UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS

Distribuciones de supervivencia y Tablas de vida

Trabajo-Parcial 1

Brayan Enrique Pérez M.
Juan Manuel Sánchez Restrepo

Docente
MSc. Norman Diego Giraldo Gomez

22 de abril de 2022

Modelo Asignado: MB = Makeham-Beard

2.11. Problemas

2) Considere la fuerza de mortalidad estándar $\mu x + t$ del modelo asignado con los parámetros correspondientes. Asuma una fuerza de mortalidad sub-estándar según el modelo multiplicativo para una vida (x),(2.33), dada por

$$\mu^s_{x+t} = \theta \mu_{x+t}, \tag{1}$$

donde la constante $\theta > 1$ está dada. Denote por $T(x^s)$ su vida media residual. Asuma $x_1 = 40, x_2 = 50, t = 20, \theta = 1{,}7$.
Modelo Asignado: MB = Makeham-Beard

a) Defina la probabilidad de que al menos una de las dos vidas $(x_1), (x_2)$ esté con vida después de t años, como

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{x_1,x_2}} &= P((T(x_1) > t) \cup (T(x_2) > t)) && (2)\\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y. && (3) \end{aligned}$$

Encuentre $1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1^s}}$. Interprete.

a) Desarrollo
De (3) y de (2.34) de Notas de clase tenemos que

$$1 - {}_tp_{\overline{x_1,x_1^s}} = 1 - ({}_tp_x + {}_tp_x^\theta - {}_tp_x \cdot {}_tp_x^\theta). \tag{4}$$

Con el uso de R calculamos ${}_tp_x$ usando los comandos

```
> muxt.bm = function(t,x,pars){
+   a = pars[1]; b = pars[2]; k=pars[3]; r =pars[4];
+   (k+ a*exp(b*(x+t)) )/( 1 +a*r*exp(b*(x+t)) )
+ }
> tpx.bm = function(t,x,pars){
+   a = pars[1]; b = pars[2]; k=pars[3]; r =pars[4];
+   f=(1+a*r*exp(b*(x+t)))/(1+a*r)
+   p=exp(-k*(x+t))*f^((k*r-1)/(b*r))
+   return(p)
+ }
>
```

```
> pars = c(0.0000472040205302011,0.0904806255176657,0.000165083427559575,0.0296387819070861)
> x = 40
> t = 20
> (tpx.bm(t,x,pars))
[1] 0.879632
```

como sabemos que la probabilidad de supervivencia de una persona con mortalidad sub-estándar es igual a la probabilidad de una persona sana, de la misma edad y sexo, elevada a la potencia θ la cual es 1.7 para este caso. y tenemos que en efecto es la misma persona x_1 entonces tenemos

```
> theta = 1.7
> tpx_s <- (tpx.bm(t,x,pars))^theta
> tpx_s
[1] 0.8041031
```

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= 0{,}879632 \\
{}_tp_x^{\theta} &= 0{,}8041031
\end{aligned}
$$

Ahora reeemplazamos los valores en (4)

$$
\begin{aligned}
1-({}_tp_x + {}_tp_x^{\theta} - {}_tp_x \cdot {}_tp_x^{\theta}) &= 1-(0{,}879632+0{,}8041031-0{,}879632\cdot 0{,}8041031) \\
&= 0{,}02357972
\end{aligned}
$$

la probabilidad de que tanto (x_1) como (x_1^s) fallezcan antes de $t = 20$ años es 2,36 % aproximadamente.

b)Encuentre $p \in (0,1)$, el porcentaje en que se reduce la esperanza de vida de (x_1) con respecto a la vida (x_1^s), dado por $\mathring{e}_x(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$.

Dado los valores de ${}_tp_x$ y ${}_tp_x^{\theta}$ hallados en el punto 1, encontramos los valores de $\mathring{e}_x$ y $\mathring{e}_{x_1^s}$ respectivamente con la formula (2.71).

$$
\mathring{e}_x = \int_0^{110-40} {}_tp_x dt
$$

$$
\mathring{e}_{x_1^s} = \int_0^{110-40} {}_tp_x^{\theta} dt
$$

Resolvemos las anteriores integrales mediante integración númerica en R.

```
> f <- function(t)
+   {tpx.bm(t,x,pars)}
> (integrate(f,lower=0,upper=70)$value)
[1] 37.0299
```

```
> f <- function(t)
+   {tpx.bm(t,x,pars)^1.7}
> (integrate(f,lower=0,upper=70)$value)
[1] 31.17577
```

$$\mathring{e}_x = 37{,}0299$$

$$\mathring{e}_{x_1^s} = 31{,}17577$$

Reemplazamos estos valores en la ecuación $\mathring{e}_x(1-p) = \mathring{e}_{x_1^s}$ y hallamos p.

$$37{,}0299(1-p) = 31{,}17577$$

$$p = 0{,}15809$$

Por lo tanto el porcetanje en que se reduce la esperanza de vida de (x_1) con respecto a la vida (x_1^s) es 15,809 %

c) Suponga que S es una variable aleatoria distribuída Exponencial con parámetro $\mathring{e}_x$ es decir, $P(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$, independiente de T(x). Encuentre una expresión para

$$P(T(x) > S).$$

Evalue utilizando $x = x_1$. Sugerencia: use el teorema de probabilidad total. La variable S puede interpretarse como tiempo de la ocuurencia de una enfermedad; si $S > T(x)$, ésta no se presenta.

c) Desarrollo

Llamando $A = P(T(x) > S)$, el teorema de probabilidad total (TPT), (2.13), en caso continuo, permite desarrollar P(A).Nótese que se debe asumir que T(x),S son variables aleatorias independientes. Entonces, aplicando el Teorema de Probabilidad Total

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_0^{w-x} P(T(x) > S | T(x) = t) {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{w-x} P(S > t) {}_tp_x \mu_{x+t} dt \end{aligned}$$

Dado que:

$$P(S > t) = e^{-t/\mathring{e}_x}$$

La expresion buscada es

$$\int_0^{w-x} e^{-t/\mathring{e}_x} {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Ahora para evaluar tenemos $w = 110, t = 20, x = x_1 = 40$
Ademas por (2.71) sabemos que:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{w-x} {}_tp_x dt$$

Reemplazando los valores obtenemos:

$$\mathring{e}_x = \int_0^{110-40} {}_tp_x dt$$

En el caso de la integral anterior se resuelve mediante integración númerica en R como se muestra a continuación.

```
   > e_x = function(t,x,pars){
+     a = 0.0000472040205302011; b = 0.0904806255176657; k=0.000165083427559575; r =0.02963878
+     f=(1+a*r*exp(b*(40+t)))/(1+a*r)
+     p=exp(-k*(40+t))*f^((k*r-1)/(b*r))
+     return(p)}
> (integrate(e_x,lower=0,upper=70)$value)
[1] 37.0299
```

$$\mathring{e}_x = 37{,}0299$$

Por lo tanto

$$P(A) = \int_0^{110-40} e^{-t/37{,}0299} {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Nuevamente usando integración númerica con los siguientes comandos obtenemos

```
> P_A <- function(t)
+ {exp(-t/37.0299)*tpx.bm(t,x,pars)*muxt.bm(t,x,pars)}
> (integrate(P_A,lower=0,upper=70)$value)
[1] 0.3715853
```

$$P(A) = 0{,}3715853$$

d) Encuentre la probabilidad anterior $P(T(x) > S)$ usando simulación MonteCarlo.