Universidad Nacional de Colombia

FACULTAD DE CIENCIAS

ACTUARIA DE CONTINGENCIAS DE VIDA

Trabajo 2

1) 25/25
2) 25/25
3) 25/25
4) 25/25

100x5/100 = 5.0

Nota: 5.0

Valentina Hurtado Sepúlveda
Valentina Tamayo Guarín

0.1. Punto 2

Un departamento de rentas vitalicias en una empresa Aseguradora diseña una anualidad a $n = 15$ años, financiada mediante tasas de rendimiento aleatorio de un fondo de fiducia. La anualidad es de tipo lineal, con pagos mes vencido, con valor inicial de $C = 2.5$ unidades monetarias. Se pacta una tasa de incremento de costo de vida anual, de $\rho = 0.03$ efectiva anual. Desarrolle los siguientes puntos.

1) 25/25

a) Calcule valor de la anualidad lineal cierta, asumiendo una tasa efectiva anual de $i = 0.07$, con $m = 12$, $q = 1$, ver (5.70), pág. 180. Calcule un vector con los pagos pactados c_k, $k = 1, 2, ..., n \times m$, y reporte su gráfica.

La anualidad lineal con m pagos en el año, vencidos, inicialmente con valor $1/m$, y se incrementa cada q=1,4,12 períodos linealmente a la tasa ρ, tiene un valor dado por:

$$(L^{(q)}a)_{\overline{n|}}{}^{(m)} := \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}(1+i)^{\frac{-k}{m}}(1+\rho\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor) \tag{1}$$

Donde se asume que $m = q \times r$, para enteros m, q, r positivos. El valor de la anualidad con m pagos en el año, cada uno por valor P es:

$$\textbf{Valor anualidad} = P \times m \times (L^{(q)}a)_{\overline{n|}}{}^{(m)} \tag{2}$$

El flujo de caja asociado a esta anualidad está dado por:

$$F(k) = (1+i)^{\frac{1}{m}}F(k-1) - \frac{1}{m}(1+\rho\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor) \tag{3}$$

En el caso de tasas aleatorias se tiene la misma observación que en el caso geométrico:

$$F(k) = [(1+i_m(k)F(k-1) - \frac{1}{m}(1+\rho\lfloor\frac{qk}{m}\rfloor], k = 1, 2, ..., nm$$

la observacion es que falta agregar la parte positiva a la fórmula

$$F(k) = (1+i)^{\frac{k}{m}}\left[F(0) - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k}(1+i)^{-\frac{j}{m}}\left(1+\rho\left\lfloor\frac{qj}{m}\right\rfloor\right)\right]_+$$

Figura 1: Vector de pagos pactados

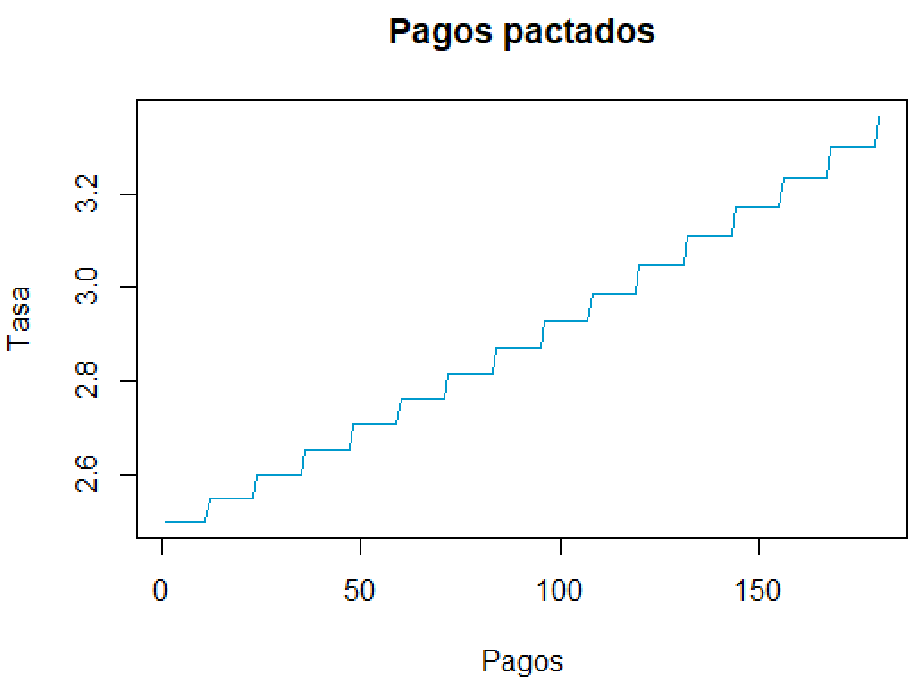
El valor de la anualidad se obtiene con el software R, en el caso de $m = 12$ pagos mensuales durante $n = 15$ años, con incrementos anuales de $q = 1$. De acuerdo a la información del enunciado se tiene:

```
#--- parametros a usar ---#
m = 12
n = 15
q = 1
i = 0.07
rho = 0.03
C = 2.5

Lavqmn = function(i,m,q,n,rho){
  try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
  v = 1/(1+i)
  t = seq(1,n*m,1)
  res = (1/m)*sum((1+i)^(-t/m)*(1+rho*floor(t*q/m)))
  return(res)}
#------reemplazar parametros-----#

(A1 = Lavqmn(i,m,q,n,rho))
[1] 11.04257



#--- valor de la anualidad ---#
(Cp = C*m*Lavqmn(i,m,q,n,rho))
[1] 331.2771

#--- generar los pagos ---#

#--- vector con los pagos pactados---#
t = seq(1,n*m)

ck = rep(C,1,n*m)*(1+rho*floor(t*q/m))
ck
ck[1:60]
```

```
#--- grafico pagos ---#
plot(t,ck, type = "l", col = "deepskyblue3",
main = "Pagos pactados",
xlab = "Tiempo", ylab = "Pago")
```

```
> ck[1:60]
 [1] 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.500 2.575 2.575 2.575 2.575 2.575 2.575 2.575
[19] 2.575 2.575 2.575 2.575 2.575 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.650 2.725
[37] 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.725 2.800 2.800 2.800 2.800 2.800 2.800 2.800
[55] 2.800 2.800 2.800 2.800 2.800 2.875
```

Figura 2: Vector de pagos pactados



2) 25/25

Figura 3: Pagos pactados

b) Simule una muestra de tamaño $N = 10000$ del valor presente V de los pagos pactados, descontados con la tasa LogNormal. Reporte el histograma, la media, la desviación estándar de V. Ver la sección § 5.4.4. Use tasas de rendimiento iid LogNormales, con parámetros

$im = (1+i)^{(\frac{1}{m})} - 1$
$delta.m = log(1+im)$ # Tasa promedio mensual
$sigma.m = 0.018$ #Volatilidad mensual

El código utilizado en el programa estadístico R es el siguiente:

```
N = 10000

VP = double(N)

for(j in 1:N){
  ir = rlnorm(n*m, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
  VP[j] = sum( ck/cumprod(ir))
}

#--- histograma valor presente ---#
plot(hist(VP), col = "deepskyblue3", xlab = "Valor presente",
ylab = "Frecuencia", main = "Histograma-Valor presente")

#---valor promedio (media)---#
v=mean(VP)
[1] 321.7319

#--- desvicion estandar ---#
0.018*12
[1] 0.216
```

La **media** del valor presente de los pagos pactados obtenida es: 335.1982.

La **desviación estándar** de los pagos pactados obtenida es: 0.216. Es decir 20 % de volatibilidad al año.

mean(VP)
[1] 335.3282
> sd(VP)
[1] 43.6334

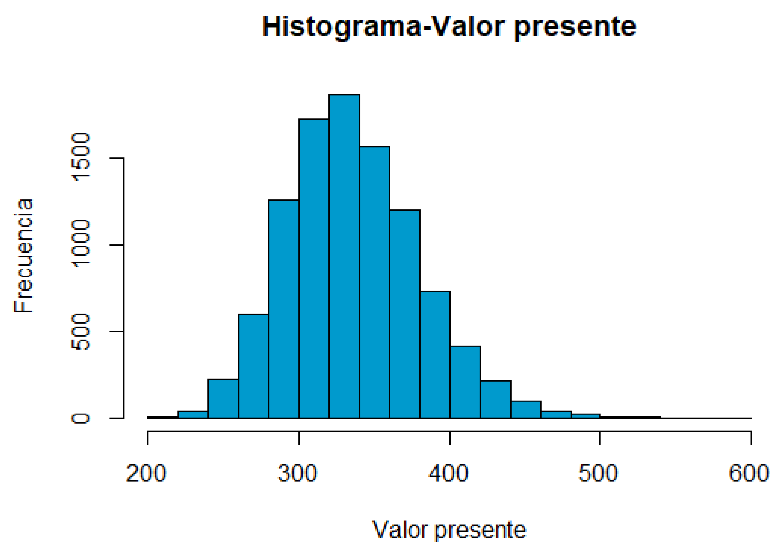


Figura 4: Histograma valor presente

Del gráfico anterior se observa que la frecuencia del valor presente se concentra al rededor de 350.

3) 25/25

c) En esta anualidad puede ocurrir que los saldos $F(k)$ se vuelvan cero antes de la fecha de terminación de la misma. Este evento se denomina default. En este caso algunos pagos finales no se realizan. Calcule el valor esperado del total de estos pagos no realizados mediante simulación. Sugerencia: simule muchas veces la ecuación de flujo (5.68), pág. 179, y en cada ciclo j guarde los valores de los pagos en los índices en los que el vector de saldos F tenga ceros. finalmente calcule la media...

El **valor esperado** del total de estos pagos no realizados obtenidos por simulación es de 73.60571. 78.10586

Implementando la ecuación de flujo dada en la ecuación 4, se obtiene en el programa estadístico R lo siguiente:

```
#---flujos de caja mensual---#

F=double(m*n) # flujo caja para anualidad cierta
S = F

F[1] = (1+im)*Cp - ck[1]
S[1] = exp.delta[1]*Cp - ck[1]
```

```
for( j in 2:(n*m) ){
  F[j] = (1+im)*F[j-1] - ck[j]
  S[j] = max(0,exp.delta[j]*S[j-1] - ck[j])
}

if (S[j-1]< ck[j]){
  Y[j]=sum(na.omit(ck[F==0]))
}

Y<-double()
for(i in 1:N){
  exp.delta = rlnorm(n*m, meanlog = delta.m, sdlog = sigma.m)
  F[1] = (1+im)*Cp - ck[1]
  S[1] = exp.delta[1]*Cp - ck[1]


  for( j in 2:(n*m) ){
    F[j] = (1+im)*F[j-1] - ck[j]
    S[j] = max(0,exp.delta[j]*S[j-1] - ck[j])
  }
  Y[i]=sum(na.omit(ck[S==0]))
}
Y[Y>0]

mean(Y[Y>0])

[1] 73.60571
```

estas dos lineas estan por fuera del ciclo for con j pero siguen usando j

4) 25/25

d) Calcule una estimación de la probabilidad del evento default con la muestra simulada de V como P(V > Cp)?. Justifique por qué. Sugerencia: use la ecuación (5.69), pág. 179 en el caso de tasas aleatorias. También, la propiedad (5.49c) pág. 170, dice cómo cambia el precio de una anualidad cuando decrece la tasa, aplíquelo a este problema con V el precio de la anualidad.

Se procede a ajustar la distribución log-normal para el valor presente, posterior a esto se realiza la prueba de bondad de ajuste, mediante el cual se concluye con una confianza del 95 % que los datos para el valor presente se distribuyen con una log-normal, dada por los siguientes parámetros encontrados por máxima verosimilitud:

$$\textbf{mean-log} = 5.50448860521925, \; \textbf{sd-log} = 0.11101274592841 \tag{5}$$

```
H=mledist(VP, "lnorm",
          start = list(meanlog = 5.7, sdlog=0.1204), lower = 0.001,
          upper = Inf)
(G.mle = H$estimate)
install.packages("truncgof_0.6-0.tar.gz", repos = NULL,
type = "source")

  meanlog     sdlog
5.7664569  0.1204478

Adn <- ad.test(VP, "lnorm", meanlog = G.mle[1], sdlog = G.mle[2])
Adn

Anderson-Darling test of goodness-of-fit
        Null hypothesis: log-normal distribution
        with parameters meanlog = 5.76645685352685,
        sdlog = 0.120447783224843
        Parameters assumed to be fixed

data:  VP
An = 0.55272, p-value = 0.6938

(1-plnorm(Cp, meanlog = mean(log(VP)), sdlog = sd(log(VP))))
[1] 0.5190492
```

El capital inicial calculado anteriormente fue de 331.2771, por el efecto de las tasas no alcanzó a ser suficiente para realizar todos los pagos, por esta razón se da default.

usando simulacion (ps = sum(VP > Cp)/10000)
[1] 0.506
> sum(ifelse(VP>Cp,1,0))/N
[1] 0.506