Diseño de Experimentos - 3007340
DOE - Parte VII: Experimentos factoriales de efectos aleatorios y mixtos en un DCA

Nelfi González Alvarez

Profesora Asociada Escuela de Estadística

e-mail: ngonzale@unal.edu.co

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Escuela de Estadística

Semestre 02 de 2021

Contenido I

Contenido

Consideraciones

- Si en un experimento un factor es tal que sus niveles son prefijados a criterio del experimentador, tal factor contribuye con efectos fijos sobre la respuesta media y es de interés estimar tales efectos y comparar las medias según niveles de ese factor.
- *Por otro lado, cuando los niveles de un factor son elegidos a través de una selección aleatoria de una población estadística, tal factor contribuirá con efectos aleatorios y el interés es estudiar cómo la variabilidad en tal factor contribuye a la varianza total de la respuesta, ya que no tiene sentido realizar inferencias sobre las medias o los efectos sobre la media, desde que al repetir el experimento no serían observados los mismos niveles de ese factor.*
- También tenemos que en presencia de dos o más factores, es importante evaluar cómo interactúan, ya que las interacciones hacen que los efectos de un factor dependan del nivel en el que son observados los factores con los cuales interactúa.
- *Ahora bien, si al menos uno de los factores es de efectos aleatorios, entonces los efectos de interacción de ese factor con los demás factores, serán también aleatorios y contribuirán a la varianza total de la respuesta.*

Contenido

Experimentos con dos factores de efectos aleatorios ó de efectos mixtos

Efectos aleatorios

Definición de niveles: Los a niveles de A y los b niveles de B son seleccionados aleatoriamente.

Objetivo: Estudiar las componentes de varianza debida a ambos factores y su posible interacción.

Ejecución del experimento: Se seleccionan aleatoriamente los niveles de A y B, luego, determinado el número n de réplicas por tratamiento A_iB_j, la selección y asignación de U.E a tratamientos y las corridas experimentales se hacen como en los experimentos factoriales de efectos fijos en un DCA.

Tipo de efectos: Efectos principales y de interacción son aleatorios (contribuyen con componentes de varianza a la varianza total de la respuesta).

Efectos mixtos

Definición de niveles: Los a niveles de A son seleccionados a criterio del investigador (los que le interesan) y los b niveles de B son seleccionados aleatoriamente.

Objetivo: Estudiar los efectos fijos de A y las componentes de varianza debida a B y de su posible interacción con A.

Ejecución del experimento: Se seleccionan aleatoriamente los niveles de B. Para lo demás, se procede como en los experimentos factoriales de efectos fijos en un DCA.

Tipo de efectos: Efectos principales de A son fijos (alteran la media de la respuesta), pero efectos principales de B y los de interacción son aleatorios (contribuyen con componentes de varianza a la varianza total).

Contenido

Modelos ANOVA con interacción

Para formular los modelos tenga en cuenta las siguientes definiciones:

Variables y efectos en modelos ANOVA	
Y_{ijk}	Respuesta en la k-ésima réplica del tratamiento A_iB_j, $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$, $k = 1, \ldots, n$.
ε_{ijk}	Error aleatorio en la k-esima réplica del tratamiento A_iB_j.
A_i	Efecto principal aleatorio del nivel A_i de A, en modelo de efectos aleatorios.
α_i	Efecto principal fijo del nivel A_i de A sobre la media global, en modelo de efectos mixtos.
B_j	Efecto principal aleatorio del nivel B_j de B.
$(AB)_{ij}$	Efecto aleatorio de la interacción AB en el tratamiento A_iB_j, en modelo de efectos aleatorios.
$(\alpha B)_{ij}$	Efecto aleatorio de la interacción AB en el tratamiento A_iB_j, en modelo de efectos mixtos.

Medias poblacionales	
μ	Media global.
$\mu_{i\bullet}$	Media en el nivel A_i del factor A en modelo de efectos mixtos, con $\mu_{i\bullet} = \mu + \alpha_i$

Modelo de efectos aleatorios

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijk},\ i = 1,\dots,a,\ j = 1,\dots,b,\ k = 1,\dots,n \tag{1}$$

Supuestos:

- $\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2\right)$; $A_i \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_\alpha\right)$, $B_j \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_\beta\right)$ y $(AB)_{ij} \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_{\alpha\beta}\right)$, ε_{ijk},A_i, B_j y $(AB)_{ij}$, mutuamente independientes.

Modelo de efectos mixtos

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + (\alpha B)_{ij} + \varepsilon_{ijk},\ i = 1,\dots,a,\ j = 1,\dots,b,\ k = 1,\dots,n \tag{2}$$

Supuestos:

Mixto restringido

- $\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2\right)$,
- $B_j \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_\beta\right)$.
- $(\alpha B)_{ij} \sim N\left(0, \frac{a-1}{a}\sigma^2_{\alpha\beta}\right)$, con $COV\left((\alpha B)_{ij},(\alpha B)_{i'j}\right) = -\frac{1}{a}\sigma^2_{\alpha\beta}$, para $i \neq i'$, pero $COV\left((\alpha B)_{ij},(\alpha B)_{i'j'}\right) = 0$, para $j \neq j'$.
- ε_{ijk}, B_j y $(\alpha B)_{ij}$ mutuamente independientes.
- Restricciones $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^{a} (\alpha B)_{ij} = 0$, $j = 1,\dots,b$.

Mixto no restringido

- $\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2\right)$.
- $B_j \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_\beta\right)$.
- $(\alpha B)_{ij} \overset{iid}{\sim} N\left(0,\sigma^2_{\alpha\beta}\right)$.
- ε_{ijk},B_j y $(\alpha B)_{ij}$ mutuamente independientes.
- Restricciones: $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$.

Dependencia entre las Y_{ijk}

Respuestas en diferente nivel de A y de B:		
Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}\right) = 0,\ \forall\ i \neq i',\ j \neq j'$ (independientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}\right) = 0,\ \forall\ i \neq i',\ j \neq j'$ (independientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}\right) = 0,\ \forall\ i \neq i',\ j \neq j'$ (independientes).
Respuestas en mismo nivel de A y diferente nivel de B:		
Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}\right) = \sigma_\alpha^2,\ \forall\ j \neq j'$ (dependientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}\right) = 0,\ \forall\ j \neq j'$ (independientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ij'k'}\right) = 0,\ \forall\ j \neq j'$ (independientes).
Respuestas en diferente nivel de A y mismo nivel de B:		
Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'jk'}\right) = \sigma_\beta^2,\ \forall\ i \neq i'$ (dependientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'jk'}\right) = \sigma_\beta^2,\ \forall\ i \neq i'$ (dependientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{i'jk'}\right) = \sigma_\beta^2 - \frac{1}{a}\sigma_{\alpha\beta}^2,\ \forall\ i \neq i'$ (dependientes).
Respuestas en un mismo tratamiento A_iB_j		
Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ijk'}\right) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2,\ \forall\ k \neq k'$ (dependientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ijk'}\right) = \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2,\ \forall\ k \neq k'$ (dependientes).	$\text{Cov}\left(Y_{ijk}, Y_{ijk'}\right) = \sigma_\beta^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{\alpha\beta}^2,\ \forall\ k \neq k'$ (dependientes).

Distribución de Y_{ijk}

Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$Y_{ijk} \sim N\left(\mu, \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2\right)$ (pero no todas independientes).	$Y_{ijk} \sim N\left(\mu + \alpha_i, \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2\right)$ (pero no todas independientes).	$Y_{ijk} \sim N\left(\mu + \alpha_i, \sigma_\beta^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2\right)$ (pero no todas independientes).

Distribución de $\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$

Modelo efectos aleatorios	Modelo mixto no restringido	Modelo mixto restringido
$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} \sim N\left(\mu, \sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn}\right)$ (pero no es de interés práctico).	$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} \sim N\left(\mu + \alpha_i, \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn}\right)$	$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} \sim N\left(\mu + \alpha_i, \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{(a-1)\sigma_{\alpha\beta}^2}{ab} + \frac{\sigma^2}{bn}\right)$

Cuál modelo mixto usar

- *Cuando el diseño es desbalanceado, es decir, no hay igual número de réplicas por tratamientos, el modelo mixto no restringido es preferido sobre el restringido por su facilidad computacional en las estimaciones y porque los cuadrados medios esperados bajo desbalanceo son congruentes con los correspondientes a los del modelo mixto no restringido (Montgomery, 2020; Kuehl, 2001).*
- *Para Montgomery (2020) es preferible el mixto restringido porque es un poco más general que el no restringido, en cuanto a la estructura de covarianza resultante entre respuestas que tienen el mismo nivel en el factor de efectos aleatorios, pues la restricción sobre los efectos de interacción permite que existan correlaciones positivas y negativas mientras que en el mixto no restringido solo son posibles correlaciones postivas entre tales variables. Kuehl (2001) también sugiere el mixto restringido si existe posibilidad en la práctica de que existan correlaciones entre efectos de interacción que comparten mismo nivel del factor de efectos aleatorios.*
- *Dean et. al. (2017) prefieren el mixto no restringido debido a una controversia respecto a la formulación de la hipótesis nula asociada al estadístico F para el factor de efectos aleatorios, cuando el modelo incluye la restricción sobre los efectos de interacción (Ver Sección 17.8.2 de esta referencia).*

ANOVAs

Nota 3.1

Las ecuaciones de las sumas de cuadrados SSA, SSB, SS(AB) y SSE, en los modelos factoriales de efectos aleatorios y de efectos mixtos con interacción, son las mismas vistas en el caso de dos factores de efectos fijos, bajo un DCA e igual número de réplicas por tratamiento. Ver en Notas de Clase: Tablas 8.11, 8.16 y 8.19.

Nota 3.2

Para definir los estadísticos F en la ANOVA, es necesario evaluar los valores esperados de los cuadrados medios cuando los parámetros de interés asociados a A, B y la interacción AB, son nulos.

ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores de efectos aleatorios con interacción

Fuente	g.l	SC	CM	CME	F_0	Valor P
A	$a-1$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\sigma^2_{\alpha}$	$\frac{MSA}{MS(AB)}$	$P\left(f_{a-1,\text{dfi}} > F_0\right)$
B	$b-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta}$	$\frac{MSB}{MS(AB)}$	$P\left(f_{b-1,\text{dfi}} > F_0\right)$
AB	dfi	$SS(AB)$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{\text{dfi}}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta}$	$\frac{MS(AB)}{MSE}$	$P\left(f_{\text{dfi},\text{dfe}} > F_0\right)$
Error	dfe	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\text{dfe}}$	σ^2		
Total	$abn-1$	SST	Con dfi $= (a-1)(b-1)$, dfe $= ab(n-1)$			

Observe que,

- bajo $H_0 : \sigma^2_{\alpha} = 0$, se cumple que $\text{E}[\text{MSA}] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} = \text{E}[\text{MS(AB)}]$, entonces $F_0 = \text{MSA}/\text{MS(AB)}$
- bajo $H_0 : \sigma^2_{\beta} = 0$, se cumple que $\text{E}[\text{MSB}] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} = \text{E}[\text{MS(AB)}]$, entonces $F_0 = \text{MSB}/\text{MS(AB)}$
- bajo $H_0 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$, se cumple que $\text{E}[\text{MS(AB)}] = \sigma^2 = \text{E}[\text{MSE}]$, entonces $F_0 = \text{MS(AB)}/\text{MSE}$

ANOVA en un DCA balanceado, con dos factores, efectos Mixtos

Restringido

Fuente	**g.l**	**SC**	**CM**	**CME**	$\mathbf{F_0}$	**Valor P**
A	$a-1$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$	$\frac{MSA}{MS(AB)}$	$P\left(f_{a-1,\text{dfi}} > F_0\right)$
B	$b-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2 + na\sigma^2_{\beta}$	$\frac{MSB}{MSE}$	$P\left(f_{b-1,\text{dfe}} > F_0\right)$
AB	dfi	$SS(AB)$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{\text{dfi}}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta}$	$\frac{MS(AB)}{MSE}$	$P\left(f_{\text{dfi},\text{dfe}} > F_0\right)$
Error	dfe	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\text{dfe}}$	σ^2		
Total	$abn-1$	SST	Con dfi $= (a-1)(b-1)$, dfe $= ab(n-1)$			

No restringido

Fuente	**g.l**	**SC**	**CM**	**CME**	$\mathbf{F_0}$	**Valor P**
A	$a-1$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$	$\frac{MSA}{MS(AB)}$	$P\left(f_{a-1,\text{dfi}} > F_0\right)$
B	$b-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta}$	$\frac{MSB}{MS(AB)}$	$P\left(f_{b-1,\text{dfi}} > F_0\right)$
AB	dfi	$SS(AB)$	$MS(AB) = \frac{SS(AB)}{\text{dfi}}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta}$	$\frac{MS(AB)}{MSE}$	$P\left(f_{\text{dfi},\text{dfe}} > F_0\right)$
Error	dfe	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\text{dfe}}$	σ^2		
Total	$abn-1$	SST	Con dfi $= (a-1)(b-1)$, dfe $= ab(n-1)$			

En el mixto restringido

- Bajo $H_0 : \alpha_i = 0,\ \forall\ i,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MSA}\right] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} = \mathrm{E}\left[\mathrm{MS(AB)}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MSA}/\mathrm{MS(AB)}$$

- Bajo $H_0 : \sigma^2_\beta = 0,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MSB}\right] = \sigma^2 = \mathrm{E}\left[\mathrm{MSE}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MSB}/\mathrm{MSE}$$

- Bajo $H_0 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MS(AB)}\right] = \sigma^2 = \mathrm{E}\left[\mathrm{MSE}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MS(AB)}/\mathrm{MSE}$$

En el mixto no restringido

- Bajo $H_0 : \alpha_i = 0,\ \forall\ i,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MSA}\right] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} = \mathrm{E}\left[\mathrm{MS(AB)}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MSA}/\mathrm{MS(AB)}$$

- Bajo $H_0 : \sigma^2_\beta = 0,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MSB}\right] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta} = \mathrm{E}\left[\mathrm{MS(AB)}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MSB}/\mathrm{MS(AB)}$$

- Bajo $H_0 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0,$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{MS(AB)}\right] = \sigma^2 = \mathrm{E}\left[\mathrm{MSE}\right]$$

entonces

$$F_0 = \mathrm{MS(AB)}/\mathrm{MSE}$$

Tests ANOVA

Elementos	$\boldsymbol{H_0 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0}$ vs. $\boldsymbol{H_1 : \sigma^2_{\alpha\beta} > 0}$		
	Efectos aleatorios	**Mixto restringido**	**Mixto no restringido**
Estadístico	$F_0 = \frac{MS(AB)}{MSE}$	$F_0 = \frac{MS(AB)}{MSE}$	$F_0 = \frac{MS(AB)}{MSE}$
distrib. bajo H_0	$f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)}$	$f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)}$	$f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)}$
Valor P	$P\left(f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{(a-1)(b-1),ab(n-1)} > F_0\right)$

Elementos	$\boldsymbol{H_0 : \sigma^2_{\beta} = 0}$ vs. $\boldsymbol{H_1 : \sigma^2_{\beta} > 0}$		
	Efectos aleatorios	**Mixto restringido**	**Mixto no restringido**
Estadístico	$F_0 = \frac{MSB}{MS(AB)}$	$F_0 = \frac{MSB}{MSE}$	$F_0 = \frac{MSB}{MS(AB)}$
distrib. bajo H_0	$f_{b-1,(a-1)(b-1)}$	$f_{b-1,ab(n-1)}$	$f_{b-1,(a-1)(b-1)}$
Valor P	$P\left(f_{b-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{b-1,ab(n-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{b-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$

Elementos	$\boldsymbol{H_0 : \sigma^2_{\alpha} = 0}$ vs. $\boldsymbol{H_1 : \sigma^2_{\alpha} > 0}$	$\boldsymbol{H_0 : \alpha_i = 0 \; \forall \, i}$ vs. $\boldsymbol{H_1 : \alpha_i \neq 0}$ para al menos un i	
	Efectos aleatorios	**Mixto restringido**	**Mixto no restringido**
Estadístico	$F_0 = \frac{MSA}{MS(AB)}$	$F_0 = \frac{MSA}{MS(AB)}$	$F_0 = \frac{MSA}{MS(AB)}$
distrib. bajo H_0	$f_{a-1,(a-1)(b-1)}$	$f_{a-1,(a-1)(b-1)}$	$f_{a-1,(a-1)(b-1)}$
Valor P	$P\left(f_{a-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{a-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$	$P\left(f_{a-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$

En todos los casos rechazar H_0 con un F_0 grande bajo su distribución, es decir con valor P pequeño.

- *De acuerdo a Dean et. al. (2017), en el modelo de efectos aleatorios con interacción: "...No tiene sentido probar la significancia de las componentes σ^2_α y σ^2_β si la componente de varianza $\sigma^2_{\alpha\beta}$ es significativa. Consecuentemente tales pruebas sólo deberían realizarse cuando los factores respectivos no estén involucrados en interacciones significativas...".*
- *De la misma forma, en los modelos mixtos con interacción, tampoco tiene sentido hacer pruebas generalizadas sobre la significancia de los efectos del factor fijo A, o sobre la componente de varianza debida al factor B. Una componente $\sigma^2_{\alpha\beta} > 0$ implica que las diferencias entre las medias del factor A varían con B. Sólo en ausencia de interacción seria adecuada una prueba de la hipótesis nula de que no hay diferencia entre las medias marginales del factor de efectos fijos, o equivalentemente, que todos sus efectos son simultáneamente cero (Kuehl, 2001).*
- *Si la interacción no es significativa, antes de intentar realizar los demás tests de hipótesis del ANOVA y de obtener estimaciones de los parámetros de interés, se modifica el modelo excluyendo la interacción y se recalcula la tabla ANOVA, varianzas estimadas, I.C, residuales, etc.*

Estimaciones de interés

Bajo experimentos balanceados:

1. ***Componentes de varianza:*** En el modelo de efectos aleatorios como de efectos mixtos, se obtienen por el método ANOVA: igualando los cuadrados medios esperados con los respectivos cuadrados medios observados. También se estiman las proporciones de varianza, teniendo en cuenta que la varianza total es

En el factorial efectos aleatorios: $$\mathrm{Var}\left[Y_{ijk}\right] = \sigma^2 + \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\alpha\beta} \tag{3}$$

En el mixto restringido: $$\mathrm{Var}\left[Y_{ijk}\right] = \sigma^2_\beta + \frac{a-1}{a}\sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2 \tag{4}$$

En el mixto no restringido: $$\mathrm{Var}\left[Y_{ijk}\right] = \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2 \tag{5}$$

2. ***Las medias y efectos del factor de efectos fijos:*** En los modelos mixtos y se estiman así:

$$\widehat{\mu}_{i\bullet} = \bar{Y}_{i\bullet\bullet}, \quad \widehat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} \tag{6}$$

Tenga cuidado con las inferencias realizadas marginalmente sobre componentes de varianza y efectos fijos, en presencia de interacción significativa. En general, se recomienda no realizarlas, a no ser que la proporción de varianza debida a la interacción sea mucho más pequeña que las otras componentes.

Estimaciones de componentes de varianza y proporciones de varianza

Fuente	**Mixto restringido**		**Mixto no restringido**	
	Comp. de varianza	Prop. de varianza	Comp. de varianza	Prop. de varianza
B	$\widehat{\sigma}^2_\beta = \frac{MSB-MSE}{na}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_\beta}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\frac{a-1}{a}\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$	$\widehat{\sigma}^2_\beta = \frac{MSB-MS(AB)}{na}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_\beta}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$
AB	$\frac{a-1}{a}\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{a-1}{a}\left[\frac{MS(AB)-MSE}{n}\right]$	$\frac{\frac{a-1}{a}\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\frac{a-1}{a}\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$	$\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{MS(AB)-MSE}{n}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$
Error	$\widehat{\sigma}^2 = MSE$	$\frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\frac{a-1}{a}\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$	$\widehat{\sigma}^2 = MSE$	$\frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$

Factorial de efectos aleatorios		
Fuente	Comp. de varianza	Prop. de varianza
A	$\widehat{\sigma}^2_\alpha = \frac{MSA-MS(AB)}{nb}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_\alpha}{\widehat{\sigma}^2_\alpha+\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$
B	$\widehat{\sigma}^2_\beta = \frac{MSB-MS(AB)}{na}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_\beta}{\widehat{\sigma}^2_\alpha+\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$
AB	$\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta} = \frac{MS(AB)-MSE}{n}$	$\frac{\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}}{\widehat{\sigma}^2_\alpha+\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$
Error	$\widehat{\sigma}^2 = MSE$	$\frac{\widehat{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}^2_\alpha+\widehat{\sigma}^2_\beta+\widehat{\sigma}^2_{\alpha\beta}+\widehat{\sigma}^2}$

Inferencias sobre factor de efectos fijos en modelos mixtos

Nota 3.3

En los modelos mixtos se cumplen las siguientes identidades para la varianza de las medias muestrales del factor de efectos fijos,

- ***En el modelo mixto restringido,***

$$Var\left[\bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right] = \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{(a-1)\sigma_{\alpha\beta}^2}{ab} + \frac{\sigma^2}{bn} = \frac{1}{abn}E\left[MSB\right] + \frac{a-1}{abn}E\left[MS(AB)\right] \quad (7)$$

- ***En el modelo mixto no restringido,***

$$Var\left[\bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right] = \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn} = \frac{1}{abn}E\left[MSB\right] + \frac{a-1}{abn}E\left[MS(AB)\right] \quad (8)$$

Como $\mathrm{Var}\left[\bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right]$ es función de E[MSB] y de E[MS(AB)], un estimador insesgado se obtiene reemplazando estas esperanzas por los respectivos cuadrados medios observados. Puede demostrarse además la independencia estadística entre estos cuadrados medios bajo los supuestos del modelo ANOVA, así como sus distribuciones muestrales, y por la aproximación Satterthwaite (ver Apéndice A.8 de Notas de Clase) encontrar un I.C aproximado para $\mathrm{Var}\left[\bar{Y}_{i\bullet\bullet}\right]$ y construir I.C aproximados para las medias $\mu_{i\bullet}$, teniendo en cuenta además que $\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$ es independiente de los cuadrados medios MSB, MS(AB).

En ambos casos, restringido y no restringido, se tienen lo siguientes resultados

Para los efectos α_i			
Estimador, $\hat{\alpha}_i$	*Varianza*, $\mathrm{Var}\left[\hat{\alpha}_i\right]$	Error estándar, $S_{\widehat{\alpha}_i}$	I.C $(1-\gamma)100\,\%$
$\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$	$\dfrac{(a-1)E\left[MS\,(AB)\right]}{abn}$	$\sqrt{\dfrac{(a-1)MS\,(AB)}{abn}}$	$\widehat{\alpha}_i \pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)}S_{\widehat{\alpha}_i}$
Para las medias $\mu_{i\bullet}$			
Estimador, $\hat{\mu}_{i\bullet}$	Varianza, $\mathrm{Var}\left[\hat{\mu}_{i\bullet}\right]$	Error estándar, $S_{\widehat{\mu}_{i\bullet}}$	I.C $(1-\gamma)100\,\%$
$\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$	$c_1\,E\left[MS\,(AB)\right]+c_2\,E\left[MSB\right]$	$\sqrt{c_1\,MS\,(AB)+c_2\,MSB}$	$\widehat{\mu}_{i\bullet} \pm t_{\gamma/2,\nu}S_{\widehat{\mu}_{i\bullet}}$ aprox.

Donde: $c_1 = \dfrac{a-1}{abn}$, $c_2 = \dfrac{1}{abn}$, y $\nu \simeq \dfrac{\left(\dfrac{a-1}{abn}MS\,(AB)+\dfrac{1}{abn}MSB\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{a-1}{abn}MS\,(AB)\right)^2}{(a-1)(b-1)}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{abn}MSB\right)^2}{(b-1)}}$

En ambos casos, restringido y no restringido,

Contrastes de medias, $W=\sum_{i=1}^{a} c_i\mu_{i\bullet}$ con $\sum_{i=1}^{a} c_i=0$			
Estimador, $\widehat{W}$	Varianza, Var$\left[\widehat{W}\right]$	Error estándar, $S_{\widehat{W}}$	I.C de $(1-\gamma)\times 100\,\%$
$\sum_{i=1}^{a} c_i\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$	$\frac{E(MS(AB))}{bn}\sum_{i=1}^{a} c_i^2$	$\sqrt{\frac{MS(AB)}{bn}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}$	$\widehat{W}\pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)}\times\sqrt{\frac{MS(AB)}{bn}\sum_{i=1}^{a} c_i^2}$
Comparaciones de Tukey de las $\mu_{i\bullet}$ a través de I.C			
$\left(\mu_{i\bullet}-\mu_{j\bullet}\right)\in\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet\bullet}\right)\pm q\left(\gamma,a,(a-1)(b-1)\right)\times\sqrt{\frac{MS(AB)}{bn}}$			

Pero recuerde que hacer estas inferencias en presencia de interacción significativa, no resultan recomendables.

Nota 3.4

- *Tenga en cuenta que las fórmulas vistas para el ANOVA, cuadrados medios esperados, estimadores de componentes de varianza, etc., valen solo para el caso de igual número de réplicas por tratamiento.*
- *Bajo distinto número de réplicas, las estimaciones de las componentes de varianza mediante el método ANOVA, además de volverse complejas en su cálculo, no son únicas, pues dependen del tipo de sumas de cuadrados (tipo II, tipo III) con las cuales se construya la ANOVA (Lawson, 2015). Estos tipos de sumas de cuadrados difieren debido a que no hay ortogonalidad entre las sumas de cuadrados de efectos principales con las sumas de cuadrados de las interacciones por lo que las técnicas usuales del ANOVA ya no aplican (Montgomery, 2020).*
- *Por otro lado, con número de réplicas desiguales los cuadrados medios del ANOVA ya no se distribuyen como múltiplos de variables aleatorias chi-cuadrados (Lawson, 2015)*
- *Con número de réplicas diferentes en los tratamientos son preferibles los estimadores de máxima verosimilitud y los estimadores REML, pues estos son "únicos", además que garantizan componentes de varianza no negativas (Lawson, 2015; Dean et. al., 2017).*

Validación de supuestos

De acuerdo a Dean et. al. (2017),

- *Para chequear supuestos sobre los errores, reemplazamos temporalmente los efectos aleatorios por efectos fijos y se procede como en los modelos factoriales de efectos fijos.*
- *Chequear supuestos sobre los efectos aleatorios no es fácil pues generalmente en los experimentos son observados pocos niveles sobre los factores y las medias muestrales de celdas no son independientes. Consecuentemente, se suele omitir el chequeo de supuestos sobre los efectos aleatorios y se espera que cualquer desviación severa en estos, se reflejarán en el análisis de los residuos.*

Contenido

Modelos ANOVA sin interacción

Modelo de efectos aleatorios

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + \varepsilon_{ijk},\ i = 1, \ldots, a,\ j = 1, \ldots, b,\ k = 1, \ldots, n \tag{9}$$

Supuestos:

- $\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$; $A_i \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_\alpha^2\right)$, $B_j \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_\beta^2\right)$, y ε_{ijk}, A_i, B_j, mutuamente independientes.

Modelo de efectos mixtos

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + \varepsilon_{ijk},\ i = 1, \ldots, a,\ j = 1, \ldots, b,\ k = 1, \ldots, n \tag{10}$$

Supuestos:

- $\varepsilon_{ijk} \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$; $B_j \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma_\beta^2\right)$, B_j y ε_{ijk} mutuamente independientes y $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$.

Puede demostrarse que

Variable	Distribución	
	Modelo de efectos aleatorios	Modelo de efectos mixtos
Y_{ijk}	$N\left(\mu, \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma^2\right)$	$N\left(\mu + \alpha_i, \sigma_\beta^2 + \sigma^2\right)$
$\bar{Y}_{i\bullet\bullet}$	$N\left(\mu, \sigma_\alpha^2 + \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn}\right)$	$N\left(\mu + \alpha_i, \frac{\sigma_\beta^2}{b} + \frac{\sigma^2}{bn}\right)$

ANOVA en el modelo de efecto aleatorios

Fuente	**g.l**	**SC**	**CM**	**CME**	$\mathbf{F_0}$	**Valor P**
A	$a-1$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$E[MSA] = \sigma^2 + nb\sigma^2_\alpha$	$\frac{MSA}{MSE}$	$P\left(f_{a-1,\text{dfe}} > F_0\right)$
B	$b-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$E[MSB] = \sigma^2 + na\sigma^2_\beta$	$\frac{MSB}{MSE}$	$P\left(f_{b-1,\text{dfe}} > F_0\right)$
Error	dfe	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\text{dfe}}$	$E[MSE] = \sigma^2$		
Total	$abn-1$	SST	$\text{dfe} = abn - a - b + 1$			

ANOVA en el modelo de efecto mixtos

Fuente	**g.l**	**SC**	**CM**	**CME**	$\mathbf{F_0}$	**Valor P**
A	$a-1$	SSA	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$E[MSA] = \sigma^2 + nb\frac{\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1}$	$\frac{MSA}{MSE}$	$P\left(f_{a-1,\text{dfe}} > F_0\right)$
B	$b-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$E[MSB] = \sigma^2 + na\sigma^2_\beta$	$\frac{MSB}{MSE}$	$P\left(f_{b-1,\text{dfe}} > F_0\right)$
Error	dfe	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\text{dfe}}$	$E[MSE] = \sigma^2$		
Total	$abn-1$	SST	$\text{dfe} = abn - a - b + 1$			

Tests de hipótesis

Fuente	Modelo efectos aleatorios	Modelos efectos mixtos
A	$H_0:\ \sigma_\alpha^2 = 0$ $H_1:\ \sigma_\alpha^2 > 0$ $F_0 = MSA/MSE \sim f_{a-1,abn-a-b+1}$ rechaza H_0 si $P\left(f_{a-1,abn-a-b+1} > 0\right)$ es pequeño	$H_0:\ \alpha_i = 0\ \forall\ i = 1,\ldots,a$ $H_1:\ \alpha_i \neq 0$ para almenos un i $F_0 = MSA/MSE \sim f_{a-1,abn-a-b+1}$ rechaza H_0 si $P\left(f_{a-1,abn-a-b+1} > 0\right)$ es pequeño
B	$H_0:\ \sigma_\beta^2 = 0$ $H_1:\ \sigma_\beta^2 > 0$ $F_0 = MSB/MSE \sim f_{b-1,abn-a-b+1}$ rechaza H_0 si $P\left(f_{b-1,abn-a-b+1} > 0\right)$ es pequeño	$H_0:\ \sigma_\beta^2 = 0$ $H_1:\ \sigma_\beta^2 > 0$ $F_0 = MSB/MSE \sim f_{b-1,abn-a-b+1}$ rechaza H_0 si $P\left(f_{b-1,abn-a-b+1} > 0\right)$ es pequeño

- *La estructura de varianzas y covarianzas entre las Y_{ijk} de modelos sin interacción cambian con respecto a los modelos con interacción. Ver en Notas de Clase, Secciones 8.7, 8.10.*
- *Para obtener las componentes de varianza estimadas, se igualan las esperanzas de cuadrados medios a los respectivos cuadrados medios, pero tenga en cuenta que al cambiar las expresiones de valores esperados de cuadrados medios, también cambian los estimadores de las componentes de varianza. Ver en notas de clase la Tablas 8.10 (en modelos de efectos aleatorios) y Tabla 8.22 (en modelos de efectos mixtos).*
- Para estimaciones de medias y efectos del factor de efectos fijos (A) en el modelo mixto, ver Tabla 8.23 de Notas de Clase. Para contrastes de estas medias y comparaciones de Tukey ver Sección 8.10.5 de Notas de Clase. Compare con las ecuaciones dadas en los modelos mixtos con interacción y note en todas estas ecuaciones que el MSE aparece ahora en las estimaciones de varianzas de efectos estimados, de contrastes estimados y de las diferencias de medias muestrales $Y_{i\bullet\bullet}$, por tanto, los grados de libertad de valores críticos de la distribución t y de los rangos estudentizados son $abn-a-b+1$.

Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2^{nd} Edition. Springer.

Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3^{a} Edición. McGraw-Hill.

Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2^{a} Edición. Thomson Learning.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5^{th} Edition. McGraw-Hill Irwin.

Lawson, J. (2015). *Design and Analysis of Experiments with R*. Chapman & Hall/CRC Press.

Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10^{th} Edition. John Wiley & Sons, Inc.