Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Actuaria de Contingencias de Vida

Trabajo 1

Valentina Hurtado Sepulveda
Valentina Tamayo Guarín

Abril 2022

Ley de Gompertz-Makeham.

Definición: La primera ley Gompertz-Makeham (GM) propone que la fuerza de mortalidad humana se puede expresar como:

$$\mu_x = a + bc^x$$

La correspondiente función de supervivencia tPx está por:

$$tPx = s^t g^{c^x c^t - 1}$$

Dónde:

$$s = e^{-a}, \quad g = e^{-\frac{b}{lnc}}$$

Se usarán los siguientes valores iniciales para la GM:

$$\theta = [a = 0.000161696823662974 \quad b = 0.0000481020838452376 \quad c = 1.09434299050028]$$

Así, la fuerza de mortalidad humana está dada apróximadamente por:

$$\mu_x = 0.0001617 + 0.00005264^x$$

Ejercicio a resolver:

1) Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} del modelo asignado con los parámetros correspondientes. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x),(2.33), dada por:

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}$$

donde la constante $\theta > 1$ está dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 40$, $x_2 = 50$, t=20, $\theta = 1.7$.

a)Defina la probabilidad de que al menos ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$ una de las dos vidas (x_1), (x_2) esté con vida después de t años, como

$${}_tp_{\overline{x_1,x_2}} = P((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t))$$

$$= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$$

Encuentre $1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1{}^s}}$. Interprete.

Solución:

Para la primera parte se calculará con la función GM la expresión ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$, con $t = 20, x_1 = 40$ y $x_2 = 50$, tenemos entonces que:

$${}_{20}p_{\overline{4050}} =_{20} p_{40} +_{20} p_{50} -_{20} p_{40} *_{20} p_{50} = 0.9784998$$

```
## [1] 0.9784981
```

De acuerdo al resultado anterior, se puede decir que de dos individuos de 40 y 50 años respectivamente, la probabilidad de que uno ellos continúe con vida después de 20 años, es de aproximadamente 97.85%.

Luego, empleando el método multiplicativo,donde $\theta = 1.7$, con $t = 20$ y $x = 40$, tenemos que:

$$ {}_tp_x^{\theta} = 0.8396356 $$

Y reemplazando este resultado se obtiene que:

$$ 1 -_{20} p_{\overline{40^s 40^s}} =_{20} p_{40}^{\theta} +_{20} p_{40}^{\theta} -_{20} p_{40}^{\theta} *_{20} p_{40}^{\theta} = 0.02572 $$

```
##         a
## 0.8396356
```

```
##          a
## 0.02571674
```

El resultado anterior puede interpretarse como la probabilidad de que de dos individuos de 40 años con alguna enfermedad o insuficiencia física, no sobrevivan al menos 20 años más, es de apróximadamente 2.57%.

b) Encuentre $P \in (0, 1)$, el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de (x_1) con respecto a la vida (x_1^s), dado por $\mathring{e}_{x_1}(1 - p) = \mathring{e}_{x_1^s}$.

Solución:

Una expresión para la esperanza de vida de (x), utilizando la ley GompertzMakeham

$$ \mathring{e}_x = E(T(x)) $$

Y dando uso a la respectiva parametrización, tenemos que:

$$ \mathring{e}_x = \int_0^{w-x} s^t g^{c^x(c^t-1)} \cdot dt $$

La integral anterior se puede expresar mediante una fórmula cerrada, con base en la función Gamma Incompleta superior (upper incomplete Gamma) , definida como:

$$ \Gamma(x, a) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt $$

Usando entonces la **Proposición 2.8.2.** (ver Scarpello et al. [2006]) La esperanza de vida de (x) con base en la ley de mortalidad GompertzMakeham está dada por la expresión siguiente:

$$\mathring{e}_x = \frac{(-e^x \ln(g))^{\frac{\ln(s)}{\ln(c)}}}{g^{c^x} \log(g)} \Gamma(-e^x \ln(g), \frac{\ln(s)}{\ln(c)})$$

Reemplazando los datos del problema y con ayuda del Programa Estadistico R obtenemos que:

$$\mathring{e}_x = 37.74094$$

```
##   uppinc
## 37.74094
```

Para hallar la $\mathring{e}_{40^s}$ desarrollamos lo siguiente:

$$\mu_x = -\ln(S) - \frac{\ln(g)}{\ln(C)}$$

$$\theta\mu_x = -\theta\ln(S) - \frac{\theta\ln(g)}{\ln(C)} C^x$$

$$\theta\mu_x = -\ln(S^\theta) - \frac{\ln(g^\theta)}{\ln(C)} C^x$$

Entonces: $S \to S^\theta$, $g \to g^\theta$, $C \to C$

Finalmente la esperanza de vida es:

$$\mathring{e}_{40^s} = 32.23659$$

```
##   uppinc
## 32.23659
```

Ahora bien, como ya se han hallado las respectivas esperanzas, se procede a despejar p

Recordar que la ecuación esta dada por:

$$\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$$

Así,

$$p = -\frac{\mathring{e}_{x_1^s}}{\mathring{e}_{x_1}} + 1 = -\frac{32.23659}{37.74138} + 1$$

$$p = -0.8541444 + 1 = 0.1458556$$

```
## [1] 0.1458556
```

Es decir, que p representa el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de (x_1) con respecto a la vida x_1^s, dado por el 14.58% apróximadamente.

c) Suponga que S es una variable aleatoria distribuída Exponencial con parámetro $\mathring{e}_x$ es decir, $P(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$, indenpendiente de $T(x)$. Encuentre una expresión para

$$P(T(x) > S).$$

Evalúela utilizando $x = x_1$. Sugerencia: Use el teorema de probabilidad total. La variable S puede interpretarse como tiempo de la ocurrencia de una enfermedad; si $S > T(x)$, ésta no se presenta.

Solución:

Si llamamos $A = (T(x) > S)$, el teorema de probabilidad total **(TPT)**, en caso continuo permite desarrollar $P(A)$. Nótese que se se puede asumir que $T(x)$, S son variables aleatorias independientes. Entonces, aplicando el teorema de Probabilidad Total, recordemos primero en que consiste:

(Teorema de probabilidad total) Si A es un evento cualquiera y T es una variable aleatoria continua positiva con fdp $f_T(t)$, y se puede cacular la probabilidad condicional $P(A|T = t)$, como una función de t, entonces se cumple:

$$P(A) = \int_0^\infty P(A|T = t) \cdot f_T(t) dt$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
P(T(x) > S) &= \int_0^{110-x} P(T(x) > S)|T(x) = t)_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{110-x} P(t > S)_t p_x \mu_{x+t} dt \\
&= \int_0^{110-x} (1 - e^{-t/\mathring{e}_x})_t p_x \mu_{x+t} dt \\
P(T(x) > S) &= \int_0^{110-x} (1 - e^{-t/\mathring{e}_x})_t p_x \mu_{x+t} dt = 0.6124603
\end{aligned}$$

```
## [1] 0.6124603
```

Es así como la expresión para $P(T(x) > S)$ está representada por el 61.25% aproximadamente.

d) Encuentre la probabilidad anterior $P(T(x) > S)$ usando simulación MonteCarlo.

Tenemos que $S \backsim Exp(\mathring{e}_x)$, tal que $P(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$. Y $T(x)$ es la vida remanente de una vida (x), distribuída según una ley Gompertz asumida independiente de S. Se distribuye según una Ley Gompertz-Makeham:

$$P(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$$

Queremos hallar la expresión $\frac{sum(N)}{3000} = \hat{p}$. Luego, la probabilidad anterior usando Simulación monte Carlo se construye de la siguiente manera:

```
#GompertzMakeham,
#simulacion directa
set.seed(4)
x = 40; n = 3000;
pars =  c(0.000161696823662974,0.0000481020838452376,1.09434299050028)
a= pars[1];C = pars[3];b = pars[2];
U = runif(n,0,1)
#genera la Gompertz
Tx.g = log(1-log(C)*log(U)/(b*C^x))/log(C)
#genera la Exponencial
e_40 <- 37.74138
S = rexp(n,rate=a)
#genera la GompertzMakeham
Tx = pmin(S, Tx.g)

#para la S tenemos que

lk<- rexp(n,rate=1/e_40)

cuenta<-vector()
for (i in 1:3000) {
    cuenta[i]=ifelse(Tx[i]>lk[i],1,0)}
sum(cuenta)/3000
```

```
## [1] 0.6163333
```

Luego,

$$\hat{p} = 0.6163333$$

Como se puede evidenciar, el resultado arrojado vía simulación monte Carlo es un valor muy acertado comparandolo con el resultado de la probabilidad anterior, pues representan la misma proporción.