Estadística Bayesiana

Clase 5: Modelos multiparamétricos: modelo Normal

Isabel Cristina Ramírez Guevara

Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Medellín, 18 de agosto de 2020

Modelo normal univariado

Escenario 2: *Suponer que la distribución a priori para* θ *depende de* σ^2*,* $p(\theta|\sigma^2)$*, mientras que la distribución a priori para* σ^2 *no depende de* θ *y se puede escribir como* $p(\sigma^2)$

Modelo normal univariado

Escenario 2: *Suponer que la distribución a priori para θ depende de σ^2, $p(\theta|\sigma^2)$, mientras que la distribución a priori para σ^2 no depende de θ y se puede escribir como $p(\sigma^2)$*

La distribución de verosimilitud es:

$$p(\mathbf{y}|\theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)s^2 + n(\bar{y}-\theta)^2\right]\right]$$

donde $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$.

Modelo normal univariado

Escenario 2: *Suponer que la distribución a priori para θ depende de σ^2, $p(\theta|\sigma^2)$, mientras que la distribución a priori para σ^2 no depende de θ y se puede escribir como $p(\sigma^2)$*

La distribución de verosimilitud es:

$$p(\mathbf{y}|\theta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(n-1)s^2 + n(\bar{y}-\theta)^2\right]\right]$$

donde $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$.

Tenemos las siguientes distribuciones a priori:

$$\theta|\sigma^2 \sim \mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2/\kappa_0)$$

$$\sigma^2 \sim \text{Gamma-inversa}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0\sigma_0^2}{2}\right),$$

donde κ_0 representa la creencia a priori que se tiene sobre el parámetro θ.

Modelo normal univariado

La densidad conjunta es:

$$
\begin{aligned}
p(\theta, \sigma^2) &= p(\theta|\sigma^2)p(\sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{\kappa_0}{2\sigma^2}(\theta - \mu_0)^2\right] (\sigma^2)^{-[\frac{\nu_0}{2}+1]} \exp\left[-\frac{\nu_0\sigma_0^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_0+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_0\sigma_0^2 + \kappa_0(\theta - \mu_0)^2]\right]
\end{aligned}
$$

Modelo normal univariado

La densidad conjunta es:

$$
\begin{aligned}
p(\theta, \sigma^2) &= p(\theta|\sigma^2)p(\sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{\kappa_0}{2\sigma^2}(\theta - \mu_0)^2\right] (\sigma^2)^{-\left[\frac{\nu_0}{2}+1\right]} \exp\left[-\frac{\nu_0\sigma_0^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_0+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_0\sigma_0^2 + \kappa_0(\theta - \mu_0)^2]\right]
\end{aligned}
$$

Esta distribución se conoce como Normal-Inv-$\chi^2(\mu_0, \sigma_0^2|\kappa_0, \nu_0, \sigma_0^2)$.

Modelo normal univariado

Se tiene que la distribución conjunta posterior $p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})$ es:

$$
\begin{aligned}
p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y}|\theta, \sigma^2)p(\theta, \sigma^2) \\
&\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)s^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right] \\
&\quad (\sigma^2)^{-\frac{\nu_0}{2}-\frac{1}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_0\sigma_0^2 + \kappa_0(\theta-\mu_0)^2]\right] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Si $\kappa_n = \kappa_0 + n$ y $\nu_n = \nu_0 + n$ se puede demostrar que:

Modelo normal univariado

Se tiene que la distribución conjunta posterior $p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})$ es:

$$\begin{aligned} p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{y}|\theta, \sigma^2)p(\theta, \sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)s^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right] \\ &\quad (\sigma^2)^{-\frac{\nu_0}{2}-\frac{1}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_0\sigma_0^2 + \kappa_0(\theta-\mu_0)^2]\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Si $\kappa_n = \kappa_0 + n$ y $\nu_n = \nu_0 + n$ se puede demostrar que:

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\nu_0\sigma_0^2 + (n-1)s^2 + \frac{n\kappa_0(\bar{y}-\mu_0)^2}{\kappa_n} + \kappa_n\left(\theta - \frac{\mu_0\kappa_0 + n\bar{y}}{\kappa_n}\right)^2\right]\right] \tag{2}$$

Si $\sigma_n^2 = \frac{\nu_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{n\kappa_0(\bar{y}-\mu_0)^2}{\kappa_n}}{\nu_n}$, y $\mu_n = \frac{\mu_0\kappa_0 + n\bar{y}}{\kappa_n}$ se tiene:

Modelo normal univariado

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n \sigma_{n^2} + \kappa_n(\theta - \mu_n)^2]\right]$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n\sigma_{n^2} + \kappa_n(\theta-\mu_n)^2]\right]$$

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) = \text{N-Inv} - \chi^2(\mu_n, \sigma_n^2|\kappa_n; \nu_n, \sigma_n^2).$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n\sigma_{n^2} + \kappa_n(\theta - \mu_n)^2]\right]$$

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) = \text{N-Inv} - \chi^2(\mu_n, \sigma_n^2|\kappa_n; \nu_n, \sigma_n^2).$$

La distribución posterior condicional de θ se obtiene a partir de:

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2, \mathbf{y})}{p(\sigma^2, \mathbf{y})}$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n\sigma_{n^2} + \kappa_n(\theta - \mu_n)^2]\right]$$

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) = \text{N-Inv} - \chi^2(\mu_n, \sigma_n^2|\kappa_n; \nu_n, \sigma_n^2).$$

La distribución posterior condicional de θ se obtiene a partir de:

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2, \mathbf{y})}{p(\sigma^2, \mathbf{y})}$$

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})p(\mathbf{y})}{p(\sigma^2|\mathbf{y})p(\mathbf{y})}$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n\sigma_{n^2} + \kappa_n(\theta-\mu_n)^2]\right]$$

$$p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) = \text{N-Inv} - \chi^2(\mu_n, \sigma_n^2|\kappa_n; \nu_n, \sigma_n^2).$$

La distribución posterior condicional de θ se obtiene a partir de:

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2, \mathbf{y})}{p(\sigma^2, \mathbf{y})}$$

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) = \frac{p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})p(\mathbf{y})}{p(\sigma^2|\mathbf{y})p(\mathbf{y})}$$

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})$$

Modelo normal univariado

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (1) tenemos,

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0(\theta-\mu_0)^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right]$$

Modelo normal univariado

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (1) tenemos,

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0(\theta-\mu_0)^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0\theta^2 - 2\kappa_0\theta\mu_0 + \kappa_0\mu_{0^2} + n\bar{y}^2 - 2n\bar{y}\theta + n\theta^2]\right]$$

Modelo normal univariado

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (1) tenemos,

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0(\theta-\mu_0)^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0\theta^2 - 2\kappa_0\theta\mu_0 + \kappa_0\mu_{0^2} + n\bar{y}^2 - 2n\bar{y}\theta + n\theta^2]\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\theta^2(\kappa_0+n) - 2\theta(\kappa_0\mu_0 + n\bar{y})]\right]$$

Modelo normal univariado

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (1) tenemos,

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0(\theta-\mu_0)^2 + n(\bar{y}-\theta)^2]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0\theta^2 - 2\kappa_0\theta\mu_0 + \kappa_0\mu_{0^2} + n\bar{y}^2 - 2n\bar{y}\theta + n\theta^2]\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\theta^2(\kappa_0+n) - 2\theta(\kappa_0\mu_0 + n\bar{y})]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\kappa_0+n}{2\sigma^2}\left(\theta^2 - 2\theta\frac{\kappa_0\mu_0+n\bar{y}}{\kappa_0+n}\right)\right]$$

Modelo normal univariado

Por lo tanto de acuerdo a la ecuación (1) tenemos,

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0(\theta - \mu_0)^2 + n(\bar{y} - \theta)^2]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\kappa_0\theta^2 - 2\kappa_0\theta\mu_0 + \kappa_0\mu_{0^2} + n\bar{y}^2 - 2n\bar{y}\theta + n\theta^2]\right]$$

$$\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\theta^2(\kappa_0 + n) - 2\theta(\kappa_0\mu_0 + n\bar{y})]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{\kappa_0 + n}{2\sigma^2}\left(\theta^2 - 2\theta\frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n}\right)\right]$$

Para completar el cuadrado sumamos y restamos $\left(\frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n}\right)^2$, esta cantidad no depende de θ por lo tanto,

Modelo normal univariado

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{\kappa_0 + n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n}\right)^2\right]$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{\kappa_0 + n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n}\right)^2\right]$$

$$\theta|\sigma^2, \mathbf{y} \sim \text{Normal}\left(\mu_n, \frac{\sigma^2}{n + \kappa_0}\right)$$

Modelo normal univariado

$$p(\theta|\sigma^2, \mathbf{y}) \propto \exp\left[-\frac{\kappa_0 + n}{2\sigma^2}\left(\theta - \frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n}\right)^2\right]$$

$$\theta|\sigma^2, \mathbf{y} \sim \text{Normal}\left(\mu_n, \frac{\sigma^2}{n + \kappa_0}\right)$$

La distribución marginal posterior de σ^2, $p(\sigma^2|\mathbf{y})$ es,

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y})d\theta$$

Modelo normal univariado

De acuerdo a la ecuación (2) tenemos,

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto$$

$$(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\nu_0\sigma_0^2+(n-1)s^2+\frac{\kappa_0 n}{\kappa_n}(\bar{y}-\mu_0)^2\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\kappa_n}{2\sigma^2}(\theta-\mu_n)^2\right]\frac{\sqrt{\kappa_n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}d\theta$$

Modelo normal univariado

De acuerdo a la ecuación (2) tenemos,

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto$$

$$(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\nu_0\sigma_0^2 + (n-1)s^2 + \frac{\kappa_0 n}{\kappa_n}(\bar{y}-\mu_0)^2\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\kappa_n}{2\sigma^2}(\theta-\mu_n)^2\right] \frac{\sqrt{\kappa_n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} d\theta$$

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\nu_n\sigma_n^2\right]$$

Modelo normal univariado

De acuerdo a la ecuación (2) tenemos,

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto$$

$$(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\nu_0\sigma_0^2+(n-1)s^2+\frac{\kappa_0 n}{\kappa_n}(\bar{y}-\mu_0)^2\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\kappa_n}{2\sigma^2}(\theta-\mu_n)^2\right]\frac{\sqrt{\kappa_n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}d\theta$$

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n)}{2}-1}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\nu_n\sigma_n^2\right]$$

$$\sigma^2|\mathbf{y} \sim \text{Gamma-inversa}\left(\frac{\nu_n}{2},\frac{\nu_n\sigma_n^2}{2}\right)$$

Modelo normal univariado

De acuerdo a la ecuación (2) tenemos,

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto$$

$$(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n+1)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\nu_0\sigma_0^2 + (n-1)s^2 + \frac{\kappa_0 n}{\kappa_n}(\bar{y}-\mu_0)^2\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\kappa_n}{2\sigma^2}(\theta-\mu_n)^2\right] \frac{\sqrt{\kappa_n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} d\theta$$

$$p(\sigma^2|\mathbf{y}) \propto (\sigma^2)^{\frac{-(\nu_n)}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\nu_n\sigma_n^2\right]$$

$$\sigma^2|\mathbf{y} \sim \text{Gamma-inversa}\left(\frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n\sigma_n^2}{2}\right)$$

o

$$\sigma^2|\mathbf{y} \sim \text{Inv}-\chi^2(\nu_n, \sigma_n^2)$$

Modelo normal univariado

Se puede mostrar que la distribución marginal posterior de θ es,

$$\theta|\mathbf{y} \sim t_{n+\nu_0}\left(\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{\kappa_0 + n}\right)$$

y se obtiene partiendo de la distribución posterior conjunta e integrando con respecto a σ^2:

$$\begin{aligned} p(\theta|\mathbf{y}) &= \int_0^\infty p(\theta, \sigma^2|\mathbf{y}) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu_n+1}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu_n\sigma_n^2 + \kappa_n(\theta - \mu_n)^2]\right] d\sigma^2 \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable:
z$=\frac{A}{2\sigma^2}$ A$=(\nu_0 + n)\sigma_n^2 + (\kappa_0 + n)(\theta - \mu_n)^2$ d$\sigma^2 = \frac{-A}{2Z^2} dz$ se obtiene la distribución posterior de θ.

Modelo normal univariado

Si X $\sim$*Normal*(θ, σ^2)*, ambos desconocidos. Se tienen las siguientes distribuciones a priori:*

$$\theta|\sigma^2 \sim N(\mu_0, \sigma^2/\kappa_0)$$

$$\sigma^2 \sim \textit{Gamma-inversa}\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0\sigma_0^2}{2}\right).$$

Se obtiene:

$$\theta|\sigma^2, \mathbf{y} \sim \textit{Normal}\left(\mu_n, \frac{\sigma^2}{n+\kappa_0}\right),$$

$$\sigma^2|\mathbf{y} \sim \textit{Gamma-inversa}\left(\frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n\sigma_n^2}{2}\right),$$

$$\theta|\mathbf{y} \sim t_{n+\nu_0}\left(\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{\kappa_0+n}\right),$$

donde $\sigma_n^2 = \frac{\nu_0\sigma_0^2+(n-1)S^2+\frac{n\kappa_0(\bar{y}-\mu_0)^2}{\kappa_n}}{\nu_n}$ *y* $\mu_n = \frac{\mu_0\kappa_0+n\bar{y}}{\kappa_n}$.

Modelo normal univariado

Ejemplo

Se quiere establecer si la temperatura promedio del cuerpo es 98.6 °F. Para este fin se toma la temperatura de 130 personas y se encuentra una media de 98.25 con una varianza de 0.5376. Suponga que la temperatura se puede modelar mediante una distribución Normal(θ, σ^2), $\theta|\sigma^2 \sim$*Normal*(98.6,100σ^2) *y* $\sigma^2 \sim$*Gamma-inversa*(0.001,0.001). *¿Qué se puede concluir?*

Modelo normal univariado

Ejemplo

Nuevamente vamos a analizar los datos del experimento de Simon Newcomb quien realizó un experimento en 1882 para medir la velocidad de la luz. Suponga que se utiliza como distribución a priori para σ^2 una IG (0.1,0.2) y como a priori para $\theta|\sigma^2$

$$p(\theta|\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-1/2} exp\left[-\frac{S_0(\theta-\delta)^2}{2\sigma^2}\right]$$

con $S_0 = 5$ y $\delta = 25$. Encuentre un intervalo de credibilidad para σ^2 y θ al 95 %.