# Diseño de Experimentos - 3007340
# DOE - Parte IV: Potencia y tamaños de muestras en experimentos con un factor en un DCA

Nelfi González Alvarez

Profesora Asociada Escuela de Estadística

e-mail: ngonzale@unal.edu.co

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Escuela de Estadística

Semestre 02 de 2021

# Contenido I

# Contenido

# Potencia vs. tamaños de muestra en un experimento

- *Recuerde que potencia es la probabilidad de rechazar una hipótesis nula siendo falsa*.
- *La potencia depende del tamaño de muestra, del nivel de significancia de la prueba (o de la amplitud de I.C de interés) y de la varianza del error.*
- *Podemos calcular el tamaño de muestra requerido para alcanzar una potencia deseada en la detección de una desviación particular con relación a la hipótesis nula.*
- *Sin embargo, en la práctica existen limitaciones como presupuestos y tiempo para la experimentación que restringen tamaños de muestra.*
- *Ante un máximo tamaño muestral N limitado por restricciones de presupuestos, es necesario calcular la potencia para determinar si tendremos información experimental suficiente para alcanzar los objetivos experimentales: ¿será necesario replantear los objetivos o podrá incrementarse el presupuesto para lograr nuestros objetivos?*

# Contenido

# Tamaños de muestra para alcanzar I.C de longitudes dadas

***En la comparación de medias de tratamientos:***

- Consideraremos iguales tamaños de muestra por tratamientos, $n_i = n \ \forall i$.
- Tenga en cuenta que a mayor $n$, menor longitud de un I.C.
- Podemos calcular el tamaño de muestra necesario para que la amplitud de un determinado tipo de I.C (de diferencias de medias, contrastes, etc.) sea igual a una longitud específica $L$.
- Es necesario tener una estimación de $\sigma^2$, bien sea de estudios previos similares o de una prueba piloto.
- Procederemos a través de un procedimiento iterativo.

***Para ilustrar, considere el caso de los I.C de Tukey para comparaciones de pares de medias.***

# Ejemplo 1: con I.C's de Tukey (páginas 136-138 en Notas de Clase)

Suponga respuesta medida en milímetros $mm$, además,

- $a = 5$ niveles
- $\widehat{\sigma}^2 = 10mm^2$ (MSE de una prueba piloto)
- Longitud deseada de los I.C del 95 % de confianza, $L \leq 6\ mm$

Desde que los I.C de Tukey del 95 %, para $n_i, n_j = n$ son todos de la misma longitud, y con la información dada, tenemos

$$L = LSC - LIC = 2 \times \mathrm{HSD}_{ij} \leq 6$$

entonces, $2 \times q_{0.05}\,(a, a(n-1))\sqrt{\dfrac{\mathrm{MSE}}{n}} \leq 6$

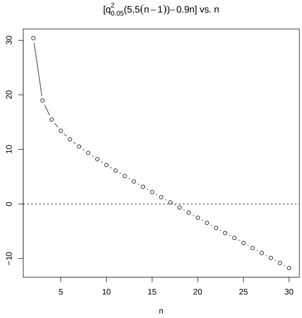
de donde es necesario $n$ tal que: $[q_{0.05}\,(5, 5(n-1))]^2 - 0.9n \leq 0$

Con esta última condición podemos definir una rutina R para buscar el $n$ mínimo necesario para que se cumpla la desigualdad.

## Procedimientos R y resultados: diftukey2 $= [q_{0.05}(a, a(n-1))]^2 - (\delta^2 n/\text{MSE})$, con $\delta = \text{máx}\, L/2$

```
> diftukey2=function(n,a,sigma2,difsig,alpha=0.05){
+ gl=a*(n-1)
+ dif=qtukey(alpha,nmeans=a,df=gl,lower.tail=FALSE)^2-(n*difsig^2)/sigma2
+ dif
+ }
>
> #Buscando secuencialmente a n, desde n=2
> n=2
> res=diftukey2(n,5,10,difsig=3)
> while(res>=0){
+ n=n+1
+ res=diftukey2(n,5,10,difsig=3)
+ }
>
> n.optim=n; n.optim
[1] 18
>
> tabla=data.frame(n=2:(n.optim),difer=diftukey2(2:(n.optim),5,10,difsig=3),
+       Acción=ifelse(diftukey2(2:(n.optim),5,10,difsig=3)>=0,
+                     "Incrementar n","No incrementar n"))
```

```
> tabla
    n      difer           Acción
1   2 30.3843420    Incrementar n
2   3 18.9624440    Incrementar n
3   4 15.4705553    Incrementar n
4   5 13.4086110    Incrementar n
5   6 11.8504250    Incrementar n
6   7 10.5270523    Incrementar n
7   8  9.3319442    Incrementar n
8   9  8.2145149    Incrementar n
9  10  7.1476759    Incrementar n
10 11  6.1156178    Incrementar n
11 12  5.1084947    Incrementar n
12 13  4.1198557    Incrementar n
13 14  3.1452978    Incrementar n
14 15  2.1817132    Incrementar n
15 16  1.2268460    Incrementar n
16 17  0.2790187    Incrementar n
17 18 -0.6630416 No incrementar n
```




```
> #o bien
> uniroot(diftukey2,lower=2,upper=30,a=5,sigma2=10,difsig=3)
$root
[1] 17.29559

$f.root
[1] -3.637983e-08

$iter
[1] 6

$init.it
[1] NA

$estim.prec
[1] 6.103516e-05
```

# Potencia y tamaños de muestra en la prueba ANOVA

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a \text{ o equivalentemente, } H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0 \\ &H_1 : \text{algún par } \mu_i \neq \mu_j \text{ o equivalentemente, } H_1 : \text{al menos un } \alpha_i \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

El estadístico de la prueba: $F_0 = \mathrm{MSA}/\mathrm{MSE}$. Con un nivel de significancia $\gamma$, la región de rechazo es $F_0 > f_{\gamma,a-1,N-a}$, entonces,

$$\text{Potencia} = P\left(F_0 > f_{\gamma,a-1,N-a} | H_0 \text{ es falsa}\right), \tag{2}$$

Bajo $H_1$ y con $n_i = n \ \forall\ i$,

- $E(MSA) = \sigma^2 + n\frac{\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{a-1}$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$,
- $F_0 \sim f_{nc}(a-1, N-a, \lambda)$ (distribución $f$ no central) con parámetro de no centralidad $\lambda = n\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2/\sigma^2$, luego, Potencia $= \pi(\lambda)$, ▸ Nota 2.3

$$\pi(\lambda) = P\left(f_{nc}(a-1, N-a, \lambda) > f_{\gamma,a-1,N-a}\right) \tag{3}$$

## Nota 2.1

*El parámetro de no centralidad $\lambda$ en un DCA balanceado puede interpretarse como*

$$\lambda = n(a-1)\times\frac{\text{varianza entre grupos}}{\text{varianza dentro de grupos}} = n(a-1)\times\frac{\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{\sigma^2} \qquad (4)$$

**Cálculo de potencia alcanzada en un experimento:** Para $n$ dado, y con un nivel de significancia $\gamma$,

$$\pi\left(\widehat{\lambda}\right) = P\left(f_{nc}\left(a-1, N-a, \widehat{\lambda}\right) > f_{\gamma,a-1,N-a}\right) \text{ con } \widehat{\lambda} = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\widehat{\alpha}_i^2}{\text{MSE}} \qquad (5)$$

## Nota 2.2

*En R usamos la función `power.anova.test()`, o bien, la función de probabilidad para la distribución F, `pf( )`, especificando parámetro de no centralidad, además de los grados de libertad.*

# Ejemplo 2 (páginas 141-142 en Notas de Clase)

- ***Factor de tratamientos:*** Diseño empaque para un nuevo cereal, con $a = 4$.
- ***U.E y diseño:*** $N = 20$ Almacenes comparables en ubicación, volumen de ventas, precios, cantidad y ubicación de espacios para estantes y esfuerzos promocionales especiales, asignados de a $n = 5$ aleatoriamente a los empaques.
- ***Respuesta:*** las ventas del cereal durante el período de estudio.

Resultados experimentales: ir a Ejemplo 3

| Fuente | df | SC | CM | $F_0$ | $P(f_{3,16} > F_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| empaque | 3 | 586.8 | 195.6 | 19.56 | $< 0.0001$ |
| error | 16 | 160.0 | 10 | | |
| total | 19 | 746.8 | | | |

| Parámetro | Estimación | Error estándar | $T_0$ | $P(\lvert t_{16}\rvert > \lvert T_0\rvert)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | -4.0 | 1.22475 | -3.27 | 0.0049 |
| $\alpha_2$ | -5.2 | 1.22475 | -4.25 | 0.0006 |
| $\alpha_3$ | 0.6 | 1.22475 | 0.49 | 0.6309 |
| $\alpha_4$ | 8.6 | 1.22475 | 7.02 | $< 0.0001$ |

***¿Cuál fue la potencia alcanzada si se usó un nivel de significancia de 0.05?***
Tenemos que el parámetro de no centralidad (aproximado) es

$$\widehat{\lambda} = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\widehat{\alpha}_i^2}{\text{MSE}} = \frac{5 \times 117.36}{10} = 58.68$$

# Procedimientos R y resultados

```
> a=4
> n=5
> efectos=c(-4,-5.2,0.6,8.6)
> var.entre=sum(efectos^2)/(a-1)
> var.intra=10 #el MSE del modelo
> power.anova.test(groups=a,n=n,between.var=var.entre,within.var=var.intra,
+                   sig.level = 0.05)

     Balanced one-way analysis of variance power calculation

         groups = 4
              n = 5
    between.var = 39.12
     within.var = 10
      sig.level = 0.05
          power = 0.9999817

NOTE: n is number in each group

> #o bien
> df1=a-1
> df2=a*(n-1)
> nc=n*sum(efectos^2)/var.intra  #parámetro de no centralidad
> fcrit=qf(0.05,df1=df1,df2=df2,lower.tail=F) #valor crítico al 0.05
> pf(fcrit,df1=df1,df2=df2,ncp=nc,lower.tail=F)
[1] 0.9999817
```

**Cálculo del tamaño de muestra para alcanzar un nivel de potencia deseado:**
Con un factor de efectos fijos en un DCA, suponga $n_i = n \ \forall\ i$. Podemos calcular el tamaño de muestra necesario para lograr una potencia $\pi_0$ en el test ANOVA con un nivel de significancia $\gamma$, para:

1. **Caso 1:** *Rechazar $H_0$ cuando los efectos $\alpha_i$ sean de una magnitud particular $\alpha_{i,0}$. Esto implica especificar para cada tratamiento el valor $\alpha_{i,0}$, pero satisfaciendo que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_{i,0} = 0$. O bien, rechazar $H_0$ cuando las medias $\mu_i$ tomen un valor especificado por el experimentador de $\mu_{i,0}$.*
2. **Caso 2:** *Rechazar $H_0$ cuando la diferencia entre cualesquier par de medias de tratamientos sea mayor o igual a cierta cantidad $\Delta$.*

En cualquiera de los dos casos anteriores, la información dada contribuye en la especificación del parámetro de no centralidad $\lambda$, donde además es necesario dar un valor a $\sigma^2$ (de estudios previos similares o de una prueba piloto).

**Nota 2.3**

*En la* ec. (3) *los g.l del denominador y el parámetro $\lambda$ de la distribución $f$ no central dependen de $n$, la incógnita a despejar en estos problemas, mientras que el número de tratamientos, los valores de los $\alpha_i$, el nivel $\gamma$, $\sigma^2$ y $\pi_0$, deben ser especificados.*

## Objetivo en el Caso 1

Hallar el mínimo $n$ tal que para $\gamma$, $\pi_0$, $\alpha_{i,0}$ (o los valores de medias de tratamientos, $\mu_{i,0}$) dados,

$$P\left(f_{nc}\,(a-1, N-a, \lambda) > f_{\gamma,a-1,N-a}\right) \geq \pi_0, \quad \text{con } \lambda = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\alpha_{i,0}^2}{\sigma^2} \tag{6}$$

Para ello, usamos la función R `power.anova.test()`, en la cual se omite la especificación del argumento `n`, mientras que damos valores a los argumentos:

- `groups`, el número de tratamientos
- `between.var`, es $\sum_{i=1}^{a}\alpha_{i,0}^2/(a-1)$, o bien, $\sum_{i=1}^{a}\left(\mu_{i,0}-\mu_0\right)^2/(a-1)$, con $\mu_0 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{i,0}$
- `within.var`, el valor supuesto para $\sigma^2$
- `power`, el valor de $\pi_0$
- `sig.level`, el nivel de significancia $\gamma$.

## Nota 2.4

*Si en lugar de los $\alpha_{i,0}$, se especifican las $\mu_{i,0}$, entonces el parámetro $\lambda$ se puede expresar así:*

$$\lambda = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\left(\mu_{i,0}-\mu_0\right)^2}{\sigma^2} \ \text{con } \mu_0 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{i,0} \tag{7}$$

# Ejemplo 3 (páginas 142-144 en Notas de Clase)

Retomando el experimento en el Ejemplo 2, ¿qué tan grandes deben ser las muestras ($n$ =?) para obtener una potencia de $\pi_0 = 0.90$, a un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, cuando las verdaderas medias por nivel del factor son $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 13$, $\mu_3 = 19.5$, $\mu_4 = 27.5$?
En este problema nos han dado los valores $\mu_{i,0}$ para las medias de tratamientos, entonces,

$$\mu_0 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{i,0} = \frac{15+13+19.5+27.5}{4} = 18.75,$$

la varianza entre grupos es

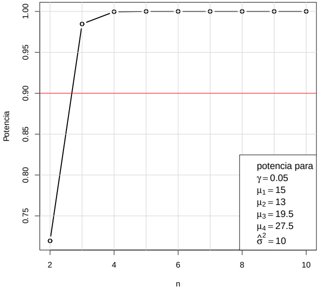
$$\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\left(\mu_{i,0}-\mu_0\right)^2 = \frac{1}{3}\left[(-3.75)^2+(-5.75)^2+(0.75)^2+(8.75)^2\right]$$

Tomando $\sigma^2 \approx 10$ (el MSE del experimento), tenemos el siguiente programa y resultados R:

# Procedimientos R y resultados

```
> #Calculando n necesario para una potencia de π0 = 0.90, para
> #Rechazar en el test ANOVA con una significancia de γ = 0.05
> #cuando μ1 = 15, μ2 = 13, μ3 = 19.5 y μ4 = 27.5
> medias=c(15,13,19.5,27.5) #vector de medias supuestas
> a=length(medias)
> var.entre=var(medias) #varianza entre medias es igual a suma de
>                       #cuadrados de los efectos divididos por (a-1)
> var.intra=10 #Estimación de σ^2
>
> power.anova.test(groups=a,between.var=var.entre,within.var=var.intra,
+                  power=0.90,sig.level = 0.05)
     Balanced one-way analysis of variance power calculation
         groups = 4
              n = 2.397409
    between.var = 41.41667
     within.var = 10
      sig.level = 0.05
          power = 0.9
NOTE: n is number in each group

> #Verificando potencia para n=2 a 10
> n=2:10
> pot=power.anova.test(groups=a,n=n,between.var=var.entre,
+                      within.var=var.intra,sig.level = 0.05)
> plot(n,pot$power,type="b",ylab="Potencia",lwd=2)
> abline(v=2:10,lty=1,col="lightgray")
> abline(h=seq(0.75,1,by=0.05),lty=1,col="lightgray")
> abline(h=0.90,lty=1,col=2)
> legend("bottomright",legend=c("potencia para",expression(gamma==0.05)
+        expression(mu[1]==15.0),expression(mu[2]==13.0),
+        expression(mu[3]==19.5),expression(mu[4]==27.5),
+        expression(hat(sigma)^2==10)),cex=1.2,bg="white")
```



### Objetivo en el Caso 2

Hallar el mínimo $n$ tal que para $\gamma$, $\pi_0$, $\Delta$ dados,

$$\pi(\Delta) = P\left(f_{nc}(a-1, N-a, \lambda) > f_{\gamma, a-1, N-a}\right) \geq \pi_0, \quad \text{con } \lambda = \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2}. \tag{8}$$

De nuevo, en la función R `power.anova.test()`, omitimos `n`, y damos valores a `groups`, `within.var`, `power` y `sig.level`, tal como en el Caso 1, en tanto que `between.var` es $\Delta^2/[2(a-1)]$

### Nota 2.5 (Dean et. al. (2017))

*Los cálculos se basan en la situación más difícil de detectar: cuando los efectos de dos de los tratamientos (por ej., el primero y el último) difieren en $\Delta$ y los otros efectos en medio de estos son todos iguales, es decir, que para alguna constante $c$,*

$$\mu + \alpha_2 = \mu + \alpha_3 = \cdots = \mu + \alpha_{a-1} = c, \quad \mu + \alpha_1 = c + \Delta/2, \quad \mu + \alpha_a = c - \Delta/2$$

*En este caso, teniendo en cuenta también que, $\mu = \sum_{i=1}^{a} \mu_i/a$ y que $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$,*

$$\lambda = \frac{n\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2}{\sigma^2} = \frac{n\Delta^2}{2\sigma^2} \tag{9}$$

# Ejemplo 4: Experimento del jabón, Dean et. al. (2017)

**Enunciado**

Ver las páginas 146-148 de Notas de Clase:

- ***Factor tratamientos:*** Tipos de jabón con $a = 3$ niveles: regular, desodorante e hidratantes, todos del mismo fabricante.
- ***U.E y diseño:*** Las secciones de moldes metálicos idénticos para ponqués llenas con 1/4 de taza de agua calentada a 100 °F, a asignar aleatoriamente entre los tratamientos (cubos de cada tipo de jabón previamente cortados con peso y dimensión similares de aprox. 1 pulgada).
- ***Respuesta:*** Pérdida de peso del jabón dejado en remojo durante 24 horas y posterior proceso de secado durante 4 días.
- ***Estimación de $\sigma^2$:*** a partir de una prueba piloto, $\widehat{\sigma}^2 = 0.007$ grms$^2$

En el test ANOVA se desea detectar una diferencia de al menos $\Delta = 0.25$ grms entre cualesquier dos tipos de jabones, con una probabilidad de $\pi_0 = 0.90$, y una probabilidad de $\gamma = 0.05$ de cometer error tipo I.

# Procedimientos R y resultados

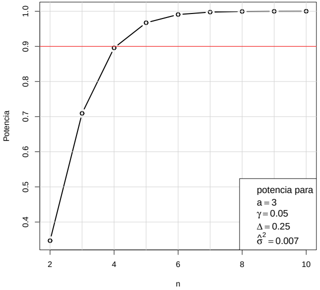
```
> #Calculando n necesario para una potencia de π₀ = 0.90, para
> #Rechazar en el test ANOVA con una significancia de γ = 0.05
> #cuando cualquier par de medias difiere en al menos Δ = 0.25 grms
> a=3
> Delta=0.25 #Parámetro Δ
> var.intra=0.007 #Estimación de σ^2
> var.entre=Delta^2/(2*(a-1)) #varianza entre medias de tratamientos
> power.anova.test(groups=a,between.var=var.entre,within.var=var.intra,
+                    power=0.90,sig.level = 0.05)

     Balanced one-way analysis of variance power calculation

         groups = 3
              n = 4.038656
    between.var = 0.015625
     within.var = 0.007
      sig.level = 0.05
          power = 0.9

NOTE: n is number in each group

> #Verificando potencia para n=2 a 10
> n=2:10
> pot=power.anova.test(groups=a,n=n,between.var=var.entre,
+                       within.var=var.intra,sig.level = 0.05)
>
> plot(n,pot$power,type="b",ylab="Potencia",lwd=2)
> abline(v=2:10,lty=1,col="lightgray")
> abline(h=seq(0.4,1,by=0.1),lty=1,col="lightgray")
> abline(h=0.90,lty=1,col=2)
> legend("bottomright",legend=c("potencia para",expression(a==3),
+         expression(gamma==0.05),expression(Delta==0.25),
+         expression(hat(sigma)^2==0.007)),cex=1.2,bg="white")
```



## Contenido

# Potencia y tamaños de muestra en experimentos con un factor de efectos aleatorios

**Consideraciones:** Suponga un experimento balanceado.

- Necesitamos determinar tanto $a$ como $n$
- Cálculos de $a$ y $n$ basados en los I.C para $\sigma_\alpha^2$, $\sigma_\alpha^2/\sigma^2$ y para $\sigma_\alpha^2/(\sigma^2+\sigma_\alpha^2)$, no son directos pues se necesitan conocer el MSA y el MSE antes del experimento.
- Sin embargo, si $N$ es prefijado, podemos aplicar lo siguiente (Dean et. al., 2017):
  1. Si esperamos que $\sigma_\alpha^2 \geq \sigma^2$, usar $a = N/2$ y $n = 2$.
  2. Si esperamos $\sigma_\alpha^2$ más pequeño que $\sigma^2$, entonces tomar $a$ tan pequeña como sea posible comparativamente con $n$.
- Si $a$ es fijado, podemos encontrar $n$, bajo dos casos
  1. **Caso 1:** *Para alcanzar una potencia $\pi_0$ en el test ANOVA a un nivel de significancia $\gamma$, cuando $\sigma_\alpha^2/\sigma^2 = \Delta$.*
  2. **Caso 2:** *Para alcanzar una potencia $\pi_0$ en el test $H_0 : \sigma_\alpha^2 \leq \eta\sigma^2$, vs. $H_1 : \sigma_\alpha^2 > \eta\sigma^2$, a un nivel de significancia $\gamma$, cuando $\sigma_\alpha^2/\sigma^2 = \Delta$.*

# Cálculo de $n$ cuando $a$ es prefijado

## Objetivo en el Caso 1

Para $a$ fijo en un experimento de un factor de efectos aleatorios en un DCA, Hallar el mínimo $n$ tal que se alcance una potencia $\pi_0$ para rechazar en el test ANOVA: $H_0 : \sigma_\alpha^2 = 0$ vs. $H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0$, a un nivel de significancia $\gamma$ cuando $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta$, es decir, tal que,

$$P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\Delta}\right) \geq \pi_0 \tag{10}$$

## Nota 3.1

*Tenga en cuenta que cuando $H_0$ es falsa: $E(MSA) = \sigma^2 + n\sigma_\alpha^2$, con $\sigma_\alpha^2 > 0$,*

$$F^* = \frac{MSA/E(MSA)}{MSE/E(MSE)} = \frac{MSA}{MSE\left(1+n\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2}\right)} \sim f_{a-1,a(n-1)}, \tag{11}$$

*entonces cuando $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta$,*

$$Potencia = P\left(\frac{MSA}{MSE} > f_{\gamma,a-1,a(n-1)} \middle| \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta\right) = P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\Delta}\right) \tag{12}$$

# Ejemplo 5

Para $a = 4$ en un experimento de un factor de efectos aleatorios en un DCA, calcular $n$ tal que se tenga una potencia de al menos $\pi_0 = 0.90$ para rechazar en el test ANOVA, a un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, cuando $\sigma_\alpha^2 = 0.75\sigma^2$ (es decir, $\Delta = 0.75$).

**Solución:** Evaluando la expresión en (10), variando $n = 2, 3, \ldots,$ hasta el mínimo $n$ necesario para que se cumpla que

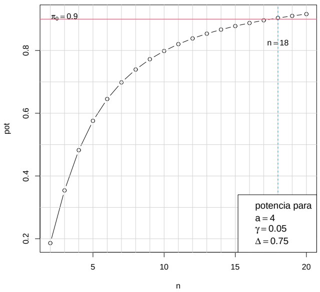
$$P\left(f_{3,4(n-1)} > \frac{f_{0.05,3,4(n-1)}}{1 + 0.75n}\right) \geq 0.90,$$

se obtiene $n = 18$ como se muestra a continuación.

# Procedimientos R y resultados

> *#evaluando $n$ para $a$ fijo en test ANOVA efectos aleatorios*
> *#cuando se quiere una potencia $\pi_0$ para rechazar H0*
> *#a un nivel $\gamma$ de significancia, cuando $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta$*

```
> potANOVADCAaleat=function(n,a,Delta,gamma){
+ fcrit=qf(gamma,df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ div=1+n*Delta
+ p=pf((fcrit/div),df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ p
+ }
> n=2:20
> pot=potANOVADCAaleat(n,a=4,Delta=0.75,gamma=0.05)
> plot(n,pot,type="b")
> abline(v=2:20,lty=1,col="lightgray")
> abline(h=seq(0.2,1,by=0.1),lty=1,col="lightgray")
> abline(h=0.90,lty=1,col=2)
> abline(v=18,col=4,lty=2)
> legend("bottomright",legend=c("potencia para",expression(a==4),
+        expression(gamma==0.05),expression(Delta==0.75)),cex=1.2,bg="white")
> text(3,0.88,labels=expression(pi[0]==0.9),pos=3)
> text(18,0.8,labels=expression(n==18),pos=3)
>
```




> *#o bien, creamos la función* **difpotaleator1** $= P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\Delta}\right) - \pi_0$

```
> difpotaleator1=function(n,a,Delta,gamma,pi0){
+ fcrit=qf(gamma,df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ div=1+n*Delta
+ dif=pf((fcrit/div),df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)-pi0
+ dif
+ }
```

*# búsqueda de $n$ como la raíz de la función difpotaleator1*

```
> uniroot(difpotaleator1,lower=2,upper=20,a=4,Delta=0.75,gamma=0.05,pi0=0.9)
$root
[1] 17.50512
$f.root
[1] 1.0929e-07
$iter
[1] 8
$init.it
[1] NA
$estim.prec
[1] 6.103516e-05
```

## Objetivo en el caso 2

Para $a$ fijo en un experimento de un factor de efectos aleatorios en un DCA, hallar el mínimo $n$ tal que se alcance una potencia de $\pi_0$ para rechazar $H_0$ en el test: $H_0 : \sigma_\alpha^2 \leq \eta\sigma^2$, vs. $H_1 : \sigma_\alpha^2 > \eta\sigma^2$, a un nivel de significancia $\gamma$, cuando $\sigma_\alpha^2/\sigma^2 = \Delta$, es decir, tal que

$$P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{(1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\times\Delta}\right) \geq \pi_0 \tag{13}$$

## Nota 3.2

*Si la verdadera razón de varianzas es* $\sigma_\alpha^2/\sigma^2 = \Delta$, *entonces* $E(MSA) = \sigma^2 + n\sigma_\alpha^2 = \sigma^2(1+n\Delta)$, *de donde*

$$F^* = \frac{MSA/E(MSA)}{MSE/E(MSE)} = \frac{MSA}{MSE\left(1+n\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2}\right)} = \frac{MSA}{MSE(1+n\Delta)} \sim f_{a-1,a(n-1)}, \tag{14}$$

*entonces cuando* $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta$,

$$Potencia = P\left(\frac{MSA}{MSE} > (1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)} \middle| \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} = \Delta\right) = P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{(1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\Delta}\right) \tag{15}$$

# Ejemplo 6

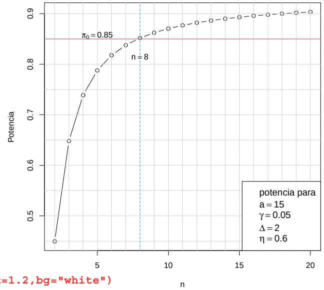
Para $a = 15$ en un experimento de un factor de efectos aleatorios en un DCA, calcular $n$ tal que se tenga una potencia de al menos $\pi_0 = 0.85$ para rechazar $H_0$ en el test: $H_0 : \sigma_\alpha^2 \leq 0.6\sigma^2$, vs. $H_1 : \sigma_\alpha^2 > 0.6\sigma^2$ (aquí $\eta = 0.6$), a un nivel de significancia de $\gamma = 0.05$, cuando $\sigma_\alpha^2 = 2\sigma^2$ (es decir, $\Delta = 2$).

**Solución:** Evaluando la expresión en (13), variando $n = 2, 3, \ldots,$ hasta el mínimo $n$ necesario para que se cumpla que

$$P\left(f_{14,15(n-1)} > \frac{(1+0.6n)\times f_{0.05,14,15(n-1)}}{1+2n}\right) \geq 0.85,$$

se obtiene $n = 8$ como se muestra a continuación.

# Procedimientos R y resultados




```
> #Evaluando n para α fijo en test H0: σ²α ≤ η × σ² vs. H1: σ²α > η × σ²
> #cuando se quiere una potencia π0 para rechazar H0
> #a un nivel γ de significancia, cuando σ²α/σ² = Δ
> potANOVADCAaleat2=function(n,a,Delta,eta,gamma){
+ fcrit=qf(gamma,df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ div=1+n*Delta
+ num=1+n*eta
+ p=pf((fcrit*num/div),df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ p
+ }
> n=2:20
> pot2=potANOVADCAaleat2(n,a=15,Delta=2,eta=0.6,gamma=0.05)
> plot(n,pot2,type="b",ylab="Potencia")
> abline(v=2:20,lty=1,col="lightgray")
> abline(h=seq(0.4,1,by=0.05),lty=1,col="lightgray")
> abline(v=8,col=4,lty=2)
> abline(h=0.85,col=2)
> legend("bottomright",legend=c("potencia para",expression(a==15),
+          expression(gamma==0.05),expression(Delta==2),expression(eta==0.6)),cex=1.2,bg="white")
> text(5,0.84,labels=expression(pi[0]==0.85),pos=3)
> text(8,0.8,labels=expression(n==8),pos=3)
>
```

> #o bien, creamos la función $\text{difpotaleator2} = P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{(1+n\times\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\Delta}\right) - \pi_0$

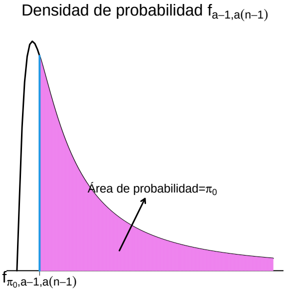
```
> difpotaleator2=function(n,a,Delta,eta,gamma,pi0){
+ fcrit=qf(gamma,df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
+ div=1+n*Delta
+ num=1+n*eta
+ dif=pf((fcrit*num/div),df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)-pi0
+ dif
+ }
# búsqueda de n como la raíz de la función difpotaleator2
> uniroot(difpotaleator2,lower=2,upper=20,a=15,Delta=2,eta=0.6,gamma=0.05,pi0=0.85)
$root
[1] 7.856037
$f.root
[1] -2.753044e-07
$iter
[1] 8
$init.it
[1] NA
$estim.prec
[1] 6.103516e-05
```

# Cálculo simultáneo de $a$ y $n$

Suponga que se desea una potencia de $\pi_0$ para rechazar $H_0$ en el test: $H_0 : \sigma^2_\alpha \leq \eta\sigma^2$, vs. $H_1 : \sigma^2_\alpha > \eta\sigma^2$, a un nivel de significancia $\gamma$, cuando $\sigma^2_\alpha/\sigma^2 = \Delta$, pero ahora, se requiere hallar tanto $a$ como $n$ satisfaciendo, que

$$\text{pot} = P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{(1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\times\Delta}\right) \geq \pi_0.$$

Sea $f_{\pi_0,a-1,a(n-1)}$ tal que $P\left(f_{a-1,a(n-1)} > f_{\pi_0,a-1,a(n-1)}\right) = \pi_0$. Es necesario que:




$$\frac{(1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\times\Delta} \leq f_{\pi_0,a-1,a(n-1)}, \text{ de donde,}$$

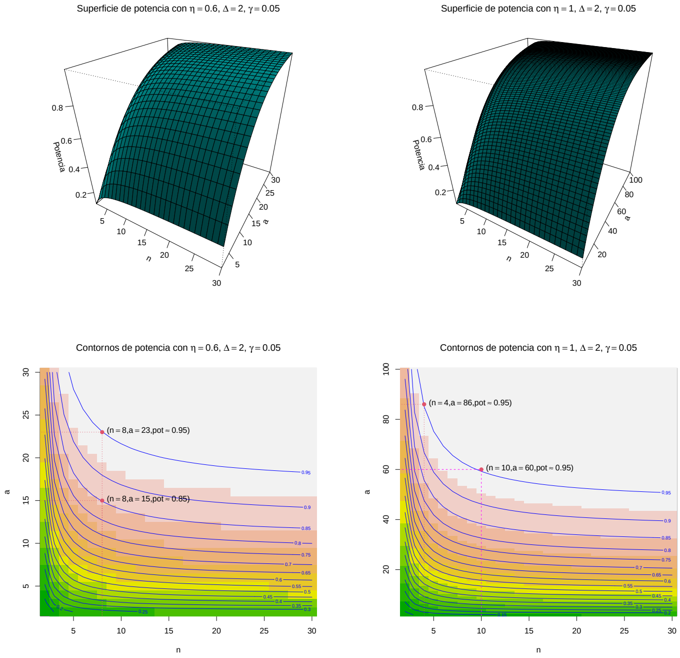
$$\frac{f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{f_{\pi_0,a-1,a(n-1)}} \leq \frac{1+n\times\Delta}{1+n\times\eta}, \text{ o bien,}$$

$$f_{\gamma,a-1,a(n-1)} \times f_{1-\pi_0,a(n-1),a-1} \leq \frac{1+n\times\Delta}{1+n\times\eta} \tag{16}$$

Podemos crear una rutina R para verificar sistemáticamente esta última desigualdad variando $a$ y $n$. Ver Ej. 6 de Notas de Clase, pág. 151-153. Vea además las gráficas siguientes, que muestran a

$$\text{pot} = P\left(f_{a-1,a(n-1)} > \frac{(1+n\eta)f_{\gamma,a-1,a(n-1)}}{1+n\times\Delta}\right)$$

como función de $a$ y $n$.


Superficie de potencia con η = 0.6, Δ = 2, γ = 0.05
Potencia
n
a
Superficie de potencia con η = 1, Δ = 2, γ = 0.05
Potencia
n
a
Contornos de potencia con η = 0.6, Δ = 2, γ = 0.05
(n = 8,a = 23,pot ≈ 0.95)
(n = 8,a = 15,pot ≈ 0.85)
a
n
Contornos de potencia con η = 1, Δ = 2, γ = 0.05
(n = 4,a = 86,pot ≈ 0.95)
(n = 10,a = 60,pot ≈ 0.95)
a
n

# Procedimiento R usado

```
potANOVADCAaleat2=function(n,a,Delta,eta,gamma){
fcrit=qf(gamma,df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
div=1+n*Delta
num=1+n*eta
p=pf((fcrit*num/div),df1=(a-1),df2=(a*(n-1)),lower.tail=F)
p
}
#---------------------------------------------
a=2:30; n=2:30
z=outer(n,a,potANOVADCAaleat2,Delta=2,eta=0.6,gamma=0.05)

persp(n, a, z, theta = 30, phi = 30, col="cyan", shade=0.75,
ticktype = "detailed",zlab = "Potencia",
      main=expression(paste("Superficie de potencia con",
      sep=" ",eta==0.6,sep=", ",Delta==2,sep=", ",
      gamma==0.05)))

image(n,a,z,col=terrain.colors(12),
     main=expression(paste("Contornos de potencia con",
     sep=" ",eta==0.6,sep=", ",Delta==2,sep=", ",
     gamma==0.05)))

contour(n,a,z,method="flattest",col="blue",add=TRUE,
        nlevels=15,xlab=expression(n),ylab=expression(a))

text(8,15,labels=expression(paste("(",sep="",n==8,sep=",",
     a==15,sep=",",pot%~~%0.85,sep="",")")),pos=4)
text(8,23,labels=expression(paste("(",sep="",n==8,sep=",",
     a==23,sep=",",pot%~~%0.95,sep="",")")),pos=4)
points(8,15,pch=19,col=2)
points(8,23,pch=19,col=2)
segments(x0=8,y0=0,x1=8,y1=15,lty=3,col=2)
segments(x0=0,y0=15,x1=8,y1=15,lty=3,col=2)
segments(x0=8,y0=0,x1=8,y1=23,lty=3,col=2)
segments(x0=0,y0=23,x1=8,y1=23,lty=3,col=2)
```

```
#-------------------------------------------
a=2:100
n=2:30
z=outer(n,a,potANOVADCAaleat2,Delta=2,eta=1,gamma=0.05)

persp(n, a, z, theta = 30, phi = 30, col="cyan", shade=0.75,
      ticktype = "detailed",zlab = "Potencia",
      main=expression(paste("Superficie de potencia con",
      sep=" ",eta==1,sep=", ",Delta==2,sep=", ",
      gamma==0.05)))

image(n,a,z,col=terrain.colors(12),
      main=expression(paste("Contornos de potencia con",
      sep=" ",eta==1,sep=", ",Delta==2,sep=", ",
      gamma==0.05)))

contour(n,a,z,method="flattest",col="blue",add=TRUE,
        nlevels=15,xlab=expression(n),ylab=expression(a))

text(4,86,labels=expression(paste("(",sep="",n==4,sep=",",
     a==86,sep=",",pot%~~%0.95,sep="",")")),pos=4)
text(10,60,labels=expression(paste("(",sep="",n==10,sep=",",
     a==60,sep=",",pot%~~%0.95,sep="",")")),pos=4)
points(4,86,pch=19,col=2)
points(10,60,pch=19,col=2)
segments(x0=4,y0=0,x1=4,y1=86,lty=3,col=2)
segments(x0=0,y0=86,x1=4,y1=86,lty=3,col=2)
segments(x0=10,y0=0,x1=10,y1=60,lty=2,col="magenta")
segments(x0=0,y0=60,x1=10,y1=60,lty=2,col="magenta")
```

Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2nd Edition. Springer.

Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3ª Edición. McGraw-Hill.

Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2ª Edición. Thomson Learning.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5th Edition. McGraw-Hill Irwin.

Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10th Edition. John Wiley & Sons, Inc.