

INFORME TALLER #Karen Andrea Amaya¹, Ana María Sánchez², Jhonatan Smith García³ y Carolina Vergara Calvijo⁴*Fecha de entrega: 08 – 12 – 2021***1. Parte I problema 4****1.1 Formulación del problema y análisis descriptivo**

Considere un experimento en el que se quiere estudiar el efecto de los factores A: velocidad de alimentación y B: profundidad de corte, sobre Y: el acabado de un metal. Aunque los factores son de naturaleza continua, en este proceso sólo se pueden trabajar en 3 y 4 niveles, respectivamente. Por ello, se decide correr un factorial completa 3x4 con 3 réplicas, aleatorizando las 36 pruebas.

Tabla 1 Observaciones experimentales

A: Velocidad de Alimentación	B: Profundidad de corte			
	0.15	0.18	0.21	0.24
0.2	74	79	82	99
	64	68	88	104
	60	73	92	96
0.25	92	98	99	104
	86	104	108	110
	88	88	95	99
0.3	99	104	108	114
	98	99	110	111
	102	95	99	107

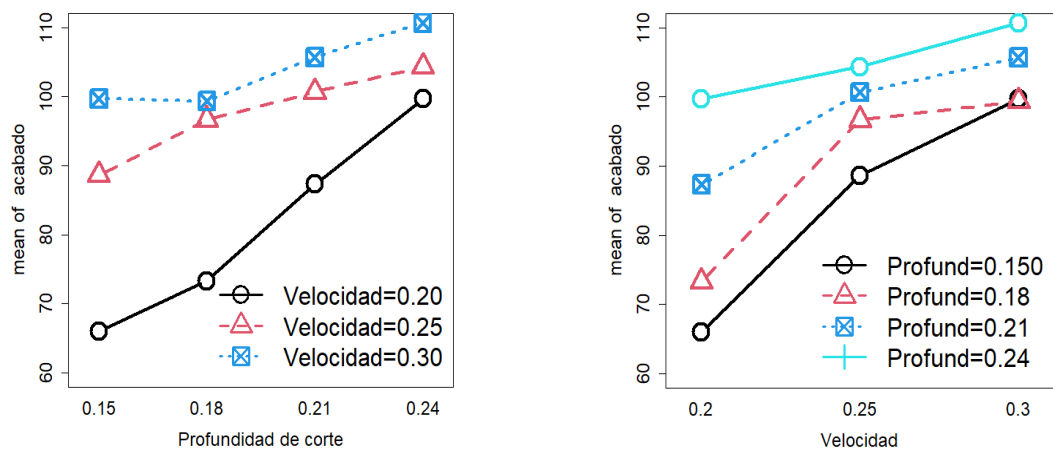


Figura 1. Gráficos de interacción

¹ Estudiante Estadística, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín.² Estudiante Estadística, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín³ Estudiante Estadística, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín⁴ Estudiante Estadística, Universidad Nacional de Colombia – Sede Medellín

De la figura 1, Hay una interacción de tipo leve ya que los perfiles de las medias no son del todo paralelos en ambos gráficos.

- Para las 3 velocidades de alimentación se obtuvo una media del acabado más baja en un nivel de profundidad de corte de 0.15
- Observamos que a medida que la profundidad de corte es mayor, también crece la media del acabado sin importar el nivel de velocidad de alimentación
- Vemos una leve intersección en la profundidad de corte 0.18 de la velocidad de alimentación 0.25 y 0.30, es decir, la media del acabado medido en gramos es muy similar en dichos tratamientos.
- La media del acabado a una velocidad de 0.3 es la misma para la profundidad de corte 0.18 y 0.15.

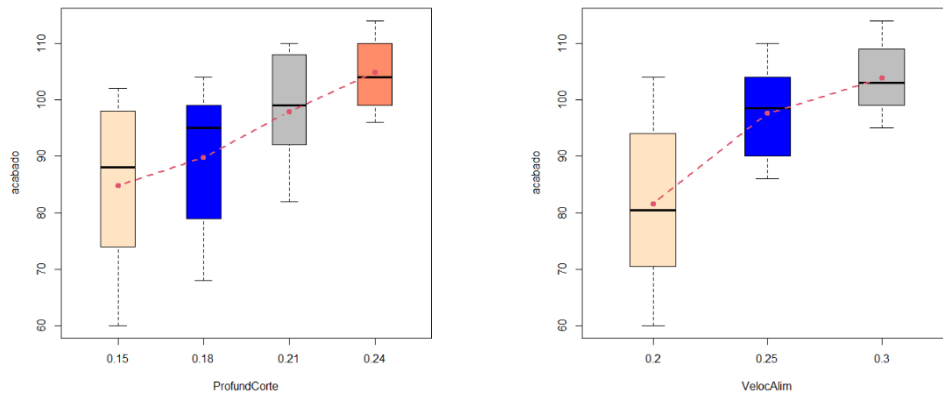


Figura 2. Distribución de la respuesta

De la figura 2, se observa en ambos graficos una tendencia creciente, es decir, la media del acabado incrementa a medida de que incrementa la profundidad de corte y la velocidad de alimentación, existe variación dentro de los tratamientos por lo cual se traslapan las cajas y a causa de esto podría haber enmascaramiento.

1.2 Modelo y test ANOVA

El modelo para el análisis de varianza corresponde entonces a:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

donde tomando como factor A: Profundidad de Corte y B: Velocidad de alimentación, con niveles $a = 4$ y $b = 3$ respectivamente y $n = 3$

Y_{ijk} - es el acabado del metal medido en la k-ésima unidad de la profundidad j con velocidad i

μ - es el promedio global del acabado medido en unidad de gramos

α_i es el efecto de la profundidad i sobre el promedio global de la cantidad de gramos del acabado

β_j - es el efecto de la velocidad j sobre el promedio global del tiempo de reparación de una unidad

$(\alpha\beta)_{ij}$ - es el efecto de la interacción de la profundidad i con la Velocidad j sobre el promedio global de la unidad de gramos del acabado.

ε_{ijk} - es el error aleatorio en la k-ésima réplica del tratamiento $A_i B_j$. Supuestos $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ iid

Restricciones para estimación por mínimos cuadrados $\sum_{i=1}^4 \alpha_i = \sum_{j=1}^3 \beta_j = \sum_{i=1}^4 (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^3 (\alpha\beta)_{ij} = 0$

1.3 Estimaciones e inferencias sobre parámetros del modelo ANOVA

Tabla 2 ANOVA

Fuente	g.l	Suma de	Cuadrados medios	F	Valor P
A	3	2125.11	708.37	24.6628	$1.65 \cdot 10^{-07}$
B	2	1334.4634	444.82115	55.0184	$1.086 \cdot 10^{-09}$
AB	6	786.0353	87.33726	3.2324	0.01797
Error	24	286.3250	17.89531		
Total	35	4531.934			

Test de hipótesis

El test de hipótesis sobre efectos de interacción:

$$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \text{ vs. } H_1: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

El estadístico de prueba:

$$F_3 = \frac{MS(AB)}{MSE} \stackrel{H_0}{\sim} f_{(a-1)(b-1), ab(n-1)}$$

$$F_3 = \frac{786.0353}{87.33726} = 3.2324 \stackrel{H_0}{\sim} f_{6,24}$$

Ya que $F_3 > f_{\gamma=(0.05,5,24)} = 3.2324$ se rechaza la hipótesis nula, es decir que, los factores profundidad de corte y velocidad de alimentación si tienen interacción que aporta significativamente a la varianza total de la cantidad de gramos de metal usados para el acabado. Por lo tanto, hay que ser cautos en la interpretación de los test de significancia sobre las componentes de varianza aportadas individualmente por cada factor.

Test sobre efectos principales de A

Se plantea la siguiente prueba de hipótesis.

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_4 = 0 \quad \text{vs. } H_1: \alpha_i \neq 0$$

El estadístico de prueba a usar es

$$F_1 = \frac{MSA}{MSE} = 55.0184 \stackrel{\text{bajo } H_0}{\sim} f_{3,24}$$

Y como $VP = P(f_{3,24} > F_1) \approx 0$, se concluye que la interacción no ha enmascarado la significancia de los efectos principales sobre la media del acabado, por parte de la profundidad del corte

Test sobre efectos principales de B

Se plantea la siguiente hipótesis.

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \quad \text{vs. } H_1: \beta_j \neq 0$$

El estadístico de prueba a usar es

$$F_2 = \frac{MSB}{MSE} = 24.6628 \stackrel{\text{bajo } H_0}{\sim} f_{2,24}$$

Y como $VP = P(f_{2,24} > F_2) \approx 0$, se concluye que la interacción no ha enmascarado la significancia de los efectos principales sobre la media del acabado, por parte de la velocidad de alimentación.

Comparación de medias factor profundidad corte en cada nivel del factor velocidad de alimentación

Tabla 3 Comparación de medias

Velocidad de alimentación	Grados de libertad	Suma	Error cuadrático medio	F	Valor P
0.2	3	2012,917	670,97222	23,360735	$2.675242 \cdot 10^{-07}$
0.25	3	406,250	135,41667	4,714700	$1.002982 \cdot 10^{-02}$
0.3	3	263,000	87,66667	3,052224	$4.788583 \cdot 10^{-02}$

En el nivel B_b se tiene el siguiente test:

Tabla 4 Test B_b

Test	SS ($A \mid B_b$)	$F_{A B_b}$	Valor P
$H_0: \mu_{1b} = \mu_{2b} = \dots = \mu_{ab}$ vs. $H_1: \text{algún par } \mu_{ib} \neq \mu_{i'b} \text{ con } i \neq i'$	$\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n (\bar{Y}_{ib\cdot} - \bar{Y}_{b\cdot})^2$	$F_{A B_b} = \frac{\frac{SS(A B_b)}{4-1}}{MSE}$	$P(f_{3,24}) > F_{A B_b}$

- Para la fila 1, $H_0: \mu_{1,1} = \mu_{2,1} = \mu_{3,1} = \mu_{4,1}$ vs. $H_1: \mu_{i,1} \neq \mu_{g,1}$ para al menos un par.
Los efectos simples de la profundidad de corte en la velocidad 0.2 no son iguales
- Para la fila 2, $H_0: \mu_{1,2} = \mu_{2,2} = \mu_{3,2} = \mu_{4,2}$ vs. $H_1: \mu_{i,2} \neq \mu_{g,2}$ para al menos un par.
Los efectos simples de la profundidad de corte en la velocidad 0.25 no son iguales
- Para la fila 3, $H_0: \mu_{1,3} = \mu_{2,3} = \mu_{3,3} = \mu_{4,3}$ vs. $H_1: \mu_{i,3} \neq \mu_{g,3}$ para al menos un par.
Los efectos simples de la profundidad de corte en la velocidad 0.3 no son iguales

Comparación de medias factor velocidad alimentación en cada nivel del factor profundidad corte

Tabla 5 Comparación de medias

Profundidad del Corte	Grados de libertad	Suma	Error cuadrático medio	F	Valor P
0.15	2	17682,222	884,11111	30,781431	2.371981×10^{-07}
0.18	2	12275,556	613,77778	21,369439	4.677223×10^{-06}
0.21	2	5388,889	269,44444	9,381044	9.768501×10^{-04}
0.24	2	1828,889	91,44444	3,183752	5.937800×10^{-02}

En el nivel A_a se tiene el siguiente test:

Tabla 6 Test

Test	SS ($B \mid A_a$)	$F_{A B_b}$	Valor P
$H_0: \mu_{a,1} = \dots = \mu_{a,b}$ vs. $H_1: \mu_{a,j} \neq \mu_{a,g}$	$SS(B A_a) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\bar{Y}_{aj\cdot} - \bar{Y}_{a\cdot})^2$	$F_{A B_b} = \frac{\frac{SS(A B_b)}{4-1}}{MSE}$	$P(f_{3,24}) > F_{A B_b}$

- Para la fila 1, $H_0: \mu_{1,1} = \mu_{1,2} = \mu_{1,3} = \mu_{1,4}$ vs. $H_1: \mu_{1,j} \neq \mu_{1,g}$ para al menos un par.
Los efectos simples de la velocidad de alimentación en la profundidad de corte 0.15 no son iguales
- Para la fila 1, $H_0: \mu_{2,1} = \mu_{2,2} = \mu_{2,3} = \mu_{2,4}$ vs. $H_1: \mu_{2,j} \neq \mu_{2,g}$ para al menos un par.

Los efectos simples de la velocidad de alimentación en la profundidad de corte 0.15 no son iguales

- Para la fila 1, $H_0: \mu_{3,1} = \mu_{3,2} = \mu_{3,3} = \mu_{3,4}$ vs. $H_1: \mu_{3,j} \neq \mu_{3,g}$ para al menos un par.

Los efectos simples de la velocidad de alimentación en la profundidad de corte 0.15 no son iguales

- Para la fila 1, $H_0: \mu_{4,1} = \mu_{4,2} = \mu_{4,3} = \mu_{4,4}$ vs. $H_1: \mu_{4,j} \neq \mu_{4,g}$ para al menos un par.

Los efectos simples de la velocidad de alimentación en la profundidad de corte 0.15 no son iguales

Los efectos simples de la velocidad de alimentación en la profundidad de corte 0.15 no son iguales. Con la finalidad de minimizar la cantidad de gramos de metal utilizados para el acabado lo más razonable es hacer uso del tratamiento A_1 B_1, es decir el nivel mas bajo de profundidad de corte y el nivel mas bajo de velocidad de alimentación.

1.4 Análisis de residuos y validación de supuestos

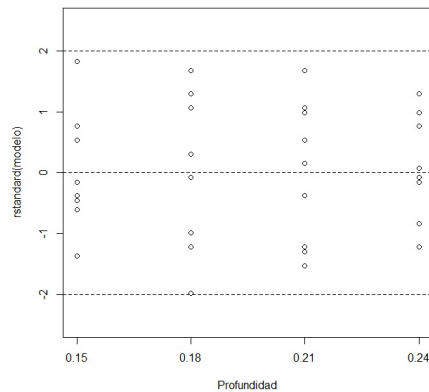


Figure 3 profundidad vs residuales estudentizados

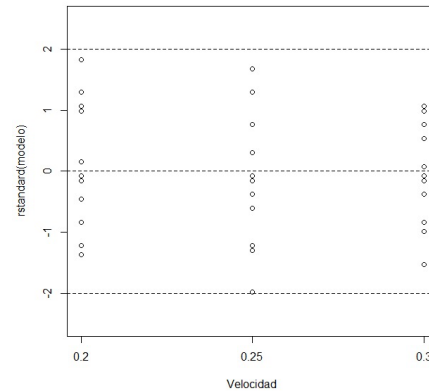


Figure 4 dia vs residuales estudentizados

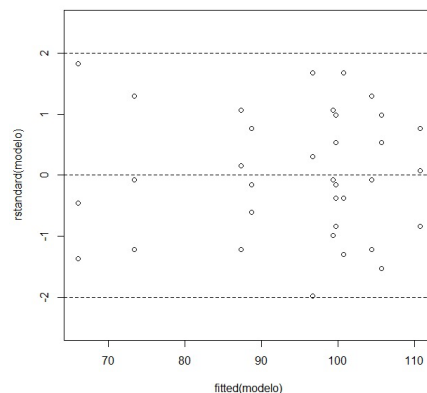


Figure 5 Residuales estudentizados

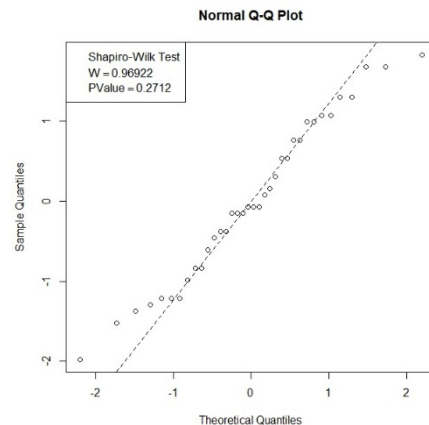


Figure 6
QQ-plot normalidad

En los gráficos de residuos internamente estudentizados no hay evidencia fuerte en contra de varianza constante ni de $E[\varepsilon_{ijk}] = 0 \forall i, j, k$. De acuerdo con el grafico de normalidad, es notable la leve desviación de los puntos y una pronunciada cola en el extremo inferior, sin embargo, esto no es suficiente para rechazar la hipótesis de normalidad

$$H_0: \varepsilon_{ij} \sim \text{Normal vs. } H_1: \varepsilon_{ij} \text{ no son Normales}$$

Haciendo uso del test de shapiro Wilk para normalidad, se obtiene un Valor-p= 0.44, por lo cual no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, es decir que los datos siguen una distribución normal.

1.5 Código R usado

```
#Considere un experimento en el que se quiere estudiar el efecto de los factores A: velocidad de alimentación y B: profundidad
de corte,

#sobre Y: el acabado de un metal. Aunque los factores son de naturaleza continua, en este proceso sólo se pueden trabajar en 3
y 4 niveles,

#respectivamente. Por ello, se decide correr un factorial completo 3x4 con 3 réplicas, aleatorizando las 36 pruebas.

#a. Analisis Descriptivo

rm(list=ls(all=TRUE))

library(gmodels);library(daewr);library(agricolae);library(lsmmeans)

problema4=data.frame(VelocAlim=factor(rep(c(0.2,0.25,0.3),each=12)),

                     ProfundCorte=factor(rep(c(0.15,0.18,0.21,0.24),times=9)),acabado=scan())

74 79 82 99

64 68 88 104

60 73 92 96

92 98 99 104

86 104 108 110

88 88 95 99

99 104 108 114

98 99 110 111

102 95 99 107

attach(problema4)

#GRAFICOS DE INTERACCIÓN

interaction.plot(ProfundCorte,VelocAlim,acabado,ylim=c(60,110),type="b",legend=F,pch=c(1,2,7),lwd=4,lty=1:3,cex=3,

                 xlab="Profundidad de corte",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,col=c(1,2,4))

legend("bottomright",legend=c("Velocidad=0.20","Velocidad=0.25","Velocidad=0.30"),lty=1:3,pch=c(1,2,7),pt.lwd=3,

      pt.cex=3,cex=2,lwd=3,bty="n",col=c(1,2,4))

interaction.plot(VelocAlim,ProfundCorte,acabado,ylim=c(60,110),type="b",legend=F,pch=c(1,2,7),lwd=4,lty=1:3,cex=3,

                 xlab="Velocidad",cex.lab=1.5,cex.axis=1.5,col=c(1,2,4,5))

legend("bottomright",legend=c("Profund=0.150","Profund=0.18","Profund=0.21","Profund=0.24"),lty=1:3,pch=c(1,2,7,3),pt.lwd=3,

      pt.cex=3,cex=2,lwd=3,bty="n",col=c(1,2,4,5))

mediasProfundCorte=sapply(split(acabado,ProfundCorte),mean)

mediasVelocAlim=sapply(split(acabado,VelocAlim),mean)

boxplot(acabado~ProfundCorte,xlab="ProfundCorte",ylab="acabado",boxwex=0.4,col=c("bisque","blue","gray","salmon1"))

lines(1:4,mediasProfundCorte,type="b",pch=19,col=2,lty=2,lwd=2)
```

```

boxplot(acabado~VelocAlim,xlab="VelocAlim",ylab="acabado",boxwex=0.4,col=c("bisque","blue","gray"))

lines(1:3,mediasVelocAlim,type="b",pch=19,col=2,lty=2,lwd=2)

#b

#AJUSTE MODELO ANOVA CON INTERACCIÓN Y CÁLCULO TABLA ANOVA

modelo=aov(acabado~ProfundCorte*VelocAlim)

anova(modelo)

#MEDIAS DE TRATAMIENTOS CON I.C DEL 95%

summary(lsmmeans(modelo,~ProfundCorte*VelocAlim))

#C

#FUNCIÓN DE USUARIO PARA EVALUAR IGUALDAD DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS mu_ij

#EN CADA NIVEL DE LOS FACTORES. SUPONE UN DCA BALANCEADO:

#argumento modelo es para especificar el objeto R en que previamente

#se guardó el ajuste del modelo anova con función aov

#nreplicas se refiere al número de replicaciones de cada tratamiento

Comparmediasslices2=function(modelo,nreplicas){

  respuesta=modelo$model[,1]

  factor1=modelo$model[,2]

  factor2=modelo$model[,3]

  df1=length(levels(factor1))-1

  df2=length(levels(factor2))-1

  dfe=anova(modelo)[1][4,]

  mediastrat=summary(lsmmeans(aov(respuesta~factor1*factor2),~factor1*factor2))

  MS2.1=nreplicas*sapply(split(mediastrat$lsmmean,mediastrat$factor1),var)

  MS1.2=nreplicas*sapply(split(mediastrat$lsmmean,mediastrat$factor2),var)

  SS2.1=df2*MS2.1

  SS1.2=df1*MS1.2

  MSE=anova(modelo)[3][4,]

  F02.1=MS2.1/MSE

  F01.2=MS1.2/MSE

  pvalue2.1=pf(F02.1,df1=df2,df2=dfe,lower.tail=F)

  pvalue1.2=pf(F01.2,df1=df1,df2=dfe,lower.tail=F)

  slicebyfactor2.1=data.frame(niveles=modelo$xlevels[1],Df=df2,"Sum\ Sq"=SS2.1,"Mean Sq"=MS2.1,F0=F02.1,"P value"=pvalue2.1)

```

```

slicebyfactor1.2=data.frame(niveles=modelo$xlevels[2],Df=df1,"Sum\ Sq"=SS1.2,"Mean Sq"=MS1.2,F0=F01.2,"P value"=pvalue1.2)

cat("Significancia Efectos",names(modelo$model)[2],"*",names(modelo$model)[3],"sobre respuesta",names(modelo$model)[1],"en
cada nivel de",names(modelo$xlevels)[1],"\\n")

print(slicebyfactor2.1)

cat("\\n")

cat("Significancia Efectos",names(modelo$model)[2],"*",names(modelo$model)[3],"sobre respuesta",names(modelo$model)[1],"en
cada nivel de",names(modelo$xlevels)[2],"\\n")

print(slicebyfactor1.2)

}

#Usando la función creada sobre el modelo anova ajustado previamente

Comparmediasslices2(modelo=modelo,nreplicas=3)

#D

# e

shapiro.test(rstandard(modelo))

#OBTENIENDO GRÁFICOS DE RESIDUOS ESTUDENTIZADOS INTERNAMENTE

layout(rbind(c(1,1,2,2),c(3,3,4,4)))

stripchart(rstandard(modelo)~ProfundCorte,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,cex=1,xlab="Profundidad")

abline(h=c(-2,0,2),lty=2)

stripchart(rstandard(modelo)~VelocAlim,vertical=TRUE,ylim=c(-2.5,2.5),pch=1,cex=1,xlab="Velocidad")

abline(h=c(-2,0,2),lty=2)

plot(fitted(modelo),rstandard(modelo),ylim=c(-2.5,2.5))

abline(h=c(-2,0,2),lty=2)

qqnorm(rstandard(modelo))

qqline(rstandard(modelo),lty=2)

legend("topleft",legend=c("Shapiro-Wilk Test",expression(W==0.96922),expression(PValue== 0.2712)),cex=1.1

```


2. Parte II problema 4

2.1 Formulación del problema y análisis descriptivo

En un proceso productivo se está estudiando el efecto de la variación de las máquinas y de los cambios de condiciones de operación de día a día sobre la cantidad de producción obtenida. Se seleccionaron aleatoriamente cuatro máquinas y cuatro días dentro del periodo de mayor producción en el año y se registró la productividad como respuesta para dos corridas diarias con cada máquina seleccionada. Los datos correspondientes aparecen a continuación.

Tabla 3 Observaciones experimentales

Máquina	Día							
	D1		D2		D3		D4	
M1	142.3	144.0	134.9	146.3	148.6	156.5	152.0	151.4
M2	148.6	146.9	145.2	146.3	148.6	153.1	149.7	152.0
M3	142.9	147.4	125.9	127.6	135.5	138.9	142.9	142.3
M4	133.8	133.2	108.9	107.5	132.1	149.7	141.7	141.2

En la figura 2, la cual corresponde a las interacciones para los tratamientos que fueron observados, los perfiles de medias no son paralelos, esto puede ser evidencia de una componente de varianza significativa debido a la interacción de los dos factores, por lo cual los resultados concernientes a los diferentes días en relación a cambios en el en tipo de maquina no varían de forma congruente con dichos cambios o viceversa. Los resultados en la cantidad de producción varían tanto con el día de producción como con el tipo de máquina, esto es igualmente corroborado por las figuras de los boxplots.

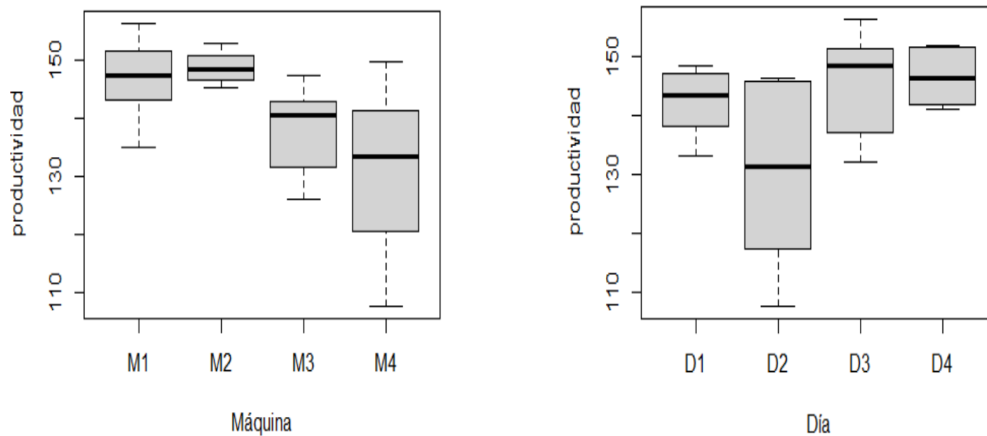


Figura 3. Distribución de la respuesta según el tipo de máquina y el día

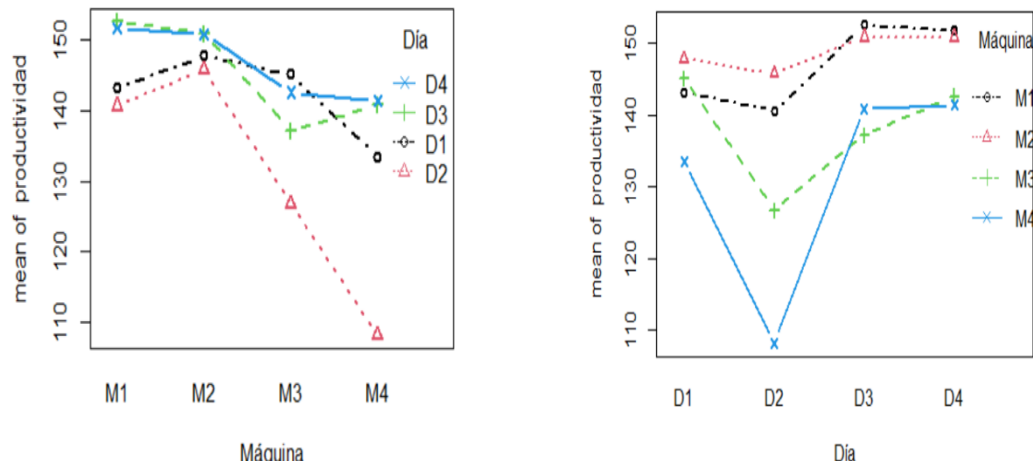


Figura 4. Gráficos de interacción

2.2 Modelo y test ANOVA

De acuerdo con el planteamiento del problema, se trata de un experimento bifactorial, ambos factores con efectos aleatorios, en un diseño completamente aleatorizado. Si tomamos como factor A: Día de producción, y B: Tipo de máquina, el modelo correspondiente es:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, n$$

con niveles $a = 4$ y $b = 4$ respectivamente y $n = 2$, Y_{ijk} es la cantidad de producción en la k -ésima réplica del tratamiento ij . μ es el promedio global de la cantidad de producción. A_i es el efecto aleatorio del día sobre el promedio global de la nitidez de impresión, $A_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\alpha^2)$. B_j es el efecto aleatorio de los tipos de máquina sobre el promedio global de la cantidad de producción, $B_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\beta^2)$. $(AB)_{ij}$ es el efecto aleatorio de la interacción de los días con los tipos de máquina, sobre el promedio global de la cantidad de producción, $(AB)_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_{\alpha\beta}^2)$. ε_{ijk} es el error aleatorio en la k -ésima réplica del tratamiento ij . Supuestos $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, ε_{ijk} , A_i , B_j y $(AB)_{ij}$ son mutuamente independientes.

2.3 Estimaciones e inferencias sobre parámetros del modelo ANOVA

Tabla 4 ANOVA

Fuente	g.l	Suma de	Cuadrados medios	F	Valor P
A	3	1647.2784	549.09281	6.29	0.01371
B	3	1334.4634	444.82115	5.09	0.02484
AB	9	786.0353	87.33726	4.88	0.00294
Error	16	286.3250	17.89531		
Total	17	4054.102			

- Significancia de la componente de varianza de la interacción día de producción con máquina**

El test de hipótesis sobre la significancia de la componente de varianza debida a la interacción es:

$$H_0: \sigma_{\alpha\beta}^2 = 0 \text{ vs. } H_1: \sigma_{\alpha\beta}^2 > 0$$

El estadístico de prueba:

$$F_3 = \frac{MS(AB)}{MSE} \stackrel{H_0}{\sim} f_{(3-1)(3-1), 3 \cdot 3(2-1)}$$

$$F_3 = \frac{87.33726}{17.89531} = 4.8804 \stackrel{H_0}{\sim} f_{9,16}$$

Ya que $F_3 > f_{\gamma=0.05,9,16} = 2.5376$ se rechaza la hipótesis nula, es decir que, los factores tipo de máquina y día de producción si tienen interacción que aporta significativamente a la varianza total de la cantidad de producción. Por lo tanto, hay que ser cautos en la interpretación de los test de significancia sobre las componentes de varianza aportadas individualmente por cada factor.

- Significancia de la componente de varianza del factor A: efecto aleatorio día**

Se plantea la siguiente prueba de hipótesis.

$$H_0: \sigma_\alpha^2 = 0 \text{ vs. } H_1: \sigma_\alpha^2 > 0$$

El estadístico de prueba a usar es

$$F_1 = \frac{MSA}{MS(AB)} = 6.29 \stackrel{\text{bajo } H_0}{\sim} f_{3,25}$$

Y como $VP = P(f_{2,6} > F_2) = 0.01371$ es pequeño, se concluye que la variación del día aporta significativamente a la varianza total de la cantidad de producción. Sin embargo, debido a que la interacción es significativa este resultado puede estar enmascarado.

- **Significancia de la componente de varianza del factor B: efecto aleatorio de la máquina**

Se plantea la siguiente hipótesis.

$$H_0: \sigma_\beta^2 = 0 \text{ vs. } H_1: \sigma_\beta^2 > 0$$

El estadístico de prueba a usar es

$$F_2 = \frac{MSB}{MS(AB)} = 5.09 \stackrel{\text{bajo } H_0}{\sim} f_{3,25}$$

Y como $VP = P(f_{3,25} > F_2) = 0.02484$ es pequeño, se concluye que la variación de la máquina aporta significativamente a la varianza total de la cantidad de producción. Sin embargo, debido a que la interacción es significativa este resultado puede estar enmascarado y no se recomienda usarlo.

Tabla 5 Componentes de varianza

Fuente	Componente de varianza estimada	Proporción respecto a la varianza total
A	$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{MSA - MS(AB)}{nb} = 44.69$	$\frac{\hat{\sigma}_\alpha^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}^2} = 0.2883$
B	$\sigma_\beta^2 = \frac{MSB - MS(AB)}{na} = 57.72$	$\frac{\sigma_\beta^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2} = 0.3723$
AB	$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 = \frac{MS(AB) - MSE}{n} = 34.72$	$\frac{\sigma_\beta^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}^2} = 0.2239$
Error	$\hat{\sigma}^2 = MSE = 17.90$	$\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\beta^2 + \hat{\sigma}_{\alpha\beta}^2 + \hat{\sigma}^2} = 0.1155$

De los análisis previos, se puede observar que de la variación total, cerca del 88.45% es debida a la variación de los factores A: día y B: tipo de máquina y de su respectiva interacción AB.

2.4 Análisis de residuos y validación de supuestos

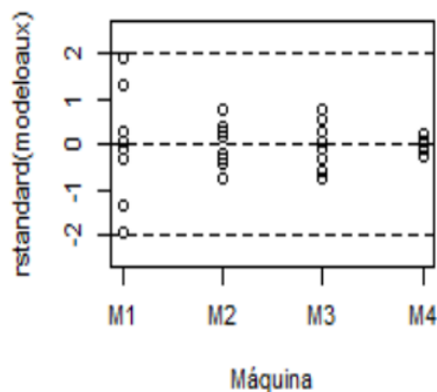


Figure 5 Tipo máquina vs residuos estudentizados

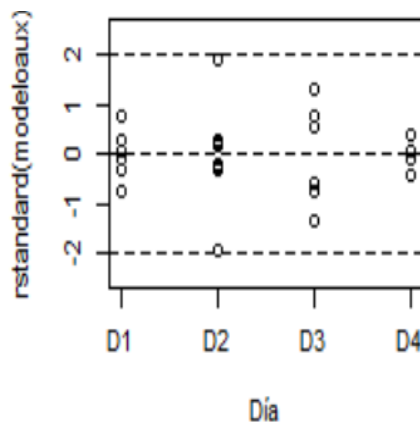


Figure 6 Día vs residuos estudentizados

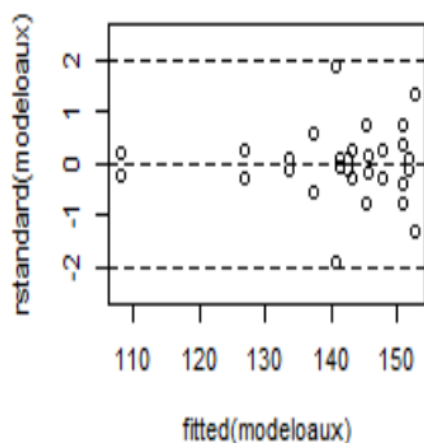


Figure 7 Ajustados vs. estudentizados

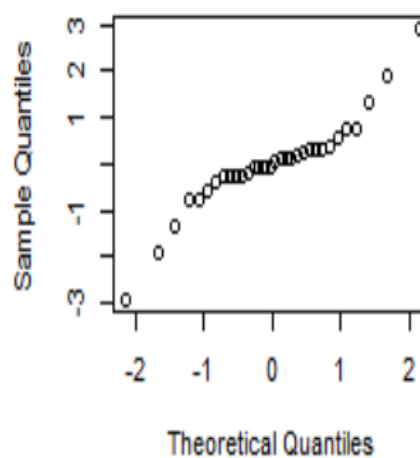


Figure 8 QQ-plot normalidad

En la figura 5 se observa evidencia fuerte en contra de $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \forall i, j, k$ ya que la diferencia en dispersión parece aumentar, aunque en las figuras 6 y 7 esta desviación no parece ser grave, ya que no supera las líneas límite. Por otro lado no hay evidencia contra $E[\varepsilon_{ijk}] = 0 \forall i, j, k$. Además, de acuerdo a la figura 8 se evidencia una desviación del supuesto de normalidad aunque se debe realizar un test formal para concluir correctamente.

$$H_0: \varepsilon_{ij} \sim \text{Normal vs. } H_1: \varepsilon_{ij} \text{ no son Normales}$$

Haciendo uso del test de shapiro Wilk para normalidad, se obtiene un Valor-p= 0.00677, por lo cual se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, es decir que los datos no siguen una distribución normal.

2.5 Código R usado

```
rm(list=ls(all=TRUE))
library(daewr)
library(lme4)
library(MASS)

problema4=data.frame(Máquina=factor(rep(c("M1", "M2", "M3", "M4"), each=8)),
Día=factor(rep(c("D1", "D1", "D2", "D2", "D3", "D3", "D4", "D4"), times=4)),productividad=scan())

142.3 144.0 134.9 146.3 148.6 156.5 152.0 151.4
148.6 146.9 145.2 146.3 148.6 153.1 149.7 152.0
142.9 147.4 125.9 127.6 135.5 138.9 142.9 142.3
133.8 133.2 108.9 107.5 132.1 149.7 141.7 141.2
```

problema4

```

attach(problema4)

interaction.plot(Máquina,Día,productividad,type="b",lwd=2,col=1:4,pch=1:4)
interaction.plot(Día,Máquina,productividad,type="b",lwd=2,col=1:4,pch=1:4)

modeloaux=aov(productividad~Máquina*Día) #correr modelo como si fuese de efectos fijos
Anovafactorialaleatoriosconinteraccion(modelo=modeloaux) #Anova correcta considerando efectos aleatorios

#con interacción

#sumas de cuadrados y cuadrado medios modelo de efectos aleatorios con interacción modelo=aov(productividad~Error(Máquina*Día))
summary(modelo)

#componentes de varianza modelo de efectos aleatorios con interacción
modelob=lmer(productividad~1+(1|Máquina)+(1|Día)+(1|Máquina:Día)) summary(modelob)

shapiro.test(rstandard(modeloaux))

#OBTENIENDO GRÁFICOS DE RESIDUOS ESTUDENTIZADOS,
layout(rbind(c(1,1,2,2),c(3,3,4,4))) stripchart(rstandard(modeloaux)~Máquina,vertical=TRUE,ylim=c(-
2.5,2.5),pch=1,cex=1,xlab="Máquina") abline(h=c(-2,0,2),lty=2) stripchart(rstandard(modeloaux)~Día,vertical=TRUE,ylim=c(-
2.5,2.5),pch=1,cex=1,xlab="Día") abline(h=c(-2,0,2),lty=2)
plot(fitted(modeloaux),rstandard(modeloaux),ylim=c(-2.5,2.5))
abline(h=c(-2,0,2),lty=2)
qqnorm(rstandard(modeloaux))
qqline(rstandard(modeloaux),lty=2)
legend("topleft",legend=c("Shapiro-Wilk Test",expression(W==0.90151),expression(PValue== 0.00677)),cex=1.1)

detach(problema4)

```

Problema 3

En un proceso de producción de papel se desea estudiar los efectos producidos por el porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa (Factor A), la presión del tanque (Factor B) y del tiempo de cocción de la pulpa (Factor C), sobre la resistencia del papel. Se fijan tres niveles de la concentración de la fibra de madera y de la presión, y dos niveles para el tiempo de cocción; considere por tanto todos los factores con efectos fijos. En un diseño completamente aleatorizado se asignan dos réplicas por tratamiento y los datos obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 6 Observaciones experimentales

A: Concentración porcentual (%) de fibra	C: Tiempo cocción 3h			C: Tiempo cocción 4h		
	B: Presión psi			B: Presión psi		
	400	500	650	400	500	650
2	196.6	197.7	199.8	198.4	199.6	200.6
	196.0	196.0	199.4	198.6	200.4	200.9
4	198.5	196.0	198.4	197.5	198.7	199.6
	197.2	196.9	197.6	198.1	198.0	199.0
8	197.5	195.6	197.4	197.6	197.0	198.5
	196.6	196.2	198.1	198.4	197.8	199.8

A continuación se pueden observar las figuras 1 y 2 donde se presentan los perfiles de medias para la interacción AB de los factores porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa (factor A) y la presión del tanque (factor B) en los niveles del tiempo de cocción (factor C), tres y cuatro horas respectivamente. Para este problema notamos que los perfiles parecen no similares por lo cual se podría pensar que la triple interacción es significativa. En la figura 5, cuando se fijan 4 horas de cocción, al dos y cuatro por ciento de concentración de fibra parece que no hay interacción porque los dos perfiles de medias son casi paralelos, mientras que al nivel del 8% la concentración aumenta a un nivel de 400psi y disminuye a un nivel de 500 psi. Sin embargo, es necesario determinar si estadísticamente se encuentra evidencia de interacción significativa.

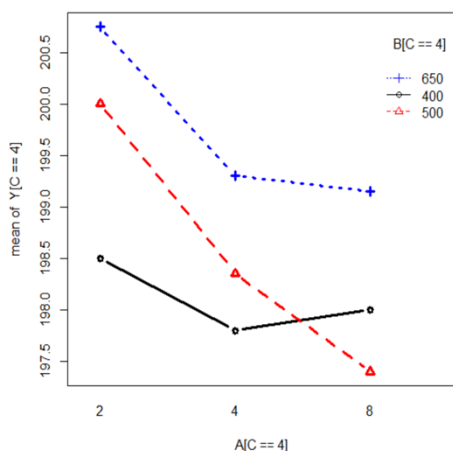


Figure 9 Interacción A*B cuando C=4h

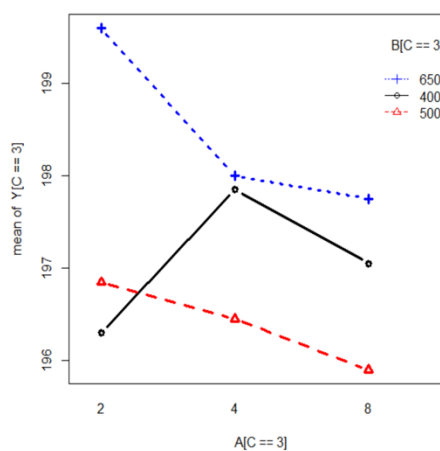


Figure 10 Interacción A*B cuando C=3h

Diagnóstico de posible interacción entre el porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa y el tiempo de cocción de la pulpa

La figura 7, la cual permite diagnosticar la interacción entre el factor A: porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa y el factor C: tiempo de cocción de la pulpa, dado que los perfiles de media no son paralelos, se observa una interacción leve en el nivel 4 de A respecto al factor C, por lo tanto, podría decirse que la interacción AC es significativa.

En esta figura parece ser que la mejor combinación de factores para la resistencia del papel es una concentración de fibra de madera de 2% y un tiempo de cocción de 4 horas de la pulpa.

Diagnóstico de posible interacción entre el porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa y presión del tanque

En la gráfica 8 es evidente que estos dos factores interactúan (factor A: porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa y factor B: presión del tanque) ya que los perfiles de medias no son en lo absoluto paralelos. Tanto en esta figura como en la anterior, parece ser que la resistencia de papel es más alta cuando la concentración de fibra de madera es de un 2%

Diagnóstico de posible interacción entre tiempo de cocción de la pulpa y presión del tanque

En la figura 11 se observan los perfiles de medias de la presión del tanque y el tiempo de cocción de la pulpa. Aquí también se puede notar que los perfiles no son paralelos. Por tanto, es necesario evaluar el efecto conjunto de ambos factores sobre la respuesta. Respecto a la combinación de estos dos factores, esta gráfica indica que la resistencia del papel es mayor a un tiempo de cocción de 4 horas y una presión del tanque de 350 psi.

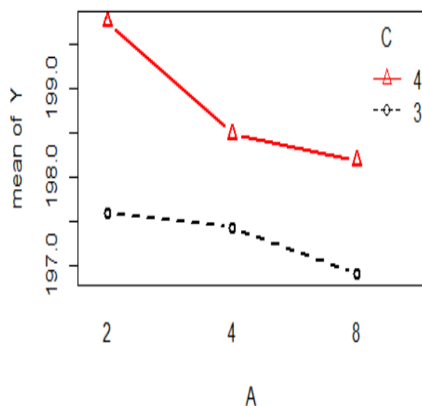


Figure 11 Interacción doble A*C

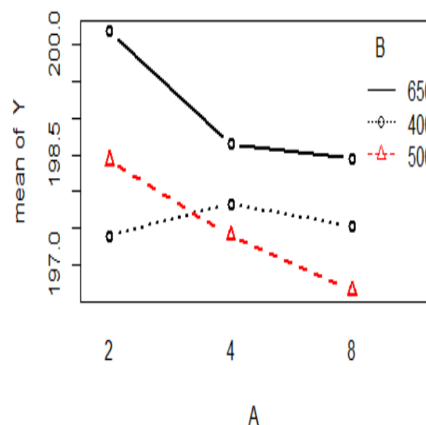


Figure 12 Interacción doble A*B

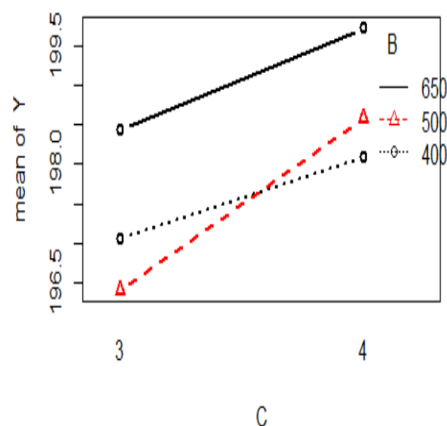


Figure 13 Interacción B*C

Modelo y test ANOVA

- Possible Triple interacción**

El modelo estadístico (con $a=3$, $b=3$, $c=2$, $n=2$) es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\lambda)_{ik} + (\beta\lambda)_{jk} + (\alpha\beta\lambda)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

En la cual α_i , β_j y λ_k , con denotan los efectos principales sobre la resistencia del papel promedio global de los factores A: porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa, B: presión del tanque y C: tiempo de cocción de la pulpa, en sus niveles $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$ $k = 1, 2$ respectivamente. Por otro lado, $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\lambda)_{ik}$ y $(\beta\lambda)_{jk}$ denotan los efectos de las interacciones de a dos factores, y $(\alpha\beta\lambda)_{ijk}$ los efectos de la interacción triple, con $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ sujetos a restricciones $\sum_{i=1}^{a=3} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b=3} \beta_j = \sum_{k=1}^{c=2} \lambda_k = 0$ y además las sumas de las interacciones sobre cualesquiera de los índices i , j y k , son iguales a cero.

Se procede a realizar la prueba sobre la significancia de los efectos de la interacción triple:

$$H_0: (\alpha\beta\lambda)_{ijk} = 0 \text{ para todo } i, j, k, i = 1, 2, 3 \ j = 1, 2 \ k = 1, 2$$

$$H_1: \text{algún } (\alpha\beta\lambda)_{ijk} \neq 0$$

Tabla 7 ANOVA

Fuente	SC	GL	CM	F0	Valor P
A	7.7639	2	3.8819	10.6193	0.0008
B	19.3739	2	9.6869	55.3951	6.745×10^{-7}
C	20.25	1	20.25	26.4992	4.327×10^{-6}
AC	2.0817	2	1.0408	2.8473	0.0842
AB	6.0911	4	1.5228	4.1657	0.0146
CB	2.1950	2	1.0975	3.0023	0.0749
ACB	1.9733	4	0.4933	1.3495	0.2903
Error	6.5800	18	0.3656		

Se tiene el estadístico de prueba $F_0 = MS(ABC)/MSE = 1.3495$, $F_0 \sim f_{4,18}$ y con $VP = P(f_{4,18} > 1.3495) = 0.2903$, razón por la cual se puede concluir que no hay evidencia de interacción triple entre los factores de porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa, presión del tanque y tiempo de cocción de la pulpa, a pesar de lo mostrado en las gráficas de perfiles 4 y 5. A continuación, se replantea el modelo sin triple interacción.

- Sin triple interacción**

El modelo estadístico (con $a=3$, $b=3$, $c=2$, $n=2$) es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\lambda)_{ik} + (\beta\lambda)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

En la cual α_i, β_j y λ_k , denotan los efectos principales sobre la resistencia del papel promedio global de los factores A: porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa, B: presión del tanque y C: tiempo de cocción de la pulpa, en sus niveles $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$ $k = 1, 2$ respectivamente $(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\lambda)_{ik}$ y $(\beta\lambda)_{jk}$ con $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ sujetos a restricciones $\sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = \sum_{k=1}^c \lambda_k = 0$ y además las sumas de las interacciones sobre cualesquiera de los índices i, j y k , son iguales a cero. Por otro lado, $(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\lambda)_{ik}$ y $(\beta\lambda)_{jk}$ denotan los efectos de las interacciones de a dos factores, con $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ y para efectos de estimación por mínimos cuadrados se impone como restricciones que $\sum_{i=1}^{a=3} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b=3} \beta_j = \sum_{k=1}^{c=2} \lambda_k = 0$ y además las sumas de las tres interacciones dobles sobre cualquiera de los índices i, j y k , son iguales a cero.

Tabla 8 ANOVA

Fuente	SC	GL	CM	F0	Valor P
A	7.7639	2	3.8819	9.9847	0.0008211
B	19.3739	1	9.6869	24.9158	2.224×10^{-6}
C	20.25	2	20.25	52.0850	3.123×10^{-7}
AB	6.0911	4	1.5228	3.9167	0.0150436
AC	2.0817	2	1.0408	2.6771	0.0910703
CB	2.1950	2	1.0975	2.8229	0.0810470
Error	8.5533	22	0.3888		

Con la tabla ANOVA previa, se realizan los test correspondientes a las dobles interacciones, Note en esta tabla que el SSE suma los valores del SSE y del SS(ABC) del modelo 1, y lo mismo respecto a sus grados de libertad.

Tabla 9 Test de interacciones dobles

Interacción A*B	Interacción A*C	Interacción C*B
$H_0: (\alpha\beta)_{ij} = 0$ para todo i, j H_1 : algún $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$	$H_0: (\alpha\lambda)_{ik} = 0$ para todo i, k H_1 : algún $(\alpha\lambda)_{ik} \neq 0$ $i = 1, 2, 3, k = 1, 2$	$H_0: (\beta\lambda)_{jk} = 0$ para todo j, k H_1 : algún $(\beta\lambda)_{jk} \neq 0$ $j = 1, 2, 3, k = 1, 2$
$F_0 = \frac{MS(AB)}{MSE} = 3.9167$ $F_0 \stackrel{H_0}{\sim} f_{4,18}, VP = P(f_{4,18} > 3.9167) = 0.0150$	$F_0 = MS(AC)/MSE = 2.6771$ $F_0 \stackrel{H_0}{\sim} f_{2,14}, VP = P(f_{2,14} > 2.677) = 0.09107$	$F_0 = MS(BC)/MSE = 2.8229$ $F_0 \stackrel{H_0}{\sim} f_{2,14}, VP = P(f_{2,14} > 2.8229) = 0.0810470$
Decisión: Si hay interacción significativa entre los factores proporción de la sustancia y tratamiento de la superficie	Decisión: Si hay interacción significativa entre los factores proporción de la sustancia y tipo de sustancia	Decisión: Si hay interacción significativa entre los factores tratamiento de la superficie y tipo de sustancia

- Sin triple interacción y sin efecto de interacción**

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \lambda_k + (\alpha\lambda)_{ik} + (\beta\lambda)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$

En la cual α_i, β_j y λ_k , denotan los efectos principales sobre la resistencia del papel promedio global de los factores A: porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa, B: presión del tanque y C: tiempo de cocción de la pulpa, en sus niveles $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$ $k = 1, 2$ respectivamente $(\alpha\lambda)_{ik}$ y $(\beta\lambda)_{jk}$ con $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ y para efectos de estimación por mínimos cuadrados se impone como restricciones que $\sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = \sum_{k=1}^c \lambda_k = 0$ y además las sumas de las dos interacciones dobles sobre cualquiera de los índices i, j y k , son iguales a cero.

Por otro lado, $(\alpha\lambda)_{ik}$ y $(\beta\lambda)_{jk}$ denotan los efectos de las interacciones de a dos factores, con $\varepsilon_{ijk} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ y para efectos de estimación por mínimos cuadrados se impone como restricciones que $\sum_{i=1}^{a=3} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b=3} \beta_j = \sum_{k=1}^{c=2} \lambda_k = 0$ y además las sumas de las tres interacciones dobles sobre cualquiera de los índices i, j y k , son iguales a cero.

Resultado de la tabla ANOVA.

Tabla 8 ANOVA

Fuente	SC	GL	CM	F0	Valor P
A	7.7639	2	3.8819	8.7604	0.0013
B	19.3739	2	9.6869	21.8605	3.925×10^{-6}
C	20.25	1	20.25	45.6982	5.426×10^{-7}
AB	6.0911	4	1.5228	3.4365	0.0234
BC	2.1850	2	1.0975	2.4767	0.1052
Error	10.6350	24	0.4431		
Total					

Con la tabla ANOVA previa, se realizan los test correspondientes a las dobles interacciones.

Tabla 10 test interacciones dobles

Interacción A*B	Interacción B*C
$H_0: (\alpha\lambda)_{ik} = 0$ para todo i, k $H_1: \text{algún } (\alpha\lambda)_{ik} \neq 0$ $i = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$	$H_0: (\beta\lambda)_{jk} = 0$ para todo j, k $H_1: \text{algún } (\beta\lambda)_{jk} \neq 0$ $j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$
$F_0 = MS(AC)/MSE = 5.77$ $F_0 \stackrel{H_0}{\sim} f_{2,16}, VP = P(f_{2,16} > 5.77) = 0.0129$	$F_0 = MS(AC)/MSE = 5.77$ $F_0 \stackrel{H_0}{\sim} f_{2,16}, VP = P(f_{2,16} > 5.77) = 0.0129$
Decisión: Si existe interacción significativa entre el porcentaje de concentración de fibra de madera en la pulpa y la presión del tanque.	Decisión: Si existe interacción significativa entre la presión del tanque y el tiempo de cocción de la pulpa.

- **Maximizar la resistencia del papel**

Para maximizar la resistencia de papel se podría usar el tratamiento donde se tenga una concentración porcentual del 2% de fibra, un tiempo de cocción de 4 horas con una presión de 650 psi

Tabla 11 Medias de tratamientos

A	B	C	Media	S.E	df	Int. Inferior	Int.Superior
2	400	3	196.6	0.3888	22	195.7	197.4
4	400	3	197.5	0.3888	22	196.7	198.3
8	400	3	197.1	0.3888	22	196.3	197.9
2	500	3	197.0	0.3888	22	196.2	197.8
4	500	3	196.5	0.3888	22	195.7	197.3
8	500	3	195.7	0.3888	22	194.9	196.5
2	650	3	199.2	0.3888	22	198.4	200.0
4	650	3	198.2	0.3888	22	197.4	199.0
8	650	3	197.9	0.3888	22	197.1	198.7
2	400	4	198.2	0.3888	22	197.4	199.1
4	400	4	198.1	0.3888	22	197.3	198.9
8	400	4	197.9	0.3888	22	197.1	198.7
2	500	4	199.8	0.3888	22	199.0	200.7
4	500	4	198.3	0.3888	22	197.5	199.1
8	500	4	197.6	0.3888	22	196.8	198.4
2	650	4	201.2	0.3888	22	200.3	202.0
4	650	4	199.1	0.3888	22	198.3	199.9
8	650	4	199.0	0.3888	22	198.2	199.8

Validación de supuestos

- **Varianza**

Las figuras 14 a 17 presentan los gráficos de residuales estandarizados obtenidos del modelo 2. Sin considerar los outliers (observaciones con residuales por fuera de las bandas ± 2): En la figura 14 no hay una evidencia grafica contundente en contra del supuesto de varianza constante de los errores del modelo. En la figura 17 no se observa una evidencia fuerte contra el supuesto de varianza constante.

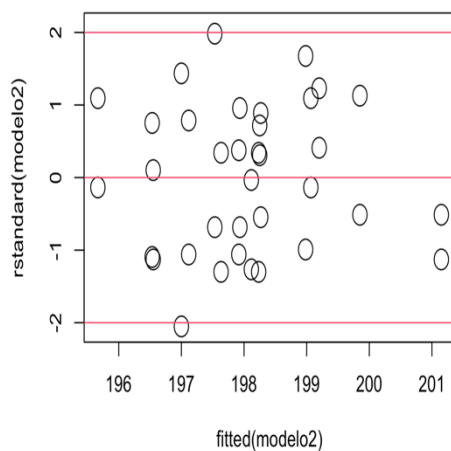


Figure 14 Residuales estandarizados vs. valores ajustados

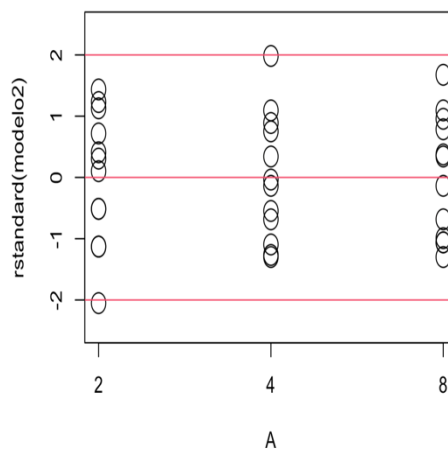


Figure 15 Residuales estandarizados vs. porcentaje de fibra

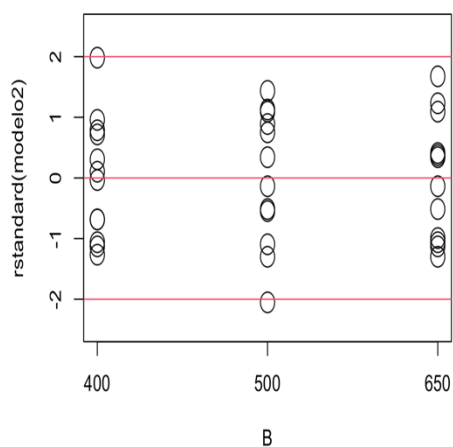


Figure 16 Residuales estandarizados vs B

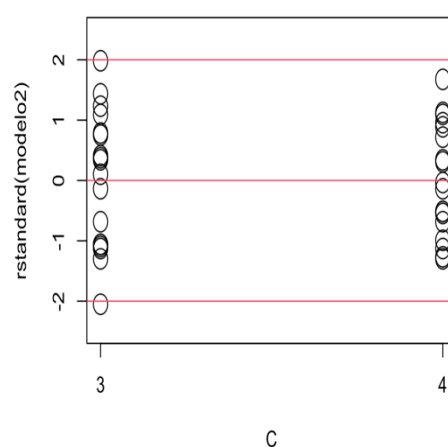


Figure 17 Residuales estandarizados vs. C

• Normalidad

Respecto a la normalidad de los errores, a continuación se presentan los resultados del test de Shapiro Wilk sobre residuos estandarizados del modelo 2, que con un $W = 0.96391$ y un $VP = P(W < 0.96391) = 0.2828$ nos indica que es razonable asumir normalidad para el término de error del modelo.

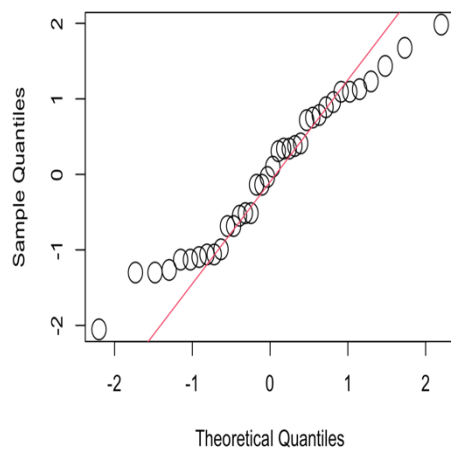


Figure 18 Normal QQ-plot

2.5 Código R usado

```
rm(list=ls(all=TRUE)) problema2=data.frame(A=factor(rep(c(2,4,8),each=12)),B=factor(rep(c(400,500,650),times=12)),
C=factor(rep(rep(c(3,4),each=3),times=6)),Y=scan())
196.6 197.7 199.8 198.4 199.6 200.6
196.0 196.0 199.4 198.6 200.4 200.9
198.5 196.0 198.4 197.5 198.7 199.6
197.2 196.9 197.6 198.1 198.0 199.0
197.5 195.6 197.4 197.6 197.0 198.5
196.6 196.2 198.1 198.4 197.8 199.8
attach(problema2)

#INTERACCIÓN TRIPLE
win.graph()
interaction.plot(A[C==3],B[C==3],Y[C==3],type="b",pch=c(1,2,3),col=c("black","red","blue"),lwd=3,lty=c(1,2,3),
main="Interacción A*B cuando C=3h")

win.graph()
interaction.plot(A[C==4],B[C==4],Y[C==4],type="b",pch=c(1,2,3),col=c("black","red","blue"),lwd=3,lty=c(1,2,3),
main=" Interacción A*B cuando C=4h")

#INTERACCIONES DOBLES
layout(rbind(c(1,1,2,2),c(0,3,3,0)))
interaction.plot(A,C,Y,type="b",pch=c(1,2),
col=c("black","red"),
lwd=2,main="Figura 3")
interaction.plot(A,B,Y,type="b",pch=c(1,2),
col=c("black","red"),
lwd=2,main="Figura 4")
interaction.plot(C,B,Y,type="b",pch=c(1,2),
col=c("black","red"),lwd=2,main="Figura 5")

#Complete aquí código R

#MODELO ANOVA CON LA INTERACCIÓN TRIPLE
modelo1=aov(Y~A*C*B)
anova(modelo1)
#MODELO ANOVA SIN LA INTERACCIÓN TRIPLE
modelo2=aov(Y~A*C+A*B+C*B)
anova(modelo2)
#CORRIENDO MODELO SIN INTERACCIÓN TRIPLE Y SIN EFECTO DE INTERACCIÓN A
modelo3=aov(Y~A*B+C*B)
anova(modelo3)

#ANÁLISIS RESIDUOS ESTANDARIZADOS MODELO 2
#layout(rbind(c(1,1,2,2),c(3,3,4,4)))
plot(fitted(modelo3),rstandard(modelo3),
cex=2,ylim=c(-2.1,2.1),main="Figura 9")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)
stripchart(rstandard(modelo3)~A,cex=2,vertical=TRUE, ylim=c(-2.5,2.5),
pch=1,xlab="A B",main="Figura 10")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)
stripchart(rstandard(modelo3)~C,cex=2,vertical=TRUE, ylim=c(-2.5,2.5),
pch=1,xlab="Tratamiento de superficie",main="Figura 11")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)
stripchart(rstandard(modelo3)~B,cex=2,vertical=TRUE, ylim=c(-2.5,2.5),
pch=1,xlab="B",main="Figura 12")
abline(h=c(-2,0,2),col=2)
win.graph()
qqnorm(rstandard(modelo3),cex=2)
qqline(rstandard(modelo3),col=2)
shapiro.test(rstandard(modelo3))

detach(problema2)
```

11. Referencias

- [1] Dean, A., Voss, D., and Draguljic, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2nd Edition. Springer..
- [2] Gonzalez Alvarez, N. (2021). Notas de Clase - Diseño de Experimentos - Partes I, II y III del curso 3007340.