Estadística Bayesiana: Clase 11

Juan Carlos Correa

5 de abril de 2021

Pruebas de Hipótesis Bayesianas

- La aproximación bayesiana a las pruebas de hipótesis está basada en el cálculo de de la probabilidad condicional de una hipótesis H_0 dada la información disponible.

- Cuando la hipótesis nula es $H_0 : \theta \in \Theta_0$ y la alternativa $H_1 : \theta \in \Theta_1$, con $\Theta_0 \bigcap \Theta_1 = \emptyset$, son formuladas, hay creencias apriori sobre ambas, digamos $\xi(H_0)$ y $\xi(H_1)$, con

$$\xi(H_0) + \xi(H_1) = 1$$

- Por el teorema de la probabilidad total, la distribución apriori de θ es:

$$\xi(\theta) = \xi(\theta|H_0)\xi(H_0) + \xi(\theta|H_1)\xi(H_1)$$

donde $\xi(\theta|H_i)$, son las densidades apriori de θ, condicionadas en cada hipótesis.

La información muestral es utilizada entonces para calcular de los odds apriori:

$$\frac{\xi(H_0)}{\xi(H_1)}$$

los odds posteriores en favor de H_0:

$$\frac{\xi(H_0|\mathbf{y})}{\xi(H_1|\mathbf{y})} = \frac{p(y|H_0)}{p(y|H_1)}\frac{\xi(H_0)}{\xi(H_1)}$$

de la cual se deriva la siguiente regla de decisión:

$$\begin{array}{lll} \text{Si} & \xi(H_0|\mathbf{y}) < \xi(H_1|\mathbf{y}) & \text{Rechace } H_0 \\ \text{Si} & \xi(H_0|\mathbf{y}) > \xi(H_1|\mathbf{y}) & \text{Acepte } H_0 \\ \text{Si} & \xi(H_0|\mathbf{y}) = \xi(H_1|\mathbf{y}) & \text{Indecisión acerca de } H_0 \end{array}$$

Factor de Bayes

La razón

$$\frac{p(y|H_0)}{p(y|H_1)}$$

es llamado el factor de Bayes, denotado por BF o $B_{01}(y)$.

- Queremos probar

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ versus } \mathbf{y} : \theta \in \Theta_1$$

- Sea $f(x|\theta)$ la verosimilitud de x dado θ.
- Tenemos las siguientes formas del factor de Bayes

$$B_{01}(x) = \frac{f(x|\theta_0)}{f(x|\theta_1)} \qquad \text{(Prueba simple vs. simple)}$$

$$B_{01}(x) = \frac{f(x|\theta_0)}{\int_{\Theta_1} f(x|\theta)\xi_1(\theta)d\theta} \qquad \text{(Prueba simple vs. compuesta)}$$

$$B_{01}(x) = \frac{\int_{\Theta_0} f(x|\theta_0)\xi_0(\theta)d\theta}{\int_{\Theta_1} f(x|\theta)\xi_1(\theta)d\theta} \qquad \text{(Prueba compuesta vs. compuesta)}$$

		$\log_{10} BF$	$>$	2	Evidencia decisiva a favor de H_0,
2	$>$	$\log_{10} BF$	$>$	$1{,}5$	Evidencia muy fuerte a favor H_0,
1	$>$	$\log_{10} BF$	$>$	$1{,}5$	Evidencia sustancial a favor H_0,
$0{,}5$	$>$	$\log_{10} BF$	$>$	0	Evidencia a favor H_0, pero apenas para mencionar.
$-0{,}5$	$<$	$\log_{10} BF$	$<$	0	Evidencia contra H_0, pero apenas para mencionar.
-1	$<$	$\log_{10} BF$	$<$	$-1{,}5$	Evidencia sustancial contra H_0,
$-1{,}5$	$<$	$\log_{10} BF$	$<$	-1	Evidencia fuerte contra H_0,
-2	$<$	$\log_{10} BF$	$<$	$-1{,}5$	Evidencia muy fuerte contra H_0,
		$\log_{10} BF$	$<$	-2	Evidencia decisiva contra H_0,

Cuando las probabilidades apriori son iguales, el factor de Bayes determina la regla de decisión. La evaluación del factor de Bayes involucra el cálculo de

$$
\begin{aligned}
p(y|H_0) &= \int p(y|H_0, \theta)\xi(\theta|H_0)\, d\theta \\
p(y|H_1) &= \int p(y|H_1, \theta)\xi(\theta|H_1)\, d\theta
\end{aligned}
$$

Cuando las probabilidades apriori son iguales, el factor de Bayes determina la regla de decisión. La evaluación del factor de Bayes involucra el cálculo de

$$\begin{aligned} p(y|H_0) &= \int p(y|H_0,\theta)\xi(\theta|H_0)\,d\theta \\ p(y|H_1) &= \int p(y|H_1,\theta)\xi(\theta|H_1)\,d\theta \end{aligned}$$

- El factor de Bayes proporciona una indicación de cuánto cambian nuestras razones de probabilidad de una situación sin datos, a la luz de los datos, para favorecer un modelo.

- Puede verse como una medida de la evidencia proporcionada por los datos en favor de un modelo comparado con un competidor. El logaritmo del factor de Bayes ha sido llamado *el peso de la evidencia* proporcionada por los datos (De Santis y Spezzaferri, 1999).

El factor de Bayes puede verse como la versión bayesiana de la prueba clásica de la razón de verosimilitudes (De Santis y Spezzaferri, 1999). Si se asumen dos hipótesis simples, digamos H_1 y H_2, el factor de Bayes se reduce a la razón de verosimilitud

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_2)}.$$

Ejemplo

Suponga que deseamos verificar si la hipótesis que el número promedio de goles del equipo local en el campeonato colombiano es 1.0 ó menos es más plausible que si el promedio es mayor que 1.0. Asumamos que el número de goles metidos por el local en el primer tiempo se distribuye Poisson(λ). Las hipótesis serán:

- $H_1 : \lambda \leq 1$
- $H_2 : \lambda > 1$

Suponga que apriori $\xi(H_1) = 0{,}4$ y $\xi(H_2) = 0{,}6$.
Bajo H_1 la apriori sobre Θ_1 la escogemos $Beta(\alpha_0, \beta_0)$ y bajo H_2 asumimos una normal truncada con parámetros μ_0 y σ_0^2. El factor de Bayes es

$$\frac{p(y|H_1)}{p(y|H_2)} = \frac{\int p(y|H_1, \lambda)\xi(\lambda|H_1)\, d\lambda}{\int p(y|H_2, \lambda)\xi(\lambda|H_2)\, d\lambda}$$

Ahora

$$p(y|H_i) = \int_{\Theta_i} \frac{\lambda^y \exp(-n\lambda)}{y!} \xi(\lambda|H_i)\, d\lambda = E_{\xi_i}[P(Y = y|\lambda)]$$

Para H_1

$$p(y|H_1) = \int_0^1 \frac{\lambda^y \exp(-n\lambda)}{y!} \frac{\Gamma(\alpha_0+\beta_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\beta_0)} \lambda^{\alpha_0-1}(1-\lambda)^{\beta_0-1}\, d\lambda$$

Un algoritmo que nos permite estimar este valor sería:

1. Genere $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ de una $Beta\,(\alpha_0, \beta_0)$.
2. Calcule $p_i = P(y|n\lambda_i)$, $i = 1, 2, \cdots, M$
3. Calcule

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p_i$$

Para H_2

$$p(y|H_2) = \int_1^{\infty} \frac{\lambda^y \exp(-n\lambda)}{y!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\lambda-\mu_0)^2\right) d\lambda$$

Un algoritmo que nos permite estimar este valor sería:

1. Calcule p^* como $P(X > 1)$ donde $X \sim (\mu_0, \sigma_0^2)$
2. Genere $p_1^*, p_2^*, \cdots, p_M^*$ de una $Uniforme\,(p^*, 1)$.
3. Calcule λ_i tal que

$$\int_{-\infty}^{\lambda_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma 0^2}(\lambda-\mu_0)^2\right) = p_i^*$$

4. Calcule $p_i = P(y|n\lambda_i)$, $i = 1, 2, \cdots, M$
5. Calcule

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p_i$$

Datos muestrales

Datos observados: Campeonato 2002 I primeras 4 fechas Goles marcados por el local el primer tiempo
0,1,0,2,1,0,2,1,1, 1,0,1,0,1,0,1,1,0, 0,0,3,0,0,0,0,1,0, 0,2,0,1,0,1,0,1,0.
Por suficiencia $y = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim Poisson(n\lambda)$

```
# Ejemplo de Factor de Bayes

# Modelo muestral Poisson(lamb)
# H1: lam>=1
# H2: lam>1

# apriori bajo H1--> beta(a0,b0)
# apriori bajo H2--> normal tuncada(u0,s20)

# Datos observados: Campeonato 2002 I primeras 4 fechas
# Goles marcados por el local el primer tiempo

x<-c(0,1,0,2,1,0,2,1,1,
1,0,1,0,1,0,1,1,0,
0,0,3,0,0,0,0,1,0,
0,2,0,1,0,1,0,1,0)

a0<-1
b0<-1

> f.int<-function(la) la^24*exp(-36*la)/factorial(36)
> integrate(f.int,0,1)
2.017199e-57 with absolute error < 3.5e-61
> f.int2<-function(la) la^24*exp(-36*la)/factorial(36)*dnorm(la,1.5
> integrate(f.int2,1,Inf)
1.680524e-59 with absolute error < 4.4e-61
> 2.017199e-57/ 1.680524e-59
[1] 120.0339
```

```
> razon.apriori<-0.4/0.6
> razon.apriori
[1] 0.6666667
> 0.6666667* 120.0339
[1] 80.0226
```

Ejemplo:

Sean $y_1, \cdots, y_n|\theta$ variables independientes y distribuidas Poisson con parámtero θ. Así,

$$p\left(y_i|\theta\right) = \frac{\theta^{y_i}\, e^{-\theta}}{y_i!}$$

para $\theta > 0$, $y_i = 0, 1, 2, \cdots$. Sea $H_0 : \theta = \theta_0$ y $H_1 : \theta = \theta_1$ dos hipótesis simples, con $\xi\left(H_0|I_0\right) = \xi\left(H_1|I_0\right)$. El Factor Bayes es

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{\sum_i y_i} \exp\left(\theta_1 - \theta_0\right)$$

y por lo tanto, ya que la distribución apriori asigna igual probabilidad a las hipótesis, la regla de decisión será aceptar H_0 si el Factor de Bayes es mayor que 1.

Comparación de dos proporciones

- Un problema común en estadística es el de verificar que dos proporciones son iguales ($H_0 : \pi_1 = \pi_2$) contra la alternativa $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$.

- Bajo el supuesto de H_0 solo tenemos un párametro que puede tomar un valor en $(0, 1)$ y por lo tanto necesitamos especificar una distribución apriori en esta situación, digamos $\xi_{H_0}(\pi)$ (podemos pensar en una $Beta(\alpha, \beta)$), donde α y β se escogen de tal forma que reflejen el conocimiento apriori (en caso de ignorancia podemos escoger $\alpha = 1$ y $\beta = 1$).

- Bajo la alternativa H_1 debemos pensar en una distribución conjunta para (π_1, π_2), digamos $\xi_{H_1}(\pi_1, \pi_2)$.

- Bajo la alternativa una selección obvia es una uniforme en el área $(0, 1) \times (0, 1)$, con $\pi_1 \neq \pi_2$ y esto corresponde al producto de dos uniformes independientes. Además asumamos que la probabilidad apriori de H_0 es 0.5.

Asumamos que nuestros datos son

	Exitos	Fracasos	Total
Muestra 1	2	13	15
Muestra 2	14	1	15

El factor de Bayes es 0.0000894 y la probabilidad posterior de la hipótesis nula es 0.0000894.