Ejercicios sobre Pruebas de Hipótesis
Cuarto Parcial Inferencia

1. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con p.d.f dada por:

$$f(x\,|\,\theta,\,\nu) = \frac{\theta\,\nu^{\theta}}{x^{\theta+1}} \quad ; \quad x > \nu \quad , \quad \theta,\,\nu > 0 \; ,$$

con ν desconocido. Halle una prueba LRT para probar las hipótesis:

$$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq 1 \; ,$$

y su respectiva región de rechazo.

2. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución de probabilidad $exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$, con $\theta > 0$ y sea $Y_1,\, Y_2,\, \cdots,\, Y_m$ otra muestra aleatoria de una población con distribución de probabilidad $exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, con $\lambda > 0$, ambas muestras aleatorias independientes entre si.

   a) Halle el LRT para probar: $H_0 : \theta = \lambda$ vs $H_1 : \theta \neq \lambda$.
   b) Muestre que el LRT de la parte a) equivale a un test con estadístico de prueba dado por:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{j=1}^{m} Y_j} \; .$$

   c) Indique como sería la región de rechazo basada en T, para un nivel α dado.

3. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $beta(\mu,\, 1)$ y sea $Y_1,\, Y_2,\, \cdots,\, Y_m$ otra muestra aleatoria de una distribución $beta(\theta,\, 1)$, ambas muestras aleatorias independientes entre si.

   a) Encuentre una LRT para probar: $H_0 : \theta = \mu$ vs $H_1 : \theta \neq \mu$.
   b) Muestre que el test de la parte a), puede escribirse en términos del estadístico:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} ln(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} ln(X_i) + \sum_{j=1}^{m} ln(Y_j)} \; .$$

   c) Halle la región de rechazo para esta prueba, usando el estadístico T, hallado en la parte b), usando un nivel $\alpha = 0.05$.

4. Sea X una variable aleatoria cuyas distribuciones bajo H_0 y H_1 son:

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x $\|H_0$)	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.94
f(x $\|H_1$)	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.79

Use el lemma de N-P para encontrar una prueba UMP para probar H_0 vs H_1, usando un $\alpha = 0.05$. Calcule la probabilidad de error tipo II para esta prueba.

5. Suponga que X es una observación de una distribución $Beta(\theta,\, 1)$.

   a) Para probar las hipótesis $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$, encuentre el tamaño de la función de potencia del test que rechaza H_0 si $X > \frac{43}{50}$.

   b) Encuentre la región de rechazo y el test UMP a un nivel α para probar:

   $$H_0 : \theta = 1 \quad vs \quad H_1 : \theta = 3\ .$$

6. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución de probabilidad dada por:

   $$f(x\,|\,\theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}} \;\; ; \;\; x > 0\ ,\ \theta > 0\ .$$

   - Halle el estadístico LRT para probar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
   - Halle un test UMP y la respectiva región de rechazo para α dado, para probar las hipótesis: $H_0 : \theta = 3$ vs $H_1 : \theta = 1$.

7. Sea X una variable aleatoria con p.d.f $exp\left(\frac{1}{\theta}\right)$. Sea $X_1,\, X_2$ una muestra aleatoria de tamaño 2 de esta distribución. Considere las hipótesis:

   $$H_0 : \theta \leq 2 \quad vs \quad H_1 : \theta > 2\ .$$

   Se rechaza H_0 si $(X_1,\, X_2) \in \{(X_1,\, X_2)\,|\, X_1 + X_2 > 9\}$. Encuentre la función de potencia para esta prueba.

8. Sea X una variable aleatoria con p.d.f dada por $f(x|\theta) = \theta\, x^{\theta-1}$, con $0 < x < 1$, $\theta > 0$. Sea $X_1,\, X_2$ una muestra aleatoria de tamaño 2 de esta distribución. Considere las hipótesis:

   $$H_0 : \theta \leq 1 \quad vs \quad H_1 : \theta > 1\ .$$

   Se rechaza H_0 si $(X_1,\, X_2) \in \{(X_1,\, X_2)\,|\, X_1 X_2 > \frac{4}{5}\}$. Encuentre la función de potencia para esta prueba.

9. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $n(\theta,\, 1)$. Se desean probar las hipótesis: $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta = 1$. Usando el lema de N-P, encuentre la región de rechazo para un α dado.

10. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial con media λ. Considere las hipótesis: $H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$. Encuentre el estadístico Score para probar este par de hipótesis y halle la región de rechazo para α dado.

11. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $n\,(\mu,\, \sigma^2)$, con σ conocida. Encuentre un Test LRT para probar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$. Para α dado, encuentre la respectiva región de rechazo, en función de un cuantil de una $n(0,\, 1)$.

12. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $n\,(\mu_X,\, \sigma^2)$ y sea $Y_1,\, Y_2,\, \cdots,\, Y_m$ otra muestra aleatoria de una distribución $n\,(\mu_Y,\, \sigma^2)$, ambas muestras aleatorias independientes entre si. Sea $\lambda = \mu_X - \mu_Y$

    a) Halle un estadístico LRT para probar las hipótesis $H_0 : \lambda = 0$ vs $H_1 : \lambda \neq 0$.
    b) Exprese el estadístico de prueba del literal a) en la forma de una variable aleatoria T, cuya distribución es $t(\nu)$.

13. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $n\,(0,\, \sigma_X^2)$ y sea $Y_1,\, Y_2,\, \cdots,\, Y_m$ otra muestra aleatoria de una distribución $n\,(0,\, \sigma_Y^2)$, ambas muestras aleatorias independientes entre si. Sea $\lambda = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.

    a) Halle un estadístico LRT para probar las hipótesis $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.
    b) Exprese el estadístico de prueba del literal a) en la forma de una variable aleatoria F, cuya distribución es $f(\nu_1,\, \nu_2)$.

14. Sea $X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n$ una muestra aleatoria de una $Ber(\theta)$. Muestre que la prueba LRT para probar: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ rechaza H_0 si $\sum_{i=1}^{n} X_i > b$.

15. Sea X una variable aleatoria con p.d.f dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{exp(x-\theta)}{\{1 + exp(x-\theta)\}^2} \,.$$

    Usando solo una observación para X, encuentre el test UMP de tamaño α para probar:

$$H_0 : \theta = 0 \quad vs \quad H_1 : \theta = 1 \,.$$