Estadística Bayesiana

Clase 9: Series estacionarias

Isabel Cristina Ramírez Guevara

Escuela de Estadística
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Medellín, 10 de septiembre de 2020

Serie temporal

Una serie temporal es una sucesión de observaciones de una variable tomadas en varios instantes de tiempo. En nuestro caso las observaciones son los valores posteriores de los parámetros que nos interesa hacer inferencia. El tiempo está determinado por las iteraciones de los algoritmos MCMC.

A menudo, se representa la serie en un gráfico temporal, con el valor de la serie en el eje de ordenadas y los tiempos en el eje de abscisas.

Serie estacionaria

Una serie es estacionaria si la media y la variabilidad se mantienen constantes a lo largo del tiempo.

Una serie temporal es estacionaria en sentido amplio si:

- $E(X_t) = \mu$ para todo t.
- $V(X_t) = \sigma^2$ para todo t.
- $Cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k)$ para todo t y k.

Algunos conceptos

Suponga que tenemos muestras aleatorias de tamaño n de dos variables aleatorias X y Y. Se puede definir:

- Varianza estimada:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

- Covarianza:

$$Cov(x,y) = E[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

- Correlación:

$$Cor(x,y) = \rho_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$$

  donde s_x y s_y son las estimaciones de la desviación estándar de X y Y, respectivamente.

Algunos conceptos

Suponga que tenemos una serie temporal X_t con $t = 1, \cdots, T$. Se puede definir:

- Varianza estimada
$$\hat{\gamma}(0) = \frac{\sum_{i=1}^{T}(x_i - \bar{x})^2}{T - 1}$$
- Covarianza
$$\hat{\gamma}(k) = \sum_{t=1}^{T-k} \frac{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})}{T - k - 1} = \hat{\gamma}(-k)$$
- Correlación:
$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Función de autocorrelación (ACF)

Es una grafica de la autocorrelación muestral versus el valor de k. Con base en la ACF muestral probamos la hipótesis:

$$\mathrm{H}_0 : \ \rho(k) = 0 \quad \text{versus} \quad \mathrm{H}_1 : \ \rho(k) \neq 0$$

$k = 1, \cdots, T/4$. Para cada k, con $\alpha \approx 5\,\%$, se rechaza H_0 si $|\hat{\rho}(k)| > 2/\sqrt{T}$. La ACF muestral permite chequear rápidamente estas $T/4$ pruebas trazando en la gráfica los límites $\pm\, 2/\sqrt{T}$.

Ejemplo

Suponga que tenemos una muestra aleatoria de tamaño 10 de una variable aleatoria normal con media y varianza desconocida. Vamos a ajustar el siguiente modelo:

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu, \tau),$$

con distribuciones a priori

$$\mu \sim \mathrm{N}(0, 0.01) \;\; \text{y} \;\; \tau \sim \mathrm{Gamma}(0.01, 0.01)$$

donde τ es la precisión y está dada por: $\tau = \frac{1}{\sigma^2}$