TALLER 1. INTROD. AL ANALISIS MULTIVARIADO, Semestre 2022-I

1. Considere el vector aleatorio:

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \quad \text{con vector de medias dado por:} \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

y matriz de var-cov dada por:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Particione a $\underline{\mathbf{X}}$ como sigue:

$$\underline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ --- \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{bmatrix}.$$

Responda los siguientes puntos:

a) Teniendo en cuenta la partición dada anteriormente, escribir de forma particionada adecuadamente los siguientes elementos:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

b) Escribir: $E[\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$ y $E[\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

c) Escribir: $\mathrm{Var}[\underline{\mathbf{x}}^{(1)}] = \mathbf{\Sigma_{11}}$, $\mathrm{Var}[\underline{\mathbf{x}}^{(2)}] = \mathbf{\Sigma_{22}}$ y $\mathrm{Cov}[\underline{\mathbf{x}}^{(1)} , \underline{\mathbf{x}}^{(2)}] = \mathbf{\Sigma_{22}}$

d) Considere la combinación lineal $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$, con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Siguiendo las propiedades vistas en clase acerca del valor esperado y varianza de combinaciones lineales, Hallar: $E[\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$ y $\mathrm{Var}[\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$

2. Derivar expresiones para las medias, varianzas y covarianzas de las siguientes combinaciones lineales en términos de las medias (μ_i), varianzas (σ_{ii}) y covarianzas (σ_{ij}) de las variables aleatorias X_1, X_2 y X_3.

a) $X_1 - 2X_2$

b) $-X_1 + 3X_2$

c) $X_1 + X_2 + X_3$

d) $X_1 + 2X_2 - X_3$

3. Considere el vector aleatorio arbitrario

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}, \quad \text{con vector de medias dado por:} \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix}.$$

Particione a $\underline{\mathbf{x}}$ como sigue:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ --- \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix}$$

donde,

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{\Sigma}$ la matriz de var-cov de $\underline{\mathbf{x}}$ con elementos generales dados por σ_{ij}. Particionar a $\mathbf{\Sigma}$ dentro de las matrices de varianzas-covarianzas de $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ y de $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ y la matriz de covarianzas de un elemento de $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ y uno elemento de $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$.

4. Considere el vector aleatorio

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \quad \text{con vector de medias dado por:} \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y matriz de var-cov dada por:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 6 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Particione a $\underline{\mathbf{x}}$ como sigue:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(1)} \\ --- \\ \underline{\mathbf{x}}^{(2)} \end{bmatrix}$$

donde,

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{bmatrix}.$$

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y considere las combinaciones lineales $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$, $\mathbf{B}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$, $\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$ y $\mathbf{D}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$.

Escriba las combinaciones lineales anteriores en términos de las variables aleatorias X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 Hallar:

a) $E[\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

b) $E[\mathbf{D}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

c) $\mathrm{Var}[\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

d) $\mathrm{Var}[\mathbf{D}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

e) $\mathrm{Cov}[\mathbf{C}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}, \mathbf{D}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

f) $E[\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$

g) $E[\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$

h) $\mathrm{Var}[\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$

i) $\mathrm{Var}[\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}]$

j) $E[\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

k) $E[\mathbf{B}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

l) $\mathrm{Var}[\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

m) $\mathrm{Var}[\mathbf{B}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

n) $\mathrm{Cov}[\underline{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$

ñ) $\mathrm{Cov}[\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}^{(1)}, \mathbf{B}\underline{\mathbf{x}}^{(2)}]$.

5. Sea $\underline{\mathbf{x}}$ un vector de variables aleatorias con vector de medias $E[\underline{\mathbf{x}}] = \mu_{\underline{\mathbf{x}}}$ y matriz de covarianzas dada por $E(\underline{\mathbf{x}} - \mu_{\underline{\mathbf{x}}})(\underline{\mathbf{x}} - \mu_{\underline{\mathbf{x}}})^T = \mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{x}}}$. Mostrar que

$$E[\underline{\mathbf{x}\mathbf{x}}^T] = \mathbf{\Sigma}_{\underline{\mathbf{x}}} + \mu_{\underline{\mathbf{x}}}\mu_{\underline{\mathbf{x}}}^T.$$