Jhonatan Smith García Muñoz
1039 705595

(1) Sea $X_1 \ldots X_n$ una m.a de una población con cdf dada por

$$f(x|\theta) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} \; ; \; 0 < x < \beta \; ; \; \alpha > 0$$

MLE para α y β.

- Supongo α fijo. MLE para β estará dado por

$L(\beta | X, \alpha) = c(x) f(x|\alpha, \beta)$ es función de verosimilitud

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot x_i^{-1} = \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}$$

- Como $0 < x_i < \beta$, entonces $0 < \frac{x_i}{\beta} < 1$.
- Se sabe que $0 < x_i \leq X_{(n)} < \beta$

$\therefore 0 < x_i \leq X_{(n)} \Rightarrow 0 < \frac{x_i}{X_{(n)}} < 1$ pero $\beta > X_{(n)}$ por tanto

$0 < x_i < \beta \Rightarrow 0 < \frac{x_i}{\beta} < 1$ se concluye que

$\frac{x_i}{\beta} < \frac{x_i}{X_{(n)}}$; Ahora, en el ejercicio...

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} < \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X_{(n)}}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X_{(n)}}\right)^{\alpha}$$

lo que implica que $L(\beta|X) \leq L(X_{(n)}|X)$ $\forall X$, entonces $X_{(n)}$ maximiza la función y el MLE de β, $\hat{\beta} = X_{(n)}$

para α... Si fijamos $\beta = X_{(n)}$

$$L(\alpha | x_i, X_{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_i^{\alpha-1}}{X_{(n)}^{\alpha}} \Rightarrow \alpha^n \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}}{X_{(n)}^{\alpha n}}$$

$$\ell(\alpha | x_i, X_{(n)}) = n \ln(\alpha) - \alpha n \ln(X_{(n)}) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Para hallar el maximo, se deriva e iguala a cero.
(con respecto al parametro)

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - n\ln(X_{(n)}) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - X_{(n)}) = 0 \iff \frac{1}{\alpha} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{X_{(n)}}\right)}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{(n)}}\right)}$$

Verificando que es maximo con la segunda derivada...

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial^2 \alpha} = \frac{-n}{\alpha^2} < 0,$$ por tanto $\hat{\alpha}$ es un MLE para α

(2) MLE's para θ_1 y θ_2. Para θ_1 la fn verosimilitud NO es contigente.
parametro hace parte del dominio.

Si x_0 es el max $f(x) \iff f(x_0) \geq f(x) \ \forall x$

Como $\min x_i \leq x_i$, $\forall i$ $x_i > \theta_1$, $\min x_i > \theta_1$, $X_{(1)} > \theta_1$

como $\theta_1 < X_{(1)} \leq x_i$, se puede asegurar que

$$x_i - \theta = (x_i - X_{(1)}) + (x_i - \theta)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - X_{(1)}) + \sum_{i=1}^{n} (X_{(1)} - \theta_1)$$

Propiedad del calculo
- si a y b son $\in \mathbb{R}$
$\therefore$ ① $e^{a} > e^{b}$
② $e^{-a} < e^{-b}$

exp neg es estrict decreciente.

Ahora, claramente ☺ ≥ ☹ por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1) \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - X_{(1)})$$ pero.

$$e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)} \leq e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_{(1)})}$$, Finalmente

$$e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)} \leq e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_{(1)})} \quad \forall x \iff L(X_{(1)}) \geq L(\theta_1 | X) \ \forall x$$

entonces $X_{(1)}$ es MLE de θ_1

Ahora, dejando fijo a $\theta_1 = X_{(1)}$

$$L(\theta_2 | X_i, X_{(1)}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2} e^{\left[\frac{-(X_i - X_{(1)})}{\theta_2} \right]}$$

$$= \left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n \prod_{i=1}^{n} e^{\left[\frac{-1}{\theta_2}(X_i - X_{(1)}) \right]}$$, Aplicando Ln

$$\ell(\theta_2 | X_i, X_{(1)}) = n \ln\left(\frac{1}{\theta_2}\right) - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)})$$

Para hallar maximo, derivamos e igualamos a cero.

$$\frac{d\ell}{d\theta_2} = \frac{-n}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{(1)} = 0$$

$$= \frac{1}{\theta_2}\left(-n + \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{(1)} \right) = 0$$

$$= \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{(1)} = n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - X_{(1)} = \hat{\theta}_2$$

$$\hat{\theta}_2 = \overline{X} - X_{(1)}$$

Verifiquemos que sea un maximo (criterio segunda derivada)

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial^2 \theta_2} = \frac{n}{\theta_2^2} - \frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}) \Leftrightarrow \frac{n}{\theta_2^2} - \frac{2}{\theta_2^3} \sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{(1)}$$

$$= \frac{1}{\theta_2^2}\left(n - \frac{2}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} X_i - n(X_{(1)}) \right) = 0$$

si reemplazo

$$-n = -\frac{2}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} X_i - n(X_{(1)})$$

$$-n\theta_2 = -2\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - n X_{(1)} \right]$$

$\hat{\theta}_2 = \frac{2}{n}\overline{X} - 2X_{(1)} \Leftrightarrow$ Siempre es negativo por tanto $\hat{\theta}_2$ es un MLE para θ_2.

Jhonatan Smith García Muñoz
1039 705595

(1) Sea $X_1 \ldots X_n$ una m.a de una población con pdf dada por

$$f(x|\theta) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} \;;\; 0 < x < \beta \;;\; \alpha > 0$$

MLE para $\alpha \wedge \beta$.

- Supongo α fijo. MLE para β estará dado por

$L(\beta|x,\alpha) = c(x) f(x|\alpha,\beta) \Leftrightarrow$ función de verosimilitud

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot x_i^{-1} = \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}$$

- Como $0 < x_i < \beta$, entonces $0 < \frac{x_i}{\beta} < 1$.
- Se sabe que $0 < x_i \leq X_{(n)} < \beta$

$\therefore 0 < x_i \leq X_{(n)} \Rightarrow 0 < \frac{x_i}{X_{(n)}} < 1$ pero $\beta > X_{(n)}$ por tanto

$0 < x_i < \beta \Rightarrow 0 < \frac{x_i}{\beta} < 1$ se concluye que

$\frac{x_i}{\beta} < \frac{x_i}{X_{(n)}}$; Ahora, en el ejercicio...

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} < \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X_{(n)}}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X_{(n)}}\right)^{\alpha}$$

lo que implica que $L(\beta|x) \leq L(X_{(n)}|x)$ $\forall x$, entonces $X_{(n)}$ maximiza la función y el MLE de β, $\hat{\beta} = X_{(n)}$

Para α... Si fijamos $\beta = X_{(n)}$

$$L(\alpha|x_i, X_{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_i^{\alpha-1}}{X_{(n)}^{\alpha}} \Rightarrow \frac{\alpha^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1}}{X_{(n)}^{\alpha n}}$$

$$\ell(\alpha|x_i, X_{(n)}) = n\ln(\alpha) - \alpha n \ln(X_{(n)}) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

NOTA = Se me acabaron los hojas de Bbc

Finalmente, dada la muestra:

$\hat{\theta}_1 = X_{(1)} =$ el minimo $= 2$

$\hat{\theta}_2 = \bar{X} - X_{(1)} = 4{,}323 - 2 = 2{,}323$

③ $X_1 \dots X_n$ una m.a de $Ber(\theta)$. Sea $\bar{X}$ un estimador para θ. Muestre que $\bar{X}$ alcanza la cota de Rao-Cramer.

- Decir que alcanza la cota de Rao-Cramer es equivalente a probar que ese estimador es el UMVUE. Probaremos esto.

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \frac{n\theta}{n} = \theta$

$\bar{X}$ es insesgado.

Si un $W(X)$ es un estimador de θ $\therefore$

$Var(W(X)) \geq \dfrac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} E(W(X))\right)^2}{-nE\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln P(X|\theta)\right)}$, En este caso

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(E(\theta))\right)^2}{-nE\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}\ln(P(X|\theta))\right)} = \frac{1}{-nE\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}(\ln P(X|\theta))\right)}$$

$$f(y,p) = \binom{n}{y} p^{y}(1-p)^{n-y} \left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \right)$$

$$= \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha+y-1} (1-p)^{n-y+\beta-1} \; ; \; 0 < p < 1, \; y = 0,1,2 \ldots$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha+y-1} (1-p)^{n-y+\beta-1} \, dp$$

$$= \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$ Beta-Binomial

Así $f(p|y) = \dfrac{f(y,p)}{f_Y(y)} = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)} p^{y+\alpha-1} (1-p)^{n-y+\beta-1}$

$\Rightarrow$ $p|y \sim Beta(y+\alpha, n-y+\beta)$. El estimador Bayesiano para p está dado por.

$$\hat{p}_B = \frac{y+\alpha}{\alpha+\beta+n} = \left(\frac{n}{\alpha+\beta+n}\right)\left(\frac{y}{n}\right) + \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

$$\hat{p}_B = \omega * \underbrace{\frac{y}{n}}_{\text{media muestral}} + (1-\omega) * \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}_{\text{media a priori}}$$

$\omega = \dfrac{n}{\alpha+\beta+n}$; Finalmente $\hat{p}_B$ es un promedio ponderado entre la media muestral y la media de la distribución a priori.

5) Sea $X = (X_1 \ldots X_n)$ una m.a de una dist. Ber (P) y asuma $P \sim$ Beta (α, β), donde α, β son conocidos. Halle un estimador Bayesiano para P. y muestre que dicho estimador es el promedio ponderado de la media muestral y la media a priori.

- El Parametro P se define como "exito"
- Para hallar el estimador Bayesiano, se halla la distribucion condicional de theta dado x $(\theta | x)$, luego se calcula su valor esperado.
- La conjunta es la binomial por la apriori. Por definición.

- La marginal de Y se obtiene al integrar la conjunta. con respecto a P:
- En vez de trabajar con la conjunta, se define Y como sumatorio de x_i y se halla la conjunta entre Y y P
- P distribuye $\sim$ Beta (α, β).

Entonces, con esto en mente, calculemos.

(*) Todas las logverosimilitudes van acompañados de una constante $c(x)$ que a la hora de derivar, se "pierde"

Ahora, $Var(\bar{X}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$ por definición Bern.

$p(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}$, $0 < x < 1$

$\ln(x|\theta) = x\ln(\theta) + (1-x)\ln(1-\theta)$ (*)

$\frac{\partial}{\partial\theta} p(x|\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{(1-x)}{(1-\theta)}$

$\frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \ln(p(x|\theta)) = \frac{-x}{\theta^2} - \frac{(1-x)}{(1-\theta)^2}$

Ahora...

$E\left(-\frac{x}{\theta^2} - \frac{(1-x)}{(1-\theta)^2}\right) = \frac{-\theta}{\theta^2} - \frac{(1-\theta)}{(1-\theta)^2} = -\left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)}\right]$

donde x representa la variable de la muestra

$= \frac{-1}{\theta(1-\theta)}$ $\therefore w(x) = \bar{X}$

$E(w(x)) = E(\bar{X}) = \theta$

Finalmente $\frac{1}{-n\left(\frac{-1}{\theta(1-\theta)}\right)}$

$= \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, que es la varianza de la distribución y por tanto es el UMVUE, probado que alcanza la cota de Rao-Cramer

$$\frac{\partial l}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\frac{n}{\theta+1} = -\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

$$\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} = \theta+1 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} - 1$$

Comprobemos que sea maximo. Criterio segunda derivada

$$\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \theta} = \frac{-n}{(\theta+1)^2} < 0,$$ por tanto $\hat{\theta}$ es el MLE para θ.

9) Si $X_1 \ldots X_n$ una m.a. de una pdf. dada por:

$$f(x|\theta) = (\theta+1)\,x^{\theta}\ ;\quad 0 \le x \le 1$$

• El método de momentos establece una igualdad entre los momentos muestrales y poblacionales. $E(x)$ es el primer momento.

$$\therefore E(x) = \int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,dx = \int_0^1 x^{\theta+1}(\theta+1)\,dx$$

$$= \left.\frac{(\theta+1)\,x^{\theta+2}}{\theta+2}\right|_0^1 = \frac{\theta+1 \cdot 1^{\theta+2}}{\theta+2} = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\theta+1}{\theta+2} \Rightarrow \bar{x}(\theta+2) = \theta+1$$

$$\theta\bar{x} + 2\bar{x} = \theta + 1$$

$$\theta\bar{x} - \theta = 1 - 2\bar{x}$$

$$\theta(\bar{x}-1) = 1 - 2\bar{x}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1-2\bar{x}}{\bar{x}-1} \Rightarrow \text{Estimador de momentos de } \theta$$

Hallemos función de verosimilitud

$$L(\theta) = c(x)\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)\,x^{\theta} = \cancel{\ldots}$$

$$= (\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta}$$

$$\ell(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) + \ln(c(x))$$

Se aplica ln ya que es una fn más fácil de maximizar