$H_0: \pi = 1/2$ ✓

$H_A: \pi \neq 1/2$ ✓

$$B_{01} = \frac{m_0(x)}{m_1(x)}$$ ✓

$n = 104\,490\,000$ $\quad x = 52\,263\,740$

$X \sim \text{Binomial}(n, x)$

$$\underline{m_0(52263740)} = \binom{104490000}{52263740} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{52263740} \times \left(1/2\right)^{n-x}$$

$= 1.01349e-07$

Para evaluar $m_1(x)$ tenemos $\pi \sim \text{Beta}(1,1) = U(0,1)$

$m_1(522263740) =$

$$\int_0^1 \binom{n}{x} \pi^{x} (1-\pi)^{n-x} \times (1)\, d\pi$$

$$= \underline{\underline{\binom{n}{x}}} \frac{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} \times$$

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(x+1+n-x+1)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(n-x+1)} \pi^{x+1-1} (1-\pi)^{n-x+1-1}\, d\pi}_{1}$$

Si n es entero $\Gamma(n+1) = n!$

$$= \frac{n!}{\cancel{x!}\,\cancel{(n-x)!}} \; \frac{\cancel{x!}\,\cancel{(n-x)!}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Ejemplo

(Prueba de sabor): *se conduce un experimento para determinar si un individuo tiene poder discriminatorio. El individuo debe identificar correctamente cuál de las dos marcas de un producto ha recibido. Si θ denota la probabilidad de que seleccione la marca correcta en el i-ésimo ensayo, entonces la variable Bernoulli x_i denota el resultado del experimento, tomando el valor 1 si acierta y 0 si falla. Suponga que en los primeros seis ensayos los resultados son: 1,1,1,1,1 y 0. El problema es verificar*

$$H_0 : \theta = 1/2 \quad vs. \quad H_1 : \theta > 1/2$$

Suponga que $\theta \sim U(0,1)$.

$$Y = \sum_{i=1}^{6} x_i \qquad Y \sim \text{Binomial}(6, \theta)$$

$$y = 5$$

$$B_{01} = \frac{m_0(5)}{\int_{1/2}^{1} p(y|\theta)\, p(\theta)\, d\theta} = \frac{m_0(5)}{m_1(5)}$$

$$m_0(5) = \binom{6}{5} (1/2)^5 (1/2)$$

$$m_1(5) = \int_{1/2}^{1} \binom{6}{5} \theta^5 (1-\theta)^1 \, d\theta$$

$$= \boxed{\binom{6}{5} \frac{\Gamma(6)\Gamma(2)}{\Gamma(8)}} \times \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(6)\Gamma(2)} \theta^{6-1} (1-\theta)^{2-1} \, d\theta}$$

$$P(\theta \geq 1/2) =$$

$$1 - \text{pbeta}(1/2, 6, 2)$$

$$= \binom{6}{5} \frac{\Gamma(6)\Gamma(2)}{\Gamma(8)} \times \left(1 - \text{pbeta}(1/2, 6, 2)\right)$$

$$B_{01} = \frac{\cancel{\binom{6}{5}} (1/2)^6 \, \Gamma(8)}{\cancel{\binom{6}{5}} \Gamma(6)\Gamma(2) \times (1 - \text{pbeta}(1/2, 6, 2))}$$

$= 0.7$ $\quad B_{10} = 1.42$ Evidencia debil a favor del modelo 1

Ejemplo

Se quiere hacer inferencia sobre λ*: el número promedio de goles que hace el visitante. Se tienen las siguiente hipótesis:*

$$H_0 : \lambda = 1 \quad vs. \quad H_1 : \lambda = 2$$

Se asume una verosimilitud Poisson y se tiene las probabilidades a priori: $p(H_0) = 0.7$ *y* $p(H_1) = 0.3$*. Se toma una muestra aleatoria de 7 partidos y se encuentra que el visitante anoto: 3, 1, 0, 1, 0, 0 y 1 goles. ¿Qué se puede concluir?.*

tenemos hipótesis simple vs. simple.

Podemos calcular

$$\frac{p(M_0|\underset{\sim}{y})}{p(M_1|\underset{\sim}{y})} = \underbrace{\frac{m_0(\underset{\sim}{y})}{m_1(\underset{\sim}{y})}}_{B_{01}} \frac{p(M_0)}{p(M_1)} \Bigg\} \rho$$

$$p(Y=y|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

$$\prod_{i=1}^{n} p(y_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!}$$

$$p(\underset{\sim}{y} \mid \lambda) = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

$$\frac{P(M_0 \mid \underset{\sim}{y})}{P(M_1 \mid \underset{\sim}{y})} = \frac{e^{-7(1)} (1)^6}{e^{-7(2)} (2)^6} \times \frac{0.7}{0.3}$$

$$= \frac{767.64}{19.2} = 39.98$$

El resulto muestro evidencio a favor del modelo cero $\rightarrow \lambda = 1$

$$B_{01} = \frac{e^{-7(1)} (1)^6}{e^{-7(2)} (2)^6} = 17.13$$

Evidencia positiva a favor del modelo cero.

Ejemplo

Se quiere hacer inferencia sobre el número promedio de goles del equipo local. Se desea probar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \lambda \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : \lambda > 1$$

Los datos de los goles de los equipos locales de las primeras cuatro fechas del campeonato 2002-I en el primer tiempo son:

Número de goles	0	1	2	3
frecuencia	19	13	3	1

Suponga que $p(H_0) = 0.4$ y $p(H_1) = 0.6$, bajo hipótesis nula se selecciona $\lambda_0 \sim Beta(1,1)$ y bajo H_1 tenemos $\lambda_1 \sim Normal$ truncada(1.5,1). ¿Qué se puede concluir?.

Bajo H1 se tiene

$\lambda_1 \sim$ Normal truncada (1.5, 1)

$$p(\lambda_1 \mid \lambda_1 > 1) = \frac{p(\lambda_1)}{1 - p(\lambda_1 \leq 1)}$$

$$B_{01} = \frac{m_0(\tilde{y})}{m_1(\tilde{y})}$$

Y = # promedio de goles del equipo local

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$p(\underset{\sim}{y}\,|\,\lambda) = \frac{e^{-\lambda n}\,\lambda^{\sum y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

$$m_0(\underset{\sim}{y}) = \int_0^1 \frac{e^{-\lambda n}\,\lambda^{\sum y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} \times (1)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}\;\frac{\Gamma(\sum y_i + 1)}{n^{\sum y_i + 1}}$$

$$\int_0^1 \frac{n^{\sum y_i + 1}}{\Gamma(\sum y_i + 1)}\, e^{-n\lambda}\, \lambda^{\sum y_i + 1 - 1}\, d\lambda$$

$$m_0(\underset{\sim}{y}) = \frac{\Gamma(\sum y_i + 1)}{\prod_{i=1}^{n} y_i! \; n^{\sum y_i + 1}} \quad \text{pgamma}$$

$$(1, \sum y_i + 1, n)$$

$$\sigma_0^2 = 1$$
$$\mu_0 = 1.5$$

$$m_1(\underset{\sim}{y}) = \int_1^{\infty} \frac{\lambda^{\sum y_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1} y_i!} \times$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(\lambda - \mu_0)^2\right)$$

$$\times \frac{1}{1 - P\left(Z \leq \frac{1 - 1.5}{1}\right)} \, d\lambda$$