

Ejercicios de preparación para el parcial 1 - Series de Tiempo Univariadas

- Suponga que $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con $E(X_t) = \mu$. Considere el estimador muestral de μ dado por $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Pruebe que

- $E(\bar{X}) = \mu$
- $Var(\bar{X}) = \frac{\gamma(0)}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \rho_k$

- Considere el proceso estocástico dado por:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + w_t$$

donde w_t es un ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2 .

- Encuentre el valor de α_0 en función de la media del proceso.
- Encuentre la varianza del proceso.
- Encuentre y grafique las funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF).
- Simule y grafique una realización del proceso estocástico de tamaño 150, dando los valores que usted considere apropiados a cada uno de los parámetros. Obtenga y grafique la ACF y la PACF muestral de esta realización y compárela con las gráficas obtenidas en (c). ¿Qué observa?

- Considere el proceso estocástico dado por:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + w_t$$

donde β_0 y β_1 son constantes y w_t es un ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2 .

- Determine si X_t es estacionaria.
- Pruebe que el proceso $Y_t = X_t - X_{t-1}$ es estacionario.
- Pruebe que la media móvil dada por

$$V_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{j=-q}^q X_{t-j}$$

tiene valor esperado $\beta_0 + \beta_1 t$.

- Simule y grafique una realización del proceso estocástico X_t de tamaño 200, dando los valores que usted considere apropiados a cada uno de los parámetros. Con esta realización, obtenga y sobreponga el gráfico de la media móvil del ítem (c) para $q = 5$. ¿Qué observa?

4. Considere el proceso estocástico dado por:

$$X_t = w_{t-1} + 2w_t + w_{t+1}$$

donde los w_t son independientes con media cero y varianza σ_w^2 .

- Encuentre la media y la varianza del proceso.
- Encuentre y grafique las funciones ACF y PACF del proceso.
- Simule y grafique una realización del proceso estocástico X_t de tamaño 200, dando los valores que usted considere apropiados a cada uno de los parámetros.
- Obtenga y grafique la ACF y la PACF muestral de la realización obtenida en (c) y compárela con las gráficas obtenidas en (b). ¿Qué observa?

5. Considere el proceso estocástico dado por:

$$X_t = \delta + X_{t-1} + w_t$$

para $t = 1, 2, 3, \dots$, con $X_0 = 0$, donde w_t es un ruido blanco con varianza σ_w^2 .

- Pruebe que el modelo puede ser escrito como

$$X_t = \delta t + \sum_{k=1}^t w_k$$

- Encuentre y grafique las funciones media y autocovarianza de X_t .
- ¿El proceso X_t es estacionario? ¿Por qué?
- Sugiera una transformación para llegar a un proceso estacionario y verifíquelo.
- Simule y grafique una realización del proceso estocástico X_t de tamaño 200, dando los valores que usted considere apropiados a cada uno de los parámetros.
- Obtenga y grafique la ACF y la PACF muestral de la realización obtenida en (e) y compárela con las gráficas de la ACF y la PACF obtenidas con la transformación obtenida en (d). ¿Qué observa?

6. Pruebe que la función de autocovarianza se puede escribir como:

$$\gamma(s, t) = E(X_s X_t) - \mu_s \mu_t$$

donde $\mu_t = E(X_t)$ y $\mu_s = E(X_s)$.

7. Realice la actividad que aparece al final de las diapositivas **Presentación 1**.

8. Seleccione al menos 5 estaciones que considere de interés en la base de datos de precipitaciones del Ejemplo 2 de la Presentación 1 del curso y realice un análisis descriptivo y un modelamiento de cada una que incluya:

- El gráfico de la serie.
- Gráficos que busquen evidenciar estacionalidad anual.
- Una descomposición de la serie utilizando la función `decompose`.
- Gráficos de la ACF y PACF muestrales.
- Un modelamiento de la tendencia y de la estacionalidad con la función `lm`.
- Compare los valores reales con los predichos por su modelo.

- Realice un gráfico de los residuales, además de su ACF y PACF muestrales.

Saque conclusiones en cada uno de los items anteriores.

9. Repita los procedimientos descritos en el ejercicio anterior para cuatro series de interés que extraiga de la base de datos de cemento gris analizada en la Actividad de la Presentación 2 del curso.
10. Explore el sitio web <https://datos.gov.co/> en la pestaña **Visualiza** y obtenga al menos dos series de tiempo relacionadas con temas de su interés y repita, para dichas series, los procedimientos descritos en el ejercicio 8 de este taller de ejercicios.