Estadística Bayesiana: Clase 10

Juan Carlos Correa

5 de abril de 2021

Ejemplo: Distribución Uniforme

Si escogemos una distribución apriori impropia o aplanada de la forma $\xi(\theta) = 1$ para $\theta > 0$, la distribución posterior es proporcional a la función de verosimilitud,

$$\xi\left(\theta|X\right) \propto \frac{1}{\theta^n} \text{ para } \theta \geq \max\left\{X_i\right\}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\max\{X_i\}}^{\infty} \frac{1}{\theta^n} d\theta &= -\frac{1}{(n-1)\theta^{n-1}}\Bigg|_{\max\{X_i\}}^{\infty} \\
&= \frac{1}{(n-1)\max\{X_i\}^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Por tanto la constante de normalización es

$$
kte = (n-1)\max\{X_i\}^{n-1}
$$

y la aposteriori *completa* será

$$
\xi(\theta|X) = \frac{(n-1)\max\{X_i\}^{n-1}}{\theta^n} \text{ para } \theta \geq \max\{X_i\}
$$

Bajo la función de pérdida cuadrática el estimador bayesiano es igual a la media aposteriori

$$\begin{aligned}
E[\theta|X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot \xi\left(\theta|X\right)\, d\theta \\
&= \int_{\text{máx}\{X_i\}}^{\infty} \theta \cdot \frac{(n-1)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-1}}{\theta^n}\, d\theta \\
&= (n-1)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-1} \int_{\text{máx}\{X_i\}}^{\infty} \theta \cdot \frac{1}{\theta^n}\, d\theta \\
&= (n-1)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-1} \int_{\text{máx}\{X_i\}}^{\infty} \cdot \frac{1}{\theta^{n-1}}\, d\theta \\
&= (n-1)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-1} \left(- \frac{1}{(n-2)\theta^{n-2}} \Bigg|_{\text{máx}\{X_i\}}^{\infty} \right) \\
&= (n-1)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-1} \frac{1}{(n-2)\,\text{máx}\left\{X_i\right\}^{n-2}} \\
&= \frac{n-1}{n-2}\,\text{máx}\left\{X_i\right\}
\end{aligned}$$

Familia Conjugada Normal

Distribución Normal

La distribución normal es la más ampliamente conocida y utilizada distribución en el trabajo estadístico. Hay básicamente dos razones para ello:

- Muchas poblaciones pueden ser modeladas aproximadamente por esta distribución.
- Como resultados límites se llega a ella en muchas situaciones.

Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

con soporte $x \in (-\infty, \infty)$. Su función de distribución acumulada se denota $\Phi(x)$, su media es μ y su varianza σ^2. Esta distribución posee dos parámetros, lo cual nos lleva a considerar diferentes situaciones.

La precisión, digamos τ es el inverso de la varianza.

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2}$$

Precisión Conocida

- **Resultado** Suponga que $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con un valor desconocido de la media μ y un valor especificado de la precisión r $(r > 0)$.
  - **Distribución Apriori:** $\mu \sim N(\mu_0, \tau_0)$ donde τ_0 es la precisión, tal que $-\infty < \mu_0 < \infty$ y $\tau_0 > 0$.
  - **Distribución Posterior:**

$$(\mu|X = x) \sim N(\mu_1, \tau_1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\tau_0\mu_0 + nr\bar{x}}{\tau_0 + nr} \\ \tau_1 &= \tau_0 + nr \text{ es la precisión} \end{aligned}$$

y $\bar{x}$ es la media muestral.

Prueba: (Ejercicio)

Observe que la media posterior se puede expresar como

$$\mu_1 = \frac{\tau_0\mu_0 + nr\bar{x}}{\tau_0 + nr} = \frac{nr}{\tau_0 + nr}\bar{x} + \frac{\tau_0}{\tau_0 + nr}\mu_0$$

Se ve claramente que la media posterior es una media ponderada de la media apriori y la media muestral.

Precisión Desconocida

- **Resultado:** Suponga que $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con un valor conocido de la media m $(-\infty < m < \infty)$ y un valor desconocido de la precisión W $(W > 0)$.
  - **Distribución Apriori:** $W \sim Gamma\,(\alpha_0, \beta_0)$ donde $\alpha_0 > 0$ y $\beta_0 > 0$.
  - **Distribución Posterior:**

$$(W|X = x) \sim Gamma\,(\alpha_1, \beta_1)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{n}{2} \\ \beta_1 &= \beta_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 . \end{aligned}$$

Prueba: (Ejercicio)

Familia Conjugada Normal: Media y Precisión Desconocidas

Este caso, a pesar de lo simple que puede parecer, muestra la complejidad a la que puede llegar a enfrentar el estadístico ante la presencia de varios parámetros.

Resultado Suponga que $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con un valor desconocido de la media μ y un valor desconocido de la precisión τ $(\tau > 0)$.

- **Distribución Apriori Conjunta de μ y τ:**

  1. La distribución condicional de μ dado τ es $\mu \sim N\left(\mu_0, \tau_0\tau\right)$ donde $\tau_0\tau$ es la precisión, tal que $-\infty < \mu_0 < \infty$ y $\tau_0 > 0$, y
  2. la distribución marginal de τ es $Gamma\left(\alpha_0, \beta_0\right)$ donde $\alpha_0 > 0$ y $\beta_0 > 0$.

- **Distribución Posterior Conjunta de μ y τ cuando $X = x$:**

1. La distribución condicional de μ dado τ es

$$(\mu | X = x) \sim N(\mu_1, \tau_1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\tau_0 \mu_0 + n\bar{x}}{\tau_0 + n} \\ \tau_1 &= (\tau_0 + n)\tau \end{aligned}$$

y $\bar{x}$ es la media muestral.

2. la distribución marginal de τ es Gamma(α_1, β_1) donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{n}{2} \\ \beta_1 &= \beta_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \frac{\tau_0 n (\bar{x} - \mu_0)^2}{2(\tau_0 + n)} \end{aligned}$$

Prueba:

Recuerde que

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \Rightarrow f(x,y) = f(x|y)\, f(y)$$

Si $X_1, \cdots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal con un valor desconocido de la media μ y un valor desconocido de la precisión τ $(\tau > 0)$ la verosimilitud será:

$$\begin{aligned} L(\mu, \tau |\, Datos) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\tau^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(x_i-\mu)^2\right) \\ &\propto \tau^{n/2} \exp\left(-\frac{\tau}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2 \\
&= (n-1)S^2+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L(\mu,\tau|\, Datos) &\propto \tau^{n/2}\exp\left(-\frac{\tau}{2}\left((n-1)S^2+n\left(\bar{x}-\mu\right)^2\right)\right) \\
&\propto \tau^{n/2}\exp\left(-\frac{\tau}{2}(n-1)S^2\right)\exp\left(-\frac{n\tau}{2}\left(\bar{x}-\mu\right)
\end{aligned}
$$

La apriori es

$$
\begin{aligned}
\xi(\mu,\tau) &= \xi(\mu|\,\tau)\,\xi(\tau) \\
&\propto \tau^{1/2}\exp\left(-\frac{\tau_0\tau}{2}\left(\mu-\mu_0\right)^2\right)\tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\beta_0\tau\right)
\end{aligned}
$$

La aposteriori será

$$
\begin{aligned}
\xi(\mu,\tau) &\propto \tau^{n/2}\exp\left(-\frac{\tau}{2}(n-1)S^2\right)\exp\left(-\frac{n\tau}{2}(\bar{x}-\mu)^2\right) \\
&\quad \times \tau^{1/2}\exp\left(-\frac{\tau_0\tau}{2}(\mu-\mu_0)^2\right)\tau^{\alpha_0-1}\exp(-\beta_0\tau) \\
&\propto \tau^{n/2+1/2}\exp\left(-\frac{\tau}{2}\left[n(\bar{x}-\mu)^2+\tau_0(\mu-\mu_0)^2\right]\right) \\
&\quad \times \tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\tau\left(\frac{(n-1)S^2}{2}+\beta_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ahora

$$\left[n\left(\bar{x}-\mu\right)^2+\tau_0\left(\mu-\mu_0\right)^2\right]=n\left(\mu-\bar{x}\right)^2+\tau_0\left(\mu-\mu_0\right)^2$$

$$=n\mu^2-2n\mu\bar{x}+n\bar{x}^2+\tau_0-2\tau_0\mu\mu_0+\tau_0\mu_0^2$$

$$=\left(n+\tau_0\right)\mu^2-2\mu\left(n\bar{x}+\tau_0\mu_0\right)+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2$$

$$=\left(n+\tau_0\right)\left[\mu^2-2\mu\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right]+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2$$

$$=\ \left(n+\tau_0\right)\left[\mu^2-2\mu\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}+\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)^2}\right]-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)}+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2$$

$$=\left(n+\tau_0\right)\left(\mu-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right)^2-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)}+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2$$

Página www

Página de Abertura

Contenido

Regresar

Full Screen

Cerrar

Abandonar

Luego la aposteriori queda

$$\xi\left(\mu,\tau\right)\propto$$

$$\exp\left(-\frac{\tau}{2}\left[\left(n+\tau_0\right)\left(\mu-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right)^2-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)}+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2\right]\right)$$

$$\times\ \tau^{n/2+1/2}\tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\tau\left(\frac{(n-1)S^2}{2}+\beta_0\right)\right)$$

$$\propto\exp\left(-\frac{\tau(n+\tau_0)}{2}\left(\mu-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right)^2\right)$$

$$\times\exp\left(-\frac{\tau}{2}\left[-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)}+n\bar{x}^2+\tau_0\mu_0^2\right]\right)$$

$$\times\ \tau^{n/2+1/2}\tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\tau\left(\frac{(n-1)S^2}{2}+\beta_0\right)\right)$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
& -\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2}{(n+\tau_0)} + n\bar{x}^2 + \tau_0\mu_0^2 \\
= & \frac{-(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)^2 + n\bar{x}^2 + \tau_0\mu_0^2}{(n+\tau_0)} \\
= & \frac{-n^2\bar{x}^2 - 2n\bar{x}\tau_0\mu_0 - \tau_0^2\mu_0^2 + n\bar{x}^2 + \tau_0\mu_0^2}{(n+\tau_0)} \\
= & \frac{((n+\tau_0)\tau_0 - \tau_0^2)\mu_0^2 + (n(n+\tau_0) - n^2)\bar{x}^2 - 2n\bar{x}\tau_0\mu_0}{(n+\tau_0)} \\
= & \frac{n\tau_0\mu_0^2 + n\tau_0\bar{x}^2 - 2n\bar{x}\tau_0\mu_0}{(n+\tau_0)} \\
= & \frac{n\tau_0(\mu_0^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu_0)}{(n+\tau_0)} \\
= & \frac{n\tau_0(\mu_0 - \bar{x})^2}{(n+\tau_0)}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\xi(\mu,\tau) \propto$$
$$\exp\left(-\frac{\tau(n+\tau_0)}{2}\left(\mu-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right)^2\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{\tau}{2}\left[\frac{n\tau_0(\mu_0-\bar{x})^2}{(n+\tau_0)}\right]\right)$$
$$\times \tau^{n/2+1/2}\tau^{\alpha_0-1}\exp\left(-\tau\left(\frac{(n-1)S^2}{2}+\beta_0\right)\right)$$

$$\propto \tau^{1/2}\exp\left(-\frac{\tau(n+\tau_0)}{2}\left(\mu-\frac{(n\bar{x}+\tau_0\mu_0)}{(n+\tau_0)}\right)^2\right)$$
$$\times \tau^{\alpha_0+n/2-1}\exp\left(-\tau\left(\frac{(n-1)S^2}{2}+\beta_0+\frac{n\tau_0(\mu_0-\bar{x})^2}{2(n+\tau_0)}\right)\right)$$

Con esto queda demostrado el resultado.

```
# Determinación de los parámetros de una Normal
# a partir de de una muestra de tamaño n
# representada en intervalos
#

estimaNormal <- function(parametros,frecu=frecu,limites=limites){
media<-parametros[1]
vari<-parametros[2]
dev.tip<-sqrt(vari)
proba.esti<-frecu/sum(frecu)
error<-0.0
for(i in 1:length(frecu)){
error<-error+(pnorm(limites[i+1],mean=media,sd=dev.tip)-
pnorm(limites[i],mean=media,sd=dev.tip)-proba.esti[i])^2
}
return(error)
}
```

```
limites<-c(140,160,170,180,190)
frecus<-c(10,40,45,5)

#estimaNormal(c(170,20),frecu=frecus,limites=limites)
(resu<-optim(c(170,25),estimaNormal,method='L-BFGS-B',
lower=c(160,0.01),upper=c(185,100),
limites=limites,frecu=frecus))
$par
[1] 170.25379  48.22593

$value
[1] 0.0021774

$counts
function gradient
      13       13

$convergence
[1] 0

$message
[1] "CONVERGENCE: REL_REDUCTION_OF_F <= FACTR*EPSMCH"
```

```
# Nivel de seguridad en nuestro conocimiento n.seg=5

param.opt<-resu$par

calcula.media.y.precision<-function(xx) c(mean(xx),1/var(xx))

n.seg<-5
Nsim<-1000
tempo<-matrix(apply(matrix(rnorm(n.seg*Nsim,mean=param.opt[1],
sd=sqrt(param.opt[2])),ncol=n.seg),1,calcula.media.y.precision),
ncol=2,byrow=T)

library(MASS)
fitdistr(tempo[,2],'gamma')
     shape         rate
   1.6143577    42.3748268
 ( 0.0660815) ( 2.0300159)
Warning message:
In densfun(x, parm[1], parm[2], ...) : NaNs produced

fitdistr(tempo[,1],'normal')
      mean            sd
  170.29241357     2.96915833
 (  0.09389303) (  0.06639240)
```

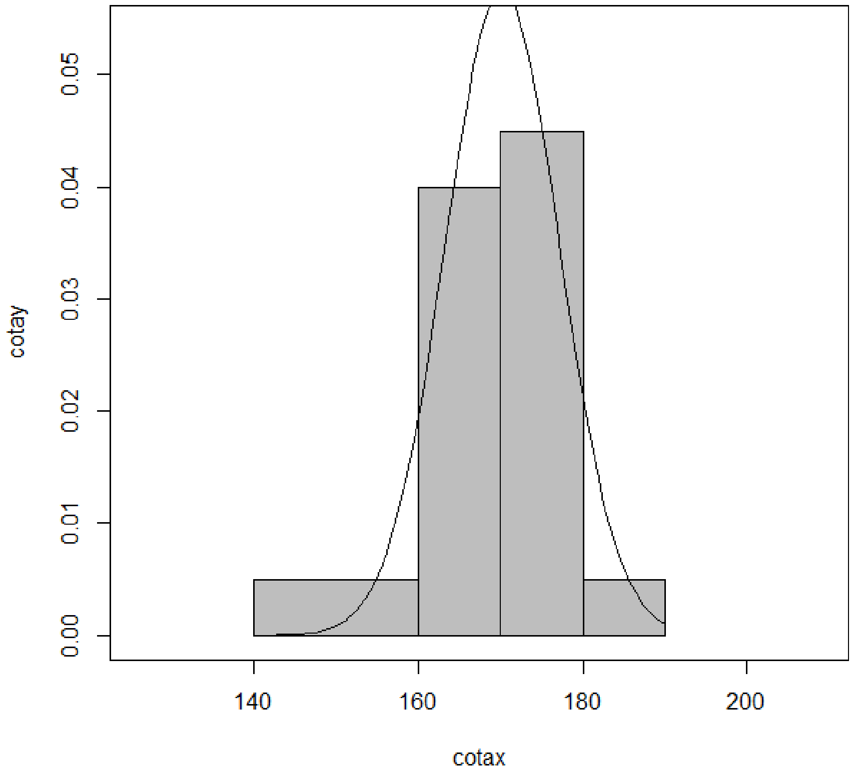
```
histograma<-function(frecu,limi){

 probas<-frecu/sum(frecu)
 altura<-probas/(limi[-1]-limi[-length(limi)])
 cotax<-c(0.90*min(limi),1.1*max(limi))
 cotay<-c(0.0,1.2*max(altura))
 plot(cotax,cotay,type='n')

 for(i in 1:length(frecu)){
 #altura<-probas[i]/(limi[i+1]-limi[i])
 polygon(c(limi[i],limi[i],limi[i+1],limi[i+1]),c(0,altura[i],altura
 }
 }

 histograma(frecus,limites)

points(xx<-seq(min(limites),max(limites),length=100),
  dnorm(xx,mean=param.opt[1],sd=sqrt(param.opt[2])),type='l')
```


cotay
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
140
160
180
200
cotax