2.11. Problemas

Los problemas se refieren a las secciones §2.6, §2.5 y .

1. Se definió en (2.6.2), pag 43, la variable

$$T_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \text{máx}\{T(x_1), T(x_2), T(x_3)\},$$

denominada "estado de último sobreviviente", para tres vidas, con vidas residuales independientes $T(x_j), j = 1, 2, 3$. La probabilidad de que fallezcan todos antes de t años es

$$_tq_{\overline{x_1,x_2,x_3}} := {}_tq_{x_1}\,{}_tq_{x_2}\,{}_tq_{x_3}$$

Suponga tres vidas de edades $x_1 = 40$, $x_2 = 30$, $x_3 = 56$, y $t = 20$. Utilice la fuerza de mortalidad con los parámetros del modelo asignado.

a) Calcule la probabilidad $1 - {}_tq_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$, Cómo se interpreta el resultado en términos de la variable $T_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$?

b) Calcule la probabilidad $\mathsf{P}(T_{\overline{x_1,x_2}} < T(x_3))$. Cómo se interpreta el resultado? Sugerencia: use el teorema de probabilidad total.

c) Calcule la probabilidad $\mathsf{P}(T_{\overline{x_1,x_2}} < T(x_3))$ usando simulación MonteCarlo.

d) Calcule $\mathsf{E}(T_{\overline{x_1,x_2,x_3}})$.

2. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} del modelo asignado con los parámetros correspondientes. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x),(2.33), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta\mu_{x+t}, \tag{2.96}$$

donde la constante $\theta > 1$ está dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 40, x_2 = 50, t = 20, \theta = 1.7$.

a) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$_tp_{\overline{x_1,x_2}} = \mathsf{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), \tag{2.97}$$
$$= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y. \tag{2.98}$$

Encuentre $1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Interprete.

b) Encuentre $p \in (0,1)$, el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de (x_1) con respecto a la vida (x_1^s), dado por $\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$.

c) Suponga que S es una variable aleatoria distribuída Exponencial con parámetro $\mathring{e}_x$ es decir, $\mathsf{P}(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$, independiente de $T(x)$. Encuentre una expresión para

$$\mathsf{P}(T(x) > S).$$

Evalúela utilizando $x = x_1$. Sugerencia: use el teorema de probabilidad total. La variable S puede interpretarse como tiempo de la ocurrencia de una enfermedad; si $S > T(x)$, ésta no se presenta.

d) Encuentre la probabilidad anterior $\mathsf{P}(T(x) > S)$ usando simulación MonteCarlo.

3. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t}, con los parámetros según el modelo asignado. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo en (2.33), pag. 35, para una vida (x), dada por

$$\mu_{x^s+t} = \theta \mu_{x+t}, \tag{2.99}$$

con $\theta > 1$ dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = x_2 = 30, t = 20, \theta = 1.2$. Las variables aleatorias $T(x_1), T(x_2)$ son independientes.

a) Defina la probabilidad de fallecer dos vidas x_1, x_2 antes de t años como

$${}_tq_{\overline{x_1 x_2}} := {}_tq_{x_1} \cdot {}_tq_{x_2}. \tag{2.100}$$

Encuentre ${}_tq_{\overline{x_1^s, x_2^s}}$ y ${}_tq_{\overline{x_1, x_2}}$.

b) Encuentre $p \in (0,1)$, el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de x_1 con respecto a la vida (x_1^s), dado por $\mathring{e}_{x_1}(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$.

c) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$.

d) Encuentre $P(T(x_1) < T(x_1^s))$ utilizando simulación MonteCarlo.

4. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la ley asignada, con los respectivos valores de los parámetros. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu_{x+t}^s = k + \mu_{x+t}, k > 0$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia renal. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Suponga $x_1 = 56, x_2 = 40, t = 10,\ k = 0.01$.

a) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} = \mathsf{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)), \tag{2.101} $$
$$ = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x {}_tp_y. \tag{2.102} $$

Encuentre ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$ y ${}_tp_{\overline{x_1^s,x_2^s}}$.

b) Encuentre ${}_tp_{\overline{x_1,x_2}}$ y ${}_tp_{\overline{x_1^s,x_2^s}}$ usando simulación MonteCarlo.

c) Suponga un contrato a $M = 10$ años que paga a (x_1) la cantidad $C_1 = 10$ si sobrevive 10 años, y paga $C_2 = 8$ si fallece antes de 10 años. El valor del contrato, al inicio del mismo, se calcula como el valor esperado de un valor presente, descontado a una tasa efectiva anual $i = 0.07$.

$$ \begin{aligned} V = {} & C_1\mathsf{E}[(1+i)^{-T(x_1)} I(T(x_1) \geq M)] \\ & + C_2\mathsf{E}[(1+i)^{-T(x_1)} I(T(x_1) < M)]. \end{aligned} $$

Note que es un contrato similar a un bono cupón cero a M años con probabilidad de default $\mathsf{P}(T(x_1) < M)$.

5. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la Ley asignada con lo valores de los parámetros. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar aditiva, tal que: $\mu_{x+t}^s = 0.02 + \mu_{x+t}$, para una vida (x) que se le diagnostica una insuficiencia cardíaca. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Utilice $x_1 = 40$, $x_2 = 50, x_3 = 60, t = 10$.

a) Defina las probabilidades de que al menos una de tes vidas $(x_1), (x_2), (x_3)$ esté con vida después de t años, como

$$ {}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}} = \mathsf{P}((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t) \cup (T(x_x) > t)). \tag{2.103} $$

Calcule ${}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$.

b) Calcule ${}_tp_{\overline{x_1^s,x_2^s,x_3^s}}$.

c) Calcule ${}_tp_{\overline{x_1,x_2,x_3}}$ y ${}_tp_{\overline{x_1^s,x_2^s,x_3^s}}$ usando simulación MonteCarlo.

6. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la Ley asignada. Utilice los parámetros que aparecen en los Ejemplos, ver las secciones §2.6 y §2.5. Suponga las variables $T(40)$, $T(30)$ y $T(20)$ distribuídas según la ley escogida y asumidas independientes.

   a) Usando el teorema de probabilidad total (2.13) condicionando sobre $T(30)$, y las identidades (2.15),(2.16), compruebe que

   $$\mathsf{P}(T(40)+20 < T(30)+10 < T(20)) = \frac{1}{6}\,{}_{20}p_{20}\,{}_{10}p_{30}. \quad (2.104)$$

   b) Evalúe (2.104) con la ley de mortalidad escogida.

   c) Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar multiplicativa, tal que: $\mu^s_{x+t} = 1.3\,\mu_{x+t}$, para una vida (x). Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Calcule

   $$\mathsf{P}(T(40)+20 < T(30^s)). \quad (2.105)$$

   d) Genere una Tabla de Vida con los valores de μ_x . Encuentre la probabilidad $\frac{1}{6}\,{}_{20}p_{20}\,{}_{10}p_{30}$ con esta Tabla.

7. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) a quien se le diagnostica cáncer de próstata.

   $$\mu_{x^s+t} = \theta(x+t)\mu_{x+t} \quad (2.106)$$

   donde la función $\theta(x) > 0$ está indeterminada inicialmente. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por la ley de mortalidad Makeham-Beard (MB).

   a) Ajuste el modelo MB a la tabla sobrevivientes cáncer de próstata USA 1950-1975.

   b) Ajuste el modelo MB a la tabla colombiana 00-05 hombres.

   c) Encuentre una estimación no paramétrica para $\theta(x)$ con base en la tabla anterior y ajústele el modelo siguiente:

   $$\theta(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j x^j \quad (2.107)$$

d) Genere una tabla de sobrevivientes de cáncer de próstata para Colombia utilizando la fuerza de mortalidad estimada con la tabla colombiana 00-05 hombres, multiplicada por el estimador $\widehat{\theta}(x)$ de (2.107)

$$\mu_{x+t}^{co,s} = \widehat{\theta}^{usa}(x+t)\mu_{x+t}^{co} \tag{2.108}$$

Use la función que genera tablas de vida en la librería MortalityLaws a partir de la fuerza de mortalidad sub-estándar estimada.

e) Encuentre para $x = 60$, $\mathsf{E}(T(x^{co,s})) = e_{x^{co,s}}$, $\mathsf{E}(T(x^{usa,s})) = e_{x^{usa,s}}$, usando los modelos MB.

8. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x) que se le diagnostica cáncer de próstata

$$\mu_{x+t}^{s} = e^{\theta(x)}\mu_{x+t}, \tag{2.109}$$

donde la función $\theta(x)0$ está dada para cada edad x por la fórmula

$$\theta(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j x^j, \tag{2.110}$$

$$a_0 = 81.67603376,\ a_1 = -2.55346589 \tag{2.111}$$

$$a_2 = 0.02687182,\ a_3 = -0.00009401 \tag{2.112}$$

Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Considere la fuerza de mortalidad estándar μ_{x+t} dada por una ley de mortalidad GM, Siler ó Makeham-Beard (MB).

a) Justifique por qué se cumple que ${}_tp_x^s < {}_tp_x$.

b) Encuentre una expresión para $\mathsf{E}(T(x^s)) = \overset{\circ}{e}_{x^s}$.

c) Suponga $x^s = 56,\ k = 0.1$, en qué porcentaje se reduce la esperanza de vida de (x^s) con respecto a otra vida (x) con la fuerza de mortalidad μ_{x+t}?.

d) Encuentre una expresión para $P(T(x) < T(x^s))$. Evalúela asumiendo $x = 56,\ k = 0.1$ y la Tabla ISS2010 hombres.

9. Suponga que (x) sufre de insuficiencia cardíaca (IC) y su fuerza de mortalidad se modela como una mortalidad multiplicativa sub-estándar, ${}_tp_{x^s} = e^{-kt}{}_tp_x$, con

una mortalidad de base con la ley GM. Asuma: $k = 0.01$, $x = 56$ y ley GM para la tabla colombiana de mortalidad de los Asegurados $55/69$:

$$\mu_x = 0.0015 + 10^{-4.222+0.043^x}$$
$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

con $s = 0.998501$,$g = 0.999394$, $c = 1.10407$.

Utilice la fórmula (2.75) para encontrar $\mathring{e}_{56}$, $\mathring{e}_{56^s}$, la esperanza de vida de (x) con IC. Y calcule el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida en este caso: $\frac{\mathring{e}_{56}-\mathring{e}_{56^s}}{\mathring{e}_{56}}$.

10. En una población los fumadores (F) (más de una cajetilla al día) tienen una fuerza de mortalidad doble que la de los no fumadores (NF). Asuma que la fuerza de mortalidad de los NF es la GM.

    Suponga que (x) y (x^F) son dos vidas independientes e idénticas, la primera NF y la segunda F. Calcule la probabilidad de que la vida residual de (x^F) sea menor que la de (x).

    Dado ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$, $t \geq 0$,

    a) Calcule $\mathring{e}_{41}$

    b) Asumiendo la hipótesis de linealidad (2.87), evalúe la probabilidad de que (41) sobreviva 6 meses.

11. Suponga m vidas todas de edad (x), con características vitales similares. Denote por ${}_tp\frac{[r]}{x(m)}$ la probabilidad de que exactamente r de las m sobrevivan t años. Es una probabilidad binomial. El número de ensayos es m. El “éxito” en cada ensayo es “sobrevivir t años”, luego la probabilidad de éxito es ${}_tp_x$. La probabilidad de r éxitos en m ensayos es:

$${}_tp\frac{[r]}{x(m)} = \binom{m}{r}({}_tp_x)^r({}_tq_x)^{m-r}$$

    Se tiene un grupo de 30 personas de edad 25. Encuentre la probabilidad de que exactamente 26 sobrevivan 10 años utilizando una de las leyes de mortalidad.

12. En la Tabla siguiente 7.6 aparecen los parámetros Gompertz-Makeham de las Tablas de mortalidad y supervivencia para hombres y mujeres (1959-1965) Bélgica.

    Comparar las probabilidades siguientes con la base técnica Danesa en el Ejemplo2.5.1, utilizando las funciones en la librería R `eha`.

2.12. Notas

Riesgos competitivos

La teoría de riesgos competitivos introdujo una modificación al considerar que la intensidad de mortalidad se podía expresar como una suma de intensidades. Una intensidad para cada causa principal de mortalidad:

$$\mu(x) = \mu_1(x) + \cdots + \mu_k(x)$$

En Seal(1977a) se presenta un esbozo histórico, y en Cox y Oakles(1978), Elandt-Johnson y Johnson(1980) y en Birnbaum(1979) se presenta la teoría desde el punto de vista de la bioestadística, mientras que en Bowers et al. (1986) se presenta la teoría con las aplicaciones actuariales a seguros de vida y pensiones.