Diseño de Experimentos - 3007340
DOE - Parte V: Experimentos con un factor de efectos fijos en un DBCA

Nelfi González Alvarez

Profesora Asociada Escuela de Estadística

e-mail: ngonzale@unal.edu.co

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Escuela de Estadística

Semestre 02 de 2021

Contenido I

Contenido

Principio de bloqueo

Un experimento puede involucrar factores de ruido que aun cuando no son de interés, podrían tener efectos sobre la variable respuesta.

Principio de bloqueo

1. No dejar variar libremente a factores que pueden ser influyentes sobre la respuesta.
2. **Bloqueo.** Su objetivo es seleccionar y agrupar el material experimental de modo que el ruido o error experimental sea reducido.

- *Mientras más parecidas sean las unidades experimentales, mejor serán las comparaciones entre los tratamientos.*
- *En la mayoría de los experimentos es imposible seleccionar todas las unidades experimentales idénticas.*
- *La no similaridad entre las unidades experimentales contribuye al ruido.*
- *Los experimentos pueden ser mejorados si agrupamos las unidades experimentales dentro de grupos de unidades cercanamente similares, llamadas unidades homogéneas.*
- *Los tratamientos pueden ser comparados sobre las unidades experimentales similares donde la variación de grupo puede ser considerada para el análisis.* **Los grupos de unidades similares u homogéneas son denominados bloques.**

Contenido

Controles posibles sobre factores de bloqueo y de ruido

- ***Bloqueo activo.*** El factor de ruido es parte del estudio y aparece explícitamente. ***Controlar sólo factores de bloque que se saben son influyentes y económicamente factibles de fijar en distintos niveles:*** operadores, tipos de producto, lotes, turnos, tipos de material, etc.
- ***Fijarlos en el valor usual.*** Los resultados son válidos sólo para nivel seleccionado.
- ***Aplicar aleatorización.*** El posible efecto de factores de ruido es repartido "equitativamente" entre todos los tratamientos pero ya no será posible cuantificar tales efectos. E.j. Variables ambientales, cansancio de los operadores, calentamiento de un equipo, variables que en general se mueven solas con el tiempo.

Nota 2.1

Evitar bloquear innecesariamente, pues las pruebas de hipótesis serán menos potentes y los intervalos de confianza serán más anchos que los que se obtendrían con un DCA.

Contenido

Diseño en bloques completos aleatorizados (DBCA)

- *A el factor de tratamientos con a niveles A_i, $i = 1, \ldots, a$*
- *B el factor de bloqueo, con b bloques B_j, $j = 1, \ldots, b$*
- *k_j el tamaño del j-ésimo bloque, o sea el número de U.E en el bloque B_j. Aunque es posible que k_j sea distinto en cada j, se examinará solo el caso en el que $k_j = k$, $\forall\, j = 1, \ldots, b$.*
- *$n_{i\bullet}$ el número de réplicas en el tratamiento A_i.*

Definición 3.1

Si el tamaño de los bloques k es múltiplo del número de tratamientos, entonces **el diseño es de bloques completos**. *Si además, la asignación de las U.E a los tratamientos en cada bloque se realiza aleatoriamente,* **el diseño es de bloques completos aleatorizados (DBCA)**. **En particular vamos a considerar el caso $k = a$**, *es decir, cada tratamiento es observado una vez en cada bloque y por tanto b veces en todo el experimento,* **en consecuencia, el número de réplicas por tratamiento es $n_{i\bullet} = b$, $\forall\, i = 1, \ldots, a$ y el total de observaciones es $N = ab$.**

Contenido

Propósito y ejecución del experimento

Objetivo

Comparar las medias de los a tratamientos o niveles del factor de estudio (es decir, determinar si los tratamientos tienen efectos sobre la media de la variable respuesta, o equivalentemente, si al menos para un par de niveles del factor de tratamientos hay diferencia en la media de la respuesta), ***promediados sobre un rango de condiciones diferentes.***

Ejecución del experimento

Determinado el número de bloques b, cada uno de tamaño a,

1. *En cada uno de los bloques se seleccionan y asignan aleatoriamente las U.E, una por tratamiento (las U.E que pertenecen a un mismo bloque son homogéneas entre sí pero las U.E en diferentes bloques son heterogéneas entre sí).*
2. *Se observan al azar los a tratamientos en cada bloque.*

Tabla 1: Tabla de datos de un DOE de un factor de efectos fijos en un DBCA

	Bloques						
Tratam.	B_1	B_2	$\dots$	B_j	$\dots$	B_b	Medias
A_1	Y_{11}	Y_{12}	$\dots$	Y_{1j}	$\dots$	Y_{1b}	$\bar{Y}_{1\bullet}$
A_2	Y_{21}	Y_{22}	$\dots$	Y_{2j}	$\dots$	Y_{2b}	$\bar{Y}_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	Y_{i1}	Y_{i2}	$\dots$	Y_{ij}	$\dots$	Y_{ib}	$\bar{Y}_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	Y_{a1}	Y_{a2}	$\dots$	Y_{aj}	$\dots.$	Y_{ab}	$\bar{Y}_{a\bullet}$
Medias	$\bar{Y}_{\bullet 1}$	$\bar{Y}_{\bullet 2}$	$\dots$	$\bar{Y}_{\bullet j}$	$\dots$	$\bar{Y}_{\bullet b}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$

- Y_{ij} Rta. al i-ésimo tratamiento en el j-ésimo bloque, con $i = 1, 2, \dots, a$, $j = 1, 2, \dots, n_i$
- $\bar{Y}_{i\bullet}$ prom. muestral de las $n_{i\bullet} = b$ obs. en el i-ésimo tratamiento.
- $\bar{Y}_{\bullet j}$ prom. muestral de las $n_{\bullet j} = a$ obs. en el j-ésimo bloque.
- $\bar{Y}_{\bullet\bullet}$ prom. muestral de las $N = ab$ obs.

Modelo ANOVA

Y_{ij}	La respuesta en el j-ésimo bloque con el tratamiento i, $i = 1, 2, \ldots, a$, $j = 1, 2, \ldots, b$.
ε_{ij}	El error aleatorio en la observación del tratamiento i en el bloque j.
μ	Media global.
$\mu_{i\bullet}$	La respuesta media en el tratamiento i.
α_i	El efecto fijo del tratamiento i sobre la media global.
β_j	Efecto fijo del bloque j sobre la media global.

Supuesto de no interacción entre tratamientos y bloques

Las diferencias entre las medias de tratamientos $\mu_{i\bullet}$ no cambian con los bloques.

Modelo de efectos fijo de tratamientos y de bloques:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right), \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0. \tag{1}$$

Bajo $\varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$ y $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, la respuesta media en el tratamiento i es,

$$\mu_{i\bullet} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \mathrm{E}\left[Y_{ij}\right] = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \left(\mu + \alpha_i + \beta_j\right) = \mu + \alpha_i + \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \mu + \alpha_i \tag{2}$$

Propiedades distribucionales de las respuestas y medias muestrales

Bajo los supuestos $\varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$:

1. *Las $Y_{ij} \sim N\left(\mu_{i\bullet} + \beta_j, \sigma^2\right)$, son mutuamente independientes y por tanto incorrelacionadas, aunque no idénticamente distribuidas.*
2. *Las medias muestrales de las respuestas en cada nivel de tratamientos $i = 1, \ldots, a$,* $\quad \bar{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij} \sim N\left(\mu_{i\bullet}, \sigma^2/b\right)$, *son mutuamente independientes.*
3. *La media global muestral, es decir,* $\bar{Y}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij} \sim N\left(\mu, \sigma^2/ab\right)$.

Nota 4.1

Desde que los bloques no hacen parte de los tratamientos sino de la estructura de diseño constituyendo una restricción a la aleatorización, no son de interés inferencias con relación a las medias según bloques. Con respecto al factor de bloqueo lo que interesa es determinar si es eficiente el diseño: ***¿El bloqueo contribuye a reducir significativamente el error experimental?***

Estimadores de mínimos cuadrados

Se desea hallar $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_a, \beta_1, \ldots, \beta_b)^T$ tal que,

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \varepsilon_{ij}^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \left(Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j\right)^2, \text{ sujeto a } \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0. \tag{3}$$

Ecuaciones normales

$$\sum\nolimits_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 \tag{4}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \tag{5}$$

$$Y_{\bullet\bullet} - ab\mu - b\sum\nolimits_{i=1}^{a} \alpha_i - a\sum\nolimits_{j=1}^{b} \beta_j = 0 \tag{6}$$

$$Y_{i\bullet} - b\mu - b\alpha_i - \sum\nolimits_{j=1}^{b} \beta_j = 0,\ i = 1, \ldots, a \tag{7}$$

$$Y_{\bullet j} - a\mu - \sum\nolimits_{i=1}^{a} \alpha_i - a\beta_j = 0,\ j = 1, \ldots, b \tag{8}$$

Estimadores resultantes

$$\widehat{\mu} = \bar{Y}_{\bullet\bullet} \tag{9}$$

$$\widehat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet},\ i = 1, \ldots, a \tag{10}$$

$$\widehat{\beta}_j = \bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet},\ i = j, \ldots, b \tag{11}$$

$$\widehat{\mu}_{i\bullet} = \bar{Y}_{i\bullet}\ i = 1, \ldots, a \tag{12}$$

Tenga en cuenta en las ecuaciones normales previamente presentadas, las siguientes definiciones

Representación de totales

$Y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} Y_{ij}$	suma de todas las obs.
$Y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{b} Y_{ij}$	suma de las obs. en el tratamiento i
$Y_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{a} Y_{ij}$	suma de las obs. en el bloque j.

ANOVA y test ANOVA

De acuerdo al modelo en (1), la respuesta estimada y los residuos, son

$$\widehat{Y}_{ij} = \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_j = \bar{Y}_{i\bullet} + \bar{Y}_{\bullet j} - \bar{Y}_{\bullet\bullet} \tag{13}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j} + \bar{Y}_{\bullet\bullet} \tag{14}$$

Por tanto tenemos la siguiente descomposición de la variabilidad total

$$\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2}_{\textbf{Variab. Total}} & = & \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{\textbf{debida a tratam.}} & + & \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{Y}_{\bullet j}-\bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{\textbf{debida a bloques}} & + & \underbrace{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet j}+\bar{Y}_{\bullet\bullet})^2}_{\textbf{No explicada (error)}} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{SST} & = & \text{SSA} & + & \text{SSB} & + & \text{SSE} \\
\\
\underbrace{\text{g.l(SST)}}_{ab-1} & = & \underbrace{\text{g.l(SSA)}}_{a-1} & + & \underbrace{\text{g.l(SSB)}}_{b-1} & + & \underbrace{\text{g.l(SSE)}}_{(a-1)(b-1)}
\end{array} \tag{15}$$

Tabla 2: ANOVA en un DBCA

Fuente	g.l	SC	CM	CME	F_0	Valor P
Factor	$a-1$	SSA	$MSA=\frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2+\frac{b\sum_{i=1}^a\alpha_i^2}{a-1}$	$\frac{MSA}{MSE}$	$P\left(f_{a-1,(a-1)(b-1)}>F_0\right)$
Bloques	$b-1$	SSB	$MSB=\frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2+\frac{a\sum_{j=1}^b\beta_j^2}{b-1}$	$\frac{MSB}{MSE}$	
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{(a-1)(b-1)}$	σ^2		
Total	$ab-1$	SST				

$SSA=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\left(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2=b\sum_{i=1}^a\bar{Y}_{i\bullet}^2-ab\bar{Y}_{\bullet\bullet}^2$

$SSB=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\left(\bar{Y}_{\bullet j}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2=a\sum_{j=1}^b\bar{Y}_{\bullet j}^2-ab\bar{Y}_{\bullet\bullet}^2$

$SST=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{\bullet\bullet}\right)^2=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^bY_{ij}^2-ab\bar{Y}_{\bullet\bullet}^2$

$SSE=\sum_{i=1}^a\sum_{j=1}^b(Y_{ij}-\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{\bullet j}+\bar{Y}_{\bullet\bullet})^2$

Test de hipótesis fundamental asociado al ANOVA:

$$H_0 : \mu_{1\bullet} = \mu_{2\bullet} = \cdots = \mu_{a\bullet} \text{ vs. } H_1 : \text{ algún par } \mu_{i\bullet} \neq \mu_{k\bullet} \tag{16}$$

o de forma equivalente,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0 \text{ vs. } H_1 : \text{ algún } \alpha_i \neq 0,\ i = 1, 2 \ldots, a. \tag{17}$$

Nota 4.2

(17) *resulta de* (16) *junto con la restricción lineal:* $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$*:*

$$\mu + \alpha_1 = \mu + \alpha_2 = \cdots = \mu + \alpha_a \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a$$

de donde haciendo todos los efectos iguales al del nivel a, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{i=1}^{a} \alpha_a = a\alpha_a = 0,$$

y desde que $a > 0$*, la última ecuación solo puede ser cierta si* $\alpha_a = 0$*, de modo que bajo la igualdad de los efectos, entonces* H_0*:* $\alpha_i = 0\ \forall\ i = 1, \ldots, a$*.*

El estadístico de prueba y su distribución bajo H_0 y supuestos $\varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$, es $F_0 = \text{MSA/MSE} \sim f_{a-1,(a-1)(b-1)}$. Se rechaza H_0 para valores estadísticamente grandes de F_0, es decir si $P\left(f_{a-1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$ es pequeño.

Distribuciones de los estimadores e I.C para los parámetros

Tabla 3: Estimadores, errores estándar e I.C para los parámetros de interés

Parám.	Estim.	Distribución	Std	I.C de $(1-\gamma)\%$
μ	$\bar{Y}_{\bullet\bullet}$	$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{ab}\right)$	$S_{\bar{Y}_{\bullet\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{ab}}$	$\bar{Y}_{\bullet\bullet} \pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)} \times S_{\bar{Y}_{\bullet\bullet}}$
$\mu_{i\bullet}$	$\bar{Y}_{i\bullet}$	$N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{b}\right)$	$S_{\bar{Y}_{i\bullet}} = \sqrt{\frac{MSE}{b}}$	$\bar{Y}_{i\bullet} \pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)} \times S_{\bar{Y}_{i\bullet}}$
α_i	$\widehat{\alpha_i}$	$N\left(\alpha_i, \frac{a-1}{ab}\sigma^2\right)$	$S_{\hat{\alpha}_i} = \sqrt{\frac{a-1}{ab}MSE}$	$\widehat{\alpha_i} \pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)} \times S_{\widehat{\alpha_i}}$

Nota 4.3

1. *Estimaciones e inferencia sobre las medias y efectos de los tratamientos tienen sentido realizarlas desde que en el test ANOVA se detecte diferencia de medias $\mu_{i\bullet}$ (es decir, significancia de efectos α_i).*
2. *No hay conclusión estadística sobre la igualdad de medias de bloques o de significancia de efectos β_j; la comparación meramente se hace como una forma de establecer la utilidad de haber creado bloques en el experimento, y proporciona información adicional para la planeación futura de experimentos similares.*

Inferencias sobre medias de tratamientos, $\mu_{i\bullet}$

Comparaciones múltiples por pares: Recuerde que el tamaño de muestra para cada tratamiento es $n_{i\bullet} = b \; \forall \; i = 1, \ldots, a$.

Tabla 4: Resumen métodos LSD y Tukey en los Tests: $H_0: \mu_{i\bullet} = \mu_{k\bullet}$ vs. $H_1: \mu_{i\bullet} \neq \mu_{k\bullet}$

	Método LSD	Método de Tukey
Estadístico de prueba	$D_{ik} = \left\|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{k\bullet}\right\|$	$D_{ik} = \left\|\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{k\bullet}\right\|$
Valor crít. para D_{ik}	$LSD_{ik} = t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)}\sqrt{\frac{2}{b}MSE}$	$HSD_{ik} = \frac{1}{\sqrt{2}}q_{\gamma}(a,(a-1)(b-1))\sqrt{\frac{2}{b}MSE}$
Rechazo de H_0	si $D_{ik} > LSD_{ik}$	si $D_{ik} > HSD_{ik}$
Usando I.C de nivel $(1-\gamma)100\%$ para $\mu_{i\bullet} - \mu_{k\bullet}$		
Rechazo de H_0	si $0 \notin (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{k\bullet}) \pm LSD_{ik}$	si $0 \notin (\bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{k\bullet}) \pm HSD_{ik}$

Contrastes: Sea $W = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i\bullet}$, tal que: $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$. $n_{i\bullet} = b$, $\forall\ i = 1, \ldots, a$.

$$\widehat{W} = \sum_{i=1}^{a} c_i \bar{Y}_{i\bullet} \sim N\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i\bullet}, \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \frac{\sigma^2}{b}\right). \tag{18}$$

Tabla 5: Inferencias sobre contrastes de medias $\mu_{i\bullet}$

Tests	Rechazar H_0 si	VP
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W \neq W0$	$\lvert T_0 \rvert > t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)}$	$P\left(\lvert t_{(a-1)(b-1)} \rvert > \lvert T_0 \rvert\right)$
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W > W0$	$T_0 > t_{\gamma,(a-1)(b-1)}$	$P\left(t_{(a-1)(b-1)} > T_0\right)$
$H_0 : W = W0$ $H_1 : W < W0$	$T_0 < -t_{\gamma,(a-1)(b-1)}$	$P\left(t_{(a-1)(b-1)} < T_0\right)$
IC de $(1-\gamma)100\%$		
$\widehat{W} \pm t_{\gamma/2,(a-1)(b-1)} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} c_i^2 / b}$		

$$\text{con } T_0 = \frac{\widehat{W} - W_0}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} c_i^2 / b}} \sim t_{(a-1)(b-1)} \tag{19}$$

ANOVA para contrastes de las medias de tratamientos: Sea $W = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i\bullet}$.

Hipótesis prueba de significancia del contraste

$$H_0 : W = 0 \text{ vs. } H_1 : W \neq 0$$

Tabla 6: ANOVA para test de significancia del contraste

FUENTE	g.l	SC	CM	F_0	Valor P
Contraste	1	SSW	SSW	$\frac{\text{SSW}}{\text{MSE}}$	$P\left(f_{1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$
Error	$(a-1)(b-1)$	SSE	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(a-1)(b-1)}$		

$\text{SSW} = \dfrac{\widehat{W}^2}{\sum_{i=1}^{a} c_i^2/b}$, *suma de cuadrados debida al contraste.*

Bajo H_0 y supuestos sobre los errores, $F_0 = \text{SSW}/\text{MSE} \sim f_{1,(a-1)(b-1)}$

Se rechaza H_0 para valores grandes de F_0, esto es, si $P\left(f_{1,(a-1)(b-1)} > F_0\right)$ es pequeña.

Validación de supuestos

Considerando los residuos de ajuste, $\widehat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j} + \bar{Y}_{\bullet\bullet}$

- Con su versión estandarizada (o estudentizada) se analizan gráficos de residuales *(residuos vs. niveles del factor de tratamientos, vs. bloques y vs. respuesta ajustada)* ¿Los errores son de media cero y varianza constante?; ¿no hay carencia de ajuste?; ¿outliers? *gráfico de probabilidad normal y tests de probabilidad normal* ¿los errores son normales?
- *No pueden aplicarse tests formales de homocedasticidad pues estos suponen una sola vía de clasificación de los datos experimentales, lo cual no se cumple en un DBCA ni en experimentos factoriales.*
- Independencia, desde que se conozca orden de corridas y haya suficiente información (tamaños de muestras no pequeños), *gráficos de residuos en orden de corrida y pruebas de incorrelación.*

Contenido

Eficiencia de un DBCA

- *En el contexto de la comparación de tratamientos, la eficiencia mide la precisión del experimento bajo un diseño D, en la estimación de alguna combinación lineal de las medias de tratamientos, $\sum_{i=1}^{a} c_i \mu_{i\bullet}$, y es inversamente proporcional a la varianza del estimador, es decir*

$$\text{Eficiencia } (D) = 1/Var[D] \tag{20}$$

donde $Var[D]$ corresponde a $Var\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \widehat{\mu}_{i\bullet}\right)$ bajo el diseño D.

- *La eficiencia relativa compara las eficiencias de dos diseños. Sean D_1, y D_2 dos diseños, entonces la eficiencia relativa de D_1 a D_2 es definida como*

$$ER(D_1 \text{ a } D_2) = \frac{\text{eficiencia } (D_1)}{\text{eficiencia } (D_2)} = \frac{1/Var[D_1]}{1/Var[D_2]} \tag{21}$$

Donde $Var[D_i]$ se refiere a $Var\left(\sum_{i=1}^{a} c_i \widehat{\mu}_{i\bullet}\right)$ para el diseño D_i, $i = 1, 2$.

Tomaremos como D_1 al DBCA con a tratamientos y b bloques y como D_2 a un DCA con a tratamientos y $n = b$ réplicas por tratamiento.

- ***Problema:*** *Se desconoce las varianzas en los diseños D_i, $i = 1, 2$ y solo están disponibles los datos del experimento con el diseño DBCA para estimar el correspondiente σ^2.*
- *Pero se estima la eficiencia relativa usando el procedimiento de Fisher (Gómez López, 1997; Kuehl, 2001),*

$$EER\,(DBCA \text{ a } DCA) = \frac{(f_1+1)\,(f_2+3)\,s_2^2}{(f_2+1)\,(f_1+3)\,s_1^2} \tag{22}$$

Donde s_1^2 y s_2^2 son los MSE de los diseños 1 (DBCA) y 2 (DCA), respectivamente, y $f_1 = (a-1)(b-1)$ y $f_2 = a(b-1)$, sus respectivos grados de libertad.

- *s_2^2 es estimado con los datos del DBCA así (Gómez López, 1997),*

$$s_2^2 \simeq \frac{(b-1)\,MSB + b\,(a-1)\,s_1^2}{(ab-1)}, \tag{23}$$

Otra estimación de la eficiencia relativa (Gómez López, 1997),

$$\begin{gathered} \text{ER} = k + (1-k)H \\ k = \frac{b(a-1)}{ab-1} \text{ y } H = \frac{MSB}{s_1^2} \end{gathered} \tag{24}$$

Observe que H es el F_0 asociado a los bloques en el ANOVA del DBCA.

Tenga en cuenta que (Kuehl, 2001)

No existe una prueba legítima para $H_0: \ \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_b = 0$, es decir H en la ecuación (24) no es un estadístico de prueba adecuado; sin embargo, hay una relación entre H y ER que permite interpretar a H.

Reemplazando H y k por sus valores específicos en (24), tenemos que

$$\text{ER} = k + (1-k)H = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{(b-1)MSB + b(a-1)s_1^2}{(ab-1)s_1^2}, \tag{25}$$

Se puede mostrar que:

$$\begin{gathered} \text{ER} = 1 \Leftrightarrow H = 1 \\ \text{ER} < 1 \Leftrightarrow H < 1 \\ \text{ER} > 1 \Leftrightarrow H > 1 \end{gathered}$$

Nota 5.1

Si bien H no proporciona información completa sobre la eficiencia relativa, permite una verificación rápida de la efectividad del uso de bloques, Kuehl (2001).

Interpretación de los valores de ER:

- ER $= 1$ (100 %): El bloqueo no ha ayudado ni perjudicado
- ER < 1 (100 %): El bloqueo no ha sido útil (fue ineficiente)
- ER > 1 (100 %): El bloqueo ha sido útil (fue eficiente)

Interpretación en términos de economía en la experimentación: tenga en cuenta que se requieren $n = b \times \mathrm{ER}$ replicaciones por tratamiento para que un DCA sea tan efectivo como un DBCA con b bloques:

- Si ER = 0.70 (70 %), no es útil el DBCA, ya que 7 réplicas de un DCA darían tanta información como 10 bloques o réplicas de un DBCA.
- Si ER = 3.0 (300 %), es útil el DBCA pues para que el DCA obtenga la misma eficiencia que el DBCA, necesitaría 3 réplicas por cada bloque en el DBCA, o en otras palabras, el DCA requeriría 2 réplicas más por cada bloque en el DBCA.

Nota 5.2

La ER sólo habla de la precisión de las estimaciones y no de la potencia (sensibilidad del experimento). Por ello se recomienda considerar un DBCA en vez de un DCA cuando E.R=125 %.

Nota 5.3

Ver Ejemplo 7.6 y Problema 7.7 en Notas de Clase - Diseño de Experimentos

Lectura: Diseños en cuadrados latinos (DCL)

Resulta cuando se tienen dos factores de bloqueo, el primero denominado factor de bloque columna y el segundo denominado factor de bloque fila. Se llama cuadrado porque tanto el número de niveles del factor de tratamientos como los niveles de los dos factores de bloqueo, son iguales, digamos r, y el término "latino" es debido a que los tratamientos son representados por letras latinas en mayúscula: A, B, C, etc. En un cuadrado latino, cada letra latina aparece sólo una vez por fila y por columna. Vea la Tabla 7. El cuadrado latino debe ser elegido antes de obtener los datos y luego se procede a aleatorizar las columnas y renglones (como en la Tabla 7). Las letras latinas deben ser luego asignadas aleatoriamente entre los k tratamientos. ***Más sobre este diseño, estudiarlo en la Sección 7.8 de Notas de Clase.***

Tabla 7: Cuadrado latino 4x4 inicial (izq.); sorteo de columnas 3, 2, 4, 1 (centro); sorteo de las filas 4, 2, 1, 3 (der.)

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

C	B	D	A
D	C	A	B
A	D	B	C
B	A	C	D

B	A	C	D
D	C	A	B
C	B	D	A
A	D	B	C

Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2^{nd} Edition. Springer.

Gómez López, H. (1997). *Estadística Experimental Aplicada a las Ciencias Agrícolas*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Facultad de Ciencias Agropecuarias.

Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3^{a} Edición. McGraw-Hill.

Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2^{a} Edición. Thomson Learning.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5^{th} Edition. McGraw-Hill Irwin.

Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10^{th} Edition. John Wiley & Sons, Inc.