Series de tiempo univariadas - Presentación 8

Mauricio Alejandro Mazo Lopera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Escuela de Estadística
Medellín

Hasta ahora hemos visto el modelo AR(p):

$$
\begin{aligned}
(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \phi_0 + w_t \\
\phi(B) X_t &= \phi_0 + w_t \qquad (1)
\end{aligned}
$$

y el modelo MA(q):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \mu + w_t + \theta_1 B w_t + \theta_2 B^2 w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\
&= \mu + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) w_t \\
&= \mu + \theta(B) w_t \qquad (2)
\end{aligned}
$$

La **pregunta que surge** es ¿se pueden "fusionar" las ecuaciones (1) y (2) en un solo modelo?

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}
\end{aligned}
$$

Modelos ARMA(p, q):

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \alpha + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}
\end{aligned}
$$

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \alpha + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 B X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \alpha + w_t + \theta_1 B w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t
\end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \alpha + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 B X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \alpha + w_t + \theta_1 B w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\
{\color{blue}(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)} X_t &= \alpha + {\color{red}(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)} w_t
\end{aligned}
$$

Modelos ARMA(p, q):

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \alpha + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 B X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \alpha + w_t + \theta_1 B w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\
(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \alpha + (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q) w_t \\
\phi(B) X_t &= \alpha + \theta(B) w_t
\end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

La respuesta a esta pregunta da paso al modelo Autoregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\
&\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= \alpha + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \\
X_t - \phi_1 B X_t - \cdots - \phi_p B^p X_t &= \alpha + w_t + \theta_1 B w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\
(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= \alpha + (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q) w_t \\
\phi(B) X_t &= \alpha + \theta(B) w_t
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación representa la forma simplificada del modelo ARMA de ordenes p en la parte autoregresiva y q en la parte de medias móviles, denotado por ARMA(p, q).

NOTA: Es claro que para que los ordenes sean p y q, se debe cumplir que $\phi_p \neq 0$ y $\theta_q \neq 0$.

Modelos ARMA(p, q):

Asumamos (sin pérdida de generalidad) que el parámetro α del modelo anterior es igual a cero. Esto lleva a que el modelo ARMA(p, q) se puede escribir como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Asumamos (sin pérdida de generalidad) que el parámetro α del modelo anterior es igual a cero. Esto lleva a que el modelo ARMA(p, q) se puede escribir como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Este proceso cumple con ser:

- **Estacionario (o causal):** Si las raíces de $\phi(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}w_t$$

Modelos ARMA(p, q):

Asumamos (sin pérdida de generalidad) que el parámetro α del modelo anterior es igual a cero. Esto lleva a que el modelo ARMA(p, q) se puede escribir como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Este proceso cumple con ser:

- **Estacionario (o causal):** Si las raíces de $\phi(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)} w_t \\ X_t &= \psi(B) w_t \end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

Asumamos (sin pérdida de generalidad) que el parámetro α del modelo anterior es igual a cero. Esto lleva a que el modelo ARMA(p, q) se puede escribir como:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$$

Este proceso cumple con ser:

- **Estacionario (o causal):** Si las raíces de $\phi(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\theta(B)}{\phi(B)}w_t \\ X_t &= \psi(B)w_t \end{aligned}$$

  donde

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}, \quad \text{con} \quad \psi_0 = 1$$

- **Invertible:** Si las raíces de $\theta(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t = w_t$$

- **Invertible:** Si las raíces de $\theta(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t &= w_t \\
\pi(B) X_t &= w_t
\end{aligned}
$$

- **Invertible:** Si las raíces de $\theta(B) = 0$ están por fuera del círculo unitario y en este caso se puede llegar a que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t &= w_t \\
\pi(B) X_t &= w_t
\end{aligned}
$$

donde

$$\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}, \quad \text{con} \quad \pi_0 = 1$$

Modelos ARMA(p, q):

Para un modelo ARMA(p, q) estacionario (raíces de $\phi(B)$ por fuera del círculo unitario) dado por:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\ &\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \end{aligned}$$

Para un modelo ARMA(p, q) estacionario (raíces de $\phi(B)$ por fuera del círculo unitario) dado por:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\ & \quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \end{aligned}$$

La **media** está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \alpha + \phi_1 E(X_{t-1}) + \cdots + \phi_p E(X_{t-p}) + \\ & \quad E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

Para un modelo ARMA(p, q) estacionario (raíces de $\phi(B)$ por fuera del círculo unitario) dado por:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\ &\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \end{aligned}$$

La **media** está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \alpha + \phi_1 E(X_{t-1}) + \cdots + \phi_p E(X_{t-p}) + \\ &\quad E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\ \mu &= \alpha + \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu + \\ &\quad 0 + \theta_1 \times 0 + \cdots + \theta_q \times 0 \end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

Para un modelo ARMA(p, q) estacionario (raíces de $\phi(B)$ por fuera del círculo unitario) dado por:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\ & \quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \end{aligned}$$

La **media** está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \alpha + \phi_1 E(X_{t-1}) + \cdots + \phi_p E(X_{t-p}) + \\ & \quad E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\ \mu &= \alpha + \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu + \\ & \quad 0 + \theta_1 \times 0 + \cdots + \theta_q \times 0 \\ \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) &= \alpha \end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

Para un modelo ARMA(p, q) estacionario (raíces de $\phi(B)$ por fuera del círculo unitario) dado por:

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \\ &\quad w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q} \end{aligned}$$

La **media** está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \alpha + \phi_1 E(X_{t-1}) + \cdots + \phi_p E(X_{t-p}) + \\ &\quad E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\ \mu &= \alpha + \phi_1 \mu + \cdots + \phi_p \mu + \\ &\quad 0 + \theta_1 \times 0 + \cdots + \theta_q \times 0 \\ \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p) &= \alpha \\ \mu &= \frac{\alpha}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p} \end{aligned}$$

La función de autocovarianza del modelo ARMA(p, q) está dada por:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$$

La función de autocovarianza del modelo ARMA(p, q) está dada por:

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}, X_{t-h})
\end{aligned}
$$

La función de autocovarianza del modelo ARMA(p, q) está dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha, X_{t-h}) + \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-h}) + \quad (3) \\
&\quad Cov(w_t, X_{t-h}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \theta_q Cov(w_{t-q}, X_{t-h})
\end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

La función de autocovarianza del modelo ARMA(p, q) está dada por:

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha, X_{t-h}) + \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-h}) + \quad (3) \\
&\quad Cov(w_t, X_{t-h}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \theta_q Cov(w_{t-q}, X_{t-h}) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma(h-j) + \sigma_w^2 \sum_{j=h} \theta_j \psi_{j-h} \quad (4)
\end{aligned}
$$

donde los ψ_i son los coeficientes que se obtienen al realizar el cociente de polinomios $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ (ver final de la diapositiva 4 de esta presentación).

Modelos ARMA(p, q):

La función de autocovarianza del modelo ARMA(p, q) está dada por:

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}, X_{t-h}) \\
&= Cov(\alpha, X_{t-h}) + \phi_1 Cov(X_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \phi_p Cov(X_{t-p}, X_{t-h}) + \quad (3) \\
&\quad Cov(w_t, X_{t-h}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, X_{t-h}) + \cdots + \theta_q Cov(w_{t-q}, X_{t-h}) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma(h-j) + \sigma_w^2 \sum_{j=h} \theta_j \psi_{j-h} \quad (4)
\end{aligned}
$$

donde los ψ_i son los coeficientes que se obtienen al realizar el cociente de polinomios $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ (ver final de la diapositiva 4 de esta presentación).

De la ecuación (4) podemos afirmar que:

Modelos ARMA(p, q):

$$\gamma(k) = \phi_1\gamma(h-1) + \cdots + \phi_p\gamma(h-p), \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\}$$

Modelos ARMA(p, q):

$$\begin{aligned}\gamma(k) &= \phi_1\gamma(h-1)+\cdots+\phi_p\gamma(h-p), \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\}\\ \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} &= \phi_1\frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)}+\cdots+\phi_p\frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)}, \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\}\end{aligned}$$

Modelos ARMA(p, q):

$$
\begin{aligned}
\gamma(k) &= \phi_1\gamma(h-1)+\cdots+\phi_p\gamma(h-p), \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\} \\
\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} &= \phi_1\frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)}+\cdots+\phi_p\frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)}, \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\} \\
\rho(h) &= \phi_1\rho(h-1)+\cdots+\phi_p\rho(h-p), \quad \text{para} \quad h \geq \text{máx}\{p, q+1\}
\end{aligned}
$$

Este resultado implica que la ACF se comporta igual que el proceso AR en la “cola” del gráfico. Esto mismo ocurre con la PACF.

$$
\begin{aligned}
\gamma(k) &= \phi_1\gamma(h-1)+\cdots+\phi_p\gamma(h-p), \quad \text{para} \quad h\geq \text{máx}\{p,q+1\}\\
\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} &= \phi_1\frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)}+\cdots+\phi_p\frac{\gamma(h-p)}{\gamma(0)}, \quad \text{para} \quad h\geq \text{máx}\{p,q+1\}\\
\rho(h) &= \phi_1\rho(h-1)+\cdots+\phi_p\rho(h-p), \quad \text{para} \quad h\geq \text{máx}\{p,q+1\}
\end{aligned}
$$

Este resultado implica que la ACF se comporta igual que el proceso AR en la "cola" del gráfico. Esto mismo ocurre con la PACF.

Veamos algunos ejemplos de modelos ARMA(p, q) con el fin de analizar el comportamiento de las funciones ACF y PACF teóricas:

Modelo ARMA(p, q):

- ARMA(1, 1): Con $\phi_1 = 0.8$ y $\theta_1 = 0.6$. El modelo es $X_t = \alpha + 0.8X_{t-1} + w_t + 0.6w_{t-1}$.

Modelo ARMA(p, q):

- ARMA(1, 1): Con $\phi_1 = 0.8$ y $\theta_1 = 0.6$. El modelo es $X_t = \alpha + 0.8X_{t-1} + w_t + 0.6w_{t-1}$. La raíz de $\phi(B) = 1 - 0.8B = 0$ es $B = 1.25$ y como $|1.25| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso es estacionario. Por otra parte, la raíz de $\theta(B) = 1 + 0.6B = 0$ es $B = -1.67$ y como $|-1.67| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso es invertible.

```
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ar=c(0.8), ma=c(0.6) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

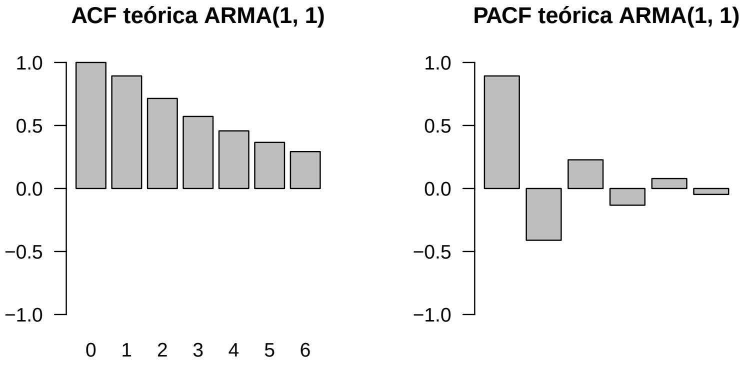
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.8931 0.7145 0.5716 0.4573 0.3658 0.2927
```

```
pacf1<-ARMAacf(ar=c(0.8), ma=c(0.6), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1]  0.8931 -0.4109  0.2274 -0.1328  0.0789 -0.0472
```

Modelo ARMA(p, q):

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica ARMA(1, 1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica ARMA(1, 1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Modelo ARMA(p, q):

- ARMA(1, 1): Con $\phi_1 = -0.8$ y $\theta_1 = -0.6$. El modelo es $X_t = \alpha - 0.8X_{t-1} + w_t - 0.6w_{t-1}$.

Modelo ARMA(p, q):

- ARMA(1, 1): Con $\phi_1 = -0.8$ y $\theta_1 = -0.6$. El modelo es $X_t = \alpha - 0.8X_{t-1} + w_t - 0.6w_{t-1}$. La raíz de $\phi(B) = 1 + 0.8B = 0$ es $B = -1.25$ y como $|-1.25| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso es estacionario. Por otra parte, la raíz de $\theta(B) = 1 - 0.6B = 0$ es $B = 1.67$ y como $|1.67| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso es invertible.

```
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ar=c(-0.8), ma=c(-0.6) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

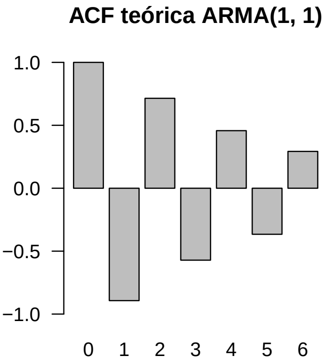
```
##       0       1       2       3       4       5       6
##  1.0000 -0.8931  0.7145 -0.5716  0.4573 -0.3658  0.2927
```

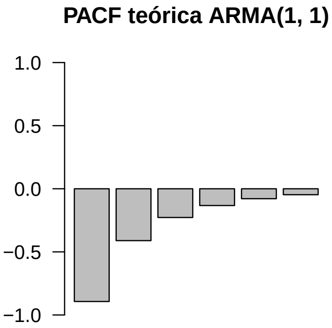
```
pacf1<-ARMAacf(ar=c(-0.8), ma=c(-0.6), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1] -0.8931 -0.4109 -0.2274 -0.1328 -0.0789 -0.0472
```

Modelo ARMA(p, q):

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica ARMA(1, 1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica ARMA(1, 1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```





- ARMA(1,2): Con $\phi_1 = 0.8$, $\theta_1 = 0.4$ y $\theta_2 = 0.8$. El proceso es $X_t = \alpha + 0.8X_{t-1} + w_t + 0.4w_{t-1} + 0.8w_{t-2}$. Las raíces de $\theta(B) = 1 + 0.4B + 0.8B^2 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,0.4,0.8))
```

```
## [1] -0.25+1.089725i -0.25-1.089725i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,0.4,0.8)))
```

```
## [1] 1.118034 1.118034
```

Modelo ARMA(p, q):

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf2<-ARMAacf(ar=c(0.8), ma=c(0.4,0.8) , lag.max = 6)
round(acf2,4)
```

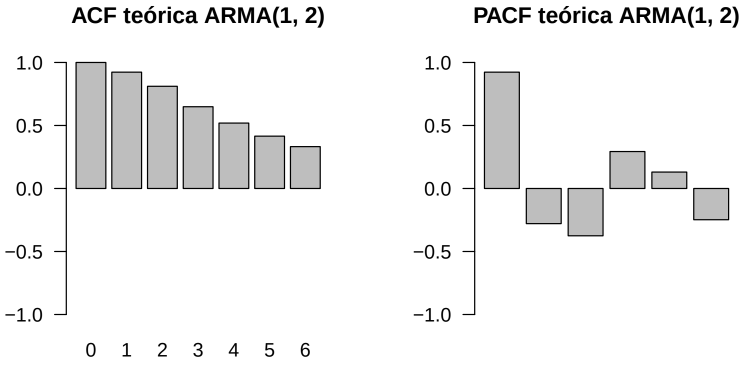
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.9231 0.8109 0.6488 0.5190 0.4152 0.3322
```

```
pacf2<-ARMAacf(ar=c(0.8), ma=c(0.4,0.8), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf2,4)
```

```
## [1]  0.9231 -0.2790 -0.3754  0.2932  0.1302 -0.2479
```

Modelo ARMA(p, q):

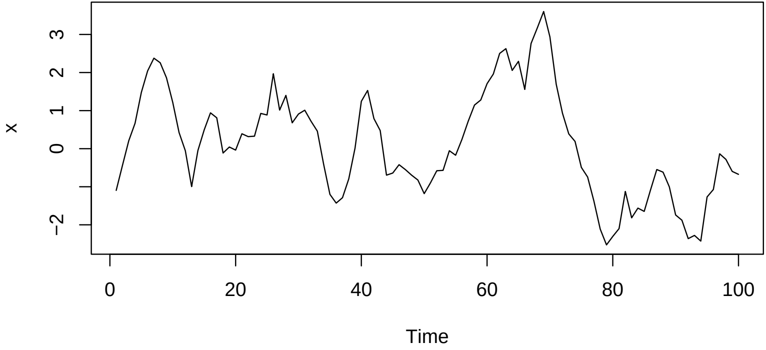
```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf2, main="ACF teórica ARMA(1, 2)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf2, main="PACF teórica ARMA(1, 2)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Simulemos una realización o serie de tiempo de tamaño $n = 100$ del proceso ARMA(1, 2) $X_t = \alpha + 0.8X_{t-1} + w_t + 0.4w_{t-1} + 0.2w_{t-1}$ con $\sigma_w^2 = 0.5^2$

```
set.seed(123)
x<-arima.sim(model=list(ar=c(0.8),ma=c(0.4, 0.8)),n=100,sd=0.5)
```

```
plot(x)
```



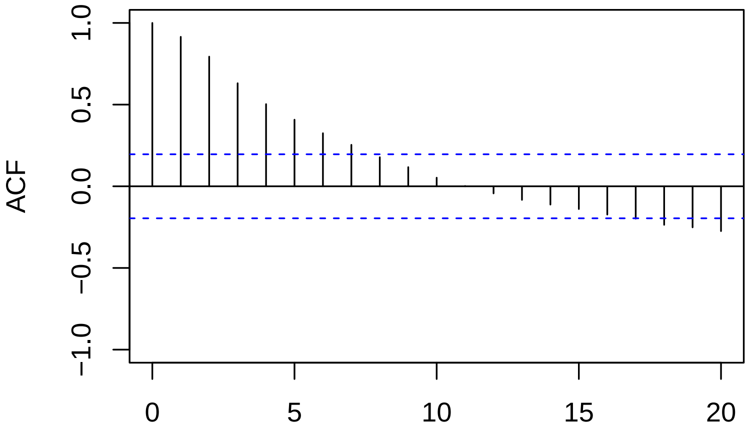
Las 6 primeras ACF estimadas son:

```
acf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'x', by lag
##
##     0     1     2     3     4     5     6
## 1.000 0.915 0.794 0.631 0.503 0.408 0.325
```

Simulación de modelos ARMA(p, q):

```
acf(x, ylim=c(-1,1))
```



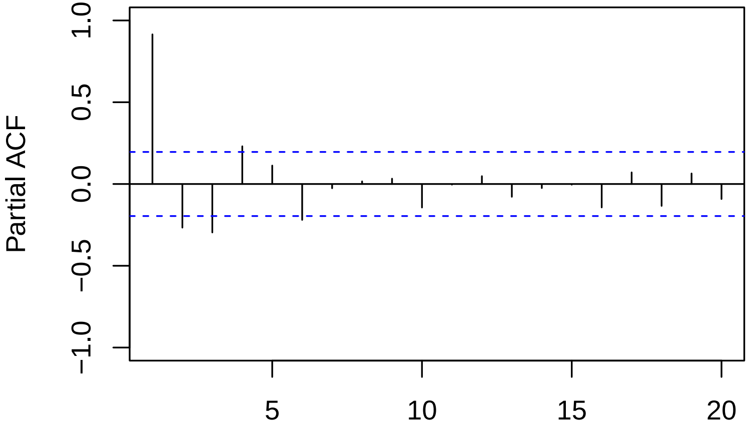
Las 6 primeras PACF estimadas son:

```
pacf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Partial autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6
##  0.915 -0.267 -0.296  0.231  0.113 -0.220
```

Simulación de modelos ARMA(p, q):

```
pacf(x, ylim=c(-1,1))
```



- El proceso ARMA(p, q) es invertible (que se puede escribir como un AR) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

están fuera del círculo unitario.

Conclusiones

- El proceso ARMA(p, q) es invertible (que se puede escribir como un AR) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- El proceso ARMA(p, q) es estacionario (o causal) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

  están fuera del círculo unitario.

Conclusiones

- El proceso ARMA(p, q) es invertible (que se puede escribir como un AR) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- El proceso ARMA(p, q) es estacionario (o causal) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- La función ACF teórica del proceso ARMA(p, q), tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.

Conclusiones

- El proceso ARMA(p, q) es invertible (que se puede escribir como un AR) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

están fuera del círculo unitario.
- El proceso ARMA(p, q) es estacionario (o causal) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

están fuera del círculo unitario.
- La función ACF teórica del proceso ARMA(p, q), tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.
- La función PACF teórica del proceso ARMA(p, q), denotada por ϕ_{kk}, tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.

Conclusiones

- El proceso ARMA(p, q) es invertible (que se puede escribir como un AR) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- El proceso ARMA(p, q) es estacionario (o causal) si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p = 0$$

  están fuera del círculo unitario.
- La función ACF teórica del proceso ARMA(p, q), tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.
- La función PACF teórica del proceso ARMA(p, q), denotada por ϕ_{kk}, tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.

Conclusiones

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF teóricas del proceso ARMA(p, q) y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo ARMA(p, q) con ordenes p y q comenzando en valores pequeños y aumentando (si es necesario) hasta obtener residuales no correlacionados (con ACF y PACF dentro de la banda de confianza).

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF teóricas del proceso ARMA(p, q) y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo ARMA(p, q) con ordenes p y q comenzando en valores pequeños y aumentando (si es necesario) hasta obtener residuales no correlacionados (con ACF y PACF dentro de la banda de confianza).
- Como regla, si tenemos sospechas de que debemos ajustar un modelo ARMA(p, q) debemos intentar seleccionar el valor de p y q más pequeños, intentando llegar al modelo "más simple" posible.

Proceso	ACF	PACF
AR(p)	Decaimiento exponencial y/o onda senoidal amortiguada	Corte después del rezago p
MA(q)	Corte después del rezago q	Decaimiento exponencial y/o onda senoidal amortiguada
ARMA(p, q)	Decaimiento exponencial y/0 onda senoidal amortiguada	Decaimiento exponencial y/o onda senoidal amortiguada