

# Diseño de Experimentos - 3007340

## DOE - Experimentos de Comparaciones Simples desde Modelos ANOVA

Nelfi González Alvarez

Profesora Asociada Escuela de Estadística

e-mail: [ngonzale@unal.edu.co](mailto:ngonzale@unal.edu.co)

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Escuela de Estadística  
Semestre 02 de 2021

# Contenido I

- 1 Comparaciones Simples
- 2 Comparaciones con m.a independientes con varianzas poblacionales iguales
- 3 Comparaciones con muestras pareadas

# Contenido

- 1 Comparaciones Simples
- 2 Comparaciones con m.a independientes con varianzas poblacionales iguales
- 3 Comparaciones con muestras pareadas

## Comparaciones Simples

Según Montgomery (2020), **los experimentos donde solo se comparan dos condiciones o tratamientos** son llamados **experimentos de comparaciones simples**. Los dos tratamientos comparados son definidos por dos niveles de un único factor de efectos fijos. Las estructuras de diseño usadas son:

- **Completamente aleatorizada (o con muestras aleatorias independientes):**
  - Las unidades experimentales (U.E) son homogéneas entre sí
  - Las U.E se asignan completamente al azar a los tratamientos.
  - Los tratamientos también se observan en orden aleatorio.
  - Se obtienen dos m.a independientes de la respuesta, de tamaños  $n_1$ ,  $n_2$ , respectivamente, con  $Y_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , respectivamente.
- **De comparaciones pareadas:**
  - Las U.E no son homogéneas.
  - Para mejorar la precisión en las comparaciones de tratamientos, y suponiendo que las U.E son suficientemente grandes, cada una se particiona en dos partes que son aleatoriamente asignadas entre los dos tratamientos.
  - El orden en que cada tratamiento es observado dentro de cada U.E también es aleatorizado.
  - Se cuenta con  $n$  observaciones de la respuesta por cada tratamiento pero pareadas según U.E, de modo que las muestras  $Y_{ij}$ , con  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, \dots, n$ , no son independientes por el pareamiento dentro de cada U.E.

# Contenido

- 1 Comparaciones Simples
- 2 Comparaciones con m.a independientes con varianzas poblacionales iguales
  - Propiedades estadísticas
  - Test de hipótesis de interés
  - Funciones R asociadas
  - Ejemplo 1
- 3 Comparaciones con muestras pareadas

# Comparaciones con m.a independientes con varianzas poblacionales iguales

- $Y_{ij}$ :  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, n_i$ .
- $I_{1,ij}$ : Indicadora del tratamiento 1 evaluada en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento. Vale 1 para  $i = 1$  y 0 para  $i = 2$ .
- $I_{2,ij}$ : Indicadora del tratamiento 2 evaluada en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento. Vale 1 para  $i = 2$  y 0 para  $i = 1$ .
- $\varepsilon_{ij}$ : Error aleatorio en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento.
- $\mu_i$ : Respuesta media en el tratamiento  $i$ .
- $\mu$ : Respuesta media global.
- $\alpha_i$ : Efecto fijo del  $i$ -ésimo tratamiento, es tal que  $\mu_i = \mu + \alpha_i$ .

## Modelos ANOVA

► test Anova

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (1a)$$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (1b)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^2 n_i \alpha_i = 0$$

## Modelos de RLM equivalentes

► test MRL

$$Y_{ij} = \mu_1 I_{1,ij} + \mu_2 I_{2,ij} + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (2a)$$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 I_{1,ij} + \alpha_2 I_{2,ij} + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (2b)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^2 n_i \alpha_i = 0$$

## Nota 2.1

- El modelo de regresión en (2a), es un modelo de regresión lineal múltiple sin intercepto, luego para ajustarlo usamos:

```
> modelo1=lm(Y~- 1+I1+I2)
```

donde los objetos I1 e I2 son las variables indicadoras de los tratamientos 1 y 2, respectivamente.

- Para ajustar el modelo en (2b), tenemos que de la restricción lineal  $\sum_{i=1}^2 n_i \alpha_i = 0$ , podemos escribir  $\alpha_2 = -\frac{n_1}{n_2} \alpha_1$ , luego podemos reescribir el modelo así:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 X_{ij} + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (3a)$$

$$\text{con } X_{ij} = I_{1,ij} - \frac{n_1}{n_2} I_{2,ij}. \quad (3b)$$

Este último modelo es el que se ajusta por mínimos cuadrados: [► ir a test en \(12b\)](#)

```
> X=I1-(n1/n2)*I2
```

```
> modelo2=lm(Y~X)
```

donde los objetos I1 e I2 son las variables indicadoras de los tratamientos 1 y 2, n1 y n2, los tamaños de muestra, respectivamente.

## Propiedades estadísticas

*Bajo los modelos anteriores,*

$$Y_{1j} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2) \quad (4a)$$

$$Y_{2j} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2) \quad (4b)$$

*Todas las  $Y_{ij}$  son mutuamente independientes, de donde también tenemos que*

$$\bar{Y}_{1\bullet} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} Y_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2/n_1) \quad (5a)$$

$$\bar{Y}_{2\bullet} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2/n_2) \quad (5b)$$

*siendo  $\bar{Y}_{1\bullet}$  y  $\bar{Y}_{2\bullet}$  independientes, de modo que*

$$(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \left[ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right]\right) \quad (6)$$

*Un estimador insesgado de  $\sigma^2$  es*

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1)}, \quad \text{con} \quad S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2 \quad (7)$$



## Test de hipótesis de interés

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (8)$$

Bajo poblaciones normales de varianzas iguales, conocemos que el estadístico de prueba, su distribución bajo  $H_0$  y criterio de decisión con valor  $P$ , son:

► Nota 2.2

$$T_0 = \frac{\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})}{S_p} \sim t_{n_1 + n_2 - 2} \quad (9a)$$

$$\text{rechazar } H_0 \text{ si } P(|t_{n_1 + n_2 - 2}| > |T_0|) \text{ es pequeño.} \quad (9b)$$

A continuación veamos esta prueba desde el punto de vista de los modelos ANOVA y de regresión.

## Modelo ANOVA

Para los modelos en (1a)-(1b), respectivamente,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (10a)$$

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{vs.}$$

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para al menos un } i = 1, 2 \quad (10b)$$

En ambos casos, bajo  $H_0$  y  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ , el estadístico de prueba, su distribución y su valor P:

$$F_0 = \frac{SSA}{MSE} \sim f_{1, n_1 + n_2 - 2}, \quad \text{con} \quad (11a)$$

$$SSA = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})^2, \quad MSE = S_p^2 \quad (11b)$$

$$\text{Valor P: } P(f_{1, n_1 + n_2 - 2} > F_0). \quad (11c)$$

## Modelo de regresión lineal

Para modelo en (2a), (3a), respectivamente,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (12a)$$

$$H_0 : \alpha_1 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \alpha_1 \neq 0 \quad (12b)$$

En ambos casos, bajo  $H_0$  y  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ , el estadístico de prueba, su distribución y su valor P:

$$F_0 = \frac{[SSE(MR) - SSE(MF)]}{MSE(MF)} \sim f_{1, n_1 + n_2 - 2} \quad (13a)$$

donde MR es el modelo reducido bajo  $H_0$ :

$$Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (13b)$$

$$\text{Valor P: } P(f_{1, n_1 + n_2 - 2} > F_0). \quad (13c)$$

## Nota 2.2

**MF:** Modelo FULL o completo, es el modelo en (2a) y (3a), respectivamente. Puede demostrarse que  $[SSE(MR) - SSE(MF)]$  es igual al SSA del modelo ANOVA y  $SSE(MF)$  es igual al SSE del modelo ANOVA, por tanto, los estadísticos  $F_0$  en las ecuaciones (11a) y (13a), son iguales y estos son a su vez iguales al cuadrado del estadístico  $T_0$  en (9a). Luego, los correspondientes valores P en ecuaciones (9b), (11c), (13c), también son iguales.

## Funciones R asociadas

Para modelos ANOVA es necesario definir una variable tipo **factor** cuyos niveles son los dos tratamientos a comparar en términos de medias:

- `aov(Y~Factor)`: Para el ajuste del modelo ANOVA.
- `anova(...)`, `summary(...)`: Sobre modelos ANOVA obtienen la tabla ANOVA.
- `fit.contrast(...)`: Función de la librería `gmodels`, para estimar contrastes de medias (entre estos, las diferencias de medias) y sus I.C.
- `lsmeans(...)`: Función de la librería `lsmeans`, para estimar medias de tratamientos y sus I.C.
- `emmeans(...)`: Función de la librería `emmeans` (va a sustituir a `lsmeans` y sus funciones), hace lo mismo que `lsmeans`.

En modelos de regresión. Además de la función `lm(...)`,

- `summary(...)`: Sobre objetos `lm`, obtiene la tabla de parámetros estimados.
- `confint(...)`: Sobre objetos `lm`, obtiene I.C para los parámetros estimados.
- `linearHypothesis(...)`: Función de la librería `car`, usada para realizar pruebas de hipótesis sobre subconjuntos de parámetros de modelos de regresión.
- `Anova(...)`: Función de la librería `car`, por defecto da las sumas de cuadrados tipo II y el estadístico F y valor P, para la prueba de significancia individual de coeficientes de regresión asociados a los predictores del modelo.

## Nota 2.3

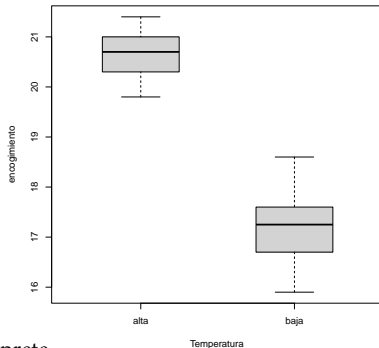
*En R se cuenta también con las siguientes funciones para la comparación de varianzas y de medias de dos poblaciones normales:*

- ***t.test(...)***: *Función para prueba t sobre la comparación de medias de dos poblaciones normales, con muestras independientes y con muestras pareadas. Permite considerar en la hipótesis alternativa tanto la diferencia como las correspondientes a las desigualdades de cola derecha y cola izquierda. Además, con muestras independientes, permite considerar tanto el caso de varianzas iguales como el de varianzas diferentes (aproximación Satterwaite).*
- ***var.test(...)***: *Función para pruebas F sobre la razón de varianzas de dos poblaciones normales. Con la opción `alternative="two.sided"` permite probar la igualdad de varianzas.*

## Ejemplo 1

Se prueban diez piezas en cada nivel de temperatura y se mide el encogimiento sufrido en unidades de porcentaje multiplicado por 10. Los resultados son

Temperatura baja (nivel 2)	Temperatura alta (nivel 1)
17.2	21.4
17.5	20.9
18.6	19.8
15.9	20.4
16.4	20.6
17.3	21.0
16.8	20.8
18.4	19.9
16.7	21.1
17.6	20.3
$Y_{2\bullet} = 17.24$ $S_2^2 = 0.7093333$	$Y_{1\bullet} = 20.62$ $S_1^2 = 0.2706667$
$Y_{\bullet\bullet} = 18.93$ (promedio global)	



- Analice los boxplots comparativos e interprete
- Compare las varianzas en cada temperatura
- ¿La  $T^o$  tiene algún efecto en el encogimiento?
- Dé un intervalo de confianza para la diferencia de medias.

## Lectura de los datos, medidas y gráficos descriptivos

```
rm(list=ls(all=TRUE))
datos4=data.frame(Temperatura=factor(rep(c("baja", "alta"), times=10)), encogimiento=scan())
17.2 21.4
17.5 20.9
18.6 19.8
15.9 20.4
16.4 20.6
17.3 21.0
16.8 20.8
18.4 19.9
16.7 21.1
17.6 20.3

attach(datos4)

medias=apply(split(encogimiento, Temperatura), mean)
medias

mean(encogimiento) #promedio global

vari=apply(split(encogimiento, Temperatura), var); vari
boxplot(encogimiento~Temperatura, boxwex=0.5)
```

**Solución mediante test t usual:** Primero probamos la igualdad de varianzas

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim f_{n_1-1, n_2-1} = f_{9,9}$	$\text{Si } F_0 < 1 : VP = 2P(f_{9,9} < F_0)$ $\text{Si } F_0 > 1 : VP = 2P(f_{9,9} > F_0)$	$F_0 < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = 0.2483859, \hat{\sigma}$ $F_0 > f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = 4.025994$
I.C del $(1 - \alpha)\%100 = 95\%$ para $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ $\left[ F_0 \times f_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1}; F_0 \times f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \right] = \left[ F_0 \times f_{0.975, 9, 9}; F_0 \times f_{0.025, 9, 9} \right]$		

```
> var.test(encogimiento~Temperatura, alternative="two.sided")
```

F test to compare two variances

data: encogimiento by Temperatura

F = 0.38158, num df = 9, denom df = 9, p-value = 0.1674

alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1

95 percent confidence interval:

0.09477881 1.53623461

sample estimates:

ratio of variances

0.3815789

$2P(f_{9,9} < 0.38158)$

I.C para  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$

**Conclusión:** Las varianzas son estadísticamente iguales



Ahora probamos la igualdad de medias bajo varianzas iguales, pero desconocidas

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$T_0 = \frac{\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad t_{n_1+n_2-2} = t_{18}$	$P( t_{18}  >  T_0 )$	$ T_0  > t_{\alpha/2, 18} = 2.100922$
I.C del $(1 - \alpha)\%100 = 95\%$ , para $\mu_1 - \mu_2$		
$(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \pm t_{0.025, n_1+n_2-2} \times S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \pm t_{0.025, 18} \times S_p \sqrt{\frac{1}{5}}$		

```
t.test(encogimiento~Temperatura, var.equal=TRUE, alternative="two.sided",
      paired=FALSE)
```

Two Sample t-test

data: encogimiento by Temperatura

t = 10.797, df = 18, p-value = 2.71e-09

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

2.722307 4.037693

sample estimates:

mean in group alta mean in group baja

20.62

17.24

$P(|t_{18}| > |T_0|)$

I.C para  $\mu_1 - \mu_2$

Medias muestrales  $\bar{Y}_i$ .

**Conclusión:** Las medias son estadísticamente distintas, entonces la temperatura tiene efecto sobre el encogimiento de las piezas.

**Solución mediante modelos ANOVA:** Asumen la igualdad de varianzas. En el ejemplo,  $n_1 = n_2 = 10$ . Los modelos son

- De medias de tratamientos:  $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, 10$ , o bien,
- De efectos de tratamientos:  $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ , sujeto a  $\sum_{i=1}^2 n_i \alpha_i = 0$ ; como  $n_1 = n_2$ , la restricción se reduce a  $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  ó  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  vs.  $H_1 : \alpha_i \neq 0$  para al menos un  $i = 1, 2$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})^2}{S_p^2} \sim f_{1, n_1 + n_2 - 2} = f_{1, 18}$	$P(f_{1, 18} > F_0)$	$F_0 > f_{\alpha, 1, 18} = 4.413873$

> `modeloanova=aov(encogimiento~Temperatura)`

> `summary(modeloanova)`

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Temperatura	1	57.12	57.12	116.6	2.71e-09 ***
Residuals	18	8.82	0.49		

$$MSE = S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 (n_i - 1) S_i^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$SSA = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})^2$$

**Conclusión:** Medias estadísticamente distintas (la  $T^0$  afecta el encogimiento).

Las estimaciones de las medias de tratamientos: Teniendo en cuenta que bajo supuestos del modelo,  $\bar{Y}_{i\bullet} \sim N(\mu_i, \sigma^2/n_i)$  y que  $\hat{\sigma}^2 = MSE = S_p^2$ ,

Tratamiento	Estimación de $\mu_{i\bullet}$	IC del 95 % para $\mu_{i\bullet}$
$T^0$ alta ( $i = 1$ )	$\hat{\mu}_1 = \bar{Y}_{1\bullet}$	$\bar{Y}_{1\bullet} \pm t_{0.025, n_1+n_2-2} \times S_p / \sqrt{n_1}$
$T^0$ baja ( $i = 2$ )	$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}_{2\bullet}$	$\bar{Y}_{2\bullet} \pm t_{0.025, n_1+n_2-2} \times S_p / \sqrt{n_2}$

```
> library(lsmeans)
> lsmeans(modeloanova, ~Temperatura)
Temperatura lsmean      SE df lower.CL upper.CL
alta          20.62 0.2213594 18 20.15494 21.08506
baja          17.24 0.2213594 18 16.77494 17.70506
Confidence level used: 0.95
```

El error estándar de  $\bar{Y}_{i\bullet}$  es  $S_p / \sqrt{n_i}$

Las medias estimadas,  $\bar{Y}_{i\bullet}$ .

El I.C del 95 % de confianza para la diferencia de medias  $(\mu_1 - \mu_2)$ , calculado con modelo ANOVA:

$$(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \pm t_{0.025, n_1+n_2} \times S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet}) \pm t_{0.025, 18} \times S_p \sqrt{\frac{1}{5}}$$

```
#DIFERENCIA DE MEDIAS DE TRATAMIENTOS
```

```
> library(gmodels)
```

```
> fit.contrast(modeloanova, "Temperatura", rbind("Alto menos Bajo"=c(1, -1)), conf=0.95)
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	lower CI	upper CI
Temperatura:Alto menos Bajo	3.38	0.3130495	10.79701	2.709665e-09	2.722307	4.037693

Estadístico  $T_0$  y valor  $P: P(|t_{18}| > |T_0|)$   
 para test:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  vs.  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

**Conclusión:** Como el I.C no contiene el cero, las medias son estadísticamente distintas y además, como los límites son positivos,  $(\mu_1 - \mu_2) > 0$ .

**Solución mediante modelo de regresión con medias de tratamientos:** Asume la igualdad de varianzas. Recuerde que en el ejemplo,  $n_1 = n_2 = 10$ , entonces para el MRL hay  $N = n_1 + n_2 = 20$  obs.

$$Y_{ij} = \mu_1 I_{1,ij} + \mu_2 I_{2,ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

Con  $I_{1,ij} = 1$  si  $i = 1$  y 0 si  $i = 2$ , y con  $I_{2,ij} = 1$  si  $i = 2$  y 0 si  $i = 1$ . El ajuste del modelo nos da las estimaciones de las medias de tratamientos,

```
> mrlm1=lm(encogimiento~-1+Temperatura)
> summary(mrlm1)
Call: lm(formula = encogimiento ~ -1 + Temperatura)
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
Temperaturaalta	20.6200	0.2214	93.15	<2e-16 ***
Temperaturabaja	17.2400	0.2214	77.88	<2e-16 ***

```
---
> confint(mrlm1)
```

	2.5 %	97.5 %
Temperaturaalta	20.15494	21.08506
Temperaturabaja	16.77494	17.70506

medias estimadas,  $\bar{Y}_i$ , y sus errores estándar  $S_p/\sqrt{n_i}$

I.C para  $\mu_1$  y  $\mu_2$ ,  
 respectivamente

La prueba sobre la igualdad de las medias es realizada como muestra la siguiente diagrama.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs. } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{[SSE(MR) - SSE(MF)]}{MSE(MF)} \sim f_{1, N-2} = f_{1, 18}$	$P(f_{1, 18} > F_0)$	$F_0 > f_{\alpha, 1, 18} = 4.413873$
El modelo reducido es $Y_{ij} = \mu_1 (I_{1,ij} + I_{2,ij}) + \varepsilon_{ij} = \mu_1 + \varepsilon_{ij}$ , $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .		

```
> library(car)
> linearHypothesis(mr1ml, c("Temperaturaalta-Temperaturabaja=0"))
Linear hypothesis test
Hypothesis:
Temperaturaalta - Temperaturabaja = 0
Model 1: restricted model
Model 2: encogimiento ~ -1 + Temperatura
Res.Df  RSS Df Sum of Sq  F    Pr(>F)
1      19  85.942
2      18   8.820    1    57.122 116.58 2.71e-09 ***
```

Diagram illustrating the components of the linear hypothesis test output:

- $g.l(SSE(MR))$  points to the RSS value 85.942 for Model 1.
- $g.l(SSE(MF))$  points to the RSS value 8.820 for Model 2.
- $SSE(MR) - SSE(MF)$  points to the Sum of Sq value 57.122.
- $F_0$  points to the F value 116.58.
- $P(f_{1,18} > F_0)$  points to the Pr(>F) value 2.71e-09.

**Conclusión:** Medias estadísticamente distintas (la  $T^0$  afecta el encogimiento).

**Solución mediante modelo de regresión con efectos de tratamientos:** Asume la igualdad de varianzas. Recuerde que  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $N = n_1 + n_2 = 20$  obs.,  $X_{ij} = I_{1,ij} - (n_1/n_2)I_{2,ij}$  y que  $\alpha_2 = -(n_1/n_2)\alpha_1$ ,

$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 X_{ij} + \varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ . Test de interés:  $H_0 : \alpha_1 = 0$  vs.  $H_1 : \alpha_1 \neq 0$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$T_0 = \frac{\hat{\alpha}_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{xx}}}} = \frac{\frac{n_2(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})}{n_1 + n_2}}{\sqrt{\frac{s_p^2}{\frac{n_1(n_1 + n_2)}{n_2}}}} = \frac{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})}{s_p}$ <p>entonces <math>T_0 \sim t_{n_1 + n_2 - 2} = t_{18}</math></p>	$P( t_{18}  >  T_0 )$	$ T_0  > t_{\alpha/2, 18} = 2.100922$

```
> I1=ifelse(Temperatura=="alta",1,0); I2=ifelse(Temperatura=="baja",1,0)
> X=I1-I2 #desde que n_1=n_2
> mrlm2=lm(encogimiento~X); summary(mrlm2)
Call:lm(formula = encogimiento ~ X)
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	18.9300	0.1565	120.9	< 2e-16 ***
X	1.6900	0.1565	10.8	2.71e-09 ***

$\hat{\alpha}_1$  points to the Estimate of X (1.6900).  
 $\hat{\mu}$  promedio de todos los datos points to the Estimate of (Intercept) (18.9300).  
 $T_0$  points to the t value of X (10.8).  
 $P(|t_{18}| > |T_0|)$  points to the Pr(>|t|) of X (2.71e-09).

**Conclusión:** la  $T^0$  afecta el encogimiento (Medias estadísticamente distintas).

Como el modelo es de RLS, podemos también probar que  $H_0 : \alpha_1 = 0$  vs.  $H_1 : \alpha_1 \neq 0$  mediante el test ANOVA del modelo,

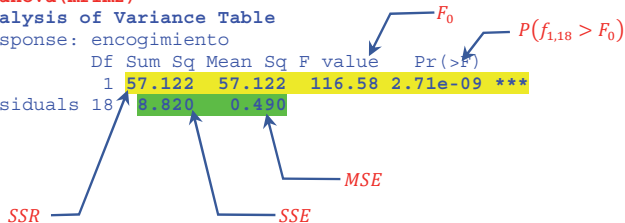
Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{SSR}{MSE} \sim f_{1, N-2} = f_{1, 18}$	$P(f_{1, 18} > F_0)$	$F_0 > f_{\alpha, 1, 18} = 4.413873$

```
> I1=ifelse(Temperatura=="alta",1,0); I2=ifelse(Temperatura=="baja",1,0)
> X=I1-I2 #desde que n_1=n_2
> mrlm2=lm(encogimiento~X)
> anova(mrlm2)
```

#### Analysis of Variance Table

Response: encogimiento

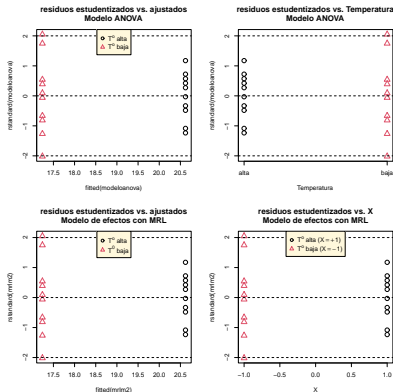
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	1	57.122	57.122	116.58	2.71e-09 ***
Residuals	18	8.820	0.490		



**Conclusión:** la  $T^o$  afecta el encogimiento (Medias estadísticamente distintas).



En los modelos ANOVA y de RL podemos chequear supuestos mediante el análisis de residuos. En la comparación de dos tratamientos con muestras normales e independientes, puede mostrarse que en ambos modelos,  $\widehat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i\bullet}$  y por tanto los residuos ordinarios son  $\widehat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet}$ . También podemos calcular residuos internamente estudentizados,



¿Qué se concluye?

## Programa residuos estudentizados modelos ANOVA y de RLS

```
#GRÁFICOS DE RESIDUOS ESTUDENTIZADOS INTERNAMENTE
layout(rbind(c(1,1,2,2),c(3,3,4,4)))
plot(fitted(modeloanova),rstandard(modeloanova),main="residuos estudentizados vs. ajustados\nModelo ANOVA",
     pch=as.numeric(Temperatura),col=as.numeric(Temperatura),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2)
legend("top",legend=c(expression(paste(T^o,sep=" ", "alta")),
                        expression(paste(T^o,sep=" ", "baja"))),pch=1:2,col=1:2,bg="cornsilk")

stripchart(rstandard(modeloanova)~Temperatura,main="residuos estudentizados vs. Temperatura\nModelo ANOVA",
           xlab="Temperatura",vertical=T, pch=1:2,col=1:2,cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2)

plot(fitted(mrlm2),rstandard(mrlm2),main="residuos estudentizados vs. ajustados\nModelo de efectos con MRL",
     pch=as.numeric(Temperatura),col=as.numeric(Temperatura),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2)
legend("top",legend=c(expression(paste(T^o,sep=" ", "alta")),
                        expression(paste(T^o,sep=" ", "baja"))),pch=1:2,col=1:2,bg="cornsilk")

plot(X,rstandard(mrlm2),main="residuos estudentizados vs. X\nModelo de efectos con MRL",
     xlab="X",pch=as.numeric(Temperatura),col=as.numeric(Temperatura),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2)
legend("top",legend=c(expression(paste(T^o,sep=" ", "alta",sep=" ", "(" ,sep=" ",X==+1,sep=" ",") ")),
                        expression(paste(T^o,sep=" ", "baja",sep=" ", "(" ,sep=" ",X=-1,sep=" ",") "))),pch=1:2,col=1:2,bg="cornsilk")
```

# Contenido

## 1 Comparaciones Simples

## 2 Comparaciones con m.a independientes con varianzas poblacionales iguales

## 3 Comparaciones con muestras pareadas

- Test de hipótesis de interés
- Modelo ANOVA y de regresión con muestras pareadas
  - Pruebas en modelos ANOVA y de RLM equivalentes a comparación de medias con muestras pareadas
  - Ajuste en R del modelo ANOVA y de RLM asociado a comparaciones pareadas
- Ejemplo 2

## Comparaciones con muestras pareadas

- $Y_{ij}$ : Respuesta observada en la  $j$ -ésima unidad experimental con el  $i$ -ésimo tratamiento,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, n$ .
- $\varepsilon_{ij}$ : Error aleatorio en  $j$ -ésima unidad experimental con  $i$ -ésimo tratamiento.
- $\mu_i$ : Respuesta media en el tratamiento  $i$ .
- $\beta_j$ : Efecto de la  $j$ -ésima unidad experimental sobre la respuesta media.

El modelo estadístico es como sigue:

$$Y_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

*Siguiendo a Montgomery (2020), los  $\varepsilon_{ij}$  son variables aleatorias de media cero y varianza  $\text{Var}[\varepsilon_{ij}] = \sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2$ . Por otra parte, los  $Y_{ij}$  dentro de una misma U.E no son necesariamente independientes, pero si lo son las observadas sobre U.E distintas.*

Sin embargo,

para eliminar los efectos de las U.E, se examinarán las diferencias pareadas,

$$\underbrace{Y_{1j} - Y_{2j}}_{d_j} = \underbrace{\mu_1 - \mu_2}_{\mu_d} + \underbrace{\varepsilon_{1j} - \varepsilon_{2j}}_{\varepsilon_{d,j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (15)$$

Suponemos que  $\varepsilon_{d,j} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_d^2)$ , de modo que  $d_j \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_d, \sigma_d^2)$ .

## Test de hipótesis de interés

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_d = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_d \neq 0. \quad (16)$$

Bajo los supuestos  $d_j \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_d, \sigma_d^2)$ , con  $\sigma_d^2$  desconocido, el estadístico de la prueba, su distribución bajo  $H_0$  y el criterio de decisión, es, [Nota 3.1](#)

$$T_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}, \quad \text{con}, \quad (17a)$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j, \quad S_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (d_j - \bar{d})^2, \quad (17b)$$

$$\text{rechazar } H_0 \text{ si } P(|t_{n-1}| > |T_0|) \text{ es pequeño.} \quad (17c)$$

## Modelo ANOVA y de regresión con muestras pareadas

- $Y_{ij}$ :  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, n$ .
- $I_{1,ij}$ : Indicadora del tratamiento 1 evaluada en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento. Vale 1 para  $i = 1$  y 0 para  $i = 2$ .
- $I_{2,ij}$ : Indicadora del tratamiento 2 evaluada en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento. Vale 1 para  $i = 2$  y 0 para  $i = 1$ .
- $Z_{k,ij}$ : Indicadora de la  $k$ -ésima U.E en la  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento. Vale 1 para  $j = k$  y cero para  $j \neq k$ , con  $k = 1, \dots, n$ .
- $\varepsilon_{ij}$ : Error aleatorio en  $j$ -ésima respuesta en  $i$ -ésimo tratamiento.
- $\mu_{i\bullet}$ : Respuesta media en el tratamiento  $i$ .
- $\mu$ : Respuesta media global.
- $\alpha_i$ : Efecto **fijo** del  $i$ -ésimo tratamiento, es tal que  $\mu_{i\bullet} = \mu + \alpha_i$ .
- $\beta_j$ : Efecto **fijo** de la  $j$ -ésima U.E

## Modelo ANOVA

► test Anova

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (18)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = 0$$

## MRLM equivalente

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 I_{1,ij} + \alpha_2 I_{2,ij} + \sum_{k=1}^n \beta_k Z_{k,ij} + \varepsilon_{ij}, \quad (19)$$

$$\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = 0$$

Para el ajuste del MRLM satisfaciendo las restricciones, éste debe replantearse así: Si hacemos  $\alpha_2 = -\alpha_1$  y  $\beta_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j$ , entonces, ► test MRL, ► Nota 3.1

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 X_{ij} + \beta_1 W_{1,ij} + \beta_2 W_{2,ij} + \cdots + \beta_{n-1} W_{n-1,ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (20a)$$

con

$$X_{ij} = I_{1,ij} - I_{2,ij}, \quad (20b)$$

$$W_{1,ij} = Z_{1,ij} - Z_{n,ij}, \quad W_{2,ij} = Z_{2,ij} - Z_{n,ij}, \cdots, \quad W_{n-1,ij} = Z_{n-1,ij} - Z_{n,ij} \quad (20c)$$

Recordando que  $I_{1,ij}, I_{2,ij}, Z_{1,ij}, \dots, Z_{n,ij}$ , son variables indicadoras, note que  $X_{ij} \in \{-1, 1\}$  mientras que  $W_{k,ij} \in \{-1, 0, 1\}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Por MCO ajustamos este MRLM hallando a  $\widehat{\alpha}_1, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_{n-1}$ , en tanto que  $\widehat{\alpha}_2 = -\widehat{\alpha}_1$  y  $\widehat{\beta}_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \widehat{\beta}_j$ .

# Pruebas en modelos ANOVA y de RLM equivalentes a comparación de medias con muestras pareadas

## Modelo ANOVA

Para el modelo en (18),

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{vs.}$$

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para al menos un } i = 1, 2 \quad (21)$$

Bajo  $H_0$  y  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ , el estadístico de prueba, su distribución y su valor P:

$$F_0 = \frac{SSA}{MSE} \sim f_{1, n-1}, \quad \text{con} \quad (22a)$$

$$SSA = \frac{n}{2} (\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})^2, \quad MSE = \frac{1}{2} S_d^2 \quad (22b)$$

$$\text{Valor P: } P(f_{1, n-1} > F_0). \quad (22c)$$

## Modelo de regresión lineal

Para modelo en (20a),

$$H_0 : \alpha_1 = 0 \quad \text{vs.}$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0 \quad (23)$$

Bajo  $H_0$  y  $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ , el estadístico de prueba, su distribución y su valor P:

$$F_0 = \frac{[SSE(MR) - SSE(MF)]}{MSE(MF)} \sim f_{1, n-1} \quad (24a)$$

donde MR es el modelo reducido bajo  $H_0$ :

$$Y_{ij} = \mu + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k W_{k,ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (24b)$$

$$\text{Valor P: } P(f_{1, n-1} > F_0). \quad (24c)$$



Con relación a los tests en los test en modelos ANOVA y de RLM equivalente, con muestras pareadas,

### Nota 3.1

- *MF*: Modelo FULL o completo, es el modelo en (20a).
- Puede demostrarse que  $[SSE(MR) - SSE(MF)]$  es igual al SSA del modelo ANOVA,
- también puede demostrarse que  $SSE(MF)$  es igual al SSE del modelo ANOVA
- por tanto, los estadísticos  $F_0$  en las ecuaciones (22a) y (24a), son iguales y estos son a su vez iguales al cuadrado del estadístico  $T_0$  en (17a). Luego, los correspondientes valores  $P$  en ecuaciones (17c), (22c) y (24c), también son iguales.

## Ajuste en R del modelo ANOVA y de RLM asociado a comparaciones pareadas

- Para el ajuste del modelo ANOVA en ecuación (18):

```
> modelo1=aov(Y~Factor1+Factor2)
```

donde,

- **Factor1** debe ser un objeto R tipo factor cuyos niveles son los dos tratamientos cuyas medias se quieren comparar
  - **Factor2** también un objeto R tipo factor cuyos niveles representan a las U.E tomadas como los niveles de un factor del bloqueo.
- Para el ajuste del MRLM en ecuación (20a), por ejemplo con  $n = 10$  U.E

```
> X=I1-I2
```

```
> W1=Z1-Z10; W2=Z2-Z10; W3=Z3-Z10; W4=Z4-Z10; W5=Z5-Z10
```

```
> W6=Z6-Z10; W7=Z7-Z10; W8=Z8-Z10; W9=Z9-Z10
```

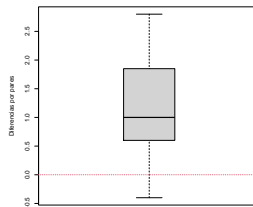
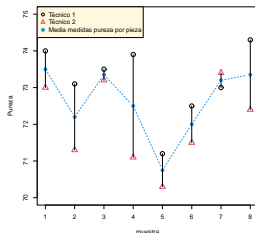
```
> modelo2=lm(Y~X+W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7+W8+W9)
```

donde los objetos l1 e l2 son las variables indicadoras de los tratamientos 1 y 2, respectivamente y los objetos Z1, ..., Z10, son las variables indicadoras de los bloques.

## Ejemplo 2

Se realizó un experimento para ver si dos técnicos tienen alguna tendencia a obtener diferentes resultados cuando determinan la pureza de cierto producto. Cada muestra fue dividida en dos porciones y cada técnico determinó la pureza de una de las porciones. Los resultados se muestran a continuación.

Técnico	Muestras								
	$j = 1$	2	3	4	5	6	7	8	Promedios
$i = 1$	74.0	73.1	73.5	73.9	71.2	72.5	73.0	74.3	$Y_{1\bullet} = 73.1875$
$i = 2$	73.0	71.3	73.2	71.1	70.3	71.5	73.4	72.4	$Y_{2\bullet} = 72.0250$
Diferencias: $d_j = Y_{1j} - Y_{2j}$	1.0	1.8	0.3	2.8	0.9	1.0	-0.4	1.9	$\bar{d} = 1.1625$
$S_d^2 = 0.99125$ , $\bar{Y}_{\bullet\bullet} = 72.60625$ (promedio de las obs. $Y_{ij}$ ).									



## Lectura de los datos, medidas y gráficos descriptivos

```
rm(list=ls(all=TRUE))
datos9=data.frame(Técnico=factor(rep(c(1,2),each=8)),muestra=factor(rep(1:8,times=2)),
  Pureza=scan())
74.0 73.1 73.5 73.9 71.2 72.5 73.0 74.3
73.0 71.3 73.2 71.1 70.3 71.5 73.4 72.4

attach(datos9)

medias=apply(split(Pureza,Técnico),mean) #Medias medidas según técnico
medias
medias2=apply(split(Pureza,muestra),mean)#Medias medidas en cada muestra
medias2

difer=Pureza[Técnico==1]-Pureza[Técnico==2] #diferencias entre pares de observaciones
mean(difer) #media muestral diferencias entre pares de observaciones
var(difer) #Varianza muestral diferencias entre pares de observaciones

#Gráficos descriptivo
plot(as.numeric(muestra),Pureza,col=as.numeric(Técnico),pch=as.numeric(Técnico),
  xlab="muestra",cex=1.5,ylim=c(70,75))
lines(1:8,medias2,type="b",pch=19,lty=2,col=4)
segments(1:8,Pureza[Técnico==1],1:8,Pureza[Técnico==2])
legend("topleft",legend=c("Técnico 1","Técnico 2","Media medidas pureza por pieza"),
  pch=c(1:2,19),col=c(1:2,4),bg="cornsilk")

boxplot(difer,boxwex=0.5,ylab="Diferencias por pares") #Distribución de las diferencias
#pareadas
abline(h=0,lty=3,col=2)
```

### Solución mediante test t usual:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \iff \mu_d = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \iff \mu_d \neq 0$$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$T_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} t_{n-1} = t_7$	$P( t_7  >  T_0 )$	$ T_0  > t_{\alpha/2, 7} = 2.364624$
I.C del $(1 - \alpha)\%100 = 95\%$ , para $\mu_1 - \mu_2$		
$\bar{d} \pm t_{0.025, n-1} \times \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \bar{d} \pm t_{0.025, 7} \times \frac{S_d}{\sqrt{8}}$		

```
>t.test(Pureza~Técnico, var.equal=TRUE, alternative="two.sided", paired=TRUE)
```

Paired t-test

data: Pureza by Técnico

t = 3.3025, df = 7, p-value = 0.01308

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

0.3301447 1.9948553

sample estimates:

mean of the differences

1.1625

$P(|t_7| > |T_0|)$

I.C para  $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$

Media muestral de las diferencias,  $\bar{d} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$ .

**Conclusión:** En promedio, las mediciones de los técnicos no son iguales.

**Solución mediante modelo ANOVA de efectos de tratamientos y de bloques:** Asume la igualdad de varianzas. El número de obs. es  $N = 2n = 16$ . El modelo es

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad \text{sueto a: } \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^8 \beta_j = 0$$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$  vs.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  ó  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  vs.  $H_1 : \alpha_i \neq 0$  para al menos un  $i = 1, 2$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{SSA}{MSE} = \frac{\frac{n}{2} (\bar{Y}_{1\cdot} - \bar{Y}_{2\cdot})^2}{\frac{S_d^2}{2}} = \frac{n\bar{d}^2}{S_d^2} \sim f_{1, n-1} = f_{1, 7}$	$P(f_{1, 7} > F_0)$	$F_0 > f_{\alpha, 1, 7} = 5.591448$

```
> modeloanova=aov(Pureza~Técnico+muestra)
```

```
> anova(modeloanova)
```

```
Analysis of Variance Table
```

```
Response: Pureza
```

```
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
```

```
Técnico    1  5.4056   5.4056  10.9067  0.01308 *
```

```
muestra    7 12.4944   1.7849   3.6013  0.05633 .
```

```
Residuals  7  3.4694   0.4956
```

```
---
```

$F_0$

$P(f_{1, 7} > F_0)$

$MSE = \frac{S_d^2}{2}$

$SSA = \frac{n}{2} (\bar{Y}_{1\cdot} - \bar{Y}_{2\cdot})^2 = \frac{n}{2} \bar{d}^2$

**Conclusión:** En promedio, las mediciones de los técnicos no son iguales.

**Solución con MRL con efectos de tratamientos y de bloques:** Asume la igualdad de varianzas.  $N = 2n = 16$ ,  $X_{ij} = I_{1,ij} - I_{2,ij}$ ,  $W_{k,ij} = Z_{k,ij} - Z_{8,ij}$ , para  $k = 1, \dots, 7$ , y que  $I_{1,ij}$ ,  $I_{2,ij}$ , son las indicadoras para los técnicos 1 y 2, y  $Z_{1,ij}, \dots, Z_{8,ij}$ , son las indicadoras para las muestras 1 a 8, respectivamente.

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_1 X_{ij} + \beta_1 W_{1,ij} + \beta_2 W_{2,ij} + \dots + \beta_7 W_{7,ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2).$$

Test de interés:  $H_0 : \alpha_1 = 0$  vs.  $H_1 : \alpha_1 \neq 0$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$T_0 = \frac{\hat{\alpha}_1}{\text{s.e.}(\hat{\alpha}_1)} = \frac{\frac{1}{2}(\bar{Y}_{1\bullet} - \bar{Y}_{2\bullet})}{\sqrt{S_d^2/4n}} = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} = t_7$	$P( t_7  >  T_0 )$	$ T_0  > t_{\alpha/2,7} = 2.364624$

```
> #INDICADORAS
> I1=ifelse(Técnico=="1",1,0); I2=ifelse(Técnico=="2",1,0); Z1=ifelse(muestra=="1",1,0); Z2=ifelse(muestra=="2",1,0)
> Z3=ifelse(muestra=="3",1,0); Z4=ifelse(muestra=="4",1,0); Z5=ifelse(muestra=="5",1,0); Z6=ifelse(muestra=="6",1,0)
> Z7=ifelse(muestra=="7",1,0); Z8=ifelse(muestra=="8",1,0)
```

```
> #VARIABLES EXPLICATORIAS PARA EL AJUSTE POR REGRESIÓN
> X=I1-I2; W1=Z1-Z8; W2=Z2-Z8; W3=Z3-Z8; W4=Z4-Z8; W5=Z5-Z8; W6=Z6-Z8; W7=Z7-Z8
> mrlm=lm(Pureza~X+W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7); summary(mrlm)
```

```
Call: lm(formula = Pureza ~ X + W1 + W2 + W3 + W4 + W5 + W6 + W7)
Coefficients:
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	72.6962	0.1760	412.832	< 2e-16 ***
X	0.5813	0.1760	3.303	0.01308 *
W1	0.8938	0.4657	1.919	0.09642 .
W2	-0.4063	0.4657	-0.872	0.41190
W3	0.7437	0.4657	1.597	0.15425
W4	-0.1063	0.4657	-0.228	0.82603
W5	-1.8563	0.4657	-3.986	0.00528 **
W6	-0.6063	0.4657	-1.302	0.23414
W7	0.5938	0.4657	1.275	0.24297

```
Residual standard error: 0.704 on 7 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared: 0.8376, Adjusted R-squared: 0.6521
F-statistic: 4.515 on 8 and 7 DF, p-value: 0.03094
```

$$\sqrt{MSE} = \frac{S_d}{\sqrt{2}}$$

$P(|t_7| > |T_0|)$

**Conclusión:** En promedio, las mediciones de los técnicos no son iguales

O bien, mediante test ANOVA

$$H_0 : \alpha_1 = 0 \text{ vs. } H_1 : \alpha_1 \neq 0$$

Estadístico	Valor P	región crítica de nivel $\alpha = 0.05$
$F_0 = \frac{[SSE(MR) - SSE(MF)]}{MSE(MF)} \sim f_{1, n-1} = f_{1,7}$	$P(f_{1,7} > F_0)$	$F_0 > f_{\alpha, 1,7} = 5.591448$
El modelo reducido es $Y_{ij} = \mu + \beta_1 W_{1,ij} + \beta_2 W_{2,ij} + \dots + \beta_7 W_{7,ij} + \varepsilon_{ij}$ , $\varepsilon_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .		

```

> library(car)
> linearHypothesis(mrlm, "X=0")
Linear hypothesis test
Hypothesis:
X = 0
Model 1: restricted model
Model 2: Pureza ~ X + W1 + W2 + W3 + W4 + W5 + W6 + W7
  Res.Df  RSS Df Sum of Sq  F    Pr(>F)
1      7  3.8756  1    5.4056 10.907 0.01308 *
2      7  3.4694

```

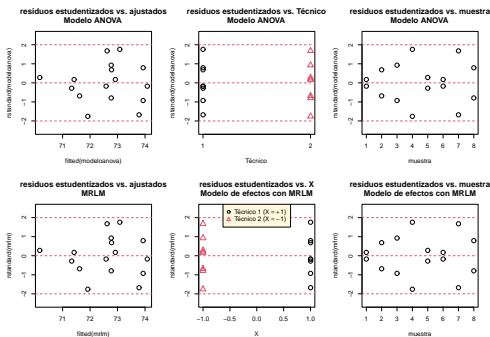
Diagram illustrating the components of the linear hypothesis test output:

- $g.l(SSE(MR))$  points to the RSS value 3.8756 for Model 1.
- $SSE(MR)$  points to the RSS value 3.8756 for Model 1.
- $g.l(SSE(MF))$  points to the RSS value 3.4694 for Model 2.
- $SSE(MF)$  points to the RSS value 3.4694 for Model 2.
- $g.l(SSE(MR)) - g.l(SSE(MF))$  points to the Sum of Sq value 5.4056.
- $SSE(MR) - SSE(MF)$  points to the Sum of Sq value 5.4056.
- $F_0$  points to the F value 10.907.
- $P(f_{1,7} > F_0)$  points to the Pr(>F) value 0.01308.

**Conclusión:** En promedio, las mediciones de los técnicos no son iguales.



En los modelos ANOVA y de RL podemos chequear supuestos mediante el análisis de residuos. En la comparación de dos tratamientos con muestras normales pareadas, puede mostrarse que en ambos modelos,  $\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i\bullet} + \bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet}$  y por tanto los residuos ordinarios son  $\hat{\epsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j} + \bar{Y}_{\bullet\bullet}$ . También podemos calcular residuos internamente estudentizados,



¿Qué se concluye?

## Programa residuos estudentizados modelos ANOVA y de RLM

```
#GRÁFICO DE RESIDUOS ESTUDENTIZADOS INTERNAMENTE
win.graph(width=8.5,height=6)
layout(rbind(c(1,1,2,2,3,3),c(4,4,5,5,6,6)))
plot(fitted(modeloanova),rstandard(modeloanova),main="residuos estudentizados vs. ajustados\nModelo ANOVA",
      ylim=c(-2.5,2.5),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)

stripchart(rstandard(modeloanova)~Técnico, main="residuos estudentizados vs. Técnico\nModelo ANOVA",
            xlab="Técnico",vertical=T, ylim=c(-2.5,2.5),pch=1:2,col=c(1:2),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)

stripchart(rstandard(modeloanova)~muestra,main="residuos estudentizados vs. muestra\nModelo ANOVA",
            ylim=c(-2.5,2.5),xlab="muestra",vertical=T,pch=1,cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)

plot(fitted(mrlm),rstandard(mrlm),main="residuos estudentizados vs. ajustados\nMRLM",
      ylim=c(-2.5,2.5),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)

plot(X,rstandard(mrlm),xlab="X",main="residuos estudentizados vs. X\nModelo de efectos con MRLM",
      ylim=c(-2.5,2.5), pch=as.numeric(Técnico),col=as.numeric(Técnico),cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)
legend("top",legend=c(expression(paste("Técnico 1",sep=" ", "(" ,sep="",X==+1,sep="",")")),
      expression(paste("Técnico 2",sep=" ", "(" ,sep="",X==+1,sep="",")"))),
      pch=1:2,col=1:2,bg="cornsilk")

stripchart(rstandard(mrlm)~muestra,main="residuos estudentizados vs. muestra\nModelo de efectos con MRLM",
            ylim=c(-2.5,2.5),xlab="muestra",vertical=T,pch=1,cex=1.5)
abline(h=c(-2,0,2),lty=2,col=2)
```

- Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2<sup>nd</sup> Edition. Springer.
- Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3<sup>a</sup> Edición. McGraw-Hill.
- Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2<sup>a</sup> Edición. Thomson Learning.
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill Irwin.
- Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10<sup>th</sup> Edition. John Wiley & Sons, Inc.