## Definición

*La densidad de probabilidad $p(x|\theta)$ donde $\theta \in \mathbb{R}$ pertenece a la familia exponencial de un parámetro si tiene la forma:*

$$p(x|\theta) = C(\theta)h(x)\exp(\phi(\theta)s(x))$$

*donde $C(\cdot), h(\cdot), \phi(\cdot), s(\cdot)$ son funciones dadas.*

## Teorema

*La distribución a priori de la forma $p(\theta) \propto C(\theta)^a \exp(\phi(\theta)b)$ es conjugada para una verosimilitud que pertenezca a la familia exponencial.*

La verosimilitud:

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta) = \underline{C(\theta)^n} \underline{\prod_{i=1}^{n} [h(x_i)]} \exp\left[\phi(\theta)\sum_{i=1}^{n} s(x_i)\right]$$

La posterior es.

$$p(\theta|\underset{\sim}{X}) \propto \cancel{C(\theta)}^{n} \exp\left[\phi(\theta)\sum_{i=1}^{n} s(x_i)\right] \cancel{C(\theta)}^{a} \exp[\phi(\theta)b]$$

$$= C(\theta)^{n+a} \exp\left[\phi(\theta)\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} s(x_i) + b\right)}^{b^*}\right]$$

$n+a = \underline{a^*}$

$$p(\theta|\underset{\sim}{X}) \propto C(\theta)^{a^*} \exp[\phi(\theta)b^*]$$

## Ejemplo

*Muestre que la distribución Binomial pertenece a la familia exponencial y encuentre la distribución a priori conjugada utilizando el teorema anterior, ¿esta distribución pertenece a la familia de distribuciones Beta?*

$$p(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \underline{\theta^{x}} \, \underline{(1-\theta)^{n}} \, \underline{(1-\theta)^{-x}}$$

$$= \binom{n}{x} (1-\theta)^{n} \underline{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\underline{x}}}$$

$$= \binom{n}{x} (1-\theta)^{n} \exp\left[x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]$$

$h(x) = \binom{n}{x}$ $\quad c(\theta) = \underline{\underline{1-\theta}}$ $\quad \phi(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

$s(x) = \underline{x}$

$\therefore$ La Binomial pertenece a la familia exponencial

La a priori

$$p(\theta) \propto (1-\theta)^{a} \exp\left[b \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right]$$

$$= (1-\theta)^{a} \frac{\theta^{b}}{(1-\theta)^{b}} = (1-\theta)^{a-b+1-1} \theta^{b+1-1}$$

$$\theta \sim \text{Beta}(b+1, a-b+1)$$

Se tiene una muestra aleatoria de una distribución Weibull cuya función de probabilidad es:

$$p(x|\theta) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{k}\right]$$

Suponga que k=1. Muestre que esta distribución pertenece a la familia exponencial y encuentre la distribución a priori para $\theta$ utilizando el teorema anterior. También encuentre la distribución posterior de $\theta$. ¿A cuál familia pertenecen estas dos distribuciones?

Verosimilitud

$$\prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left[-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$h(x) = 1 \quad c(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad \phi(\theta) = -\frac{1}{\theta} \quad s(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

La a priori

$$p(\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{a} \exp\left[-\frac{1}{\theta} b\right]$$

$$= \theta^{-(a+1-1)} \exp\left[-b/\theta\right]$$

$$\theta \sim \text{Gamma-inversa}(a-1, b)$$

La posterior

$$\theta \mid \underset{\sim}{X} \sim \text{Gamma-inversa}\left(n+a-1, b+\sum x_i\right)$$

## Ejemplo

*Muestre que la distribución Multinomial pertenece a la familia exponencial y encuentre la distribución a priori conjugada utilizando el teorema anterior.*

$$p(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\theta}) = \frac{n!}{y_1! y_2! \cdots y_k!} \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{y_i} \qquad \sum_{i=1}^{k} y_i = n$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} y_i!}}_{h(y)} \exp\left[\sum_{i=1}^{k} y_i \log(\theta_i)\right]$$

$$= h(y) \exp\left[\overbrace{\left(n - \sum_{i=1}^{k-1} y_i\right)}^{y_k} \log(\theta_k) + \sum_{i=1}^{k-1} y_i \log(\theta_i)\right]$$

$$= h(y) \exp\left[n \log(\theta_k) - \sum_{i=1}^{k-1} y_i \log(\theta_k) + \sum_{i=1}^{k-1} y_i \log(\theta_i)\right]$$

$$= h(y)\, \theta_k^n \exp\left[\sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{y_i}_{s_i(y)} \overbrace{\log\left(\frac{\theta_i}{\theta_k}\right)}^{\phi_i(\theta)}\right]$$

$$c(\theta) = \theta_k$$

Distribución a priori

$$p(\underset{\sim}{\theta}) \propto \theta_k^{a} \exp\left( \sum_{i=1}^{k-1} \log\left(\frac{\theta_i}{\theta_k}\right) b_i \right)$$

$$= \theta_k^{a} \exp\left[ \sum_{i=1}^{k-1} \log \left(\frac{\theta_i}{\theta_k}\right)^{b_i} \right]$$

$$= \theta_k^{a} \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\theta_i}{\theta_k}\right)^{b_i}$$

$$= \theta_k^{a} \, \theta_k^{-\sum_{i=1}^{k-1} b_i} \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{b_i}$$

$$= \theta_k^{a - \sum_{i=1}^{k-1} b_i + 1 - 1} \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{b_i + 1 - 1}$$

$$\alpha_k = a - \sum_{i=1}^{k-1} b_i + 1$$

$\alpha_i = b_i + 1$ para $i = 1, \ldots, k-1$

entonces

$$p(\underset{\sim}{\theta}) \propto \theta_k^{\alpha_k - 1} \prod_{i=1}^{k-1} \theta_i^{\alpha_i - 1}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{\alpha_i - 1}$$

$\therefore \quad \underset{\sim}{\theta} \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$