Trabajo 1 Actuaria de contingencias de vida

-"Juan diego delgado cano" -"Oswaldo gonzales arias"

Abril 2022

3. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} con los parametros segun el modelo asignado. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estandar segun el modelo multiplicativo para una vida (x),dada por

$$\mu_{x^s+t} = \theta\mu_{x+t}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = x_2 = 30$, $t = 20$, $\theta = 1.2$. Las variables aleatorias $T(x_1)$,$T(x_2)$ son independientes.

a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas $T(x_1)$,$T(x_2)$ antes de t años como

$$_tq_{\overline{x_1,x_2}} :=_t q_{x_1} \cdot _tq_{x_2}$$

Encuentre

$$_tq_{\overline{x_1^s,x_2^s}}$$

y

$$_tq_{\overline{x_1,x_2}}$$

Respuesta a)

El modelo asignado para este trabajo es el siler con parametros establecidos en el moodle

Para conocer el valor de $_tq_{\overline{x_1^s,x_2^s}}$ y $_tq_{\overline{x_1,x_2}}$ primero debemos resolver $_tq_{x_1}$ y $_tq_{x_2}$ siendo $x_1 = x_2 = 30$, $t = 20$,$\theta = 1.2$ para esto tenemos $_tq_{x_1} =_t q_{x_2} =_{20} q_{30}$

recordando que $_tp_{x_1} = 1 -_t q_{x_1}$ tendriamos $_{20}q_{30} = 1 -_{20} p_{30}$ ahora bien para calcular $_{20}p_{30}$

tenemos que

```
#-------Siler
# Definir la fuerza de mortalidad
muxt.siler = function(t,x,pars){
  a1 =  pars[1];b1 =  pars[2];
  a2 =  pars[3];a3 =  pars[4];
  b2 =  pars[5]
  Ecuacion=(a1*exp(-b1*(x+t))+a2+a3*exp(b2*(x+t)))
  return(Ecuacion)}


#---------Definir tpx
tpx.siler = function(t,x,pars){
  a1 = pars[1]
  b1 = pars[2]
  a2 = pars[3]
```

```
  a3 = pars[4]
  b2 = pars[5]
  ecu2=(exp((-a2 * t * b1 * b2 + a1 * exp(-b1 * (x + t)) * b2 -
        a3 * exp(b2 * (x + t)) * b1 - a1 * exp(-b1 * x) * b2 +
        a3 * exp(b2 * x) * b1) / b1 / b2))
  return(ecu2)}
```

los parametros establecidos son

```
x = 30
t = 20
theta=1.2
pars=c(-0.0082416551593094, -0.0900884726515943, 0.000161686355315534,
0.00828975957612066,0.0900888512212388)
p.20.30= tpx.siler(t,x,pars)
q.20.30=1-p.20.30
```

```
p.20.30
```

```
## [1] 0.9572799
```

```
q.20.30
```

```
## [1] 0.04272007
```

tenemos ${}_{20}p_{30} = 0.9572799$ y ${}_{20}q_{30} = 0.04272007$

$${}_tq_{x_1} =_t q_{x_2} =_{20} q_{30} = 0.04272007$$

$${}_tq_{\overline{x_1,x_2}} =_t q_x *_t q_x$$

$${}_{20}q_{\overline{30,30}} =_{20} q_{30} *_{20} q_{30}$$

```
q.20.30*q.20.30
```

```
## [1] 0.001825004
```

De acuerdo a lo anterior, se puede concluir que la probabilidad de fallecer dos vidas de 30 que estan sanas antes de 20 años es de 0.01%

lo que es una probabilidad muy baja

luego para

$${}_tq_{\overline{x_1^s,x_2^s}}$$

(La probabilidad de que dos vidas ambas de 30 sub-estandars fallezcan antes de 20 años)

resolvemos ${}_tq_{x_1^s}$ y ${}_tq_{x_2^s}$

$${}_tp^s_{x_1} = {}_tp^{\theta}_{x_1}$$

tenemos que ${}_tq_{x_1^s} =_t q_{x_2^s} =_t q^(1.2)_{x_2}$

```r
tpx_s<-((tpx.siler(t,x,pars))^1.2)
tpx_s
```

```
## [1] 0.9489575
```

${}_tp^s_{x_1} = {}_tp^{\theta}_{x_1} = 0.959$

y ${}_tq^s_{x_1} = 1 -_t p^s_{x_1}$

```r
tqx_s=(1-tpx_s)

tqx_s
```

```
## [1] 0.05104254
```

${}_{20}q^s_{30} = 0.05104$

el cual es ${}_tq_{x_1^s}{=}_tq_{x_2^s}{=}$ 0.05104

Finalmente obtenemos

$$ {}_tq_{\overline{x_1^s,x_2^s}} =_t q_{x_1^s} *_t q_{x_2^s} $$

```r
tqx_s*tqx_s
```

```
## [1] 0.002605341
```

$$ {}_tq_{\overline{x_1^s,x_2^s}} = 0.0026053 $$

Quiere decir que la probabilidad de que dos vidas ambas de 30 sub-estandars fallezcan antes de 20 años es de 0.02605%

Lo cual es una probabilidad que aunque es muy baja si es un poco mas alta que la de dos vidas sanas

b) Encuentre $p \in (0,1)$, el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de vida x_1 con respecto a la vida (x_1^s) dado por $\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$

Solucion b)

Para esto tenemos

$$ \mathring{e}_{x_1} = \int_0^{w-x} {}_tp_{x_1}dt $$

y

$$ \mathring{e}_{x_1^s} = \int_0^{w-x} {}_tp^{\theta}_{x_1}dt $$

siendo w=110

ahora bien tenemos

```r
f <- function(t)
{tpx.siler(t,x,pars)}
(integrate(f,lower=0,upper=80)$value)
```

```
## [1] 47.45663
```

y obtenemos el valor para la vida (x_1^s)

```r
f <- function(t)
{tpx.siler(t,x,pars)^1.2}
(integrate(f,lower=0,upper=80)$value)
```

```
## [1] 45.48727
```

reemplazamos estos valores en la ecuacion

$$\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$$

y tenemos que $47.45663(1-p) = 45.48727$

```r
p<-(1-(45.48727/47.45663))
p
```

```
## [1] 0.0414981
```

$$P = 0.0414981$$

Por lo tanto el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de vida x_1 con respecto a la vida (x_1^s) dado por la ecuacion $\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$ es de 4.145%

c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

con w=110 tenemos que $P(T(x_1) < T(x_1^s))$

$$\begin{aligned}
P(T(x_1) < T(x_1^s)) &= \int_0^{80} P(T(x_1) < T(x_1^s) | T(x_1) = t)\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{80} P(t < T(x_1^s))\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{80} ({}_tp_{x_1})^{1.2}\, {}_tp_{x_1} \mu_{x_1+t} dt \\
&= \int_0^{80} ({}_tp_{x_1})^{2.2} \mu_{x_1+t} dt
\end{aligned}$$

```r
f<- function(t)
{((tpx.siler(t,x,pars))^2.2)*muxt.siler(t,x,pars)}
(integrate(f,lower=0,upper=80)$value)
```

```
## [1] 0.4545455
```

Esto quiere decir que una persona de 30 años sub-estandar tiene un 45% de probabilidades de fallecer antes que otra de la misma edad, pero en condicion sana

d) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$ utilizando simulacion MonteCarlo.

```r
require(GoFKernel)
```

```
## Loading required package: GoFKernel

## Warning: package 'GoFKernel' was built under R version 4.1.3

## Loading required package: KernSmooth

## KernSmooth 2.23 loaded
## Copyright M. P. Wand 1997-2009
```

```r
x = 40; n = 3000;
f = function(t) 1-tpx.siler(t,x,pars)
f.inv <- inverse(f,lower=0,upper=110-x)
Tx=sapply(runif(n,0,1),function(x)f.inv(x))

tpx.siler.s = function(t,x,pars){
p = (tpx.siler(t,x,pars))^(1.2)
return(p)}

require(GoFKernel)
x = 40; n = 3000;
f = function(t) 1-tpx.siler.s(t,x,pars)
f.inv <- inverse(f,lower=0,upper=110-x)
Tx.s=sapply(runif(n,0,1),function(x)f.inv(x))

c<-vector()
for (i in 1:3000) {
c[i]=ifelse(Tx[i]>Tx.s[i],1,0)}
sum(c)/3000
```

```
## [1] 0.5566667
```

Usando la simulacion montecarlo tenemos una P=0.54066