Universidad Nacional de Colombia

FACULTAD DE CIENCIAS

ACTUARIA DE CONTINGENCIAS DE VIDA

Trabajo 3

1) 25/25
2) 25/25
3) 25/25
4) 25/25

100x5/100 = 5.0

Nota: 5.0

Valentina Hurtado Sepúlveda
Valentina Tamayo Guarín

Junio 2022

0.1. Punto 1

1) Un departamento de estructuración de una Aseguradora diseña una anualidad de vida vitalicia, para una vida (58), financiada mediante tasas de rendimiento aleatorio de un fondo de fiducia. La anualidad es del tipo especificado en la Tabla 6.3, con pagos mes vencido, con valor inicial de C = 2 unidades monetarias. Para los dos primeros tipos se pactan tasa de incremento de costo de vida anual, de i_q = 0.02, ρ = 0.03, efectiva anual, con m = 12, q = 1.

Para las tasas de rendimiento iid NIG, use los parámetros:

```
# parametros para las tasas ea mensuales
nig.est = c(alpha=45.638,
beta = -7.29, delta = 0.00539,
mu = 9.449413e-03 )
```

El valor presente es la variable aleatoria Z que se obtiene de la anualidad cierta anticipada, a n años,

$$(G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor} \tag{1}$$

Reemplazando el total de pagos mn por $mK_m(x)+1$ en la correspondiente:

$$Z = (G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{K_m(x)+1/m}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{mK_m(x)}(1+i)^{-\frac{k}{m}}(1+i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor} \tag{2}$$

Así, el valor de la anualidad está dado por:

$$\textbf{Valor anualidad} = P \times m \times (G^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} \tag{3}$$

El modelo de flujo de caja para los saldos $F(k)$, es una ecuación de recurrencia dada por

$$F(k) = (1+i_m(k))F(k-1) - c(k), k = 1, 2, ... \tag{4}$$

En sus características se usa la variable $\lceil mT(x)\rceil = mK_m(x)+1$ que proporciona el total de meses sobrevividos por (x).
Entonces se hacen cambios, en la expresión anterior y queda:

$$F(k) = [(1+i_m(k))F(k-1) - c(k)], k = 1, 2, ..., \lceil mT(x)\rceil \tag{5}$$

a) 25/25

a) Calcule valor de la anualidad de vida, con pagos geométricos, asumiendo una ley de mortalidad Makeham-Beard, con los parámetros que aparecen en la sección de esta ley en las Notas de Clase. Asuma una tasa efectiva anual de $i = 0.05$, $i_q = 0.02$, ver §6.4.1, pág. 220. Y el valor de la anualidad cierta geométrica para un periodo $n = 110 - 58$, ver (5.64), pág. 178.

```
#---punto a ---#

#--- ley Makeham Beard---#

tpx.mb = function(t,x,pars){
  a = pars[1]; b = pars[2]; k=pars[3]; r =pars[4];
  f=(1+a*r*exp(b*x))/(1+a*r*exp(b*(x+t)))
  p=ifelse(t < 110-x,exp(-k*t)*f^((1-k*r)/(b*r)),0)
  return(p)
}

#---parametros MB---#

pars = c(0.00004720,0.09048063,0.00016508,0.02963878)


#---parametros de la anualidad---#
x = 58; w = 110; i = 0.1; C = 2; m = 12;
v = 1/(1+i); iq= 0.02;p=0.03; q=1;n = w-x

Gaaqmx = function(x,i,iq,m,q,pars){
  try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
  try(if(m %% q != 0) stop("m no es divisible por q"))
  v = 1/(1+i)
  k = seq(0,m*(110-x)-1)
  kmpx = tpx.mb(k/m,x,pars)
  vkm = v^(k/m)

  vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
  a = sum(vkm*vqm*kmpx)/m
  return(a)}

#--- respuesta ---#
```

```
(Cp = C*m*Gaaqmx(x,i,iq,m,q,pars))
[1] 237.7373
```

b) 25/25

b) Denote por T_0 el mes en el cual el saldo se vuelve cero por primera vez, ver pág. 230. Genere una muestra aleatoria de T_0 mediante simulación. Reporte el histograma. Ajuste una distribución tipo Sichel a esta muestra. Reporte los parámetros μ, σ, ν. Calcule la probabilidad $P(T_0 \leq mn)$. Es decir,la probabilidad de que el saldo se vuelva cero antes de la terminación del contrato. Indique esta probabilidad por p_0.

Al usar la distribución NIG, dado que produce valores positivos y negativos, se usara un factor de capitalización: $1+i$

$$\mu = 513978.42662$$

$$\sigma = 44.45524$$

$$\nu = -22.79961$$

la probabilidad de que el saldo se vuelva cero antes de la terminación del contrato, está dada por:

$$p_0 = 0.98$$

```
#---Punto b---#

set.seed(4)

#---generar los pagos---#
t = seq(1,n*m)
ck = rep(C,n*m)*(1+iq)^floor(t/m)

#---parametros para las tasas ea mensuales---#
nig.est = c(alpha=45.638,
            beta = -7.29,
            delta = 0.00539,
           mu = 9.449413e-03)

library(fBasics)
library(GeneralizedHyperbolic)

#---densidad de T0 = tiempo minimo llegar el fondo a default---#
```

```
N = 500
T0 = double(N)



for(s in 1:N){
  exp.ir = 1+rnig(n*m, alpha = nig.est[1], beta = nig.est[2],
  delta = nig.est[3], mu = nig.est[4])
  S = matrix(0,m*n,1)
  S[1] = exp.ir[1]*Cp - ck[1]
  for( k in 2:(m*n) ){
    S[k] = max(0,exp.ir[k]*S[k-1]-ck[k])}
  T0[s]=which(S==0)[1]
}


#---Histograma---#

hist(T0)

#---ajuste de la Sichel---#

require(gamlss)
mSI <- histDist(T0, "SI", main = "SI")
parsl = c(mu=mSI$mu,sigma=mSI$sigma,nu =mSI$nu)
parsl



#---probabilidad {p0} ---#

(p0 = 1-sum(is.na(T0))/N)
```

Histogramas

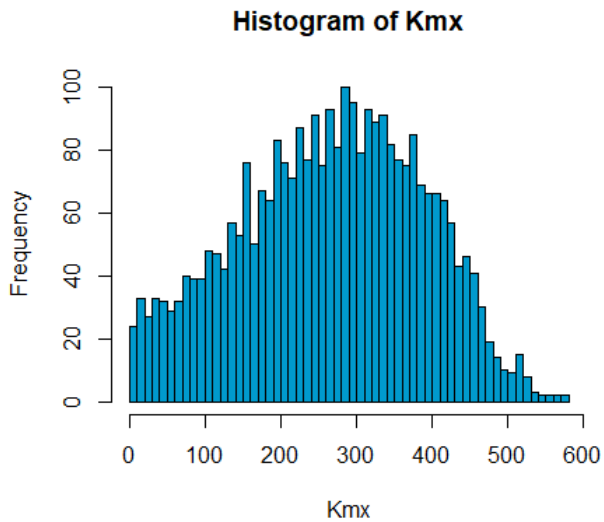

Figura 1: Histograma

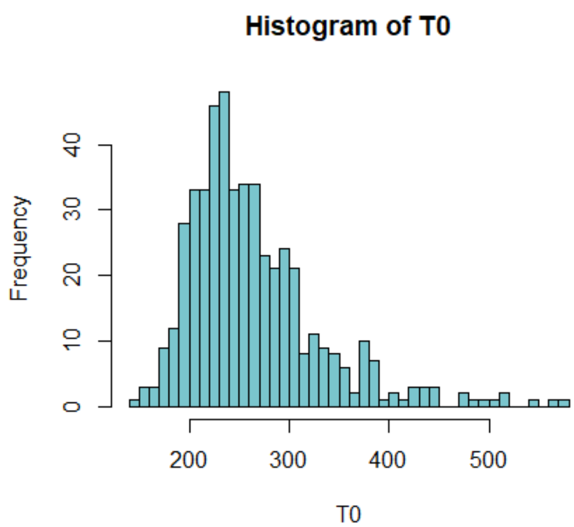

Figura 2: Histograma

c) 25/25

c) Simule una muestra de tamaño $N = 5000$ del valor presente V de los pagos pactados, descontados con la tasa asignada. Reporte el histograma, la media, la desviación estándar de V . Use la fórmula (6.81), pág. 230.

Se define el valor presente de los pagos de la siguiente forma:

$$V = \sum_{j=1}^{min(\lceil mT(x) \rceil, T0)} \frac{c(j)}{\prod_{s=1}^{j}(1 + i_m(s))}$$

- La media corresponde a: 225.1314 224.7525
- La desviación corresponde a: 61.90561

```
require(GoFKernel)  #simulaciones de la px- supervicencia
N = 5000
f <- function(t) 1-tpx.mb(t,x,pars)

V = double(N)

for(k in 1:N){
  exp.ir = 1+rnig(n*m, alpha = nig.est[1],
  beta = nig.est[2], delta = nig.est[3], mu = nig.est[4])
  Tx = random.function(1, f, lower = 0, upper = 110-x,
                       kind = "cumulative")
  Kmx = ceiling(Tx*m)


  V[k] = sum( ck[1:Kmx]/cumprod(exp.ir[1:Kmx]))
}
mean(V)
[1] 225.1314
sd(V)
[1] 61.90561
```

d) 25/25

d) Denote por $\lceil mT(x) \rceil$ es el último mes de vida de (x). Calcule la probabilidad de que $P(T0 < \lceil mT(x) \rceil)$, utilizando el Teorema de Probabilidad Total. Para esto, utilice la distribución de T_0 encontrada en el punto b.

La probabilidad $P(T0 < \lceil mT(x) \rceil)$ se calcula con el teorema de probabilidad total. Pero hay que considerar primero la probabilidad de que T_0 sea finito , $p_0 = P(T_0 < \infty)$. Entonces

$$P(T_0 < \lceil mT(x) \rceil) = P(T_0 < \lceil mT(x) \rceil \mid T_0 < \infty) \cdot P_0$$

Despues se calcula:

$$p = P(T_0 < \lceil mT(x) \rceil \mid T_0 < \infty) = \sum P(k \leq \lceil mT(x) \rceil) P(T_0 = k)$$

La respuesta final es $p_0 \cdot p$

$$P(T_0 < \lceil mT(x) \rceil) = 0.517565$$

El código siguiente muestra como calcularla:

```
p = 0
for(k in 1:(n*m)){
  p = p + dSI(k, mu = parsl[1],
              sigma = parsl[2], nu = parsl[3])*tpx.mb(k/m,x,pars)}

p
(p*p0)
[1] 0.517565   0.5362241
```