Se puede probar que $p(\theta|\mathbf{y}) = \mathrm{N}(\theta|\mu_n, \tau_n^2)$ donde

$$\frac{1}{\tau_n^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_0^2} \qquad \mu_n = \frac{\frac{\bar{y}n}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\tau_0^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau_0^2}}$$

También se puede probar que $\tilde{y}|y \sim \text{Normal}(\mu_n, \tau_n^2 + \sigma^2)$

Ejemplo

Se toma una muestra aleatoria de n estudiantes y se les mide su peso, dando como resultado un peso promedio de 150 libras. Suponga que los pesos en la población están normalmente distribuidos con media θ desconocida y desviación estándar 20 libras. Suponga que la distribución a priori de θ es normal con media 180 y desviación estándar 40.

a) *Escriba la distribución posterior de θ (en función de n).*

$\bar{y} = 150$, $\sigma = 20$, $\mu_0 = 180$,

$\tau_0 = 40$

$\theta | y \sim N(\mu_n, \tau_n^2)$

$$\tau_n^2 = \frac{1}{\frac{n}{20^2} + \frac{1}{40^2}}$$

$$\mu_n = \frac{150\,(n/20^2) + 180/40^2}{n/20^2 + \frac{1}{40^2}}$$

b) *Se toma el peso de un nuevo estudiante y se encuentra que pesa $\tilde{y}$ libras. Escriba la distribución predictiva posterior de $\tilde{y}$ (en función de n).*

$$\tilde{y} \mid y \sim N(\mu_n, \tau_n^2 + 20^2)$$

c) Si n=10 de un intervalo posterior al 95 % para θ y $\tilde{y}$.

Para θ $Z_{0.025}$

$$\mu_n \pm \overbrace{1.96}^{Z_{0.025}} \sqrt{\tau_n^2}$$

$\mu_n = 150.7$ $\tau_n = 6.25$

$$150.7 \pm 1.96(6.25)$$

$$(138, 162)$$

Para $\tilde{y}$

$$150.7 \pm 1.96 \sqrt{(6.25^2 + 20^2)}$$

$$(109.63, 191.76)$$

Si $Y \sim$Normal (θ, σ^2) siendo θ conocida la a priori conjugada para σ^2 es la Gamma-inversa$\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0\sigma_0^2}{2}\right)$, por lo tanto
$\sigma^2|\mathbf{y} \sim$ Gamma-inversa $\left(\frac{\nu_0+n}{2}, \frac{n\nu+\nu_0\sigma_0^2}{2}\right)$ donde $\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta)^2$.

Ejemplo

Se supone que los precios de las acciones de una empresa (Y) se distribuyen normal con media θ y varianza σ^2 desconocida. Se desea hacer inferencia sobre σ y con ese fin se toma una muestra aleatoria de tamaño 12. Se registran los siguientes precios: 212, 249, 250, 240, 210, 234, 195, 199, 222, 213, 233 y 251. Si $\theta = 220$ y la distribución a priori para σ^2 es Gamma-inversa(1100, 250000). Encuentre la distribución posterior de σ^2.

$$\frac{\nu_0}{2} = 1100 \qquad \nu_0 = 2200$$

$$\frac{\nu_0\sigma_0^2}{2} = 250000 \qquad \sigma_0^2 = \frac{250000(2)}{2200}$$

$$\sigma_0^2 = 227.28$$

$$\nu = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(y_i - 220)^2 = 395.83$$

$$\sigma^2 | y \sim IG\left(\frac{12+2200}{2}, \frac{12(395.83)+2200(227.28)}{2}\right)$$

$$\sigma^2 | y \sim IG(1106, 252375)$$