Series de tiempo univariadas - Presentación 6

Mauricio Alejandro Mazo Lopera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Escuela de Estadística
Medellín

Operador rezago (backshift operator):

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$ definimos el operador rezago como:

$$BX_t = X_{t-1}$$

Este operador se puede extender como:

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

Operador rezago (backshift operator):

Para un proceso estocástico $\{X_t\}$ definimos el operador rezago como:

$$BX_t = X_{t-1}$$

Este operador se puede extender como:

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

NOTA: En la mayoría de textos y software estadísticos, se suele asociar este operador con la palabra **lag** (retraso o rezago).

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t$$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Definimos el operador de diferencias de orden 2 como:

$\nabla^2 X_t = (1 - B)^2 X_t$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Definimos el operador de diferencias de orden 2 como:

$$\nabla^2 X_t = (1-B)^2 X_t = (1-2B+B^2)X_t$$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Definimos el operador de diferencias de orden 2 como:

$$\nabla^2 X_t = (1-B)^2 X_t = (1-2B+B^2)X_t = X_t-2X_{t-1}+X_{t-2}$$

Operador diferencias

- Definimos el operador de diferencias de orden 1 como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t$$

- Definimos el operador de diferencias de orden 2 como:

$$\nabla^2 X_t = (1-B)^2 X_t = (1-2B+B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

- En general el operador diferencia de orden d se define como:

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Asumiendo que el proceso $\{X_t\}$ es estacionario (con media $E(X_t) = \mu$ y varianza $Var(X_t) = \sigma_x^2$), podemos representarlo a través de los modelos Auto-Regresivo (AR), Medias Móviles (MA) y una combinación de ambos conocida como ARMA.

Asumiendo que el proceso $\{X_t\}$ es estacionario (con media $E(X_t) = \mu$ y varianza $Var(X_t) = \sigma_x^2$), podemos representarlo a través de los modelos Auto-Regresivo (AR), Medias Móviles (MA) y una combinación de ambos conocida como ARMA.

NOTA: De ahora en adelante (a menos que se diga otra cosa), vamos a asumir que w_t es un ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2.

Asumiendo que el proceso $\{X_t\}$ es estacionario (con media $E(X_t) = \mu$ y varianza $Var(X_t) = \sigma_x^2$), podemos representarlo a través de los modelos Auto-Regresivo (AR), Medias Móviles (MA) y una combinación de ambos conocida como ARMA.

NOTA: De ahora en adelante (a menos que se diga otra cosa), vamos a asumir que w_t es un ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2.

Comencemos con la representación **Autoregresiva** de orden 1:

- AR(1): Este proceso se plantea como

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t$$

Como este proceso se asume estacionario, entonces

$$E(X_t) = \phi_0 + \phi_1 E(X_{t-1}) + E(w_t)$$

Asumiendo que el proceso $\{X_t\}$ es estacionario (con media $E(X_t) = \mu$ y varianza $Var(X_t) = \sigma_x^2$), podemos representarlo a través de los modelos Auto-Regresivo (AR), Medias Móviles (MA) y una combinación de ambos conocida como ARMA.

NOTA: De ahora en adelante (a menos que se diga otra cosa), vamos a asumir que w_t es un ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2.

Comencemos con la representación **Autoregresiva** de orden 1:

- AR(1): Este proceso se plantea como

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t$$

Como este proceso se asume estacionario, entonces

$$E(X_t) = \phi_0 + \phi_1 E(X_{t-1}) + E(w_t) \implies \phi_0 = \mu * (1 - \phi_1)$$

Por otra parte,

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Por otra parte,

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ &= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2\phi_0 + \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 w_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2\phi_0 + \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 w_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\
&\vdots \\
&= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j w_{t-j}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\
&= \phi_0 + \phi_1\phi_0 + \phi_1^2\phi_0 + \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 w_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\
&\vdots \\
&= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j w_{t-j}
\end{aligned}
$$

Si continuamos haciendo este proceso con $k \longrightarrow \infty$, se debe cumplir que $|\phi_1| < 1$ para que el proceso AR(1) en efecto sea estacionario.

Note que cuando tomamos esperanza a ambos lados:

$$E(X_t) = \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k E(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j})$$

Note que cuando tomamos esperanza a ambos lados:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k E(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \\ \mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \mu \phi_1^k + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \end{aligned}$$

Note que cuando tomamos esperanza a ambos lados:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k E(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \\ \mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \mu \phi_1^k + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \end{aligned}$$

Y tomando límite cuando $k \longrightarrow \infty$ a ambos lados:

$$\mu = \phi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j + \mu \lim_{k \to \infty} \phi_1^k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j E(w_t)$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Note que cuando tomamos esperanza a ambos lados:

$$
\begin{aligned}
E(X_t) &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k E(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \\
\mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \mu \phi_1^k + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j})
\end{aligned}
$$

Y tomando límite cuando $k \longrightarrow \infty$ a ambos lados:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j + \mu \lim_{k \to \infty} \phi_1^k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j E(w_t) \\
&= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + 0 + \frac{E(w_t)}{1-\phi_1}
\end{aligned}
$$

Note que cuando tomamos esperanza a ambos lados:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \phi_1^k E(X_{t-k}) + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \\ \mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j + \mu \phi_1^k + \sum_{j=0}^{k} \phi_1^j E(w_{t-j}) \end{aligned}$$

Y tomando límite cuando $k \longrightarrow \infty$ a ambos lados:

$$\begin{aligned} \mu &= \phi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j + \mu \lim_{k\to\infty} \phi_1^k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j E(w_t) \\ &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + 0 + \frac{E(w_t)}{1-\phi_1} \\ &= \frac{\phi_0}{1-\phi_1} \end{aligned}$$

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t$$

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \end{aligned}$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\
(1 - \phi_1 B) X_t &= \phi_0 + w_t
\end{aligned}
$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned}
X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\
(1-\phi_1 B)X_t &= \phi_0 + w_t \\
X_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B)}(\phi_0 + w_t)
\end{aligned}$$

Así, se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\phi_1| < 1$ entonces expandiendo en series de Taylor (serie geométrica):

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\ (1 - \phi_1 B) X_t &= \phi_0 + w_t \\ X_t &= \frac{1}{(1 - \phi_1 B)} (\phi_0 + w_t) \end{aligned}$$

Así, se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\phi_1| < 1$ entonces expandiendo en series de Taylor (serie geométrica):

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \right) (\phi_0 + w_t)$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\ (1-\phi_1 B)X_t &= \phi_0 + w_t \\ X_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B)}(\phi_0 + w_t) \end{aligned}$$

Así, se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\phi_1| < 1$ entonces expandiendo en series de Taylor (serie geométrica):

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j\right)(\phi_0 + w_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \phi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j w_t$$

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\ (1-\phi_1 B)X_t &= \phi_0 + w_t \\ X_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B)}(\phi_0 + w_t) \end{aligned}$$

Así, se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\phi_1| < 1$ entonces expandiendo en series de Taylor (serie geométrica):

$$\begin{aligned} X_t &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j\right)(\phi_0 + w_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \phi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j w_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \phi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j} \end{aligned}$$

Análisis de series de tiempo estacionarias:

Otra forma de ver el problema anterior es considerando el operador rezago B:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ X_t - \phi_1 X_{t-1} &= \phi_0 + w_t \\ (1-\phi_1 B)X_t &= \phi_0 + w_t \\ X_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B)}(\phi_0 + w_t) \end{aligned}$$

Así, se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\phi_1| < 1$ entonces expandiendo en series de Taylor (serie geométrica):

$$\begin{aligned} X_t &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j\right)(\phi_0 + w_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \phi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j w_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \phi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j} = \frac{\phi_0}{1-\phi_1} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j} \end{aligned}$$

Observe que si vemos a $1 - \phi_1 B$ como un polinómio de grado 1 en términos de B y lo igualamos a cero, tenemos que la raíz se obtiene como:

$$1 - \phi_1 B = 0$$

Observe que si vemos a $1 - \phi_1 B$ como un polinómio de grado 1 en términos de B y lo igualamos a cero, tenemos que la raíz se obtiene como:

$$1 - \phi_1 B = 0 \implies B = \frac{1}{\phi_1}$$

Y como se debe cumplir que $|\phi_1| < 1$ entonces la raíz debe cumplir que:

$$\frac{1}{|\phi_1|} > 1$$

es decir la ráiz debe ser mayor a 1 (o por fuera del círculo unitario si fuera un número complejo) para que el proceso AR(1) sea estacionario.

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

De aquí:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} \;=\; \phi_0 + w_t$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \phi_0 + w_t \\
X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \phi_0 + w_t
\end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

De aquí:

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \phi_0 + w_t \\ X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \phi_0 + w_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \phi_0 + w_t \end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

De aquí:

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \phi_0 + w_t \\ X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \phi_0 + w_t \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \phi_0 + w_t \\ \phi(B) X_t &= \phi_0 + w_t \end{aligned}$$

Donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

En general, podemos plantear un modelo autoregresivo de orden p, denotado por AR(p) como:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \phi_0 + w_t \\
X_t - \phi_1 B X_t - \phi_2 B^2 X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \phi_0 + w_t \\
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \phi_0 + w_t \\
\phi(B) X_t &= \phi_0 + w_t
\end{aligned}$$

Donde

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

Si vemos a $\phi(B)$ como un polinómio en términos de B, entonces se puede probar que el proceso AR(p) es estacionario si las raíces de $\phi(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario (note que pueden dar raíces complejas).

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$E(\phi(B)X_t) \;=\; \phi_0 + E(w_t)$$

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(\phi(B)X_t) &= \phi_0 + E(w_t) \\ \phi(B)E(X_t) &= \phi_0 \end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(\phi(B)X_t) &= \phi_0 + E(w_t) \\ \phi(B)E(X_t) &= \phi_0 \\ \phi(B)\mu &= \phi_0 \end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E(\phi(B)X_t) &= \phi_0 + E(w_t) \\
\phi(B)E(X_t) &= \phi_0 \\
\phi(B)\mu &= \phi_0 \\
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\mu &= \phi_0
\end{aligned}
$$

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E(\phi(B)X_t) &= \phi_0 + E(w_t) \\
\phi(B)E(X_t) &= \phi_0 \\
\phi(B)\mu &= \phi_0 \\
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\mu &= \phi_0 \\
(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu &= \phi_0
\end{aligned}
$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Si tomamos esperanza en el proceso estacionario anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} E(\phi(B)X_t) &= \phi_0 + E(w_t) \\ \phi(B)E(X_t) &= \phi_0 \\ \phi(B)\mu &= \phi_0 \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)\mu &= \phi_0 \\ (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu &= \phi_0 \\ \mu &= \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \end{aligned}$$

Para encontrar la varianza del proceso estacionario AR(p) consideramos lo siguiente:

$$Var(X_t) = Cov\left(X_t, X_t\right)$$

Para encontrar la varianza del proceso estacionario AR(p) consideramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Cov\,(X_t, X_t) \\ &= Cov\,[X_t, (\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t)] \end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Para encontrar la varianza del proceso estacionario AR(p) consideramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Cov\,(X_t, X_t) \\
&= Cov\,[X_t, (\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t)] \\
&= Cov(X_t, \phi_0) + \phi_1 Cov(X_t, X_{t-1}) + \cdots + \phi_p Cov(X_t, X_{t-p}) + Cov(X_t, w_t)
\end{aligned}$$

Para encontrar la varianza del proceso estacionario AR(p) consideramos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Cov\left(X_t, X_t\right) \\ &= Cov\left[X_t, (\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t)\right] \\ &= Cov(X_t, \phi_0) + \phi_1 Cov(X_t, X_{t-1}) + \cdots + \phi_p Cov(X_t, X_{t-p}) + Cov(X_t, w_t) \\ &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_w^2 \end{aligned}$$

Pero $\gamma_0 = Var(X_t)$ entonces:

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \cdots + \phi_p \gamma(p)$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Para encontrar la varianza del proceso estacionario AR(p) consideramos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Cov\,(X_t, X_t) \\
&= Cov\,[X_t, (\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t)] \\
&= Cov(X_t, \phi_0) + \phi_1 Cov(X_t, X_{t-1}) + \cdots + \phi_p Cov(X_t, X_{t-p}) + Cov(X_t, w_t) \\
&= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_w^2
\end{aligned}$$

Pero $\gamma_0 = Var(X_t)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \cdots + \phi_p \gamma(p) \\
1 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \cdots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_w^2}{\gamma(0)}
\end{aligned}$$

De donde:

$$\sigma_x^2 = \gamma(0) = \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \cdots - \phi_p \rho_p}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Para las función de autocovarianza y autocorrelación:

$$\gamma(j) = Cov(X_t, X_{t-j})$$

Para las función de autocovarianza y autocorrelación:

$$\begin{aligned}
\gamma(j) &= Cov(X_t, X_{t-j}) \\
&= Cov(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t, X_{t-j})
\end{aligned}$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Para las función de autocovarianza y autocorrelación:

$$
\begin{aligned}
\gamma(j) &= Cov(X_t, X_{t-j}) \\
&= Cov(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t, X_{t-j}) \\
&= \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-j}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-j}) + Cov(w_t, X_{t-j})
\end{aligned}
$$

Modelo Autoregresivo de orden p:

Para las función de autocovarianza y autocorrelación:

$$
\begin{aligned}
\gamma(j) &= Cov(X_t, X_{t-j}) \\
&= Cov(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t, X_{t-j}) \\
&= \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-j}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-j}) + Cov(w_t, X_{t-j}) \\
&= \phi_1 \gamma(j-1) + \phi_2 \gamma(j-2) + \cdots + \phi_p \gamma(j-p)
\end{aligned}
$$

Para las función de autocovarianza y autocorrelación:

$$\begin{aligned}
\gamma(j) &= Cov(X_t, X_{t-j}) \\
&= Cov(\phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t, X_{t-j}) \\
&= \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-j}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-j}) + Cov(w_t, X_{t-j}) \\
&= \phi_1 \gamma(j-1) + \phi_2 \gamma(j-2) + \cdots + \phi_p \gamma(j-p)
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \cdots + \phi_p \rho_{j-p}$$

NOTA: Cuando le damos valores a j desde 1 hasta p en esta fórmula recursiva, obtenemos p ecuaciones conocidas como las ecuaciones de Yule-Walker, es decir:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}
$$

Es posible demostrar (ver TEXTO 3 - TEÓRICO - Wei-Time series analysis) que el coeficiente ϕ_p es igual a la p-ésima correlación parcial del modelo AR(p), es decir, $\phi_{pp} = \phi_p$.

Modelo Autoregresivo de orden p:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}$$

Es posible demostrar (ver TEXTO 3 - TEÓRICO - Wei-Time series analysis) que el coeficiente ϕ_p es igual a la p-ésima correlación parcial del modelo AR(p), es decir, $\phi_{pp} = \phi_p$.

Además, las correlaciones parciales ϕ_{kk} para $k > p$ del modelo $AR(p)$ son iguales a cero. **Esto es de gran ayuda para identificar el orden de un modelo auto regresivo**.

Modelo Autoregresivo de orden p:

Veamos algunos gráficos de las ACF y PACF terόricas de modelos AR(p):

- AR(1): Con $\phi_1 = 0.8$ (note que ϕ_0 no es relevante para encontrar la ACF y la PACF ¿por qué?).

Modelo Autoregresivo de orden p:

Veamos algunos gráficos de las ACF y PACF terróricas de modelos AR(p):

- AR(1): Con $\phi_1 = 0.8$ (note que ϕ_0 no es relevante para encontrar la ACF y la PACF ¿por qué?). La raíz de $\phi(B) = 1 - 0.8B = 0$ es $B = 1.25$ y como $|1.25| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso AR(1), $X_t = \phi_0 + 0.8X_{t-1} + w_t$, es estacionario.

```
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ar=c(0.8) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

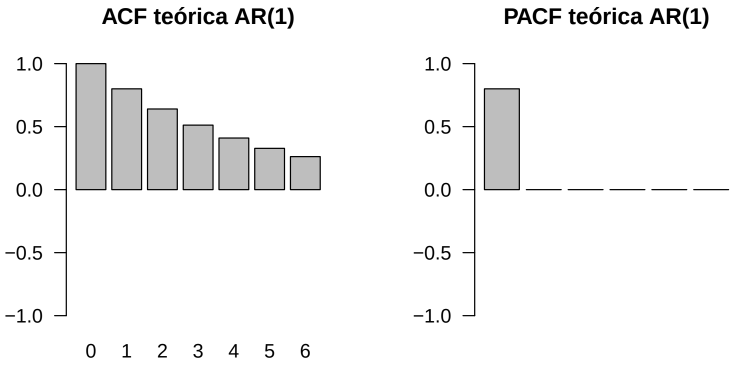
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.8000 0.6400 0.5120 0.4096 0.3277 0.2621
```

```
pacf1<-ARMAacf(ar=c(0.8), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1] 0.8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
```

Modelo Autoregresivo de orden p:

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica AR(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica AR(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Modelo Autoregresivo de orden p:

- AR(1): Con $\phi_1 = -0.8$. La raíz de $\phi(B) = 1 - (-0.8)B = 1 + 0.8B = 0$ es $B = -1.25$ y como $|-1.25| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso AR(1), $X_t = \phi_0 - 0.8X_{t-1} + w_t$, es estacionario.

```
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ar=c(-0.8) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

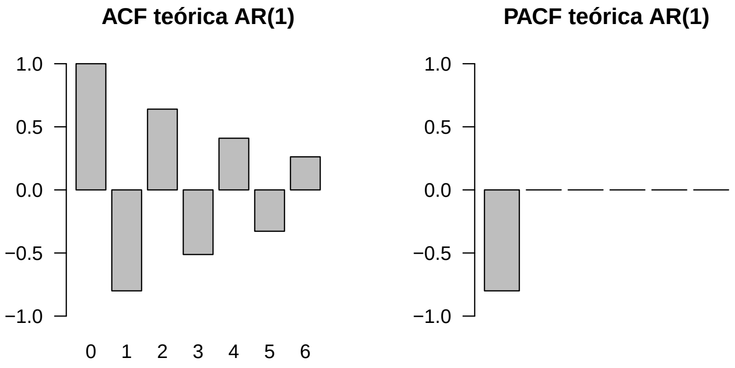
```
##        0       1       2       3       4       5       6
##   1.0000 -0.8000  0.6400 -0.5120  0.4096 -0.3277  0.2621
```

```
pacf1<-ARMAacf(ar=c(-0.8), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1] -0.8  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0
```

Modelo Autoregresivo de orden p:

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica AR(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica AR(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



- AR(2): Con $\phi_1 = 0.4$ y $\phi_2 = 0.2$. Las raíces de $\phi(B) = 1 - 0.4B - 0.2B^2 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,-0.4,-0.2))
```

```
## [1]  1.44949-0i -3.44949+0i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,-0.4,-0.2)))
```

```
## [1] 1.44949 3.44949
```

Modelo Autoregresivo de orden p:

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf2<-ARMAacf(ar=c(0.4,0.2) , lag.max = 6)
round(acf2,4)
```

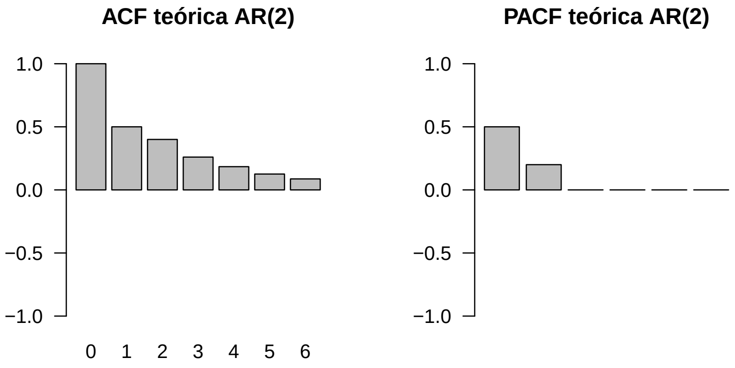
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.5000 0.4000 0.2600 0.1840 0.1256 0.0870
```

```
pacf2<-ARMAacf(ar=c(0.4,0.2), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf2,4)
```

```
## [1] 0.5 0.2 0.0 0.0 0.0 0.0
```

Modelo Autoregresivo de orden p:

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf2, main="ACF teórica AR(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf2, main="PACF teórica AR(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



- AR(2): Con $\phi_1 = 0.4$ y $\phi_2 = -0.2$. Las raíces de $\phi(B) = 1 - 0.4B + 0.2B^2 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,-0.4,0.2))
```

```
## [1] 1+2i 1-2i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,-0.4,0.2)))
```

```
## [1] 2.236068 2.236068
```

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

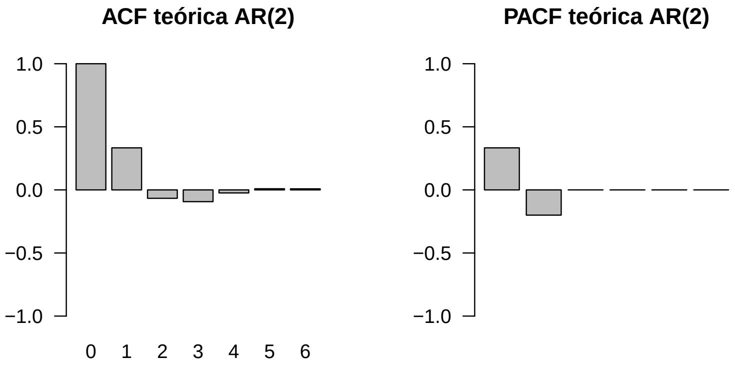
```
options(scipen = 100)
acf2<-ARMAacf(ar=c(0.4,-0.2) , lag.max = 6)
round(acf2,4)
```

```
##       0       1       2       3       4       5       6
##  1.0000  0.3333 -0.0667 -0.0933 -0.0240  0.0091  0.0084
```

```
pacf2<-ARMAacf(ar=c(0.4,-0.2), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf2,4)
```

```
## [1]  0.3333 -0.2000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
```

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf2, main="ACF teórica AR(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf2, main="PACF teórica AR(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



- AR(3): Con $\phi_1 = 0.4$, $\phi_2 = 0.2$ y $\phi_3 = 0.3$. Las raíces de $\phi(B) = 1 - 0.4B - 0.2B^2 - 0.3B^3 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,-0.4,-0.2,-0.3))
```

```
## [1]  1.056710-0.000000i -0.861689+1.553041i -0.861689-1.553041i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,-0.4,-0.2,-0.3)))
```

```
## [1] 1.056710 1.776075 1.776075
```

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf3<-ARMAacf(ar=c(0.4,0.2,0.3) , lag.max = 6)
round(acf3,4)
```

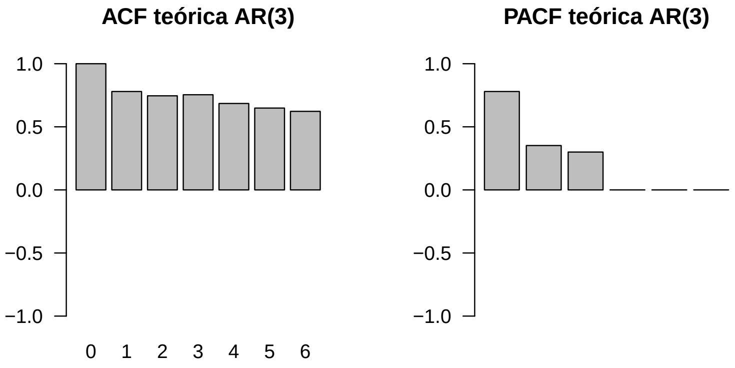
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.7797 0.7458 0.7542 0.6847 0.6485 0.6226
```

```
pacf3<-ARMAacf(ar=c(0.4,0.2,0.3), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf3,4)
```

```
## [1] 0.7797 0.3516 0.3000 0.0000 0.0000 0.0000
```

Modelo Autoregresivo de orden p:

```r
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf3, main="ACF teórica AR(3)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf3, main="PACF teórica AR(3)", las=1, ylim=c(-1,1))
```

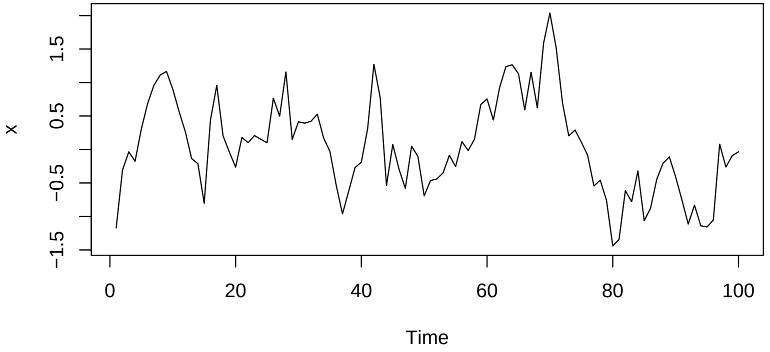


Simulación de modelos AR(p):

Simulemos una realización o serie de tiempo de tamaño $n = 100$ del proceso AR(1) $X_t = 0.8X_{t-1} + w_t$ con $\sigma_w^2 = 0.5^2$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ar = 0.8), n = 100, sd=0.5)
```

```
plot(x)
```



Simulación de modelos AR(p):

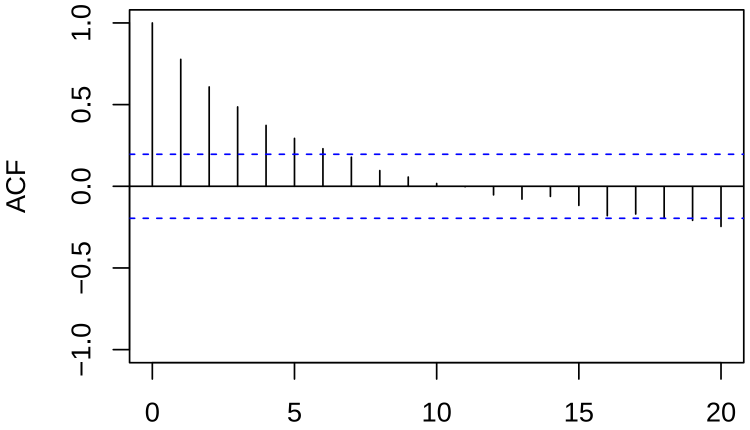
Las 6 primeras ACF estimadas son:

```
acf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'x', by lag
##
##     0     1     2     3     4     5     6
## 1.000 0.777 0.608 0.486 0.373 0.293 0.230
```

Simulación de modelos AR(p):

```
acf(x, ylim=c(-1,1))
```

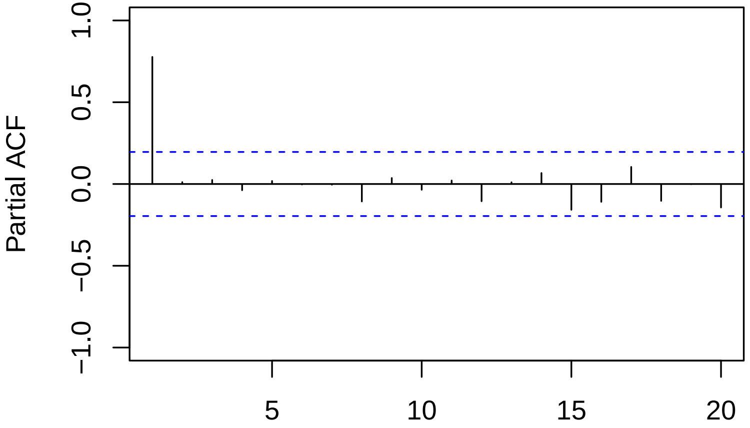


Las 6 primeras PACF estimadas son:

```
pacf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Partial autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6
##  0.777  0.011  0.025 -0.038  0.018 -0.003
```

```r
pacf(x, ylim=c(-1,1))
```

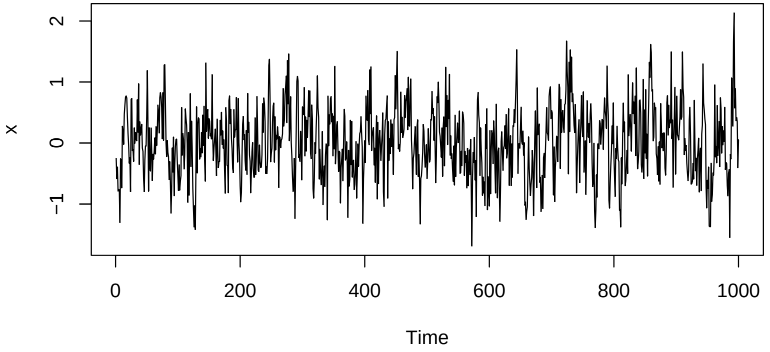


Simulación de modelos AR(p):

Simulemos una realización o serie de tiempo de tamaño $n = 1000$ del proceso AR(2) $X_t = 0.4X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + w_t$ con $\sigma_w^2 = 0.5^2$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model=list(ar=c(0.4,0.2)),n=1000,sd=0.5)
```

```
plot(x)
```

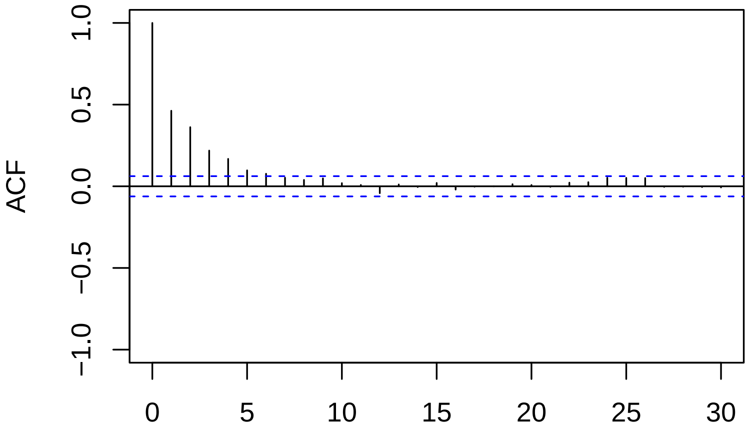


Las 6 primeras ACF estimadas son:

```
acf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'x', by lag
##
##     0     1     2     3     4     5     6
## 1.000 0.463 0.362 0.219 0.168 0.098 0.077
```

```
acf(x, ylim=c(-1,1))
```



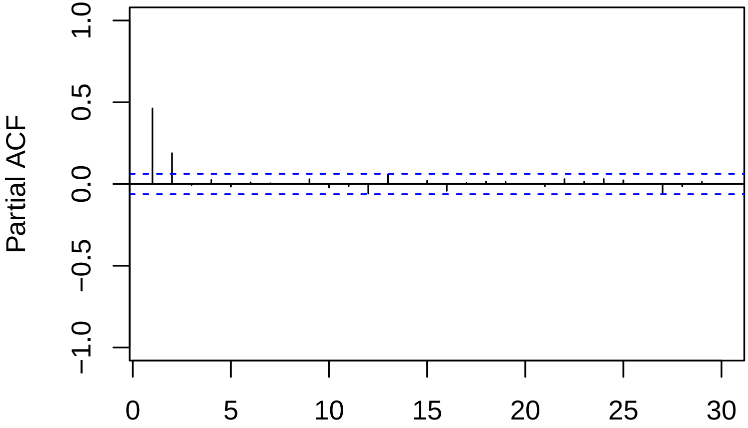
Las 6 primeras PACF estimadas son:

```
pacf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Partial autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6
##  0.463  0.189 -0.006  0.025 -0.016  0.010
```

Simulación de modelos AR(p):

```
pacf(x, ylim=c(-1,1))
```



Conclusiones

- El proceso AR(p) es estacionario si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

están fuera del círculo unitario.

- El proceso AR(p) es estacionario si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- La función ACF teórica del proceso AR(p) tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.

Conclusiones

- El proceso AR(p) es estacionario si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- La función ACF teórica del proceso AR(p) tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.
- La función PACF teórica del proceso AR(p), denotada por ϕ_{kk}, es distinta de cero para $k \leq p$ y cero para $k > p$. Además, $\phi_{pp} = \phi_p$.

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF terόricas y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo AR(p) con orden p igual a la última PACF significativa.

Conclusiones

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF teróricas y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo AR(p) con orden p igual a la última PACF significativa.
- Como regla, si tenemos sospechas de que debemos ajustar un modelo AR(p) debemos intentar seleccionar el valor de p más pequeño, intentando llegar al modelo "más simple" posible.