TALLER N°2 INTRODUCCIÓN AL ANALISIS MULTIVARIADO, Semestre 2022-I

1. Considere una población normal bivariada con $\mu_1 = 0, \mu_2 = 2, \sigma_{11} = 2, \sigma_{22} = 1$ y $\rho_{12} = 0.5$

   a) Escribir la expresión de la densidad normal bivariada, para este caso.

   b) Escribir la expresión para la distancia generalizada al cuadrado: $(\underline{X} - \underline{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$ como una función de: x_1 y x_2.

   c) Determine y grafique el contorno de densidad constante que contiene el 50 % de probabilidad.

   d) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix}X_1\end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix}X_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$

2. Sea $\underline{\mathbf{x}} \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$, con: $\underline{\mu} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 3 & 2\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

   a) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix}X_1\\X_3\end{bmatrix}$$

   b) Hallar la distribución de: $X_1 + 2X_2 - X_3$

   c) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix}X_1 + 2X_2 - X_3\\2X_1 - X_2 + 2X_3\end{bmatrix}$$

   d) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix}X_1\end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix}X_2\\X_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

   e) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix}X_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$

3. Considere el vector aleatorio $\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{bmatrix} \sim N_4(\underline{\mu}, \Sigma)$, con vector de medias dado por:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\0\\4\end{bmatrix} \quad \text{y matriz de var-cov dada por :} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}4 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-1 & 3 & 1 & -1\\\frac{1}{2} & 1 & 6 & 1\\-\frac{1}{2} & -1 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

   a) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix}X_1\\X_4\end{bmatrix}$$

   b) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix}X_1\\X_3\\X_4\end{bmatrix}$$

   c) Hallar la distribución de: $X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4$

   d) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix}2X_2 - X_3 - X_4\\2X_1 + 2X_3 + X_4\end{bmatrix}$$

e) Hallar la distribución de:
$$\begin{bmatrix} X_3 - X_4 \\ 2X_1 + 2X_3 + X_4 \end{bmatrix}$$

f) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix} X_1 \end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

g) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix} X_1 \end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

h) Hallar la distribución condicional de $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ dado $\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Sea $\underline{X}_1, \underline{X}_2$ dos vectores aleatorios normales 3-variados independientes con vector de medias y matriz de var-cov dados por:
$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
es decir: $\underline{X}_1 \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ y $\underline{X}_2 \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$, $\mathrm{Cov}(\underline{X}_1, \underline{X}_2) = \mathbf{O}_{3\times3}$.
Considere las siguientes combinaciones lineales de $\underline{X}_1$ y $\underline{X}_2$:
$$\underline{V}_1 = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 \quad ; \quad \underline{V}_2 = 2\underline{X}_1 - \underline{X}_2 \quad ; \quad \underline{V}_3 = \underline{X}_1 - 2\underline{X}_2$$
Escribir las componentes de $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ y $\underline{V}_3$ en términos de las variables originales de cada vector.
hallar:

a) La distribución de $\underline{V}_1$

b) La distribución de $\underline{V}_2$

c) La distribución de: $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix}$, ¿Es $\underline{V}_1$ independiente de $\underline{V}_2$, porqué si o porqué no?

d) La distribución de: $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \\ \underline{V}_2 \\ \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix}$

5. Sea $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \underline{X}_4$ cuatro vectores aleatorios normales 3-variados independientes con vector de medias y matriz de var-cov dados por:
$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
es decir: $\underline{X}_i \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$, $i = 1, 2, 3, 4$ y $\mathrm{Cov}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) = \mathbf{O}_{3\times3}$, para $i \neq j = 1, 2, 3, 4$
Considere las siguientes combinaciones lineales de los $\underline{X}_i$:
$$\underline{V}_1 = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \underline{X}_3 \quad ; \quad \underline{V}_2 = 2\underline{X}_2 - \underline{X}_3 + \underline{X}_4 \quad ; \quad \underline{V}_3 = \underline{X}_1 - 2\underline{X}_3 - \underline{X}_4$$
Escribir las componentes de $\underline{V}_1, \underline{V}_2$ y $\underline{V}_3$ en términos de las variables originales de cada vector.
hallar:

a) La distribución de $\underline{V}_1$

b) La distribución de $\underline{V}_3$

c) La distribución de: $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix}$, ¿Es $\underline{V}_1$ independiente de $\underline{V}_3$, porqué si o porqué no?

d) La distribución de: $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \\ \underline{V}_2 \\ \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix}$

6. Sea $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \underline{X}_4$ cuatro vectores aleatorios normales p-variados independientes con vector de medias y matriz de var-cov dados por: $\underline{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ es decir: $\underline{X}_i \sim N_p(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ para i=1,2,3,4 y $\text{Cov}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) = \mathbf{O}_{3\times 3}$, para $i \neq j = 1, 2, 3, 4$.

   Considere las siguientes combinaciones lineales de los $\underline{X}_i$:

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{4}\underline{X}_1 - \frac{1}{4}\underline{X}_2 + \frac{1}{4}\underline{X}_3 - \frac{1}{4}\underline{X}_4 \quad ; \quad \underline{V}_2 = \frac{1}{4}\underline{X}_1 + \frac{1}{4}\underline{X}_2 - \frac{1}{4}\underline{X}_3 - \frac{1}{4}\underline{X}_4$$

   Escribir las componentes de $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$ en términos de las variables originales de cada vector.

   Hallar:

   a) Las distribuciones marginales de cada vector aleatorio: $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$

   b) Las distribución conjunta de los vectores aleatorios: $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$

7. Sea $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{X}_3, \underline{X}_4, \underline{X}_5$ cinco vectores aleatorios p-variados independientes e idénticamente distribuidos con vector de medias y matriz de var-cov dados por: $\underline{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ es decir: $E[\underline{X}_i] = \underline{\mu}$, $Var[\underline{X}_i] = \boldsymbol{\Sigma}$, para i=1,2,3,4 y $\text{Cov}(\underline{X}_i, \underline{X}_j) = \mathbf{O}_{p\times p}$, para $i \neq j = 1, 2, 3, 4, 5$.

   Considere las siguientes combinaciones lineales de los $\underline{X}_i$:

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{5}\underline{X}_1 + \frac{1}{5}\underline{X}_2 + \frac{1}{5}\underline{X}_3 + \frac{1}{5}\underline{X}_4 + \frac{1}{5}\underline{X}_5 \quad ; \quad \underline{V}_2 = \underline{X}_1 - \underline{X}_2 + \underline{X}_3 - \underline{X}_4 + \underline{X}_5$$

   Escribir las componentes de $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$ en términos de las variables originales de cada vector. Hallar:

   a) La media y la matriz de var-cov de cada una de las combinaciones lineales: $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$, en términos de $\underline{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$.

   b) La matriz de var-cov entre las dos combinaciones lineales: $\underline{V}_1$ y $\underline{V}_2$

8. Hallar las estimaciones de máxima-verosimilitud del vector de medias $\mu_{2\times 1}$ y de la matriz de var-cov $\boldsymbol{\Sigma}_{2\times 2}$ basado en la muestra aleatoria:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

   de una población normal bivariada.