UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN
FACULTAD DE CIENCIAS

Anualidades de vida, con tasas aleatorias.
Casos:Anualidad vida entera, Retiro Programado, EIA

Trabajo-Parcial 3

Brayan Enrique Pérez M.
Juan Manuel Sánchez Restrepo

Docente
MSc. Norman Diego Giraldo Gomez

21 de junio de 2022

Anualidades de vida, con tasas aleatorias.
Casos:Anualidad vida entera, Retiro Programado, EIA

1. Un departamento de estructuración de una Aseguradora diseña una anualidad de vida vitalicia,[1] para una vida (58), financiada mediante tasas de rendimiento aleatorio de un fondo de fiducia. La anualidad es del tipo especificado en la Tabla 6.3, concpagos mes vencido, con valor inicial de $C = 2$ unidades monetarias. Para los dos primeros tipos se pactan tasa de incremento de costo de vida anual, de $\rho = 0{,}03$, efectiva anual, con $m = 12$, $q = 1$. Para las tasas de rendimiento iid NIG, use los parámetros

```
# parametros para las tasas ea mensuales
nig.est = c(alpha=45.638,
beta = -7.29, delta = 0.00539,
mu = 9.449413e-03 )
```

a) Calcule valor de la anualidad de vida, con pagos geométricos asumiendo una ley de mortalidad Makeham-Beard, con los parámetros que aparecen en la sección de esta ley en las Notas de Clase. Asuma una tasa efectiva anual de i = 0.05, iq = 0.02, ver §6.4.1, pag. 220. Y el valor de la anualidad cierta geométrica para un período n = 110 58, ver (5.64), pag. 178.

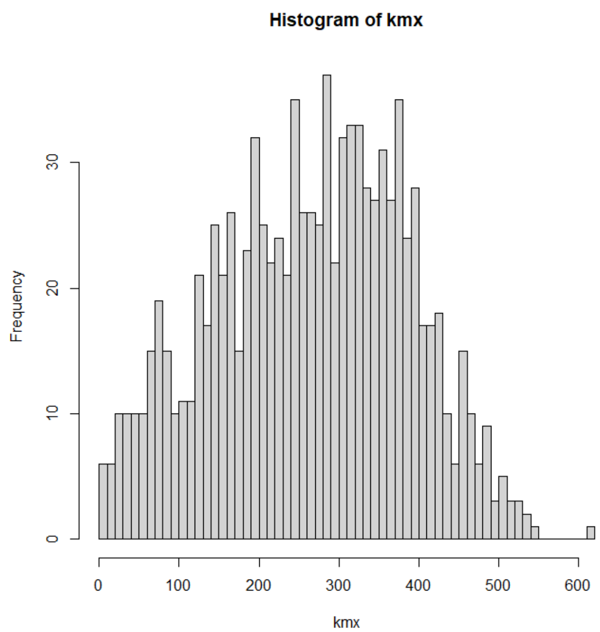
```
## a) # Anualidad de vida, con pagos geométricos asumiendo una ley de mortalidad Makeham-Bear
muxt.mb = function(t,x,pars){
  a = pars[1]; b = pars[2]; k=pars[3]; r =pars[4];
  (k+ a*exp(b*(x+t))  )/( 1 +a*r*exp(b*(x+t)) )
}
> tpx.mb = function(t,x,pars){
+   a = pars[1]; b = pars[2]; k=pars[3]; r =pars[4];
+   f=(1+a*r*exp(b*x))/(1+a*r*exp(b*(x+t)))
+   p=ifelse(t < 110-x,exp(-k*t)*f^((1-k*r)/(b*r)),0)
+   return(p)
+ }
> #------------parametros MB
> pars = c(0.00004720,0.09048063,0.00016508,0.02963878)
> #--------parametros de la anualidad
> x = 58; w = 110; i = 0.1; m = 12;
> n = w-x
> q = 1
> im = (1+i)^(1/m)-1
> iq = 0.02 # incremento inflacion anual
> C = 2  # mill
>
> Gavqxm = function(x,i,iq,m,q,pars){
+   try(if(iq > i) stop("tasa inflacion invalida"))
```

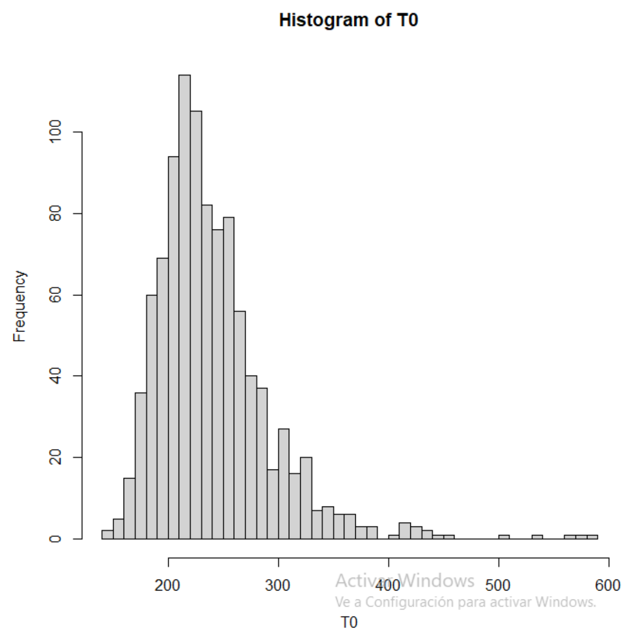
```
+   try(if(m%%q != 0) stop("m no es divisible por q"))
+   v = 1/(1+i)
+   k = seq(0,m*(110-x)-1)
+   kmpx = sapply(k,function(k)tpx.mb(k/m,x,pars))
+   vkm = v^(k/m)
+   vqm = (1+iq)^(floor(k*q/m)/q)
+   a = (1/m)*v^(1/m)*sum(vkm*vqm*kmpx)
+   return(a)}
>
> (Cp = C*m*Gavqxm(x,i,iq,m,q,pars))
[1] 235.8566
```

R/: El valor de la anualidad de vida es de 235.8566

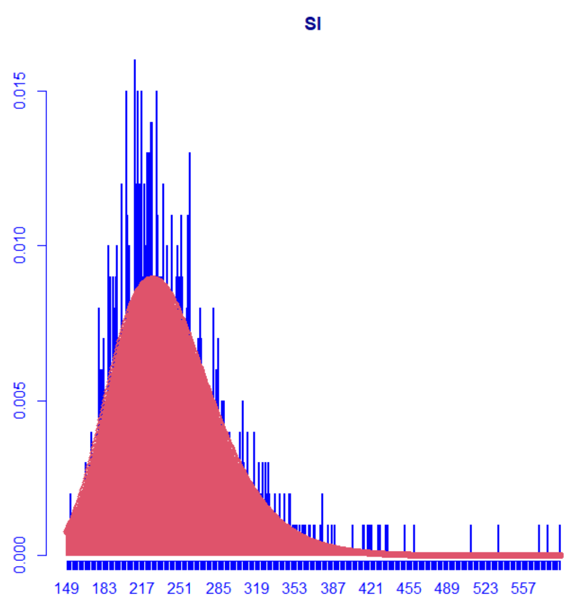
b) Denote por T_0 el mes en el cual el saldo se vuelve cero por primera vez, ver pag. 230. Genere una muestra aleatoria de T_0 mediante simulación. Reporte el histograma. Ajuste una distribución tipo Sichel a esta muestra. Reporte los parámetros μ, σ, ν. Calcule la probabilidad $P(T_0 \leq \text{m} \times \text{n})$. Es decir, la probabilidad de que el saldo se vuelva cero antes de la terminación del contrato. Indique esta probabilidad por p_0. Consultar el programa de guía en Moodle.

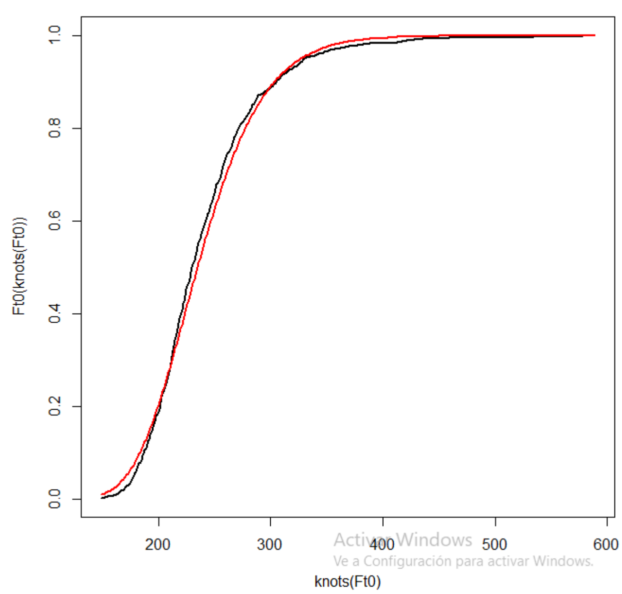
```
> for(j in 1:N1){
+   exp.ir = rep(1,n*m) + rnig(n*m, alpha=par.nig[1],
+              beta=par.nig[2],
+              delta=par.nig[3],
+              mu=par.nig[4])
+   S = matrix(0,m*n,1)
+   S[1] = exp.ir[1]*Cp2-ck[1]
+   for (k in 2:(m*n)){
+     S[k] = max(0,exp.ir[k]*S[k-1]-ck[k])}
+   T0[j] = which(S==0)[1]
+   }
> T0 = na.omit(T0)
>
> Tx = random.function(N1,f,lower = 0, upper = 110-x,kind = "cumulative")
> kmx = ceiling(Tx*m)
>
> par(mfrow =c(1,2))
> plot(time(S), S,type='l')
> hist(T0,60)
> hist(kmx,60)
> hist(T0,60)

> Sfit1 <- fitDist(y = T0, type = "counts")
> #------- 5 mejores ajustes
> Sfit1$fits[1:5]
     DEL   SICHEL       SI      BNB    ZIBNB
10439.40 10490.62 10490.62 10524.91 10526.91
> #--------ajuste de la Sichel
> mSI <- histDist(T0, "SI", main = "SI")
> parsl = c(mu=mSI$mu,sigma=mSI$sigma,nu =mSI$nu)
>
> #comprobacion del ajuste comparando la fda obs y fda sichel
>
```





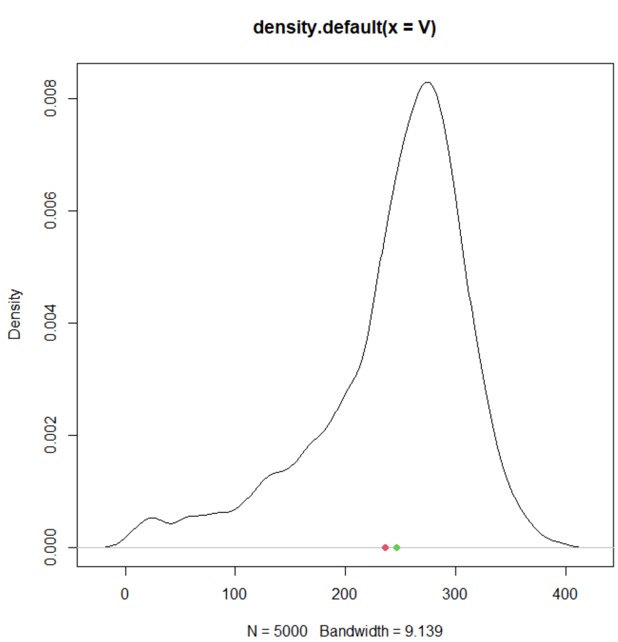

```
> Ft0=ecdf(T0)
> Ft0del = pSI(knots(Ft0), mu = parsl[1],
+               sigma = parsl[2], nu = parsl[3])
> plot(knots(Ft0),Ft0(knots(Ft0)),type='l',lwd=2)
> lines(knots(Ft0),Ft0del,col='red',lwd=2)
```

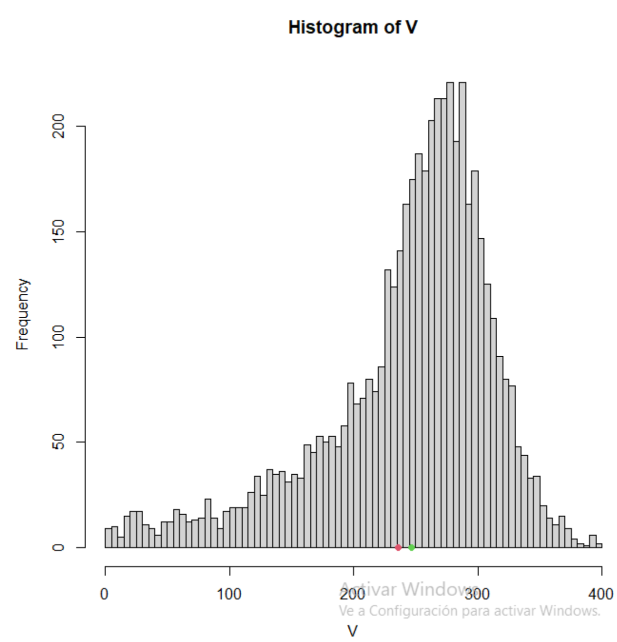




c) Simule una muestra de tamaño N = 5000 del valor presente V de los pagos pactados, descontados con la tasa asignada. Reporte el histograma, la media, la desviación estándar de V . Use la fórmula (6.81), pag. 230.

```
> N3 = 5000
> V = double(N3)
> for (k in 1:N3){
+   exp.ir = rep(1,n*m) + rnig(n*m, alpha=par.nig[1],
+                               beta=par.nig[2],
+                               delta=par.nig[3],
+                               mu=par.nig[4])
+   Tx = random.function(1,f,lower = 0, upper = 110-x,kind = "cumulative")
+   kmx = ceiling(Tx*m)
+   V[k] = sum(ck[1:kmx]/cumprod(exp.ir[1:kmx]))
+ }
> plot(density(V))
> (media_V = mean(V))
[1] 244.008
> points(c(Cp,Cp2),rep(0,2),pch=rep(20,2),cex=rep(1.5,2), col=c(2,3))
> hist(V,60)
> points(c(Cp,Cp2),rep(0,2),pch=rep(20,2),cex=rep(1.5,2), col=c(2,3))
```





R/: La media del valor presente de los pagos pactados es de 244.008

d) Denote por $\lceil mT(x) \rceil$ el último mes de vida de (x). Calcule la probabilidad de que $P(T_0 < \lceil mT(x) \rceil)$, utilizando el Teorema de Probabilidad Total. Para esto, utilice la distribución de T_0 encontrada en el punto b). Para los puntos de RP, RPH y RPE, consultar las definiciones y programas R de guia en la sección §6.5.2, pag. 231.

```
> H = mledist(VP,"lnorm", start = list(meanlog= 5.5, sdlog=0.11),lower=0.001, upper= Inf)
> (G.mle = H$estimate)
  meanlog     sdlog
5.5044886 0.1110127
> Adn<- ad.test(VP, "lnorm", meanlog =G.mle[1], sdlog= G.mle[2])
> Adn
Anderson-Darling test of goodness-of-fit
Null hypothesis: log-normal distribution
with parameters meanlog = 5.50448860521925, sdlog = 0.11101274592841
Parameters assumed to be fixed
data:  VP
An = 1.2774, p-value = 0.2398
```

En el código anterior se ajustó la distribución log-normal al Valor Presente y luego se realizó el test de bondad de ajuste con el cual se concluye que con una confianza del 95 % los datos del Valor presenten se distribuyen como una log-normal con los siguientes parámetros:
meanlog = 5.50448860521925, sdlog = 0.11101274592841
A continuación podemos usar esta distribución para calcular la probabilidad solicitada

```
(1-plnorm(Cp,meanlog = mean(log(VP)), sdlog = sd(log(VP)) ))
[1] 0.5100991
```

R/:Lo anterior significa que hay un 51 % de probabilidad que la suma de todos los pagos llevados a Valor Presente sobrepasen el valor teórico de la anualidad, se puede ver como la probabilidad que el saldo final sea positivo porque el costo ó precio de las anualidades decrece cuando las tasas del mercado i aumentan, e inversamente.