Introducción al Análisis Multivariado

SEMANA-4: Distribución Normal Multivariada-I

Raúl Alberto Pérez

Universidad Nacional de Colombia

Escuela de Estadística

Semestre 2021-I

Oficna 43-216A

Correo: raperez1@unal.edu.co

Distribución Normal Multivariada

Normal Univariada: Una v.a $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su f.d.p es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)}$$

donde, $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.

NOTA: Notar que $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = (X-\mu)^t(\sigma^2)^{-1}(X-\mu)$, es el cuadrado de la distancia entre X y μ escalada por su desviación estándar.

Normal Multivariada

En el caso multivariado, se trabaja con la distancia de Mahalanobis entre el vector aleatorio $\underline{\mathbf{x}}$ y su vector de media poblacional $\underline{\mu}$, es decir, con:

$$(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}),$$

donde, $E[\underline{\mathbf{x}}] = \underline{\mu}$ y $Var[\underline{\mathbf{x}}] = \mathbf{\Sigma}$.

Definición 1 (f.d.p Normal) *.*

Sea $\underline{\mathbf{x}}$ un vector aleatorio p-dimensional, ie. $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^p$. Se dice que $\underline{\mathbf{x}}$ tiene una distribución aleatoria Normal-Multivariada (o normal p-variada), con vector de medias $\underline{\mu}$ y matriz de Var-Cov $\mathbf{\Sigma}$, lo cual se denota por:

$\underline{\mathbf{x}} \sim N_p(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma})$*, si su f.d.p multivariada está dada por:*

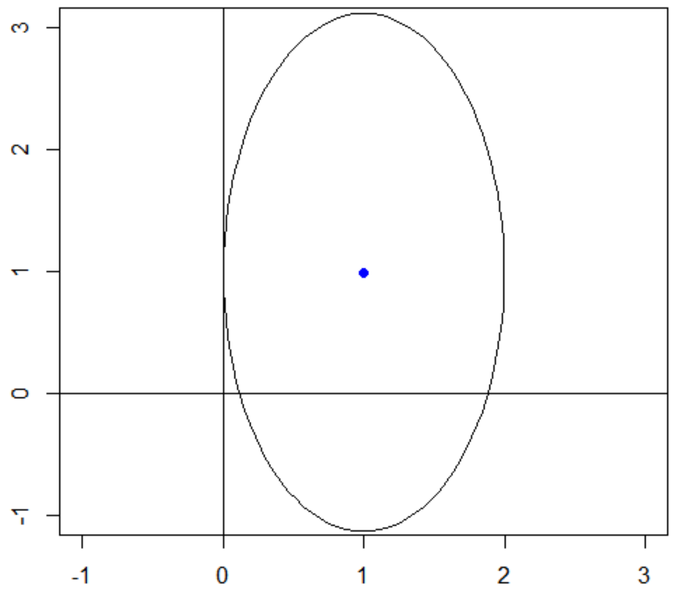
$$f(\underline{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \times |\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})}.$$

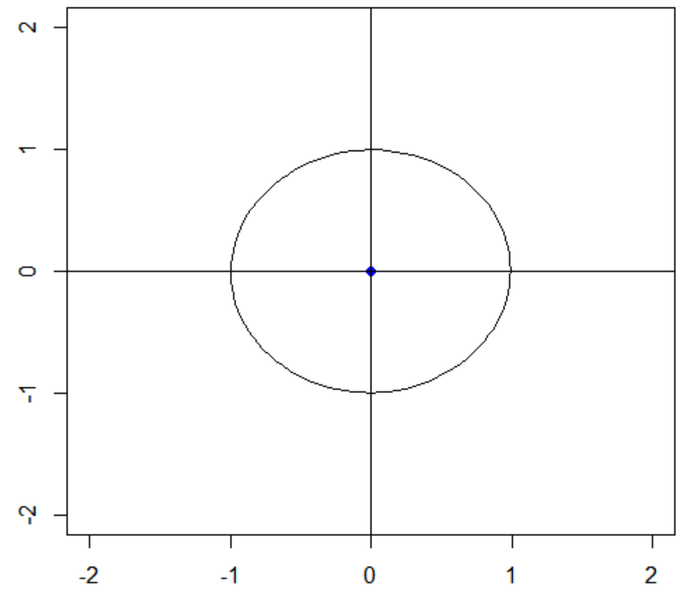
Algunos Aspectos Geométricos de la Normal Multivariada

La expresión $(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}) = c^2$, en la cual se basa el exponente de la f.d.p. normal multivariada, corresponde a un hiper-elipsoide, para culaquier contante $c > 0$, el cual está centrado en $\underline{\mu}$ y sus ejes están dados por: $\pm c\sqrt{\lambda_i}\underline{\mathbf{e}}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, donde.los λ_i-son los valores propios de $\mathbf{\Sigma}$ asociados a los respectivos vectores propios $\underline{\mathbf{e}}_i$.

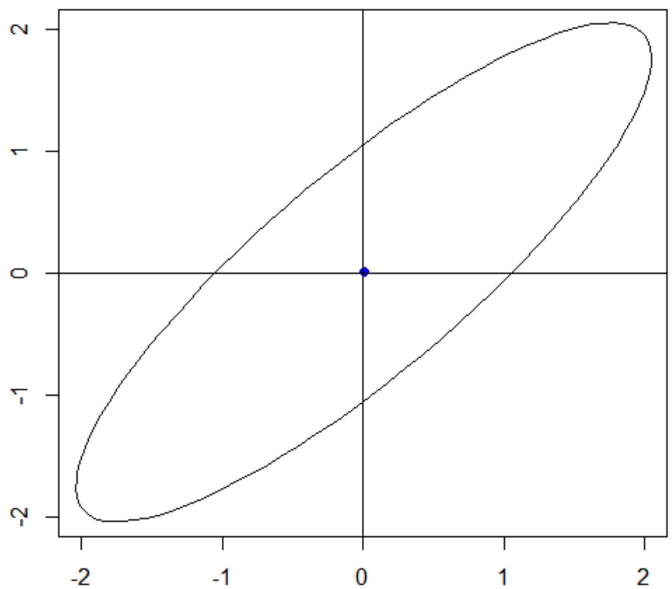
Para el caso de $p = 3$-un Elipsoide, para el caso de $p = 2$-una Elipse.

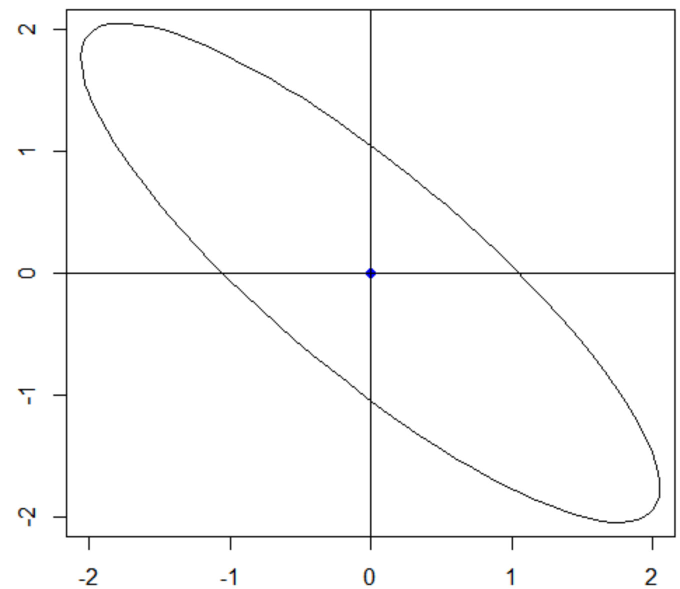
Ejemplo 1 (Aspecto Gráfico) .





$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.165 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.165 & 0 \\ 0 & 0.165 \end{bmatrix}$$





$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.6 \\ -0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2 (Aspecto Gráfico) *.*

Suponga que un vector aleatorio 2-dimensional $\underline{\mathbf{x}}$ tiene la siguiente matriz de Var-Cov,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{11}, \end{bmatrix}$$

es decir que: $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Graficar el elipsoide (la elipse) correspondiente bajo la restricción de que $\rho = Corr(X, Y) > 0$. Es decir, dos variables con igual varianza y correlación positiva.

Solución :

Los ejes de la elipse están dados por: $\pm c\sqrt{\lambda_i}\underline{\mathbf{e}_i}$, para $i = 1, 2$ y $c > 0$, es decir: $\pm c\sqrt{\lambda_1}\underline{\mathbf{e}_1}$ y $\pm c\sqrt{\lambda_2}\underline{\mathbf{e}_2}$.

Ahora se deben hallar los valores propios de $\mathbf{\Sigma}$, para lo cual se debe resolver la ecuación característica dada por:

$$|\mathbf{\Sigma} - \lambda I_2| = 0.$$

$$|\mathbf{\Sigma} - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma_{11} - \lambda)^2 - \sigma_{12}^2$$

$$= (\sigma_{11} - \lambda - \sigma_{12})(\sigma_{11} - \lambda + \sigma_{12})$$

Al hacer, $(\sigma_{11} - \lambda - \sigma_{12})(\sigma_{11} - \lambda + \sigma_{12}) = 0$ se obtiene que:

$$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} \text{ y que } \lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}.$$

Ahora los vectores propios asociados a estos valores propios se obtienen resolviendo la ecuación:

$$\mathbf{\Sigma}\underline{\mathbf{e}} = \lambda\underline{\mathbf{e}}$$

Por Ejemplo si,

$\underline{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$-es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$, entonces debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (\sigma_{11} + \sigma_{12}) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

de donde, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{12})e_1 \implies e_1 = e_2$$

$$\sigma_{12}e_1 + \sigma_{11}e_2 = (\sigma_{11} + \sigma_{12})e_2 \implies e_1 = e_2$$

El vector,

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad \text{normalizado está dado por:}$$

$$\frac{\underline{\mathbf{e}}_1}{\|\underline{\mathbf{e}}_1\|} = \frac{(e_1, e_1)}{\|(e_1, e_1)\|} = \frac{(e_1, e_1)}{\sqrt{2e_1^2}} = \left(\frac{e_1}{e_1\sqrt{2}}, \frac{e_1}{e_1\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

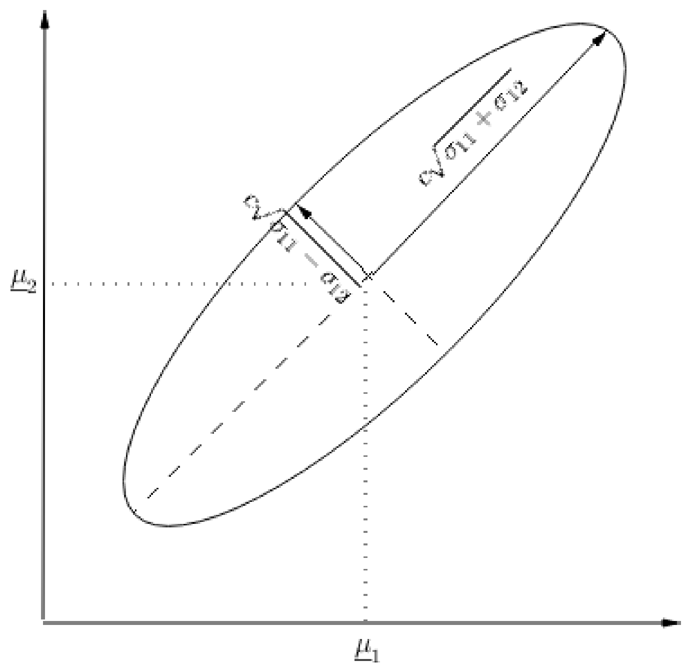
De manera análoga, se encuentra que el segundo vector-propio asociado al segundo valor-propio:

$\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ es:

$$\underline{\mathbf{e}}_2^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ahora, Como $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} > 0$, entonces $\sigma_{12} > 0$ y por lo tanto $\lambda_1 > \lambda_2$, pues: $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} > \sigma_{11} > \sigma_{11} - \sigma_{12} = \lambda_2$.

De lo anterior se concluye que si $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ y $\rho > 0$, entonces el eje mayor de la elipse está a lo largo de una línea cuya inclinación es de 45^o y que pasa por el punto $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$.



Ejemplo 3 *Suponga que el vector aleatorio $\underline{\mathbf{x}}^t = (X_1, X_2)$ tiene una distribución normal-bivariada, con vector de medias $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ y matriz de Var-Cov dada por $\mathbf{\Sigma}$. Halla la f.d.p multivariada de $\underline{\mathbf{x}}$.*

Solución: Recordemos que la f.d.p normal bi-variada está dada por:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = (2\pi)^{-\frac{2}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})}.$$

Para

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{\Sigma}|} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

con $|\mathbf{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$, pero $\sigma_{12} = \rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}$, es decir que

$|\mathbf{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \rho^2\sigma_{11}\sigma_{22} = \sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho^2)$, de donde:

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene que:

$$(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}) =$$

$$\frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)} \sigma_{22}(x_1-\mu_1)^2 + \sigma_{11}(x_2-\mu_2)^2$$

$$- 2\rho\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]$$

de donde

$$\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}) =$$

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]$$

y como $|\mathbf{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)$, entonces

$$|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} = \left[\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

por lo tanto,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2) = (2\pi)^{-\frac{2}{2}}|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})^t\mathbf{\Sigma}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})}$$

$$= (2\pi)^{-1}\left[\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Exp}\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]\right]$$

$$= (2\pi)^{-1}\left[\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)\right]^{-\frac{1}{2}} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2\right]$$

$$\text{Exp}\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right] \text{Exp}\left[\frac{\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)\left(\frac{x_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)\right]$$

Ahora, si las variables X_1 y X_2 tienen $\rho = 0$ entonces:

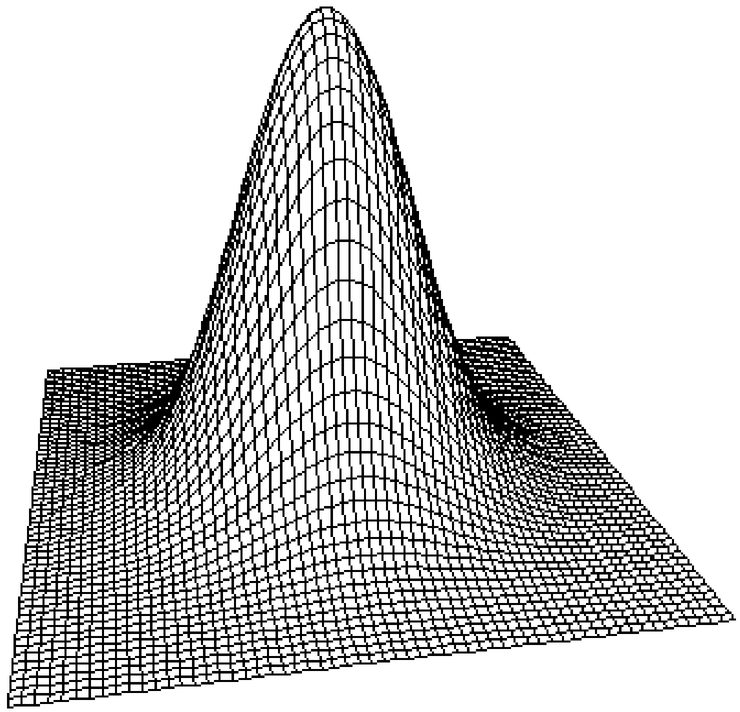
$$f(\underline{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2) = (2\pi)^{-1}|\mathbf{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1}(\underline{\mathbf{x}}-\underline{\mu})}$$

$$= (2\pi)^{-1}\left[\sigma_{11}\sigma_{22}\right]^{-\frac{1}{2}} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]$$

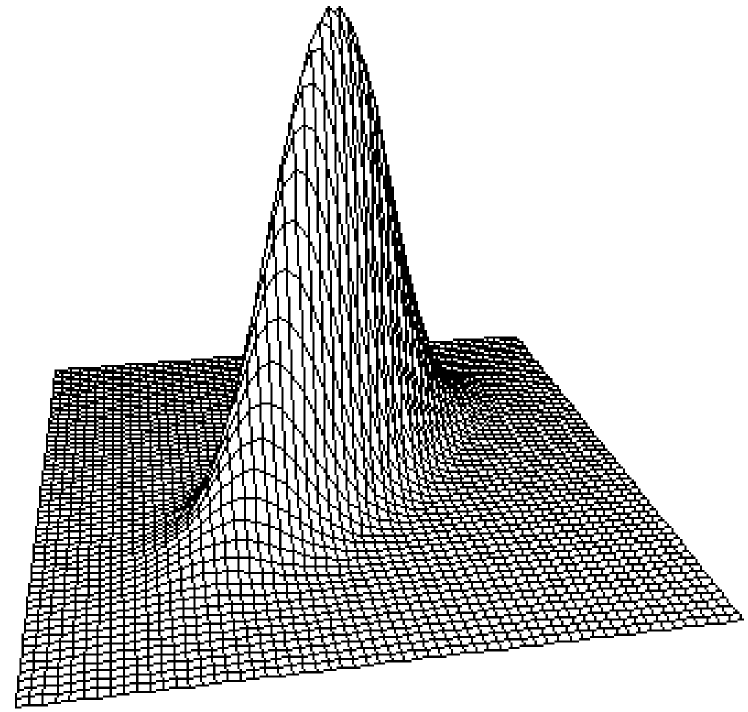
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{22}}} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right)^2\right]$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$$

con $f(x_1)$ la f.d.p de una normal uni-variada con media μ_1 y varianza σ_{11} y y $f(x_2)$ la f.d.p de una normal uni-variada con media μ_2 y varianza σ_{22}, ie., si $\rho = 0$ entonces X_1 y X_2 son independientes, pues $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$.



$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \;\; \rho = 0$

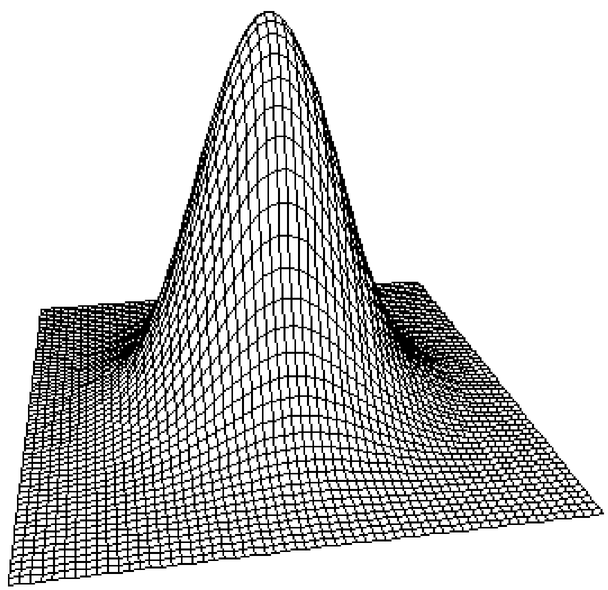


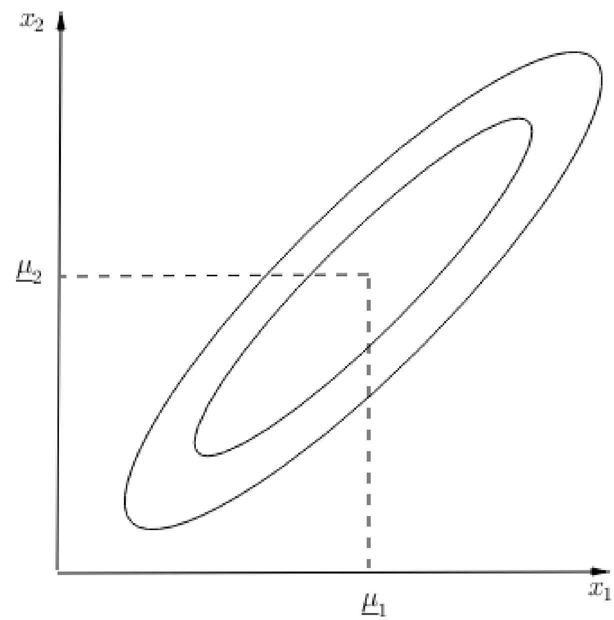
$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \;\; \rho = 0.750$

Notar que la presencia de correlación causa que la probabilidad se concentre a lo largo de una línea.

La densidad normal multivariada tiene un máximo valor cuando la distancia cuadrática.

$(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})^t \mathbf{\Sigma}^{-1} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu})$ es igual a cero, es decir, cuando $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mu}$. Por tanto el punto $\underline{\mu}$ es el punto de máxima densidad, o la moda, y también es la media, como se observa en la siguiente gráfica.





Contornos de probabilidad

Definición 2 (Función Generadora de Momentos (FGM)) *.*

Caso Univariado:

Si una v.a $X \sim N_1\left(\mu\ ,\ \sigma^2\right)$*, entonces la FGM de* X *es:*

$$M_X(t) := E\left[e^{tX}\right] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2},\ t \in \mathbb{R}$$

Definición 3 (Función Generadora de Momentos (FGM)) *.*

Caso Multvariado:

Si un vector aleatorio $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$*, entonces la FGM de* $\underline{X}$ *es:*

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) := E\left[e^{\underline{t}^t \underline{X}}\right] = e^{\underline{t}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{t}^t \mathbf{\Sigma} \underline{t}},\ \ \underline{t} \in \mathbb{R}^p$$

Propiedades de la distribución Normal Multivariada

1. Si $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, entonces

$$\underline{a}^t \underline{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_p X_p \sim N_1\left(\underline{a}^t \underline{\mu}\ ,\ \underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a}\right)$$

   Análogamente,

   si $\forall\ \underline{a} \in \mathbb{R}^p$: $\ \underline{a}^t \underline{X} \sim N_1\left(\underline{a}^t \underline{\mu}\ ,\ \underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a}\right)$ entonces $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\Sigma}\right)$,

   es decir:

$$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\Sigma}\right) \Longleftrightarrow \underline{a}^t \underline{X} \sim N_1\left(\underline{a}^t \underline{\mu}\ ,\ \underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a}\right)$$

   Luego, si $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}\ ,\ \Sigma)$ entonces cada $X_i \sim N_1\left(\mu_i\ ,\ \sigma_{ii}\right)$,

   lo cual se logra con $\underline{a} = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0, 0)^t$ con 1-en la posición i-ésima del vector $\underline{a}$ y $\underline{\mu}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ dados por:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Demostración de 1:

$$\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right) \Longleftrightarrow \underline{a}^t\underline{X} \sim N_1\left(\underline{a}^t\underline{\mu}\ ,\ \underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a}\right)$$

Sea la v.a $Y = \underline{a}^t\underline{X}$

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E\left[e^{t(\underline{a}^t\underline{X})}\right] = E\left[e^{(\underline{a}t)^t\underline{X}}\right]$$, pues $(\underline{a}t)^t = t^t\underline{a}^t = t\underline{a}^t$

$$= M_{\underline{X}}\left(\underline{a}t\right) = e^{(\underline{a}t)^t\underline{\mu}+\frac{1}{2}(\underline{a}t)^t\mathbf{\Sigma}(\underline{a}t)}$$

$$= e^{t^t\underline{a}^t\underline{\mu}+\frac{1}{2}t^t\underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a}t} = e^{t(\underline{a}^t\underline{\mu})+\frac{1}{2}t(\underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a})t}$$

$$= e^{t(\underline{a}^t\underline{\mu})+\frac{1}{2}(\underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a})t^2}$$

es decir, la FGM de $Y = \underline{a}^t\underline{X}$-corresponde a la FGM de una v.a normal univariada con media $\underline{a}^t\underline{\mu}$ y varianza $\underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a}$, es decir:

$$Y = \underline{a}^t\underline{X} \sim N_1\left(\underline{a}^t\underline{\mu}\ ,\ \underline{a}^t\mathbf{\Sigma}\underline{a}\right),\quad l.q.q.d$$

Ejemplo 4 *:*

Suponga que $\underline{\mathbf{x}} \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma})$ *y considere la combinación linea de las componentes de* $\underline{\mathbf{x}}$ *dada por:*

$$\underline{\mathbf{y}} = 2X_1 - X_2 + 3X_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}\ , \quad \textit{con}\ \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, ie.$$

$$E[\underline{\mathbf{y}}] = E[\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}] = \underline{a}^t \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 2\mu_1 - \mu_2 + 3\mu_3\ , \quad \textit{y}$$

$$Var[\underline{\mathbf{y}}] = Var[\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}] = \underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} - \sigma_{12} + 3\sigma_{13} & 2\sigma_{12} - \sigma_{22} + 3\sigma_{23} & 2\sigma_{13} - \sigma_{23} + 3\sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= 4\sigma_{11} - 2\sigma_{12} + 6\sigma_{13} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} - 3\sigma_{23} + 6\sigma_{13} - 3\sigma_{23} + 9\sigma_{33}$$

$$Var[\underline{\mathbf{y}}] = 4\sigma_{11} + \sigma_{22} + 9\sigma_{33} - 4\sigma_{12} + 12\sigma_{13} - 6\sigma_{23}$$

Es decir que:

$$\underline{\mathbf{y}} = \underline{a}^t \underline{X} = 2X_1 - X_2 + 3X_3 \sim N_1\left(\underline{a}^t \underline{\mu} \, , \, \underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a}\right), \quad \textit{con},$$

$$\underline{a}^t \underline{\mu} = 2\mu_1 - \mu_2 + 3\mu_3$$

$$\underline{a}^t \boldsymbol{\Sigma} \underline{a} = 4\sigma_{11} + \sigma_{22} + 9\sigma_{33} - 4\sigma_{12} + 12\sigma_{13} - 6\sigma_{23}$$

2. Si $\underline{\mathbf{x}} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$, entonces: $\underline{\mathbf{y}} = A\underline{X} \sim N_q\left(A\underline{\mu}\ ,\ A\mathbf{\Sigma}A^t\right)$

Demostración de 2:

$$M_{\underline{\mathbf{y}}}(\underline{t}) = E\left[e^{\underline{t}^t\underline{\mathbf{y}}}\right] = E\left[e^{\underline{t}^t(A\underline{\mathbf{x}})}\right] = E\left[e^{\underline{t}^tA\underline{\mathbf{x}}}\right]$$

$$= E\left[e^{(A^t\underline{t})^t\underline{\mathbf{x}}}\right]; \quad \text{pues, } (A^t\underline{t})^t = \underline{t}^tA$$

$$= M_{\underline{X}}\left(A^t\underline{t}\right) = e^{(A^t\underline{t})^t\underline{\mu}+\frac{1}{2}(A^t\underline{t})^t\mathbf{\Sigma}(A^t\underline{t})} \quad ;$$

$$\text{pues, } M_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{\underline{t}^t\underline{\mu}+\frac{1}{2}\underline{t}^t\mathbf{\Sigma}\underline{t}}$$

$$= e^{\underline{t}^tA\underline{\mu}+\frac{1}{2}\underline{t}^tA\mathbf{\Sigma}A^t\underline{t}}$$

lo cual corresponde a la FGM de un Vector aleatorio normal multivariado con vector de medias $A\underline{\mu}$ y matriz de varianzas-covarainzas $A\boldsymbol{\Sigma}A^t$, es decir:

$$\underline{\mathbf{y}} = A\underline{X} \sim N_q\Big(A\underline{\mu}\ ,\ A\boldsymbol{\Sigma}A^t\Big)\ ,\ \ l.q.q.d.$$

Ejemplo 5 .

Suponga que $\underline{\mathbf{x}} \sim N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$ *y considere el vector de combinaciones lineales de las variables de* $\underline{\mathbf{x}}$ *dado por:*

$$\underline{\mathbf{z}} = A\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\underline{\mathbf{z}} = A\underline{X} \sim N_q\left(A\underline{\mu}\ ,\ A\mathbf{\Sigma}A^t\right),\ \textit{donde}$$

$$A\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[Z_1] \\ \\ E[Z_2] \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{\Sigma}A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} & \sigma_{12} - \sigma_{22} & \sigma_{13} - \sigma_{23} \\ \\ \sigma_{12} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - \sigma_{23} & \sigma_{23} - \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} - \sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{13} + \sigma_{23} \\ \\ \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{22} + \sigma_{23} & \sigma_{22} - \sigma_{23} - \sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{\Sigma}A^t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{13} + \sigma_{23} \\ \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} - \sigma_{13} + \sigma_{23} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6 .

Suponga que $\underline{\mathbf{x}}' = (X_1, X_2, X_3) \sim N_3(\underline{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\Sigma})$*, donde:*

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ \ y\ \ \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar la distribución conjunta de probabilidad de:

$Z_1 = X_1 + X_2 + X_3$ *y* $Z_2 = X_1 - X_2$.

Sea

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = A\underline{\mathbf{x}}, \quad \textit{luego},$$

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \sim N_2\Big(A\underline{\mu}\ ,\ A\boldsymbol{\Sigma}A^t\Big),$$

donde:

$$A\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

y

$$A\mathbf{\Sigma}A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

de lo anterior, Z_1 *y* Z_2 *son independientes, pues* $Cov(Z_1, Z_2) = 0$ *y* Z_1 *y* Z_2 *son distribuidas normales uni-variadas.*

3. Sea $\underline{X} \sim N_p\Big(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\Big)$ y sean los vectores y matrices particionadas dadas por:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} \ ,\ \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \ \text{y}\ \mathbf{\Sigma}_{p\times p} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_q\Big(\underline{\mu}^{(1)}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{11}\Big)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_{p-q}\Big(\underline{\mu}^{(2)}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{22}\Big).$$

La anterior propiedad también se puede enunciar como sigue:

Todos los subconjuntos de variables de $\underline{\mathbf{x}}$ tienen distribución normal, sea univariada o multivariada.

Demostración de 3:

Para esto se usará la siguiente matriz particionada:

$$A_{q\times p} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ q & \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_q & \vdots & \mathbf{O} \end{array}\right]_{q\times p} \end{array} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_q & \vdots & \mathbf{O} \end{array}\right]_{q\times p} \quad , \quad \text{luego,}$$

$$A\underline{X} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_q & \vdots & \mathbf{O} \end{array}\right]_{q\times p} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix}_{p\times 1}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{I}_q\,\underline{\mathbf{x}}^{(1)} & + & \mathbf{O}\,\underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{array}\right]_{q\times 1}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_q\,\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \end{array}\right]_{q\times 1}$$

$$A\underline{X} = \left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \end{array}\right]_{q\times 1} = \underline{\mathbf{x}}^{(1)}$$

de donde, usando la propiedad (2) se tiene que:

$$A\underline{X} = \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_q(A\underline{\mu}\ ,\ A\boldsymbol{\Sigma}A^t)$$

Pero,

$$A\underline{\mu} = \left[\ \mathbf{I}_q \quad \vdots \quad \mathbf{O}\ \right] \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\ \mathbf{I}_q\ \underline{\mu}^{(1)} \quad + \quad \mathbf{O}\ \underline{\mu}^{(2)}\ \right]$$

$$= \left[\ \mathbf{I}_q\ \underline{\mu}^{(1)}\ \right]$$

$$A\underline{\mu} = \left[\ \underline{\mu}^{(1)}\ \right]_{q \times 1} = \underline{\mu}^{(1)}$$

$$A\mathbf{\Sigma}A^t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & \vdots & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q \\ \cdots \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q\,\mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{O}\,\mathbf{\Sigma}_{21} & \vdots & \mathbf{I}_q\,\mathbf{\Sigma}_{12} + \mathbf{O}\,\mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q \\ \cdots \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{\Sigma}_{12} + \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q \\ \cdots \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \vdots & \mathbf{\Sigma}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q \\ \cdots \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11}\mathbf{I}_q + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_{11}$$

Es decir que:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_q\left(A\underline{\mu}\ ,\ A\mathbf{\Sigma}A^t\right)$$

$$N_q\left(\underline{\mu}^{(1)}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{11}\right)\ ,\quad l.q.q.d.$$

De manera similar, se demuestra que: (TAREA):

$$\underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_q\left(\underline{\mu}^{(2)}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{22}\right),$$

en este caso usando la matriz particionada dada por:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & p-q \end{array} \\ p-q & \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{O} & \mathbf{I}_{p-q} \end{array}\right]$$

Ejemplo 7 . *Sea* $\underline{\mathbf{x}} \sim N_5\left(\underline{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\Sigma}\right)$, *hallar la distribución de:* $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$.

Sean, $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\mu}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$ *y* $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$

Asumiendo que $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mu}$ *y* $\boldsymbol{\Sigma}$ *son particionados como sigue:*

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ \cdots \\ X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \\ \cdots \\ \mu_1 \\ \mu_3 \\ \mu_5 \end{bmatrix} \ y\ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} & \vdots & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{25} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} & \vdots & \sigma_{14} & \sigma_{34} & \sigma_{45} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{12} & \sigma_{14} & \vdots & \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{34} & \vdots & \sigma_{13} & \sigma_{33} & \sigma_{35} \\ \sigma_{25} & \sigma_{45} & \vdots & \sigma_{15} & \sigma_{35} & \sigma_{55} \end{bmatrix}$$

es decir : $\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix}\ ,\ \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$ *y* $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & | & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$

luego : $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_2\left(\underline{\mu}^{(1)}\ ,\ \boldsymbol{\Sigma}_{11}\right) \sim N_2\left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}\right)$.

4. (a) Si $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ y $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ son estadísticamente independientes, entonces $\mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{\Sigma}_{21}^t = O$.

(b)

$$\text{Si,} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_p \left[\begin{pmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right]$$

entonces,

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \perp \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \quad Sii \quad \mathbf{\Sigma}_{12} = \mathbf{\Sigma}_{21}^t = O.$$

Ejemplo 8 *Suponga que* $\underline{\mathbf{x}} \sim N_3\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$, *con*

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Son las variables X_1 y X_2 independientes?

Rta. NO, porque $\sigma_{12} = 1 \neq 0$.

¿Son los siguientes vectores aleatorios independientes?:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} X_3 \end{bmatrix}$$

.

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \vdots & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \vdots & \sigma_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \vdots & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{luego para}: \quad \underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \ \text{y} \ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_3 \end{bmatrix}$$

$$\textit{se tiene:} \quad \mathbf{\Sigma}_{12} = Cov\left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, si son independientes.

(c) Si $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \perp \underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ y

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_q\left(\underline{\mu}^{(1)}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{11}\right) \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_q\left(\underline{\mu}^{(2)}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{22}\right)$$

entonces,

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_p\left[\begin{pmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{pmatrix}\,,\ \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & O \\ -- & -- & -- \\ O & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Además:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} + \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_k\left(\underline{\mu}^{(1)} + \underline{\mu}^{(2)}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{\Sigma}_{22}\right), \quad \text{si} \ \ q = p - q = k$$

Demostración de 4(c): Para esto se usarán la FGM de un vector normal-multivariado. Sean

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \perp \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \;\; , \;\; \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_q\left(\underline{\mu}^{(1)} \;\; , \;\; \mathbf{\Sigma}_{11}\right) \;\; \text{y} \;\; \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_q\left(\underline{\mu}^{(2)} \; , \; \mathbf{\Sigma}_{22}\right)$$

$$M_{\underline{\mathbf{x}}^{(1)}+\underline{\mathbf{x}}^{(2)}}(\underline{t}) := E\left[e^{\underline{t}^t\left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}+\underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right)}\right] = E\left[e^{\underline{t}^t\underline{\mathbf{x}}^{(1)}}e^{\underline{t}^t\underline{\mathbf{x}}^{(2)})}\right]$$

$$= E\left[e^{\underline{t}^t\underline{\mathbf{x}}^{(1)}}\right] E\left[e^{\underline{t}^t\underline{\mathbf{x}}^{(2)})}\right], \quad \text{pues, } \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \perp \underline{\mathbf{x}}^{(2)}$$

$$= M_{\underline{\mathbf{x}}^{(1)}}(\underline{t})M_{\underline{\mathbf{x}}^{(2)}}(\underline{t}) = e^{\underline{t}^t\underline{\mu}^{(1)}+\frac{1}{2}\underline{t}^t\mathbf{\Sigma}_{11}\underline{t}}e^{\underline{t}^t\underline{\mu}^{(2)}+\frac{1}{2}\underline{t}^t\mathbf{\Sigma}_{22}\underline{t}}$$

$$= e^{\underline{t}^t\underline{\mu}^{(1)}+\underline{t}^t\underline{\mu}^{(2)}+\frac{1}{2}\underline{t}^t\mathbf{\Sigma}_{11}\underline{t}+\frac{1}{2}\underline{t}^t\mathbf{\Sigma}_{22}\underline{t}} = e^{\underline{t}^t\left(\underline{\mu}^{(1)}+\underline{\mu}^{(2)}\right)+\frac{1}{2}\underline{t}^t\left(\mathbf{\Sigma}_{11}+\mathbf{\Sigma}_{22}\right)\underline{t}}$$

lo cual corresponde a la FGM de un vector aleatorio normal multivariado con vector de medias $\underline{\mu}^{(1)} + \underline{\mu}^{(2)}$ y matriz de varianzas covarianzas $\mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{\Sigma}_{22}$,

es decir:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} + \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_k\Big(\underline{\mu}^{(1)} + \underline{\mu}^{(2)}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{11} + \mathbf{\Sigma}_{22}\Big)\ , \quad l.q.q.d$$

Demostración de 5(a) y 5(b); (Ejercicio 4.14 del libro de Johnson, sixth edition)).

5. Si $\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_p \left[\begin{pmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right]$, con $|\mathbf{\Sigma}_{22}| > 0$,

entonces, la distribución condicional de $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ dado $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ esta dada por:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \Big| \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \sim N_q \left[\underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \right) , \ \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} \right]$$

es decir:

$$E\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \Big| \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \right] = \underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \right)$$

y

$$Var\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \Big| \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \underline{\mathbf{x}}^{(2)}] \right] = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$$

De manera similar, si $|\mathbf{\Sigma}_{11}| > 0$, entonces:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(2)} \Big| \underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \sim N_{p-q} \left[\underline{\mu}^{(2)} + \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1} \left(\underline{\mathbf{x}}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} \right) , \ \mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12} \right]$$

Demostración de (5): Considere la matriz $p \times p$ dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{q\times q} & | & -\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}{}_{q\times(p-q)} \\ ------ & -- & ---------- \\ \mathbf{0}_{(p-q)\times q} & | & \mathbf{I}_{(p-q)\times(p-q)} \end{bmatrix}_{p\times p}$$

teniendo en cuenta que el siguiente vector aleatorio:

$$(\underline{X} - \underline{\mu}) \sim N_p\Big(\underline{0}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\Big)$$

se tiene que:

$$\underline{Z}_{p\times 1} = \mathbf{A}(\underline{X} - \underline{\mu}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & -\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \\ ------ & -- & ------ \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) \\ \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_p\Big(\underline{\mu}_{\underline{Z}}\ ,\ \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\Big)$$

con, $\quad \underline{\mu}_{\underline{Z}} = \mathbf{A}\underline{0} = \underline{0} \quad y \quad \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}} = \mathbf{A\Sigma A}^t$

$$\mathbf{A\Sigma A}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & -\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} \\ ------ & -- & ----- \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{A}^t$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{0} \\ ----- & -- & ----- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & \mathbf{0} \\ ---- & -- & ---- \\ -\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{0} \\ ----- & -- & ----- \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix},$$ es decir que:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) \\ \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} \sim N_p\left(\underline{\mu}_{\underline{Z}}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\right) = N_p\left(\underline{0}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\right)$$

de lo anterior se tiene que como los vectores aleatorios:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) \quad \text{y} \quad \underline{Z}_2 = \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}$$

tienen matriz de var-cov $\mathbf{0}$, entonces son independientes (por (4.b)), y además se cumple que:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left[\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right] \sim N_p\left(\underline{\mathbf{0}}\,,\ \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\right)$$

por lo tanto, la distribución condicional de:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) \quad \text{dado} \quad \underline{Z}_2 = \underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}$$

es igual a la marginal de:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}^{(1)} - \underline{\mu}^{(1)} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right)$$

cuando $\underline{X}^{(2)}$ toma un valor fijo, es decir,

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \mid \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \underline{X}^{(2)} \sim N_q\left[\underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right),\ \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}\right]$$

Ejemplo 9 *Distribución condicional de una Normal-Bivariada.*

Sea $\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \sigma_{11} & | & \sigma_{12} \\ -- & -- & -- \\ \sigma_{21} & | & \sigma_{22} \end{pmatrix} \right]$, con $\sigma_{22} > 0$,

luego, la distribución condicional de $X_1 \Big| X_2$ esta dada por:

$$X_1 \,\Big|\, X_2 = x_2 \sim N_1 \left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_2 - \mu_2) \, , \; \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\sigma_{21} \right)$$

pues,

$$\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} = \sigma_{12}\sigma_{22}^{-1} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \, , \quad \text{y}$$

$$\mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} = \sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21} = \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\sigma_{21}$$

y como, $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}}$, es decir: $\sqrt{\sigma_{11}}\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{22}}}$, luego,

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} = \frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}\rho_{12} \quad \text{y} \quad \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} = \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}\rho_{12}^2}{\sigma_{22}} = \sigma_{11}\rho_{12}^2$$

y

$$\sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\sigma_{21} = \sigma_{11}\left[1 - \rho_{12}^2\right]$$

es decir:

$$X_1 \,\Big|\, X_2 = x_2 \sim N_1\left(\mu_1 + \frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}\rho_{12}(x_2 - \mu_2)\ ,\ \sigma_{11}\left[1 - \rho_{12}^2\right]\right)$$

$$\sim N_1\left(\underbrace{\mu_1 - \frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}\rho_{12}\mu_2}_{a_0} + \underbrace{\frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}\rho_{12}}_{b}x_2\ ,\ \sigma_{11}\left[1 - \rho_{12}^2\right]\right)$$

$$X_1 \,\Big|\, X_2 = x_2 \sim N_1\Big(a_0 + bx_2\ ,\ \sigma_{11}\left[1 - \rho_{12}^2\right]\Big)$$

de donde se observa que la media de la distribución condicional de $X_1 \mid X_2 = x_2$, corresponde a la ecuación de una línea recta con intecepto a_0 y pendiente b, ie. la ecuación del modelo de regresión lineal de X_1 v.s X_2 .

Observaciones:

- En regresión multivariada, la media condicional

$$\underline{\mu}_{1.2} = E\left[\underline{X}^{(1)} \,\middle|\, \underline{X}^{(2)}\right]$$

  es llamada la curva de regresión.

- Es decir, la curva de regresión en la normal multivariada,

$$\underline{\mu}_{1.2} = E\left[\underline{X}^{(1)} \,\middle|\, \underline{X}^{(2)}\right],$$

se puede escribir como:

$$E\left[\underline{X}^{(1)} \,\middle|\, \underline{X}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} E[X_1 \big| X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \\ \\ E[X_2 \big| X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ E[X_q \big| X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \end{bmatrix} = \underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right)$$

Ahora con, $\mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{1,q+1} & \beta_{1,q+2} & \cdots & \beta_{1,p} \\ \\ \beta_{2,q+1} & \beta_{2,q+2} & \cdots & \beta_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q,q+1} & \beta_{q,q+2} & \cdots & \beta_{q,p} \end{bmatrix}$

entonces, la curva de regresión se puede escribir como:

$$E\left[\underline{X}^{(1)} \,\middle|\, \underline{X}^{(2)}\right] = \underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{X}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} E[X_1|X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \\ E[X_2|X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ E[X_q|X_{q+1}, X_{q+2}, \cdots, X_p] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{1,q+1} & \beta_{1,q+2} & \cdots & \beta_{1,p} \\ \beta_{2,q+1} & \beta_{2,q+2} & \cdots & \beta_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{q,q+1} & \beta_{q,q+2} & \cdots & \beta_{q,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{q+1} - \mu_{q+1} \\ X_{q+2} - \mu_{q+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix}$$

$$E\left[\underline{X}^{(1)} \,\middle|\, \underline{X}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} \mu_1 + \beta_{1,q+1}(X_{q+1} - \mu_{q+1}) + \cdots\cdots + \beta_{1,p}(X_p - \mu_p) \\ \\ \mu_2 + \beta_{2,q+1}(X_{q+1} - \mu_{q+1}) + \cdots\cdots + \beta_{2,p}(X_p - \mu_p) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mu_q + \beta_{q,q+1}(X_{q+1} - \mu_{q+1}) + \cdots\cdots + \beta_{q,p}(X_p - \mu_p) \end{bmatrix}$$

lo anterior implica que, cuando la distribución conjunta de las variables en una regresión (dependientes e independientes) es normal multivariada, todas las curvas de regresión son lineales.

- La matriz de var-cov condicional

$$\mathbf{\Sigma}_{1.2} = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$$

es constante pues no depende de los valores de las variables condicionantes. Por tanto, la curva de regresión es homocedástica.

Ejemplo 10 *Suponga que* $\underline{\mathbf{x}}' = \left(X_1, X_2, X_3\right) \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$,

donde:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ ,\ \text{ y }\ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar la distribución condicional de: $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \;\Big|\; \underline{\mathbf{x}}^{(2)}$, donde:

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \text{ y } \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_3 \end{bmatrix}$$

La distribución condicional de: $\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \;\Big|\; \underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ es normal bi-variada con vector de medias:

$$E\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \;\Big|\; \underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right] = \underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right)$$

y matriz de var-cov dada por:

$$Var\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \;\Big|\; \underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right] = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21}$$

Haciendo,

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \cdots \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \cdots \\ \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & | & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ -- & -- & -- \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & | & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \cdots & & \cdots \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \vdots & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

luego,

$$E\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \,\middle|\, \underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right] = \underline{\mu}^{(1)} + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\underline{\mathbf{x}}^{(2)} - \underline{\mu}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{1}\left(x_3 - 2\right) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$Var\left[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} \,\middle|\, \underline{\mathbf{x}}^{(2)}\right] = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Sea $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$. Si $|\mathbf{\Sigma}| > 0$, entonces:

$$\underline{\mathbf{z}} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \sim N_p\left(\underline{0}\ ,\ \mathbf{I}_p\right),$$

ie, $\underline{\mathbf{z}}$-tiene una distribución normal-multivariada estándar.

Demostración de la propiedad (6): Estudiarla del libro de Jonhson.

7. Sea $\underline{X} \sim N_p\left(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma}\right)$, con $|\mathbf{\Sigma}| > 0$.

   (a) $\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)^t \mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \sim \chi^2_p$

   (b) La distribución $N_p(\underline{\mu}\ ,\ \mathbf{\Sigma})$-asigna probabilidad de $(1-\alpha)100\%$ al elipsoide determinado por:

$$\left\{\underline{\mathbf{x}}\ :\ \left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}\right)^t \mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mu}\right) \leq \chi^2_{\alpha;p}\right\}$$

   donde, $\chi^2_{\alpha;p}$-es el percentil superior α de la distribución χ^2_p.

Demostración: (a).

Sea

$$\underline{Z} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right),$$

donde $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ es la matriz inversa de $\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Gamma}^t$ (llamada la matriz raíz cuadrada positiva de la matriz $\mathbf{\Sigma}$).

entonces

$$\underline{Z} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \sim N_p\left(\underline{0}\ ,\ \mathbf{I}_p\right) \quad (Resultado - 6)$$

luego, Las marginales de las variables del vector $\underline{Z}$ son $N(0,1)$ e independientes.

Ahora, se Considera la variable:

$$\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)^t \mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) = \left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)^t \mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)$$

$$= \left(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})\right)^t \left(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})\right) = \underline{Z}^t\underline{Z} = \sum_{i=1}^{p} Z_i^2 \sim \chi^2_{(p)}$$

Observaciones:

- Por el teorema de descomposición espectral de la matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{\Sigma}$ se tiene que:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}\mathbf{\Gamma}^t$$

  donde $\mathbf{\Gamma}$ es una matriz ortogonal con los vectores propios de $\mathbf{\Sigma}$ como columnas ($\mathbf{\Gamma}^T\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$), y $\mathbf{\Delta}$ es una matriz diagonal con los valores propios de $\mathbf{\Sigma}$ en su diagonal. Entonces,

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}\mathbf{\Gamma}^t = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Gamma}^t = \left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Gamma}^t\right)\left(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Gamma}^t\right) = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{\Sigma}^{1/2}$$

  donde $\mathbf{\Delta}^{1/2}$ es una matriz diagonal con la raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de $\mathbf{\Delta}$ en su diagonal.

  A $\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Delta}^{1/2}\mathbf{\Gamma}^t$ se le llama la matriz raíz cuadrada positiva de la matriz $\mathbf{\Sigma}$.

- El empleo de la matriz $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ sobre el vector aleatorio $(\underline{X} - \underline{\mu})$, estandariza todas las variables y elimina los efectos de correlación entre ellas.

8. Sean $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{x}}_n$, vectores aleatorios p-variados mutuamente-independientes tales que:

$$\underline{\mathbf{x}}_i \sim N_p\Big(\underline{\mu}_i\ ,\ \mathbf{\Sigma}\Big)\ ,\ \ \text{para}\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\mathbf{x}}_i = c_1 \underline{\mathbf{x}}_1 + c_2 \underline{\mathbf{x}}_2 + \cdots + c_n \underline{\mathbf{x}}_n$$

$$\sim N_p\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\mu}_i\ ,\ \left(\sum^{n} c_i^2\right)\mathbf{\Sigma}\right]$$

$$\underline{\mathbf{v}}_1 \sim N_p\Big(c_1\underline{\mu}_1 + c_2\underline{\mu}_2 + \cdots + c_n\underline{\mu}_n\ ,\ [c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2]\mathbf{\Sigma}\Big)$$

además si, $\underline{\mathbf{v}}_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i \underline{\mathbf{x}}_i = b_1\underline{\mathbf{x}}_1 + b_2\underline{\mathbf{x}}_2 + \cdots + b_n\underline{\mathbf{x}}_n$

entonces: $\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} \sim N_{2p}\left[\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_i\underline{\mu}_i \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^n b_i\underline{\mu}_i \end{pmatrix} \;,\; \mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{v}}} \right]$, donde

$$\mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{v}}} = Var(\underline{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\underline{c}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{b}\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}$$

y además, $\underline{\mathbf{v}}_1 \perp \underline{\mathbf{v}}_2$ si $\underline{b}^t\underline{c} = \sum_{i=1}^n b_ic_i = 0.$

Demostración:

Considere el vector $np \times 1$ dado por:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}_{np\times 1} , \quad \text{recuerde que: } \underset{p\times 1}{\underline{\mathbf{x}}_i}$$

por el resultado (4.c) se tiene que:

$$\underline{Z} \sim N_{np}\Big(\underline{\mu}_{\underline{Z}} \ , \ \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\Big)$$

donde,

$$\underline{\mu}_{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mu}_n \end{bmatrix}_{np\times 1} \quad \text{y} \quad \mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}_{np\times np}$$

1. para la parte (a):

   Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \Big[c_1\mathbf{I} \;\mid\; c_2\mathbf{I} \;\mid\; \cdots \;\mid\; c_n\mathbf{I}\Big]_{p\times np}$$

   donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad $p \times p$, entonces

$$\mathbf{A}\underline{Z} = \Big[c_1\mathbf{I} \;\mid\; c_2\mathbf{I} \;\mid\; \cdots \;\mid\; c_n\mathbf{I}\Big] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2 + \cdots + c_n\underline{\mathbf{x}}_n = \underline{\mathbf{v}}_1$$

   y por el resultado o propiedad (2) se tiene que:

$$\mathbf{A}\underline{Z} = \underline{\mathbf{v}}_1 \sim N_p\Big(\mathbf{A}\underline{\mu}_{\underline{Z}}\,,\; \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\underline{Z}}\mathbf{A}^t\Big)$$

donde, $\quad \mathbf{A}\underline{\mu}_{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mu}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i\underline{\mu}_i, \quad y$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\underline{Z}}\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\boldsymbol{\Sigma} & c_2\boldsymbol{\Sigma} & \cdots & c_n\boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n\mathbf{I} \end{bmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right) \boldsymbol{\Sigma}\,, \quad \text{es decir,}$$

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{X}_i \sim N_p \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\underline{\mu}_i\,, \; \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right) \boldsymbol{\Sigma} \right]\,, \quad l.q.q.d$$

2. para la parte (b):

Sea

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \\ \\ b_1\mathbf{I} & | & b_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}_{2p\times np}$$

entonces,

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2 + \cdots + c_n\underline{\mathbf{x}}_n \\ \\ b_1\underline{\mathbf{x}}_1 + b_2\underline{\mathbf{x}}_2 + \cdots + b_n\underline{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \\ \\ b_1\mathbf{I} & | & b_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \mathrm{B}\underline{Z}$$

y del resultado (2) nuevamente se tiene que:

$$\mathbf{B}\underline{Z} \sim N_{2p}\left(\mathbf{B}\underline{\mu}_{\underline{Z}}\ ,\ \mathbf{B}\mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\mathbf{B}^t\right)$$

donde,

$$\mathbf{B}\underline{\mu}_{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \\ \\ b_1\mathbf{I} & | & b_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mu}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{=1}^{n} c_i\underline{\mu}_i \\ \\ ------ \\ \\ \sum\limits_{=1}^{n} b_i\underline{\mu}_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{\Sigma}_{\underline{Z}}\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & | & c_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{I} \\ \\ b_1\mathbf{I} & | & b_2\mathbf{I} & | & \cdots & | & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & b_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ c_n\mathbf{I} & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{v}}_1,\underline{\mathbf{v}}_2} = \begin{bmatrix} c_1\mathbf{\Sigma} & | & c_2\mathbf{\Sigma} & | & \cdots & | & c_n\mathbf{\Sigma} \\ \\ b_1\mathbf{\Sigma} & | & b_2\mathbf{\Sigma} & | & \cdots & | & b_n\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\mathbf{I} & b_1\mathbf{I} \\ c_2\mathbf{I} & b_2\mathbf{I} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ c_n\mathbf{I} & b_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_i c_i\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\sum_{i=1}^n b_i c_i\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{c}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{b}\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}_{2p\times 2p}$$

es decir que,

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} \sim N_{2p}\left[\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_i\underline{\mu}_i \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^n b_i\underline{\mu}_i \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{v}}}\right]$$

3. para la parte (c): Evidente por resultado (4.b).

Ejemplo 11 *Suponga que* $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2, \underline{\mathbf{x}}_3, \underline{\mathbf{x}}_4$*, son vectores aleatorios* 3*-variados independientes e idénticamente distribuidos, ie.* $\underline{\mathbf{x}}_i = \left(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}\right)^t$ *para* $i = 1, 2, 3, 4$*, con:*

$$\underline{\mu} = E[\underline{\mathbf{x}}_i] = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad \mathbf{\Sigma} = Var[\underline{\mathbf{x}}_i] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Hallar la media y varianza de: $\underline{a}^t\underline{\mathbf{x}}_1 = a_1 X_{11} + a_2 X_{12} + a_3 X_{13}$.

2. Hallar la media y varianza de: $\frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4$

3. Hallar la media y varianza de:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4 \\ \\ \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{x}}_3 - 3\underline{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix}$$

Solución:

1. La distribución de:

$$\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}_1 = a_1 X_{11} + a_2 X_{12} + a_3 X_{13}.$$

La cual es una combinación lineal de las componentes de un vector aleatorio, ie. una c.l de variables, y por lo tanto es una variable aleatoria, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} E[\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}_1] &= E\Big[a_1 X_{11} + a_2 X_{12} + a_3 X_{13}\Big] \\ &= a_1 E[X_{11}] + a_2 E[X_{12}] + a_3 E[X_{13}] \\ &= 3a_1 - a_2 + a_3 \end{aligned}$$

$$Var[\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}_1] = Var\Big[a_1 X_{11} + a_2 X_{12} + a_3 X_{13}\Big]$$

$$= a_1^2 Var[X_{11}] + a_2^2 Var[X_{12}] + a_3^2 Var[X_{13}]$$

$$+ 2a_1 a_2 Cov(X_{11}, X_{12}) + 2a_1 a_3 Cov(X_{11}, X_{13}) + 2a_2 a_3 Cov(X_{12}, X_{13})$$

$$= 3a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2 - 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3$$

$$Var[\underline{a}^t \underline{\mathbf{x}}_1] = \underline{a}^t \mathbf{\Sigma} \underline{a}.$$

2. La media y varianza de:

$$\frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4$$

En este caso se tiene un combinación lineal de vectores aleatorios, lo cual a su vez es un vector aleatorio, por lo tanto:

$$E\left[\frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4\right] = \frac{1}{2}E[\underline{\mathbf{x}}_1] + \frac{1}{2}E[\underline{\mathbf{x}}_2] + \frac{1}{2}E[\underline{\mathbf{x}}_3] + c_4 E[\underline{\mathbf{x}}_4]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\underline{\mu}_i = \frac{1}{2}\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{\mu}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\underline{\mu}$$

$$= 2\underline{\mu} = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Var\left[c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2 + c_3\underline{\mathbf{x}}_3 + c_4\underline{\mathbf{x}}_4\right]$$

$$= c_1^2 Var[\underline{\mathbf{x}}_1] + c_2^2 Var[\underline{\mathbf{x}}_2] + c_3^2 Var[\underline{\mathbf{x}}_3] + c_4^2 Var[\underline{\mathbf{x}}_4]$$

$$= c_1^2\mathbf{\Sigma} + c_2^2\mathbf{\Sigma} + c_3^2\mathbf{\Sigma} + c_4^2\mathbf{\Sigma} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)\mathbf{\Sigma}$$

$$= \left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2\right)\mathbf{\Sigma}$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. La media y varianza de:

$$\begin{bmatrix} c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2 + c_3\underline{\mathbf{x}}_3 + c_4\underline{\mathbf{x}}_4 \\ \\ b_1\underline{\mathbf{x}}_1 + b_2\underline{\mathbf{x}}_2 + b_3\underline{\mathbf{x}}_3 + b_4\underline{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4 \\ \\ \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{x}}_3 - 3\underline{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Sea $\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix}$, luego, $Var[\underline{\mathbf{v}}]$

$$= \begin{pmatrix} Var(\underline{\mathbf{v}}_1) & | & Cov(\underline{\mathbf{v}}_1\,,\,\underline{\mathbf{v}}_2) \\ -- & -- & -- \\ Cov(\underline{\mathbf{v}}_2\,,\,\underline{\mathbf{v}}_1) & | & Var(\underline{\mathbf{v}}_2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_i c_i\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\sum_{i=1}^n b_i c_i\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\underline{c}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \left(\underline{b}^t\underline{c}\right)\mathbf{\Sigma} & \vdots & \left(\underline{b}^t\underline{b}\right)\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times\mathbf{\Sigma} & \vdots & 0\times\mathbf{\Sigma} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ 0\times\mathbf{\Sigma} & \vdots & 12\times\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & 12\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

es decir,

$$Var[\underline{\mathbf{v}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \vdots & \mathbf{0} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & 12\mathbf{\Sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 36 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Observaciones:

- Cada componente de la primera combinación lineal es independiente de cada componente de la segunda combinación lineal.

- Conjuntamente las dos combinaciones lineales tienen una distribución normal multivariada 6 dimensional.

- Las dos combinaciones lineales son independientes.

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_3 + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{x}}_4 \\ \\ \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{x}}_3 - 3\underline{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{x}}_3 + \underline{\mathbf{x}}_4) \\ \\ \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{x}}_3 - 3\underline{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ X_{23} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{31} \\ X_{32} \\ X_{33} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{41} \\ X_{42} \\ X_{43} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ X_{13} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ \\ \underline{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}X_{11} + \frac{1}{2}X_{21} + \frac{1}{2}X_{31} + \frac{1}{2}X_{41} \\ \frac{1}{2}X_{12} + \frac{1}{2}X_{22} + \frac{1}{2}X_{32} + \frac{1}{2}X_{42} \\ \frac{1}{2}X_{13} + \frac{1}{2}X_{23} + \frac{1}{2}X_{33} + \frac{1}{2}X_{43} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} - 3X_{41} \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} - 3X_{42} \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} - 3X_{43} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\underline{\mathbf{x}}_i} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 36 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$