Diseño de Experimentos - 3007340
DOE - Parte II: Inferencias medias de tratamiento con un factor

Nelfi González Alvarez
Profesora Asociada Escuela de Estadística
e-mail: ngonzale@unal.edu.co

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Escuela de Estadística
Semestre 02 de 2021

Contenido I

Contenido

Tipos de inferencias sobre medias de tratamientos

1. *Estimaciones puntuales y por intervalos para cada tratamiento*
2. *Comparaciones múltiples por pares de tratamientos*
3. *Comparaciones de tratamientos vs. un control*
4. *Contrastes.*

Nota 1.1

Las estimaciones y comparaciones de medias de tratamientos se realizan desde que el test ANOVA indique que hay significancia estadística de efectos de tratamientos, es decir, que por lo menos para un par de tratamientos, las respuestas medias son distintas, de lo contrario no tiene sentido proceder con estas inferencias.

Contenido

Comparaciones múltiples por pares de medias

Objetivos:

- *Agrupar las medias de tratamientos estadísticamente iguales, haciendo todas las posibles comparaciones distintas por pares de medias.*
- *Determinar los mejores tratamientos experimentales.*

Para un factor con a niveles, el Nro. de comparaciones distintas es

$$\binom{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2}.$$

Tests de hipótesis: *Sean μ_i y μ_j las medias de la respuesta en los niveles A_i, A_j, respectivamente. En la comparación de este par de medias se prueba:*

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ vs. } H_1 : \mu_i \neq \mu_j \tag{1}$$

Nota 2.1

Para decidir sobre la igualdad de un par de medias podemos recurrir a una región crítica de nivel γ o bien, construir un intervalo de confianza de nivel $(1-\gamma)100\%$ para la diferencia $\mu_i - \mu_j$. En este último caso, la hipótesis nula no se rechaza si cero pertenece a tal intervalo.

Métodos LSD y Tukey

Para las comparaciones por pares de medias veremos los dos siguientes:

1. **Método de la mínima diferencia significativa (LSD):**
   - *En cada comparación aplica el* ***test*** t ***usual*** *para la igualdad de dos medias de poblaciones normales de igual varianza (pero desconocida), con base en muestras independientes. También puede hacerse mediante los IC correspondientes para la diferencia de medias.*
   - **Su desventaja:** *al realizar* $a(a-1)/2$ *pruebas, la tasa de error experimental, es decir, la probabilidad de cometer error tipo I en al menos una de las pruebas, crece con* a.
2. **Método de la diferencia honestamente significativa (HSD) o método de Tukey:**
   - *Basado en la distribución de los* ***rangos estudentizados de las medias*** $\bar{Y}_{i\bullet}$ ***de*** a ***muestras independientes de una*** $N(0,\sigma^2)$*, realiza todas las comparaciones por pares de modo que simultáneamente el nivel de significancia es de* γ*, o bien, mediante IC simultáneos de* $(1-\gamma)100\%$ *para todas las diferencias por pares.*
   - **Su desventaja:** *Es un método conservador, es decir, poco potente para detectar diferencias pequeñas.*

Tabla 1: Resumen métodos LSD y Tukey en los Tests: $H_0: \ \mu_i = \mu_j$ vs. $H_1: \ \mu_i \neq \mu_j$

	Método LSD	Método de Tukey
Estadístico de prueba	$D_{ij} = \left\lvert \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet} \right\rvert$	$D_{ij} = \left\lvert \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet} \right\rvert$
Valor crít. para D_{ij}	$LSD_{ij} = t_{\gamma/2, N-a} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$	$HSD_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{\gamma}(a, N-a) \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
Rechazo de H_0	si $D_{ij} > LSD_{ij}$	si $D_{ij} > HSD_{ij}$
Usando I.C de nivel $(1-\gamma)100\%$ para $\mu_i - \mu_j$		
Rechazo de H_0	si $0 \notin (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) \pm LSD_{ij}$	si $0 \notin (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}) \pm HSD_{ij}$

$q_{\gamma}(a, N-a)$ es el valor crítico de nivel γ del rango estudentizado para a medias muestrales de una $N(0, \sigma^2)$ y con $N-a$ grados de libertad en el estimador de σ^2.

Pocedimiento para el agrupamiento de las medias de tratamientos:

1. En cada comparación por pares, μ_i vs. μ_j, calcular D_{ij}.
2. *Comparar D_{ij} con valor crítico respectivo de nivel γ (LSD_{ij} en método LSD y HSD_{ij} en método Tukey) y decidir sobre la igualdad del par de medias.*
3. Si se usan los IC para $\mu_i - \mu_j$ (tipo LSD o tipo Tukey según el método), verificamos si 0 se encuentra en este intervalo para decidir sobre la igualdad de medias.
4. *Terminadas todas las comparaciones por pares, agrupar las medias de tratamientos:* ***las medias μ_i en un mismo grupo deben ser estadísticamente iguales tomadas por pares, por tanto aquí no funciona principio de igualdad por transitividad.***
5. Es posible que por falta de potencia en algunas comparaciones, se obtengan grupos de medias traslapados: una media μ_i pertenece a más de un grupo.

Ejemplo 4.1.1 en Notas de Clase

- **Respuesta:** *Tiempo de ensamble.*
- **Factor de tratamientos:** *Método de ensamble, niveles A, B, C, D.*
- **U.E:** *Unidad a ensamblar.*
- **Número de réplicas por tratamiento:** $n_i = 4, \forall\, i = 1, \ldots, 4.$
- **Modelo ANOVA:** *Un factor de tratamientos de efectos fijos en un DCA.*

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right),\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0.$$

- **Medias muestrales:** volver a pregunta final volver a ejemplo Duncan

i	1 (A)	2 (B)	3 (C)	4 (D)
$\bar{y}_{i\bullet}$	7.25	8.50	12.75	10.50

- **Tabla ANOVA:**

FUENTE	SC	g.l	CM	F_0	$P(f_{3,12} > F_0)$
Métodos	69.5	3	23.17	9.42	0.0018
Error	29.5	12	2.46		
Total	99.0	15			

- **Valores críticos con $\gamma = 0.05$:**

$$LSD_{ij} = t_{0.025,12}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 2.18 \times \sqrt{2.46/2} \approx 2.42$$

$$HSD_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}q_{0.05}(4,12)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \left(4.2/\sqrt{2}\right) \times \sqrt{2.46/2} \approx 3.28$$

Dif. Poblacional	D_{ij} vs. LSD_{ij}	**Conclusión LSD**	D_{ij} vs. HSD_{ij}	**Conclusión HSD**
$\mu_1 - \mu_2$	1.25<2.42	Iguales	1.25<3.28	Iguales
$\mu_1 - \mu_3$	5.50>2.42	Diferentes	5.50>3.28	Diferentes
$\mu_1 - \mu_4$	3.25>2.42	Diferentes	3.25<3.28	Iguales
$\mu_2 - \mu_3$	4.25>2.42	Diferentes	4.25>3.28	Diferentes
$\mu_2 - \mu_4$	2.00<2.42	Iguales	2.00<3.28	Iguales
$\mu_3 - \mu_4$	2.25<2.42	Iguales	2.25<3.28	Iguales

Grupos Según LSD:

- GRUPO 1: $\mu_1 = \mu_2$
- GRUPO 2: $\mu_2 = \mu_4$
- GRUPO 3: $\mu_3 = \mu_4$

Grupos según Tukey:

- GRUPO 1: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4$
- GRUPO 2: $\mu_3 = \mu_4$

¿Cuáles son los mejores tratamientos?

ir a medias muestras

LSD y Tukey en R

- `HSD.test(...)`: Función de la librería `agricolae`, realiza los tests Tukey y agrupa las medias de tratamientos.
- `LSD.test(...)`: Función de la librería `agricolae`, realiza los tests LSD y agrupa las medias de tratamientos.
- `TukeyHSD(...)`: Proporciona IC de Tukey para las comparaciones por pares de medias de tratamientos. Combinado con `plot(...)` presenta de forma gráfica estos intervalos.

Nota 2.2

Ver ejemplos en Sección 4.6, Notas de Clase - Diseño de Experimentos.

Nota 2.3

Las comparaciones de medias con LSD y Tukey suponen válidos los supuestos sobre los errores, $\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$. Sin embargo, bajo normalidad, independencia pero varianza no constante, las comparaciones por el método LSD pueden adaptarse calculando el estadístico de prueba bajo una aproximación conocida como Satterthwaite. Ver Apéndice A.3, Notas de Clase - Diseño de Experimentos.

Prueba de rangos múltiples de Duncan

Las diferencias $D_{ij} = |\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{j\bullet}|$ para las medias muestrales ordenadas de mayor a menor y separadas p lugares (incluyendo a las medias a comparar), se comparan a un nivel de significancia de γ ***con los rangos de mínima significancia,***

$$R_p = r_\gamma(p, \text{g.l}) S_{\bar{Y}_{i\bullet}},\ p = 2, 3, \ldots, a, \tag{2}$$

donde $r_\gamma(p, \text{g.l})$ ***son los valores críticos de los rangos significativos de Duncan,*** con g.l los grados de libertad del MSE y $S_{\bar{Y}_{i\bullet}} = \sqrt{MSE/n}$ si hay igual número de réplicas por tratamiento, en caso contrario reemplaza n por $n_h = a/\sum_{i=1}^{a} n_i^{-1}$.

Procedimiento, Gutiérrez y de la Vara Salazar (2012)

Comparar la diferencia entre la media muestral más grande y la más pequeña con el rango R_a. Luego, comparar la diferencia entre la media más grande y la segunda media más pequeña con el rango R_{a-1}. Las comparaciones continúan hasta que se haya comparado la mayor media con todas las demás. A continuación se compara la diferencia entre la segunda media muestral más grande y la menor media con el rango R_{a-1}. Después, se compara la diferencia entre la segunda media más grande y la segunda más pequeña con el rango R_{a-2}, y así sucesivamente hasta que se comparan las $a(a-1)/2$ pares de medias posibles con el rango que les corresponda.

- En las comparaciones donde la diferencia observada es mayor que el rango respectivo, se concluye que las medias correspondientes son estadísticamente distintas.
- Si una, dos o más medias caen entre otras dos que son estadísticamente iguales, entonces tales medias se consideran un grupo de medias estadísticamente iguales (incluyendo a las dos medias en los extremos de la comparación)

Considere de nuevo datos en Ejemplo 4.1.1 en Notas de Clase

ir a datos Ejemplo 4.1.1: $n_i = n = 4$, $i = 1, 2, 3, 4$, $MSE = 2.46$ con g.l $= N - a = 12$.

	$p = 2$	3	4
Vr. crit. rangos signif., $r_{0.05}(p, 12)$	3.08	3.23	3.33
Rangos de mín. signif., $R_p = r_{0.05}(p, 12)\sqrt{MSE/n}$	2.40	2.52	2.60

$\bar{y}_{i\bullet}$ ordenadas (mayor a menor)				
i	3 (C)	4 (D)	2 (B)	1 (A)
$\bar{y}_{i\bullet}$	12.75	10.50	8.50	7.25

Comparación en orden de rangos	p	R_p	D_{ij} vs. R_p	Conclusión
μ_3 vs. μ_1	4	2.60	$5.50 > 2.60$	$\mu_3 \neq \mu_1$
μ_3 vs. μ_2	3	2.52	$4.25 > 2.52$	$\mu_3 \neq \mu_2$
μ_3 vs. μ_4	2	2.40	$2.25 < 2.40$	$\mu_3 = \mu_4$
μ_4 vs. μ_1	3	2.52	$3.25 > 2.52$	$\mu_4 \neq \mu_1$
μ_4 vs. μ_2	2	2.40	$2.00 < 2.40$	$\mu_4 = \mu_2$
μ_2 vs. μ_1	2	2.40	$1.25 < 2.40$	$\mu_2 = \mu_1$
Grupo 1: $\mu_3 = \mu_4$; Grupo 2: $\mu_2 = \mu_4$; Grupo 3: $\mu_1 = \mu_2$.				

Método de Duncan en R

- En la librería `agricolae` se cuenta con la función R `duncan.test( )`. Esta función realiza las comparaciones entre medias y además agrupa los tratamientos.

Nota 2.4

Ver en la Sección 4.6.1 de Notas de Clase, en el Código R 4.6.1. el uso de esta función, y en la Salida R 4.6.3 los resultados obtenidos, con los datos del "Experimento de las lechugas".

Contenido

Comparaciones con un control tipo bilaterales

Muy a menudo en algunos experimentos se desea comparar nuevos tratamientos contra un tratamiento de referencia o estándar (el tratamiento actual) o incluso contra “no tratamiento o placebo”. *Llamaremos tal tratamiento de referencia como el tratamiento de control* y lo denotaremos por A_1 (el primer nivel de tratamientos). Comparar contra tal tratamiento implica realizar las siguientes pruebas, para $i = 2, \ldots, a$:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_1 \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Para controlar la tasa de error experimental a un nivel γ en las $a-1$, pruebas, se utiliza como criterio de rechazo,

$$\left|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet}\right| > D_\gamma\,(a-1, \text{g.l})\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right)} \tag{4}$$

con $D_\gamma\,(a-1, \text{g.l})$ valor crítico de la prueba Dunnett bilateral de nivel de significancia γ y grados de libertad g.l correspondientes a los del MSE del modelo ANOVA.

Nota 3.1

Los valores $D_\gamma(a-1, g.l)$ son valores críticos de la distribución conjunta de $\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{1\bullet}\right)/\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_1}\right)}$, $i=1,\ldots,a$, distribución que es un caso de la t multivariada y la cual depende de la correlación entre los pares de variables $\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{1\bullet}\right)$ y $\left(\bar{Y}_{k\bullet}-\bar{Y}_{1\bullet}\right)$, la cual, según Dean et. al. (2017), es

$$\rho=\frac{n}{n+c}, \tag{5}$$

si el número de réplicas del tratamiento control es $n_1=c$ mientras que para los tratamientos $i=2,\ldots,a$, es $n_i=n$. En particular, si todos los tratamientos son igualmente replicados, esta correlación sería igual a 0.5.

Comparaciones con un control tipo unilaterales

A veces al comparar contra un tratamiento control el objetivo no es solo establecer diferencias sino más bien determinar si los nuevos tratamientos son mejores que el control. En ciertos casos, ser mejor que el control pudiera ser dar una respuesta media mayor que el control, en otros contextos ser mejor que el control sería dar una respuesta media menor que el control. Consideremos los dos casos, teniendo en cuenta que podemos recurrir a I.C unilaterales simultáneos de Dunnett de nivel $(1-\gamma)\times 100\%$, para las diferencias de medias $\mu_i - \mu_1$,

1. **Cuando ser mejor que el control implica una respuesta media mayor:**

$$\mu_i - \mu_1 \geq \left(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet}\right) - D_{1,\gamma}(a-1, \text{g.l})\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right)} \qquad (6)$$

   Si el lado derecho de (6) es positivo, se infiere que el i-ésimo tratamiento da una respuesta media mayor que el control.

2. **Cuando ser mejor que el control implica una respuesta media menor:**

$$\mu_i - \mu_1 \leq \left(\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{1\bullet}\right) + D_{1,\gamma}(a-1, \text{g.l})\sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_1}\right)} \qquad (7)$$

   Si el lado derecho de (7) es negativo, se infiere que el i-ésimo tratamiento da una respuesta media menor que el control.

Dunnett en R

En R tenemos con librería `lsmeans`, combinando las funciones `summary()` y `contrast()`, así

```
library(lsmeans)
mediasMCO=lsmeans(modeloanova,~factor) #estim. de MC de las medias
#Dunnett bilateral: IC simultáneos y valores P
summary(contrast(mediasMCO,method="trt.vs.ctrl",adjust="mvt",ref=1),
         infer=c(T,T),level=0.95,side="two-sided")

#Dunnett unilateral con H1:mu_i-mu_1<0 y IC de cota superior
summary(contrast(mediasMCO,method="trt.vs.ctrl",adjust="mvt",ref=1),
         infer=c(T,T),level=0.95,side=" < ")

#Dunnett unilateral con H1:mu_i-mu_1>0 y IC de cota inferior
summary(contrast(mediasMCO,method="trt.vs.ctrl",adjust="mvt",ref=1),
         infer=c(T,T),level=0.95,side=" > ")
```

También con la librería `multcomp` usando la función `glht()` combinada con las funciones `summary()` para obtener valores P, o bien con `confint()` para obtener los I.C simultáneos. Ver en Notas de Clase el Código R 4.6.1 y la Salida R 4.6.4.

Ejemplo 4.6.1 en Notas de Clase: LSD, Tukey, Duncan y Dunnett

Considere el "Experimento de las lechugas", presentado inicialmente en las Notas de Clase en la Sección 3.2.7, donde el factor es el nivel de contenido de nitrato de amonio en un fertilizante aplicado en la cosecha de lechugas de una variedad dada (Lb nitrato/acre). Primero veremos las comparaciones por pares de medias mediante los métodos LSD, Tukey y Ducan, cuyos resultados R son presentados en la Sección 4.6.1, sin embargo, veremos el procedimiento paso a paso como se muestra en el archivo ▸ ir a archivo Calculosvariosenejemplolechugasv02.pdf. Para Dunnett, considere como tratamiento control el nivel 1: "0 Lb nitrato/acre".

Contenido

Contrastes de medias de tratamientos

Definición 4.1

Un contraste es una combinación lineal de parámetros del mismo tipo tal que la suma de los pesos de la combinación es cero.

Nos interesan contrastes de medias de tratamientos. Para un DOE con un solo factor de tratamientos, con a niveles de efectos fijos, en un DCA:

$$W = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i, \text{ tal que: } \sum_{i=1}^{a} c_i = 0. \tag{8}$$

Bajo supuestos del modelo ANOVA, un estimador insesgado es:

$$\widehat{W} = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i\bullet} \sim N\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i, \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \frac{\sigma^2}{n_i}\right). \tag{9}$$

Nota 4.1

- ***$\widehat{W}$ es el contraste de las $\bar{Y}_{i\bullet}$. Su varianza es la combinación lineal de las varianzas de estas medias, ponderadas por el respectivo c_i^2.***
- ***Para la distribución de $\widehat{W}$, recordar que una combinación lineal de v.a's normales independientes es una variable normal. Por tanto, cualquier inferencia (tests de hipótesis e I.C) sobre su media, W, es realizada bajo la teoría básica de inferencias para la media de una distribución normal.***

Tabla 2: Inferencias sobre contrastes de medias μ_i Ir a ec. (11)

Tests	Rechazar H_0 si	VP
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W \neq W0$	$\lvert T_0\rvert > t_{\gamma/2,N-a}$	$P(\lvert t_{N-a}\rvert > \lvert T_0\rvert)$
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W > W0$	$T_0 > t_{\gamma,N-a}$	$P(t_{N-a} > T_0)$
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W < W0$	$T_0 < -t_{\gamma,N-a}$	$P(t_{N-a} < T_0)$
IC de $(1-\gamma)100\%$		
$\widehat{W} \pm t_{\gamma/2,N-a}\sqrt{MSE\sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}$		

$$\text{con } T_0 = \frac{\widehat{W} - W_0}{\sqrt{MSE\sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}} \sim t_{N-a} \tag{10}$$

test ANOVA vs. Test t de la significancia de un contraste de medias

Hipótesis prueba de significancia del contraste W

$$H_0 : W = 0 \text{ vs. } H_1 : W \neq 0$$

Tabla 3: ANOVA para test de significancia del contraste

FUENTE	g.l	SC	CM	F_0	Valor P
Contraste	1	SSW	SSW	SSW/MSE	$P\left(f_{1,N-a} > F_0\right)$
Error	$N-a$	SSE	$\text{MSE} = \text{SSE}/(N-a)$		

$\text{SSW} = \dfrac{\widehat{W}^2}{\sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}$, *suma de cuadrados debida al contraste.*

Bajo H_0 *y supuestos sobre los errores,* $F_0 = \text{SSW}/\text{MSE} \sim f_{1,N-a}$

Se rechaza H_0 *para valores grandes de* F_0, *esto es, si* $P\left(f_{1,N-a} > F_0\right)$ *es pequeña.*

Veamos relación con test t.

De la Tabla 2 y ecuación (10) ▸ ir a Tabla 2-ec. (4)*, el test t de significancia del contraste tiene como estadístico de prueba y valor P asociado:*

$$T_0 = \frac{\widehat{W}}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}} \sim t_{N-a}, \qquad \text{VP} = P\left(|t_{N-a}| > |T_0|\right) \tag{11}$$

De donde tenemos la siguiente relación entre estadísticos y valores P de los test anova y test t de la significancia del contraste de medias, W:

$$F_0 = \frac{\text{SSW}}{\text{MSE}} = T_0^2 \Rightarrow P\left(f_{1,N-a} > F_0\right) = P\left(|t_{N-a}| > |T_0|\right) \tag{12}$$

Para un nivel γ de significancia, las regiones críticas del test anova y test t de la significancia del contraste son,

$$\text{en el test anova: } F_0 > f_{\gamma,1,N-a}, \quad \text{en el test } t\text{: } |T_0| > t_{\gamma/2,N-a} \tag{13}$$

Nota 4.2

Recuerde que el cuadrado de una variables aleatoria t-Student de ν grados de libertad se distribuye como una variable aleatoria $f_{1,\nu}$.

Ejemplo 4.7.2 en Notas de Clase

- **Respuesta:** *# colonias de coliformes fecales de una muestra de agua de río que crecieron sobre filtro usado.*
- **Factor de tratamientos:** *Tipos de filtros, $a = 7$ niveles. Preesterilizados, $i = 1,4,7$. No preesterilizados, $i = 2,3,5,6$.*
- **U.E:** *Muestras de agua de río.*
- **Número de réplicas por tratamiento:** $n_i = 3, \forall\, i = 1,\ldots,7$.
- **Modelo ANOVA:** *Un factor de tratamientos de efectos fijos en un DCA.*

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0,\sigma^2\right), \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{7} \alpha_i = 0.$$

- **Medias muestrales:**

i	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{y}_{i\bullet}$	36.0	18.0	27.7	28.0	28.3	37.7	30.3

- **MSE:** *21.6.*
- **Pregunta:** *¿Filtros preesterilizados* **no difieren** *de los no preesterilizados en términos de los conteos prom. de colonias de coliformes fecales que crecen sobre el filtro?*

Definición del contraste de interés:

$W =$ (promedio medias preesterilizados)−(promedio medias no preesterilizados)

entonces,

$$W = \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_4 + \mu_7) - \frac{1}{4}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6)$$

Pesos c_i						
$i=1$	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

Cálculo del contraste estimado, su suma de cuadrados y estadístico F_0

- $\widehat{W} = \frac{1}{3}(\bar{y}_{1\bullet} + \bar{y}_{4\bullet} + \bar{y}_{7\bullet}) - \frac{1}{4}(\bar{y}_{2\bullet} + \bar{y}_{3\bullet} + \bar{y}_{5\bullet} + \bar{y}_{6\bullet}) = 3.508$
- $\sum_{i=1}^{7} c_i^2/n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} c_i^2 = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$
- $\text{SSW} = \widehat{W}^2/\sum_{i=1}^{7} c_i^2/n_i = (3.508)^2/(7/36) = 63.288$
- Estadístico $F_0 = \text{SSW}/\text{MSE} = 63.288/21.6 = 2.93$

Test ANOVA del contraste:

$$H_0 : W = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : W \neq 0$$

FUENTE	g.l	SC	CM	F_0	$P\left(f_{1,14} > F_0\right)$
Contraste	1	63.288	63.288	2.93	0.1089
Error	14	302.400	21.600		

¿Conclusión?

Un IC. del 95 % para W:

$$\widehat{W} \pm t_{0.025,14} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{7} \frac{c_i^2}{n_i}} = 3.508 \pm 2.144787 \sqrt{21.6 \times 7/36} = (-0.888, 7.904).$$

Observe que $0 \in (-0.888, 7.904)$.

Adicionalmente, construya la ANOVA del experimento y verifique la significancia del factor filtros, asumiendo válidos los supuestos sobre los errores. Tenga en cuenta que en un DOE balanceado ($n_i = n \; \forall \; i = 1, \ldots, a$) con un factor de tratamientos de efectos fijos en un DCA:

$$\text{SSA} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = n\left[\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i\bullet}^2 - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a} \bar{y}_{i\bullet}\right)^2\right] \tag{14}$$

Solución

1. Grados de libertad
   - Factor filtros: $a - 1 = 7 - 1 = 6$
   - Error: $N - a = an - a = a(n-1) = 7 \times (3 - 1) = 14$
   - Total: $N - 1 = an - 1 = 7 \times 3 - 1 = 20$
2. Sumas de cuadrados
   - SSA: Aplicando (14), $\text{SSA} = 3\left[6311.56 - (206)^2 \div 7\right] = 747.8$
   - SSE: dado el MSE y sus g.l, entonces $\text{SSE} = (N - a) \times \text{MSE} = 14 \times 21.6 = 302.4$
   - $\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSE} = 747.8 + 302.4 = 1050.2$
3. $\text{MSA} = \text{SSA}/(a - 1) = 747.8/6 = 124.6$; $F_0 = \text{MSA}/\text{MSE} = 5.8$
4. Valor P: $P\left(f_{a-1,N-A} > F_0\right) = P\left(f_{6,14} > 5.8\right) = 0.0032$

Tabla ANOVA del experimento

Fuente	g.l	SC	CM	F_0	VP
Filtros	6	747.8	124.6	5.8	0.0032
Error	14	302.4	21.6		
Total	20	1050.2			

Ejercicio

Muestre que cada α_i es un contraste de las medias de tratamientos, es decir,

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{a} c_{ik}\mu_k, \text{ tal que } \sum_{k=1}^{a} c_{ik} = 0.$$

Tenga en cuenta que $\mu = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a}\mu_k$ y que $\alpha_i = \mu_i - \mu$.

Contrastes de medias de tratamientos en R

En R disponemos de las siguientes funciones:

- `fit.contrast(...)`: Función de la librería `gmodels`, para la estimación de los contrastes deseados, con sus estadísticos T_0 para el test de significancia, el valor P asociado e intervalos de confianza del nivel deseado.
- `glht(...)`: Función de la librería `multcomp`, que combinada con las funciones `summary()` y `confint()`, permite obtener, respectivamente, resultados para pruebas de hipótesis e I.C bilaterales y unilaterales, sobre contrastes de medias.

Nota 4.3

Ver Ejemplos 4.7.8 y 4.7.9, Notas de Clase - Diseño de Experimentos

Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2nd Edition. Springer.

Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3ª Edición. McGraw-Hill.

Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2ª Edición. Thomson Learning.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5th Edition. McGraw-Hill Irwin.

Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10th Edition. John Wiley & Sons, Inc.