Página www Contenido **>>** Página 1 de 26 Regresar Full Screen Cerrar Abandonar

Estadística Bayesiana: Clase 6

Juan Carlos Correa

16 de marzo de 2021

Página de Abertura

Contenido





Página 2 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Utilidad de las distribuciones apriori no informativas en la estadística clásica

Intervalo de confianza para la proporción vía TCL

Este es el intervalo propuesto en la mayoría de textos básicos en estadística (Canavos, 1988; Wonnacott y Wonnacott, 1979; Roussas, 1973; Walpole, 1992; Meyer, 1986; Mood et al., 1974)

$$\left(\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}, \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right)$$

Página de Abertura

Contenido





Página 3 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Intervalo clásico vía estadística bayesiana

Intervalo de confianza para la proporción vía apriori de Laplace

El intervalo es (LI, LS) donde los límites se obtienen como soluciones de las siguientes ecuaciones

$$\int_{0}^{LI} \xi \left(\pi \left| Datos \right. \right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\int_{0}^{LS} \xi \left(\pi \left| Datos \right. \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

donde $\xi(\pi | Datos)$ es una $Beta(\sum_i x_i + 1; n - \sum_i x_i + 1)$.

Página de Abertura

Contenido

← →

→

Página 4 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Intervalo de confianza para la proporción vía apriori de Jeffreys

El intervalo es (LI,LS) donde los límites se obtienen como soluciones de las siguientes ecuaciones

$$\int_{0}^{LI} \xi \left(\pi \left| Datos \right. \right) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\int_{0}^{LS} \xi \left(\pi \left| Datos \right. \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

donde $\xi(\pi | Datos)$ es una $Beta(\sum_i x_i + \frac{1}{2}; n - \sum_i x_i + \frac{1}{2}).$

Comparación de los tres intervalos

```
# Intervalo de confianza para la proporción
```

```
intervalo.vía.tcl<-function(x,n,nivel=0.95){
# x: Número de éxitos
# n: tamaño muestral
# nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
if(x==0) x<-0.5
if(x==n) x<-n-0.5
pi.gorro<-x/n
error<-sqrt(pi.gorro*(1-pi.gorro)/n)
percentil <- qnorm(nivel+(1-nivel)/2)
LI<-pi.gorro-percentil*error
```

if(LI<0) LI<-0

LS<-pi.gorro+percentil*error if(LS>1) LS<-1

list(LI=LI,LS=LS) } #Fin intervalo.vía.tcl

Página www

Página de Abertura

Contenido

>>

Página 5 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

```
intervalo.vía.Laplace<-function(x,n,nivel=0.95){
                 # x: Número de éxitos
                 # n: tamaño muestral
 Página www
                 # nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
                 percentil1<-(1-nivel)/2
Página de Abertura
                 percentil2<-nivel+(1-nivel)/2
  Contenido
                 LI<-qbeta(percentil1,x+1,n-x+1)
                 LS<-qbeta(percentil2,x+1,n-x+1)
      >>
                 list(LI=LI,LS=LS)
                 } #Fin intervalo.vía.Laplace
                 intervalo.vía.Jeffreys<-function(x,n,nivel=0.95){
 Página 6 de 26
                 # x: Número de éxitos
                 # n: tamaño muestral
                 # nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
  Regresar
                 percentil1<-(1-nivel)/2
  Full Screen
                 percentil2<-nivel+(1-nivel)/2
                 LI \leftarrow gbeta(percentil1, x+1/2, n-x+1/2)
   Cerrar
                 LS<-qbeta(percentil2,x+1/2,n-x+1/2)
  Abandonar
                 list(LI=LI,LS=LS)
                 } #Fin intervalo.vía.Jeffreys
```

```
Página www
Página de Abertura
                   # Comparación de los tres métodos
                   # Asumamos que la verdadera proporción es 0.3
  Contenido
                   n<-15
                   x<-0:15
                   cae<-function(inter,p.ver)if(p.ver>inter[1] & p.ver<inter[2])</pre>
                   res<-1 else res<-0
                   probas.verdaderas<-dbinom(x,n,prob=0.3)</pre>
                   intervalos.resu<-matrix(unlist(sapply(x,intervalo.vía.tcl,n)),
 Página 7 de 26
                   ncol=2,byrow=T)
                   amplitud.intervalo<-intervalos.resu[,2]-intervalos.resu[,1]
   Regresar
                   longi.media1<-sum(amplitud.intervalo*probas.verdaderas)</pre>
                   tempo1<-apply(intervalos.resu,1,cae,0.3)
  Full Screen
                   nivel.real1<-sum(tempo*probas.verdaderas)</pre>
   Cerrar
```

```
Página www
Página de Abertura
                   intervalos.resu<-matrix(unlist(sapply(x,intervalo.vía.Laplace,n)),
  Contenido
                   ncol=2,byrow=T)
                   amplitud.intervalo<-intervalos.resu[,2]-intervalos.resu[,1]
                   longi.media2<-sum(amplitud.intervalo*probas.verdaderas)</pre>
       >>
                   tempo<-apply(intervalos.resu,1,cae,0.3)
                   nivel.real2<-sum(tempo*probas.verdaderas)</pre>
                   intervalos.resu<-matrix(unlist(sapply(x,intervalo.vía.Jeffreys,n)),
 Página 8 de 26
                   ncol=2,byrow=T)
                   amplitud.intervalo<-intervalos.resu[,2]-intervalos.resu[,1]
                   longi.media3<-sum(amplitud.intervalo*probas.verdaderas)</pre>
   Regresar
                   tempo<-apply(intervalos.resu,1,cae,0.3)</pre>
                   nivel.real3<-sum(tempo*probas.verdaderas)</pre>
  Full Screen
    Cerrar
  Abandonar
```

Página de Abertura

Contenido

₩ →

→

Página 9 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

> longi.media1
[1] 0.4380546
> nivel.real1
[1] 0.9647319
> longi.media2
[1] 0.4118484
> nivel.real2
[1] 0.9800099
> longi.media3
[1] 0.4166257
> nivel.real3

[1] 0.9494899

Intervalo	Longitud promedio	Nivel de confianza real
TCL	0.4380546	0.9647319
Laplace	0.4118484	0.9800099
Jeffreys	0.4166257	0.9494899

Caso Poisson

Si $X(\lambda)$ su función de probabilidad es

$$f(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(x|\lambda) \propto \lambda^x e^{-\lambda}$$

para $\lambda > 0$ y x = 0, 1, 2, ...

Distribución apriori no informativa Laplace para el parámetro λ de la Poisson

$$\xi(\lambda) = Uniforme(0, \infty)$$

$$\xi(\lambda) \propto 1$$

Es impropia!!

Página de Abertura

Contenido

→

4 +

Página 10 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Página de Abertura

Contenido





Página 11 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Si tenemos una muestra de tamaño n de esta Poisson

Si tenemos la muestra aleatoria $X_1, \ldots X_n$

■ La verosimilitud

$$L(\lambda | Datos) \propto \lambda^{\sum_{i} x_{i}} \exp(-n\lambda)$$

La apriori no informativa de Laplace

$$\xi(\lambda) \propto 1$$

La aposteriori

$$\xi(\lambda | Datos) \propto \xi(\lambda) L(\lambda | Datos) \propto \lambda^{\sum_i x_i + 1 - 1} \exp(-n\lambda)$$

Este es el kernel de una distribución $Gamma(\sum_i x_i + 1, n)$

Página de Abertura

Contenido





Página 12 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Distribución apriori no informativa Jeffreys para el parámetro λ de la Poisson

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\log(f(x|\lambda)) = x \log(\lambda) - \lambda - \log(x!)$$

$$\frac{d \log(f(x|\lambda))}{d\lambda} = \frac{x}{\lambda} - 1$$

$$\frac{d^2 \log(f(x|\lambda))}{d\lambda} = -\frac{x}{\lambda^2}$$

$$\mathcal{I} = -\mathcal{E}\left[\frac{\int \log(\{(\S|\lambda))\}}{\lambda}\right] = \frac{E(x)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\xi(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}$$

Página de Abertura

Contenido

>>

Página 13 de 26

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Regresar

Si tenemos la muestra aleatoria $X_1, \ldots X_n$

■ La verosimilitud

freys para λ

 $L(\lambda | Datos) \propto \lambda^{\sum_i x_i} \exp(-n\lambda)$

• La apriori no informativa de Jeffreys

$$\xi(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}$$

La aposteriori

$$\xi(\lambda | Datos) \propto \xi(\lambda) L(\lambda | Datos) \propto \lambda^{\sum_i x_i + 1 - 1 - 1/2} \exp(-n\lambda)$$

Este es el kernel de una distribución $Gamma\left(\sum_{i} x_{i} + 1/2, n\right)$

Si tenemos una muestra de tamaño n de esta Pois-

son en el caso de la apriori no informativa de Jef-

Página de Abertura

Contenido





Página 14 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Intervalos de confianza para λ (la media de la Poisson)

Método basado en el Teorema Central del Límite (T.C.L.)

Si el tamaño muestral es lo suficientemente grande, podemos aplicar el teorema central del límite.

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},\,\bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $s^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Este es el intervalo propuesto en la mayoría de textos básicos en estadística (Canavos, 1988; Wonnacott y Wonnacott, 1979; Roussas, 1973; Walpole, 1992; Meyer, 1986; Mood et al., 1974)

Página de Abertura

Contenido





Página 15 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Método basado en la Máxima Verosimilitud

Se sabe que si $\hat{\theta}$ es el estimador máximo verosímil para θ (puede ser un vector), bajo ciertas condiciones suaves (Serfling, 1980), entonces $\hat{\theta} \sim (\theta, I^{-1}(\theta))$, con $I(\theta)$ siendo la matriz de información de Fisher. Entonces, en el caso Poisson

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{n}}\right)$$

Hay muchos más intervalos de confianza en el caso Poisson!

Página de Abertura

Contenido





Página 16 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Intervalos de Confianza Cuando no hay Eventos

Cuando las tasas de ocurrencia son muy bajas es común tener muestras donde todas las observaciones son ceros. El problema entonces es construir el intervalo de confianza para λ . Asumamos que $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, con n fijo es el resultado de la muestra aleatoria. Podemos entonces proceder así:

$$P(X_1 = 0, X_2, \dots, X_n = 0) = e^{-n\lambda}$$

Entonces el límite superior, LS, será calculado como

$$\max_{\lambda} e^{-n\lambda} \ge \alpha$$

lo cual produce $LS = -\frac{\ln(\alpha)}{n}$. El intervalo será (0, LS).



Método basado en la apriori no informativa de Laplace

(LI, LS)

donde LI se obtiene como el cuantil $\alpha/2$ de una distribución $Gamma\left(\sum_i x_i + 1; n\right)$ y LS se obtiene como el cuantil $1 - \alpha/2$ de una distribución $Gamma\left(\sum_i x_i + 1; n\right)$.



Método basado en la apriori no informativa de Jeffreys

(LI, LS)

donde LI se obtiene como el cuantil $\alpha/2$ de una distribución $Gamma\left(\sum_i x_i + 1; n\right)$ y LS se obtiene como el cuantil $1 - \alpha/2$ de una distribución $Gamma\left(\sum_i x_i + 1/2; n\right)$.

Página de Abertura

Contenido





Página 19 de 26

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Comparación vía simulación de los cuatro métodos para hallar intervalos de confianza para λ

```
# Intervalos de confianza para la lambda
intervalo.vía.tcl<-function(x,nivel=0.95){
# x: vector con los eventos
# nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
n<-length(x)
y < -sum(x)
if(y==0){
LS<--log(1-nivel)/n
LI<-0
else{
media <- mean(x)
desvi < -sd(x)
Z < -qnorm(1-(1-nivel)/2)
LI<-media-Z*desvi/sqrt(n)
if(LI<0)LI<-0
LS<-media+Z*desvi/sqrt(n)
list(LI=LI,LS=LS)
} #Fin intervalo.vía.tcl
```

```
Página www
                    intervalo.vía.mv<-function(x,nivel=0.95){
                    # x: vector con los eventos
                    # nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
Página de Abertura
                    n<-length(x)
  Contenido
                    y < -sum(x)
                    if(y==0){
                     LS<--log(1-nivel)/n
       >>
                    LI<-0
                    else{
                    media <- mean(x)
 Página 20 de 26
                    Z < -qnorm(1-(1-nivel)/2)
                    LI<-media-Z*sqrt(media/n)
                    if(LI<0)LI<-0
   Regresar
                    LS<-media+Z*sqrt(media/n)
  Full Screen
                    list(LI=LI,LS=LS)
    Cerrar
                    } #Fin intervalo.vía.mv
  Abandonar
```

```
Página www
Página de Abertura
                    intervalo.vía.Laplace<-function(x,nivel=0.95){
                   # x: vector con los eventos
  Contenido
                   # nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
       >>
                   percentil1<-(1-nivel)/2
                   percentil2<-nivel+(1-nivel)/2
                   y < -sum(x)
                   LI<-qgamma(percentil1,y+1,rate=n)
 Página 21 de 26
                   LS<-qgamma(percentil2,y+1,rate=n)
   Regresar
                   list(LI=LI,LS=LS)
                   } #Fin intervalo.vía.Laplace
  Full Screen
    Cerrar
  Abandonar
```

```
Página www
Página de Abertura
                    intervalo.vía.Jeffreys<-function(x,nivel=0.95){</pre>
                   # x: Número de éxitos
  Contenido
                   # nivel: nivel de confianza pre-establecido en el 95 porciento
                   percentil1<-(1-nivel)/2
                   percentil2<-nivel+(1-nivel)/2
                   y < -sum(x)
                   LI<-qgamma(percentil1,y+1/2,rate=n)
 Página 22 de 26
                   LS<-qgamma(percentil2,y+1/2,rate=n)
   Regresar
                   list(LI=LI,LS=LS)
                   } #Fin intervalo.vía.Jeffreys
  Full Screen
    Cerrar
```

```
Página www
                   # Comparación de los cuatro métodos
Página de Abertura
                   # Asumamos que la verdadera lambda es 2
  Contenido
                   lambda.verd<-2
                   n < -15
                   Nsim<-1000
       >>
                   muestras<-matrix(rpois(n*Nsim,2),ncol=n)</pre>
                   res1<-matrix(unlist(apply(muestras,1,intervalo.vía.tcl)),
 Página 23 de 26
                   ncol=2,byrow=T)
                   res2<-matrix(unlist(apply(muestras,1,intervalo.vía.mv)),
                   ncol=2,byrow=T)
   Regresar
                   res3<-matrix(unlist(apply(muestras,1,intervalo.vía.Laplace)),
                   ncol=2,byrow=T)
  Full Screen
                   res4<-matrix(unlist(apply(muestras,1,intervalo.vía.Jeffreys)),
                   ncol=2,byrow=T)
   Cerrar
```

```
Página www
Página de Abertura
                    cae<-function(inter,lambda.ver)if(lambda.ver>inter[1] &
                    lambda.ver<inter[2]) res<-1 else res<-0
  Contenido
                    longi.media1<-mean(res1[,2]-res1[,1])</pre>
       >>
                    nivel.real1<-mean(apply(res1,1,cae,lambda.verd))</pre>
                    longi.media2<-mean(res2[,2]-res2[,1])</pre>
                    nivel.real2<-mean(apply(res2,1,cae,lambda.verd))</pre>
 Página 24 de 26
                    longi.media3 < -mean(res3[,2]-res3[,1])
                    nivel.real3<-mean(apply(res3,1,cae,lambda.verd))</pre>
   Regresar
                    longi.media4<-mean(res4[,2]-res4[,1])</pre>
                    nivel.real4<-mean(apply(res4,1,cae,lambda.verd))</pre>
  Full Screen
    Cerrar
```

```
Página www
                     > longi.media1
                     [1] 1.415656
Página de Abertura
                     > nivel.real1
                     [1] 0.931
   Contenido
                     > longi.media2
                     [1] 1.434487
        >>
                     > nivel.real2
                     [1] 0.936
                     > longi.media3
                     [1] 1.45418
 Página 25 de 26
                     > nivel.real3
                     [1] 0.953
   Regresar
                     > longi.media4
  Full Screen
                     [1] 1.442293
                     > nivel.real4
                     [1] 0.963
    Cerrar
```