - \phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

donde $\gamma = \phi - 1$, entonces para saber si existe una raíz unitaria se contrastan las hipótesis:

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \gamma < 0$$

Esto también se puede expresar como:

$$H_0 : \text{NO estacionariedad} \quad \text{versus} \quad H_a : \text{Estacionariedad}$$

# Prueba de raíces unitarias:

Una forma equivalente se obtiene restando $X_{t-1}$ a ambos lados:

$$X_t - X_{t-1} = \phi X_{t-1} - X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

$$\nabla X_t = \gamma \nabla X_t + \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j (1-\phi B) X_{t-j} + \alpha + \theta(B) w_t$$

donde $\gamma = \phi - 1$, entonces para saber si existe una raíz unitaria se contrastan las hipótesis:

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \gamma < 0$$

Esto también se puede expresar como:

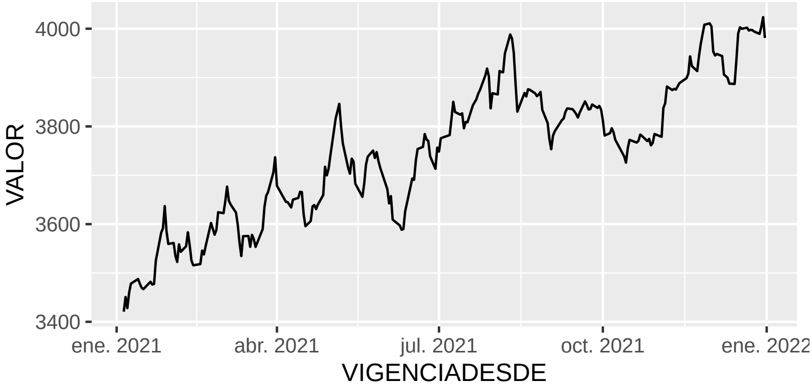
$$H_0 : \text{NO estacionariedad} \quad \text{versus} \quad H_a : \text{Estacionariedad}$$

El estadístico y su distribución son un poco elaborados y por tanto solo veremos cómo está implementado en el R:

# Prueba de raíces unitarias: Ejemplo 3

Si consideramos nuevamente el ejemplo de la TRM en 2021:

```
datos_trm_2 %>% ggplot(aes(x=VIGENCIADESDE, y=VALOR))+
  geom_line()
```



Aplicamos el test de Dickey-Fuller que está implementado en la función **adf.test** del paquete **tseries**:

```
require(tseries)
adf.test(datos_trm_2$VALOR)
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  datos_trm_2$VALOR
## Dickey-Fuller = -3.3977, Lag order = 6, p-value = 0.05568
## alternative hypothesis: stationary
```

Como el $p$-valor$> \alpha = 0.05$ entonces no rechazamos $H_0$ y esto significa que existe una raíz unitaria en $\phi(B)$ por lo cual debemos diferenciar.

# Prueba de raíces unitarias: Ejemplo 3

Si aplicamos el test de Dickey-Fuller a la serie diferenciada:

```
require(tseries)
datos_trm_2$dif %>% na.omit() %>% adf.test()
```

```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  .
## Dickey-Fuller = -7.1881, Lag order = 6, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

Como el $p$-valor$< \alpha = 0.05$ entonces rechazamos $H_0$ y esto significa que NO existe una raíz unitaria en $\phi(B)$.

# Modelos ARIMA($p$, $d$, $q$):

Como vimos antes, podemos entonces ajustar un modelo ARIMA(1, 1, 0) a la serie original:

```
require(lmtest)
modelo3 <- arima(datos_trm_2$VALOR, order=c(1,1,0))
coeftest(modelo3)
```

```
##
## z test of coefficients:
##
##     Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
## ar1 0.227837   0.063667  3.5786 0.0003454 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
```

# Modelos ARIMA($p$, $d$, $q$):

Contrastamos con el modelo AR(1) que aplicamos a la serie diferenciada sin intercepto:

```
modelo3a<-arima(datos_trm_2$dif,order=c(1,0,0),
                include.mean=FALSE)
coeftest(modelo3a)
```

```
##
## z test of coefficients:
##
##     Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
## ar1 0.227836   0.063667  3.5786 0.0003455 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1
```