

**Taller 3 - Primera parte**  
**Estadística Bayesiana**  
**Fecha de entrega: 19 de noviembre hasta mediodía**

1. Suponga que  $x_1, \dots, x_n$  es una muestra aleatoria de una distribución normal con media 0 y precisión  $\theta$ . La hipótesis nula es:  $H_0: \theta = \theta_0$  mientras que  $H_1: \theta \neq \theta_0$ .
  - a) Encuentre la forma del factor de Bayes para probar  $H_0$  vs.  $H_1$ . Suponga que distribución a priori para  $\theta$   $\text{gamma}(\alpha, \beta)$ .
  - b) Si  $\theta_0 = 4$ ,  $n = 5$ ,  $\sum x_i^2 = 4$ ,  $\alpha = 8$  y  $\beta = 2$  calcule el factor de Bayes y concluya.
2. La teoría predice que el punto de fusión de una sustancia particular bajo presión atmosférica es 4.01. El procedimiento para la medición de este punto de fusión es bastante imprecisa, debido a la alta presión. De hecho se sabe que una observación  $X \sim N(\theta, 1)$ . Se realizan cinco experimentos independientes y se obtuvieron las siguientes medidas de puntos de fusión: 4.9, 5.6, 5.1, 4.6 y 3.6. La probabilidad a priori de que  $\theta = 4.01$  es 0.5. Para los otros valores se tiene que  $p(\theta) \sim N(4.01, 1)$ . Concluya sobre la evidencia que proporcionan los datos.
3. Sea  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias i.i.d. de una distribución normal con media 0 y varianza desconocida  $\theta$ .
  - a) Encuentre la distribución a priori de Jeffreys para  $\theta$
  - b) Suponga que se observa  $x_1 = 2.75$ ,  $x_2 = 1.78$ ,  $x_3 = 0.36$ ,  $x_4 = -1.64$ ,  $x_5 = 0.17$  y  $x_6 = -2.03$ . Escriba la distribución posterior utilizando la distribución a priori de Jeffreys de la parte a). Especifique exactamente esta distribución y establezca el valor de sus parámetros.
4. Si  $X_i|\theta \sim \text{Maxwell}(\theta)$ , entonces:

$$f(x_i|\theta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{3}{2}} x_i^2 \exp\left[-\frac{\theta x_i^2}{2}\right], \quad x_i > 0$$

Encuentre la distribución a priori de Jeffreys para  $\theta$ . Se tiene  $E(X_i|\theta) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi\theta}}$  y  $V(X_i|\theta) = \frac{3\pi-8}{\pi\theta}$ .

5. Realice un proceso de elicitación sobre un parámetro de proporción. Realice un ajuste de esta distribución elicitada a una distribución Beta y determine los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  elicitados utilizando un optimizador. Explique claramente cómo realizó el proceso de elicitación (tipo de preguntas que realizó al experto, método de elicitación que utilizó, información que proporcionó al experto, etc.).