Diseño de Experimentos - 3007340
DOE - Diseño factoriales 2^{k-p} - Parte I

Nelfi González Alvarez

Profesora Asociada Escuela de Estadística

e-mail: ngonzale@unal.edu.co

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Escuela de Estadística

Semestre 02 de 2021

Contenido I

Contenido

Factorial fraccionado

Definición 1.1 (Experimento factorial fraccionaldo 2^{k-p})

Hablamos de un experimento factorial fraccionado, 2^{k-p}, cuando solo se observa una parte o fracción del total de los 2^k tratamientos posibles. En particular, la fracción es de orden $1/2^p$, con $p \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo, un 2^{6-2} indica que de los $2^6 = 64$ tratamientos posibles solo se observa una fracción de orden $1/2^2 = 1/4$, es decir, solo 16 de los tratamientos.

Razones del fraccionamiento

- Si k es grande, puede ser imposible o muy costoso observar todos los 2^k tratamientos incluso observando solo una vez cada uno.
- Con k grande también muchos de los efectos de interacciones suelen no ser significativos y por ello sería un desperdicio de recursos ejecutar el factorial completo.
- En el procedimiento de optimización de procesos, cuando k es grande, es necesario realizar una etapa de cribado o depuración donde el interés no es estudiar aún interacciones sino elegir los factores potencialmente importantes.

De acuerdo a Gutiérrez y de la Vara Salazar (2012), a partir de un 2^5 se genera exceso de información, por el contrario, si se fracciona cuando $k < 5$ se pierde información relevante, de acuerdo a la siguiente tabla.

Tabla 1: Efectos en factoriales 2^k. Fuente: Gutiérrez y de la Vara Salazar (2012).

Experimento 2^k	Número total de Efectos	Número efectos no ignorables	Número efectos ignorables
2^2	3	3	0
2^3	7	6	1
2^4	15	10	5
2^5	31	15	16
2^6	63	21	42
2^7	127	28	99

La cantidad de efectos ignorables da cuenta del exceso de información que puede generarse. Como consecuencias del fraccionamiento se tienen las siguientes (Gutiérrez y de la Vara Salazar, 2012):

- *Se pierde información:* No todos los efectos podrán estimarse y se tienen menos grados de libertad para el error.
- *Los efectos que se pierden se esperan que sean en lo posible interacciones de alto orden,* que de antemano se pueden ignorar con bajo riesgo.
- Los efectos que se pueden estimar *tienen al menos un alias.*
- Si se elige una fracción en la cual dos efectos potencialmente importantes *son alias,* se debe contar de antemano con una estrategia para interpretar el efecto estimado.

Efectos alias y estructuras de alias

Definición 1.2 (Efectos alias)

Dos o más efectos son alias cuando a pesar de tener diferente etiquetas o nombres, comparten el mismo contraste de totales, y por lo tanto al estimarlos, están estimando un mismo efecto, de modo que no es posible separar las estimaciones de estos efectos aliados.

Definición 1.3 (Estructura de alias)

La estructura de alias muestra cuáles son los alias de cada efecto, de acuerdo a la fracción escogida.

La estructura de alias en un factorial fraccionado depende de lo que se denomina **la relación definidora.**

Operación módulo 2, interacción generalizada, contrastes de definición y relación definidora

Recuerde que a los contrastes de totales en las estimaciones de los efectos en un 2^k se les etiqueta con letras latinas mayúsculas, por ejemplo, para los efectos principales se les asigna las letras A, B, C, etc., a las interacciones de dos o más factores, la combinación de letras latinas según factores y nivel de interacción, por ejemplo, AB, AC, ABC, ADEF, etc. *Sea I la identidad, de modo que al multiplicar una etiqueta por I el resultado es la etiqueta que multiplicó a la identidad,* por ejemplo

$$A \cdot I = A; \quad I \cdot A = A$$

La operación módulo 2 entre las etiquetas de los efectos es tal que al multiplicar por sí misma una letra latina, el resultado es la identidad, por ejemplo,

$$A \cdot A = A^2 = I; \quad B \cdot B = B^2 = I;$$

entonces,

$$A \cdot A \cdot A = I \cdot A = A; \quad ACD \cdot BCE = ABC^2DE = ABDE$$
$$ABCF \cdot ABFGH = A^2B^2CF^2GH = CGH.$$

Definición 1.4

Llamamos interacción generalizada de dos contrastes de totales al producto módulo 2 de sus respectivas etiquetas.

Por ejemplo, para los contrastes ABC y ADEF, su interacción generalizada es

$$ABC \cdot ADEF = BCDEF$$

Definición 1.5 (Contrastes de definición)

Para el fraccionamiento se eligen p contrastes de definición también llamados generadores, según los efectos a sacrificar, y corresponden a interacciones del mayor orden posible, tales que todas sus posibles interacciones generalizadas sean también del más alto orden posible.

Definición 1.6 (Relación definidora)

La relación definidora, denotada por la identidad I, consiste de los p contrastes de definición más todas su posibles $2^p - p - 1$ interacciones generalizadas.

Por ejemplo, para obtener una fracción 2^{6-3} se eligen como contrastes de definición a las $p = 3$ interacciones ABCE, BCDF, ACDG, de donde sus posibles $2^p - p - 1 = 2^3 - 3 - 1 = 4$ interacciones generalizadas son

- $ABCE \cdot BCDF = ADEF$
- $ABCE \cdot ACDG = BDEG$
- $BCDF \cdot ACDG = ABFG$
- $ABCE \cdot BCDF \cdot ACDG = CEFG$

por tanto, la relación definidora para la fracción es

$$I = ABCE = BCDF = ACDG = ADEF = BDEG = ABFG = CEFG$$

Nota 1.1

La estructura alias de un experimento factorial fraccionado se obtiene multiplicando cada uno de los $2^k - 1$ efectos posibles por cada elemento en la relación definidora, mediante la multiplicación módulo 2, de modo que cada efecto tiene $\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} = 2^p - 1$ alias.

Por ejemplo, con la relación definidora anterior, se tiene como alias para el efecto de A, a

$$A = BCE = ABCDF = CDG = DEF = ABDEG = BFG = ACEFG$$

lo que significa que estos siete efectos tendrán el mismo contraste de totales en el experimento y por tanto no podemos estimarlos separadamente.

Interpretación de efectos aliados

- Para interpretar efectos aliados es necesario suponer que sólo uno de ellos es el responsable del efecto observado y que los demás efectos son nulos.
- En general en la intepretación de efectos alias *se consideran más importantes los efectos principales que las interacciones de cualquier tipo, las interacciones dobles que las interacciones de orden 3 o superior,* etc. En el ejemplo en la página anterior, para el alias de A, el efecto correspondiente se atribuye a A.
- Si en orden de jerarquía aparecen en un grupo alias dos o más efectos de la misma importancia, por ejemplo dos interacciones dobles, es necesario resolver a cuál de ellos atribuir el efecto alias (puede ser por conocimiento previo del proceso). *Si se consideran que ambos son igualmente importantes tendrá que buscarse otro fraccionamiento o correr una fracción adicional que combinada con la primera aisle los efectos de interés. Ver Montgomery (2020).*

Contenido

Fracción 2^{k-1}

Necesitamos $p = 1$ un contraste de definición. Los pasos a seguir son como sigue

1. Elegir un contraste de definición según el efecto a sacrificar. Este contraste lo denotaremos por I. Lo más recomendable es tomar la interacción de mayor orden posible.
2. Con base en el contraste seleccionado, dividir los tratamientos entre dos bloques.
3. La fracción principal será aquella para la cual el contraste de definición tiene signo $+$.
4. La fracción complementaria será aquella para la cual el contraste de definición tiene signo $-$.
5. El efecto asociado al contraste de definición no será posible estimarlo. Este efecto se confunde o alía con el total de los datos, y por tanto con la media global μ.
6. De las dos fracciones posibles, el experimentador elige una para correr en el experimento los tratamientos que corresponden a tal fracción.

Ejemplo un 2^{5-1}, tomando como contraste de definición a la interacción ABCDE

Fracción principal $I = +ABCDE$

tratamiento	A	B	C	D	E	$ABCDE$
a	1	−1	−1	−1	−1	1
b	−1	1	−1	−1	−1	1
c	−1	−1	1	−1	−1	1
abc	1	1	1	−1	−1	1
d	−1	−1	−1	1	−1	1
abd	1	1	−1	1	−1	1
acd	1	−1	1	1	−1	1
bcd	−1	1	1	1	−1	1
e	−1	−1	−1	−1	1	1
abe	1	1	−1	−1	1	1
ace	1	−1	1	−1	1	1
bce	−1	1	1	−1	1	1
ade	1	−1	−1	1	1	1
bde	−1	1	−1	1	1	1
cde	−1	−1	1	1	1	1
$abcde$	1	1	1	1	1	1

Fracción secundaria $I = -ABCDE$

tratamiento	A	B	C	D	E	$ABCDE$
(1)	−1	−1	−1	−1	−1	−1
ab	1	1	−1	−1	−1	−1
ac	1	−1	1	−1	−1	−1
bc	−1	1	1	−1	−1	−1
ad	1	−1	−1	1	−1	−1
bd	−1	1	−1	1	−1	−1
cd	−1	−1	1	1	−1	−1
$abcd$	1	1	1	1	−1	−1
ae	1	−1	−1	−1	1	−1
be	−1	1	−1	−1	1	−1
ce	−1	−1	1	−1	1	−1
$abce$	1	1	1	−1	1	−1
de	−1	−1	−1	1	1	−1
$abde$	1	1	−1	1	1	−1
$acde$	1	−1	1	1	1	−1
$bcde$	−1	1	1	1	1	−1

Al correr una de las fracciones no se podrá estimar el efecto ABCDE puesto que no tiene un constraste dentro de cada fracción. Por ejemplo en la fracción principal siempre tiene signo positivo mientras que en la fracción secundaria siempre tiene signo negativo, por tanto el efecto ABCDE se confunde con el total de todos los datos.

La estructura de alias tomando la fracción principal, es decir con relación definidora $I = +ABCDE$, es hallada realizando el producto módulo 2 de la etiqueta de cada efecto por la relación definidora, obteniendo,

$A = BCDE$	$AB = CDE$	$BD = ACE$
$B = ACDE$	$AC = BDE$	$BE = ACD$
$C = ABDE$	$AD = BCE$	$CD = ABE$
$D = ABCE$	$AE = BCD$	$CE = ABD$
$E = ABCD$	$BC = ADE$	$DE = ABC$

Recuerde que son $2^5 - 1 = 31$ efectos, pero descontando a ABCDE, en la tabla anterior se tiene para los 30 efectos restantes sus alias definidos. También podemos escribir la anterior estructura de alias así,

$A + BCDE$	$AB + CDE$	$BD + ACE$
$B + ACDE$	$AC + BDE$	$BE + ACD$
$C + ABDE$	$AD + BCE$	$CD + ABE$
$D + ABCE$	$AE + BCD$	$CE + ABD$
$E + ABCD$	$BC + ADE$	$DE + ABC$

Para la estructura de alias de la fracción secundaria escribimos en vez de + el signo − entre los efectos aliados en la tabla anterior. Para la interpretación de la estructura alias resultante, teniendo en cuenta lo previamente establecido acerca del orden de importancia, en cada grupo de alias tomamos el efecto más importante:

alias	efecto	variable	alias	efecto	variable	alias	efecto	variable
$A + BCDE$	A	X_1	$AB + CDE$	AB	X_1X_2	$BD + ACE$	BD	X_2X_4
$B + ACDE$	B	X_2	$AC + BDE$	AC	X_1X_3	$BE + ACD$	BE	X_2X_5
$C + ABDE$	C	X_3	$AD + BCE$	AD	X_1X_4	$CD + ABE$	CD	X_3X_4
$D + ABCE$	D	X_4	$AE + BCD$	AE	X_1X_5	$CE + ABD$	CE	X_3X_5
$E + ABCD$	E	X_5	$BC + ADE$	BC	X_2X_3	$DE + ABC$	DE	X_4X_5
Las variables X_j, $j = 1, \ldots 5$, son las variables codificadas que representan los niveles bajo (-1) y alto $(+1)$ de cada uno de los factores, A, B, C, D y E, respectivamente, en el MRLM.								

Luego, definimos el modelo de regresión así,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{14} X_1 X_4 + \beta_{15} X_1 X_5 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{24} X_2 X_4 + \beta_{25} X_2 X_5 + \beta_{34} X_3 X_4 + \beta_{35} X_3 X_5 + \beta_{45} X_4 X_5 + E,$$

$$\text{con, } E_i \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right)$$

Nota 2.1

Siempre Hay $2^{k-p} - 1$ grupos de efectos alias y por tanto, el MRLM tiene preliminarmente $2^{k-p} - 1$ efectos o términos de regresión sin contar el intercepto.

Contenido

Fracción 2^{k-2}

Se requieren $p = 2$ contraste de definición. Para la construcción de la fracción se siguen los siguientes pasos

1. Se seleccionan dos contrastes de definición, interacciones del más alto orden posible, tal que su interacción generalizada sea también del más alto orden posible. *Estos dos contrastes más su interacción generalizada definen tres efectos a sacrificar.*
2. Los tratamientos se dividen entre las 4 fracciones así:
    1. Fracción 1: tratamientos donde ambos contrastes de definición son iguales a $+1$;
    2. Fracción 2: los tratamientos donde el primero de los contrastes es igual -1 y el segundo a $+1$;
    3. Fracción 3: los tratamientos donde el primero de los contrastes es igual a $+1$ y el segundo a -1
    4. Fracción 4: los tratamientos donde ambos contrastes de definición son iguales a -1.
3. Se elige una fracción a ser corrida, por ejemplo la fracción que contenga al tratamiento (1), esta fracción es denominada la fracción principal.
4. Se observarán en total $\frac{2^k}{4}$ tratamientos.

Ejemplo: Para una fracción 1/4 de un 2^6, sean los contrastes de definición $ACEF$ y $BDEF$, por tanto su interacción generalizada es $ACEF \cdot BDEF = ABCD$, es decir, serán sacrificados los efectos de interacción $ACEF$, $BDEF$ y $ABCD$. Las fracciones posibles de acuerdo al signo de los dos contrastes de definición, son:

Fracción 1/4 donde $ACEF = +1$ y $BDEF = +1$, contiene el tratamiento (1)

Yates	A	B	C	D	E	F	$ACEF$	$BDEF$
(1)	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
ac	1	−1	1	−1	−1	−1	1	1
bd	−1	1	−1	1	−1	−1	1	1
abcd	1	1	1	1	−1	−1	1	1
abe	1	1	−1	−1	1	−1	1	1
bce	−1	1	1	−1	1	−1	1	1
ade	1	−1	−1	1	1	−1	1	1
cde	−1	−1	1	1	1	−1	1	1
abf	1	1	−1	−1	−1	1	1	1
bcf	−1	1	1	−1	−1	1	1	1
adf	1	−1	−1	1	−1	1	1	1
cdf	−1	−1	1	1	−1	1	1	1
ef	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
acef	1	−1	1	−1	1	1	1	1
bdef	−1	1	−1	1	1	1	1	1
abcdef	1	1	1	1	1	1	1	1

Fracción 1/4 donde $ACEF = -1$ y $BDEF = +1$

Yates	A	B	C	D	E	F	$ACEF$	$BDEF$
a	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1
c	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1
abd	1	1	−1	1	−1	−1	−1	1
bcd	−1	1	1	1	−1	−1	−1	1
be	−1	1	−1	−1	1	−1	−1	1
$abce$	1	1	1	−1	1	−1	−1	1
de	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
$acde$	1	−1	1	1	1	−1	−1	1
bf	−1	1	−1	−1	−1	1	−1	1
$abcf$	1	1	1	−1	−1	1	−1	1
df	−1	−1	−1	1	−1	1	−1	1
$acdf$	1	−1	1	1	−1	1	−1	1
aef	1	−1	−1	−1	1	1	−1	1
cef	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1
$abdef$	1	1	−1	1	1	1	−1	1
$bcdef$	−1	1	1	1	1	1	−1	1

Fracción 1/4 donde $ACEF = +1$ y $BDEF = -1$

Yates	A	B	C	D	E	F	$ACEF$	$BDEF$
b	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1
abc	1	1	1	−1	−1	−1	1	−1
d	−1	−1	−1	1	−1	−1	1	−1
acd	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
ae	1	−1	−1	−1	1	−1	1	−1
ce	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
$abde$	1	1	−1	1	1	−1	1	−1
$bcde$	−1	1	1	1	1	−1	1	−1
af	1	−1	−1	−1	−1	1	1	−1
cf	−1	−1	1	−1	−1	1	1	−1
$abdf$	1	1	−1	1	−1	1	1	−1
$bcdf$	−1	1	1	1	−1	1	1	−1
bef	−1	1	−1	−1	1	1	1	−1
$abcef$	1	1	1	−1	1	1	1	−1
def	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1
$acdef$	1	−1	1	1	1	1	1	−1

Fracción 1/4 donde $ACEF = -1$ y $BDEF = -1$

Yates	A	B	C	D	E	F	$ACEF$	$BDEF$
ab	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
bc	−1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1
ad	1	−1	−1	1	−1	−1	−1	−1
cd	−1	−1	1	1	−1	−1	−1	−1
e	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1
ace	1	−1	1	−1	1	−1	−1	−1
bde	−1	1	−1	1	1	−1	−1	−1
$abcde$	1	1	1	1	1	−1	−1	−1
f	−1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1
acf	1	−1	1	−1	−1	1	−1	−1
bdf	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
$abcdf$	1	1	1	1	−1	1	−1	−1
$abef$	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
$bcef$	−1	1	1	−1	1	1	−1	−1
$adef$	1	−1	−1	1	1	1	−1	−1
$cdef$	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1

Tomando la fracción en la cual $ACEF = +1$ y $BDEF = +1$, la relación definidora es

$$I = ACEF = BDEF = ABCD$$

Luego, haciendo el producto módulo 2 de las etiquetas de los 60 efectos restantes (es decir, excluyendo los efectos en I y recuerde que son $2^k - 1 = 63$ posibles efectos) con cada elemento en la relación definidora, tenemos la siguiente estructura de alias (verifique que hay en total 60 etiquetas y que cada efecto está aliado con $2^p - 1 = 3$ efectos, es decir cada grupo de alias tiene $2^p = 4$ términos aliados).

$A + CEF + ABDEF + BCD$	$B + ABCEF + DEF + ACD$	$C + AEF + BCDEF + ABD$
$D + ACDEF + BEF + ABC$	$E + ACF + BDF + ABCDE$	$F + ACE + BDE + ABCDF$
$AB + BCEF + ADEF + CD$	$AC + EF + ABCDEF + BD$	$AD + CDEF + ABEF + BC$
$AE + CF + ABDF + BCDE$	$AF + CE + ABDE + BCDF$	$BE + ABCF + DF + ACDE$
$BF + ABCE + DE + ACDF$	$ADF + CDE + ABE + BCF$	$ABF + BCE + ADE + CDF$

Debemos construir una ecuación de regresión con $2^{k-p} - 1 = 15$ términos, es decir tomando un efecto por grupo de alias en orden de importancia. Pero hay grupos donde quedaron aliados dos interacciones dobles, también en los dos últimos grupos están aliadas interacciones triples, ahí es necesario decidir a cuál se le atribuirá el efecto del grupo alias. Recuerde que los efectos principales son más importante que cualquier tipo de interacción. Se decide entonces la siguiente interpretación de los grupos alias (recuerde que las variables X_j toman valores de -1 y $+1$, en los niveles bajo y alto en cada factor, respectivamente).

Grupo alias	Efecto a considerar	Término en el MRLM
$A + CEF + ABDEF + BCD$	A	X_1
$B + ABCEF + DEF + ACD$	B	X_2
$C + AEF + BCDEF + ABD$	C	X_3
$D + ACDEF + BEF + ABC$	D	X_4
$E + ACF + BDF + ABCDE$	E	X_5
$F + ACE + BDE + ABCDF$	F	X_6
$AB + BCEF + ADEF + CD$	AB	X_1X_2
$AC + EF + ABCDEF + BD$	AC	X_1X_3
$AD + CDEF + ABEF + BC$	AD	X_1X_4
$AE + CF + ABDF + BCDE$	AE	X_1X_5
$AF + CE + ABDE + BCDF$	AF	X_1X_6
$BE + ABCF + DF + ACDE$	BE	X_2X_5
$BF + ABCE + DE + ACDF$	BF	X_2X_6
$ADF + CDE + ABE + BCF$	ABE	$X_1X_2X_5$
$ABF + BCE + ADE + CDF$	ABF	$X_1X_2X_6$

Entonces el MRLM queda así,

$$\begin{aligned} Y = \beta_0 &+ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{14} X_1 X_4 + \beta_{15} X_1 X_5 + \beta_{16} X_1 X_6 \\ &+ \beta_{25} X_2 X_5 + \beta_{26} X_2 X_6 + \beta_{125} X_1 X_2 X_5 + \beta_{126} X_1 X_2 X_6 + E, \text{ con } E_i \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right). \end{aligned}$$

Contenido

Fracción 2^{k-p} en general

Se eligen p generadores, todos siendo interacciones del más alto orden posible, de manera que todos sus $2^p - p - 1$ posibles productos módulo 2 también sean interacciones de alto orden. Una vez elegidos estos p generadores, el diseño se puede construir siguiendo la idea de dividir los tratamientos en 2^p grupos de acuerdo a los signos de los contrastes de definición. Sin embargo, en muchos casos, se puede seguir la siguiente regla de dos pasos:

1. Se escribe el diseño 2^{k-p}, como si fuera el factorial completo para $k-p$ factores, usando los primeros $k-p$ factores.
2. Para los últimos p factores la columna de signos en la matriz de signos se obtiene multiplicando las columnas que indican los efectos resultantes al realizar el producto módulo 2 de los p generadores por los respectivos factores que van a sustituir en la matriz de signos. Esta regla puede aplicarse desde que el efecto resultante dependa únicamente de uno o más de los $k-p$ primeros factores.

Pero tenga en cuenta que

No en todos los casos funciona esta regla, por ejemplo, en el 2^{6-2} previamente presentado usando como generadores a $ACEF$ y $BDEF$, tenemos para los últimos $p=2$ factores, es decir, E y F, que: $E{\cdot}ACEF = ACF$ y $F{\cdot}BDEF = BDE$, o bien, $E{\cdot}BDEF = BDF$ y $F{\cdot}ACEF = ACE$, es decir, no logramos que E y F queden igualados a etiquetas que involucren solo a A, B, C y/o D.

Ejemplo: para un diseño 2^{6-2} usando como contrastes de definición a $I = +ABCE$ y $I = +BCDF$, tenemos que para los últimos $p = 2$ factores, E y F: $E \cdot ABCE = ABC$ y $F \cdot BCDF = BCD$, entonces es posible aplicar la regla de dos pasos tomando en la matriz de diseño las columnas de signos de A, B, C y D tal cual, y reemplazando las columnas de los dos últimos factores por $E = ABC$ y $F = BCD$, y luego identificamos los tratamientos según la notación de Yates, donde en la cadena de caracteres se colocan en orden alfabético las letras minúsculas para los factores en nivel alto,

A	B	C	D	$E = ABC$	$F = BCD$	Yates
−1	−1	−1	−1	−1	−1	(1)
1	−1	−1	−1	1	−1	*ae*
−1	1	−1	−1	1	1	*bef*
1	1	−1	−1	−1	1	*abf*
−1	−1	1	−1	1	1	*cef*
1	−1	1	−1	−1	1	*acf*
−1	1	1	−1	−1	−1	*bc*
1	1	1	−1	1	−1	*abce*
−1	−1	−1	1	−1	1	*df*
1	−1	−1	1	1	1	*adef*
−1	1	−1	1	1	−1	*bde*
1	1	−1	1	−1	−1	*abd*
−1	−1	1	1	1	−1	*cde*
1	−1	1	1	−1	−1	*acd*
−1	1	1	1	−1	1	*bcdf*
1	1	1	1	1	1	*abcdef*

Como la interacción generalizada de los dos contrastes de definición es $ABCE \cdot BCDF = ADEF$, la relación definidora corresponde a $I = ABCE = BCDF = ADEF$. A continuación veamos la estructura alias y el MRLM.

Haciendo el producto módulo 2 de las etiquetas de los 60 efectos restantes con cada elemento en la relación definidora, obtenemos la estructura de alias (verifique que hay en total 60 etiquetas y que cada efecto está aliado con $2^p - 1 = 3$ efectos, es decir cada grupo de alias tiene $2^p = 4$ términos aliados), luego construimos una ecuación de regresión tomando un efecto por grupo de alias en orden de importancia. Como hay grupos donde quedaron aliados dos interacciones dobles y también en los dos últimos grupos están aliadas interacciones triples, es necesario decidir a cuál se le atribuirá el efecto del grupo alias. Se decide la interpretación de los grupos alias como se muestra en la siguientes tabla. De nuevo, recuerde que las variables X_j toman valores -1 y $+1$ en los niveles bajo y alto de cada factor, respectivamente.

Grupo alias	Efecto a considerar	Término en el MRLM
$A+BCE+ABCDF+DEF$	A	X_1
$B+ACE+CDF+ABDEF$	B	X_2
$C+ABE+BDF+ACDEF$	C	X_3
$D+ABCDE+BCF+AEF$	D	X_4
$E+ABC+BCDEF+ADF$	E	X_5
$F+ABCEF+BCD+ADE$	F	X_6
$AB+CE+ACDF+BDEF$	AB	X_1X_2
$AC+BE+ABDF+CDEF$	AC	X_1X_3
$AD+BCDE+ABCF+EF$	AD	X_1X_4
$AE+BC+ABCDEF+DF$	AE	X_1X_5
$AF+BCEF+ABCD+DE$	AF	X_1X_6
$BD+ACDE+CF+ABEF$	BD	X_2X_4
$BF+ACEF+CD+ABDE$	BF	X_2X_6
$ABD+CDE+ACF+BEF$	ABD	$X_1X_2X_4$
$ABF+CEF+ACD+BDE$	ABF	$X_1X_2X_6$

Entonces el MRLM queda así,

$$\begin{aligned} Y = \beta_0 &+ \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{14} X_1 X_4 + \beta_{15} X_1 X_5 + \beta_{16} X_1 X_6 \\ &+ \beta_{24} X_2 X_4 + \beta_{26} X_2 X_6 + \beta_{124} X_1 X_2 X_4 + \beta_{126} X_1 X_2 X_6 + E, \text{ con } E_i \overset{\text{iid}}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right). \end{aligned}$$

▸ ir a archivo Aclaración sobre la estimación de efectos mediante contrastes de totales en un factorial fraccionado.pdf.

Selección de los contrastes de definición o generadores

Lo más complicado es hallar los mejores generadores de la fracción que se desea usar. Existen tablas para los experimentos fraccionados que proporcionan estructuras de alias, también los paquetes estadísticos están provistos de tablas donde se proporcionan generadores adecuados para diferentes valores de k y p (en R, en la librería FrF2 se cuenta con la función del mismo nombre). Por tanto, lo más práctico es recurrir a un software estadístico para generar la fracción deseada y su estructura de alias.

A continuación, vea la generación de una fracción 2^{6-2} y una fracción 2^{7-3} en R.

```
> library(FrF2)
> #Generando fracción 2^(6-2) con los generadores prederminados
> #en la función FrF2
> diseño1=FrF2(nruns=16,nfactors=6,randomize=FALSE,alias.info=3)
> diseño1
    A  B  C  D  E  F
1  -1 -1 -1 -1 -1 -1
2   1 -1 -1 -1  1  1
3  -1  1 -1 -1  1  1
4   1  1 -1 -1 -1 -1
5  -1 -1  1 -1  1 -1
6   1 -1  1 -1 -1  1
7  -1  1  1 -1 -1  1
8   1  1  1 -1  1 -1
9  -1 -1 -1  1 -1  1
10  1 -1 -1  1  1 -1
11 -1  1 -1  1  1 -1
12  1  1 -1  1 -1  1
13 -1 -1  1  1  1  1
14  1 -1  1  1 -1 -1
15 -1  1  1  1 -1 -1
16  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2
> design.info(diseño1)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F"

$main
[1] "A=BCE=BDF" "B=ACE=ADF" "C=ABE=DEF" "D=ABF=CEF" "E=ABC=CDF" "F=ABD=CDE"

$fi2
[1] "AB=CE=DF" "AC=BE" "AD=BF" "AE=BC" "AF=BD" "CD=EF" "CF=DE"

$fi3
[1] "ACD=AEF=BCF=BDE" "ACF=ADE=BCD=BEF"

> #o bien
> aliasprint(diseño1,condense=FALSE)
$legend

A=A B=B C=C D=D E=E F=F

$aliases

 A=BCE=BDF = B=ACE=ADF = C=ABE=DEF = D=ABF=CEF = E=ABC=CDF = F=ABD=CDE
 AB=CE=DF = AC=BE = AD=BF = AE=BC = AF=BD = CD=EF = CF=DE
 ACD=AEF=BCF=BDE = ACF=ADE=BCD=BEF

>
> generators(diseño1)
$generators
[1] "E=ABC" "F=ABD"
```

Este argumento pide guardar alias hasta interacciones triples

Estructura alias parcial mostrando solo aliados para efectos principales, interacciones dobles y triples

Otra forma de obtener la estructura de alias parcial

Indica que los generadores son E=ABC y F=ABD, es decir ABCE y ABDF

```
> #Generando fracción 2^(6-2) con E=ABC, F=BCD
> diseño1=FrF2(nruns=16,nfactors=6,generators=c("ABC","BCD"),randomize=FALSE,alias.info=3)
> diseño1
    A  B  C  D  E  F
1  -1 -1 -1 -1 -1 -1
2   1 -1 -1 -1  1 -1
3  -1  1 -1 -1  1  1
4   1  1 -1 -1 -1  1
5  -1 -1  1 -1  1  1
6   1 -1  1 -1 -1  1
7  -1  1  1 -1 -1 -1
8   1  1  1 -1  1 -1
9  -1 -1 -1  1 -1  1
10  1 -1 -1  1  1  1
11 -1  1 -1  1  1 -1
12  1  1 -1  1 -1 -1
13 -1 -1  1  1  1 -1
14  1 -1  1  1 -1 -1
15 -1  1  1  1 -1  1
16  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2.generators
> design.info(diseño1)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F"

$main
[1] "A=BCE=DEF" "B=ACE=CDF" "C=ABE=BDF" "D=AEF=BCF" "E=ABC=ADF" "F=ADE=BCD"

$fi2
[1] "AB=CE" "AC=BE" "AD=EF" "AE=BC=DF" "AF=DE" "BD=CF" "BF=CD"

$fi3
[1] "ABD=ACF=BEF=CDE" "ABF=ACD=BDE=CEF"
> #o bien
> aliasprint(diseño1,condense=FALSE)
$legend

A=A B=B C=C D=D E=E F=F

$aliases

 A=BCE=DEF = B=ACE=CDF = C=ABE=BDF = D=AEF=BCF = E=ABC=ADF = F=ADE=BCD
 AB=CE = AC=BE = AD=EF = AE=BC=DF = AF=DE = BD=CF = BF=CD
 ABD=ACF=BEF=CDE = ABF=ACD=BDE=CEF

> generators(diseño1)
$generators
[1] "E=ABC" "F=BCD"
```

Este argumento pide guardar alias hasta interacciones triples

Estructura alias parcial mostrando solo aliados para efectos principales, interacciones dobles y triples

Otra forma de obtener la estructura de alias parcial

Indica que los generadores son E=ABC y F=BCD, es decir ABCE y BCDF

```
> #Generando fracción 2^(7-3) con E=ABC, F=BCD, G=ACD
> diseño2=FrF2(nruns=16,nfactors=7,generators=c("ABC","BCD","ACD"),randomize=FALSE,alias.info=3)
> diseño2
    A  B  C  D  E  F  G
1  -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
2   1 -1 -1 -1  1 -1  1
3  -1  1 -1 -1  1  1 -1
4   1  1 -1 -1 -1  1  1
5  -1 -1  1 -1  1  1  1
6   1 -1  1 -1 -1  1 -1
7  -1  1  1 -1 -1 -1  1
8   1  1  1 -1  1 -1 -1
9  -1 -1 -1  1 -1  1  1
10  1 -1 -1  1  1  1 -1
11 -1  1 -1  1  1 -1  1
12  1  1 -1  1 -1 -1 -1
13 -1 -1  1  1  1 -1 -1
14  1 -1  1  1 -1 -1  1
15 -1  1  1  1 -1  1 -1
16  1  1  1  1  1  1  1
class=design, type= FrF2.generators
> design.info(diseño2)$aliased
$legend
[1] "A=A" "B=B" "C=C" "D=D" "E=E" "F=F" "G=G"

$main
[1] "A=BCE=BFG=CDG=DEF" "B=ACE=AFG=CDF=DEG" "C=ABE=ADG=BDF=EFG" "D=ACG=AEF=BCF=BEG" "E=ABC=ADF=BDG=CFG" "F=ABG=ADE=BCD=CEG" "G=ABF=ACD=BDE=CEF"
$fi2
[1] "AB=CE=FG" "AC=BE=DG" "AD=CG=EF" "AE=BC=DF" "AF=BG=DE" "AG=BF=CD" "BD=CF=EG"

$fi3
[1] "ABD=ACF=AEG=BCG=BEF=CDE=DFG"

> #o bien
> aliasprint(diseño2,condense=FALSE)
$legend

A=A B=B C=C D=D E=E F=F G=G

$aliases
A=BCE=BFG=CDG=DEF = B=ACE=AFG=CDF=DEG = C=ABE=ADG=BDF=EFG = D=ACG=AEF=BCF=BEG = E=ABC=ADF=BDG=CFG = F=ABG=ADE=BCD=CEG = G=ABF=ACD=BDE=CEF
 AB=CE=FG = AC=BE=DG = AD=CG=EF = AE=BC=DF = AF=BG=DE = AG=BF=CD = BD=CF=EG   ABD=ACF=AEG=BCG=BEF=CDE=DFG

> generators(diseño2)
$generators
 [1] "E=ABC" "F=BCD" "G=ACD"

>
```

Este argumento pide guardar alias hasta interacciones triples

Estructura alias parcial mostrando solo aliados para efectos principales, interacciones dobles y triples

Otra forma de obtener la estructura de alias parcial

Indica que los generadores son ABCE, BCDF y ACDG

Estimación de efectos y sumas de cuadrados

Si bien podemos recurrir al ajuste de MCO del MRLM, también podemos hallar primero a los efectos y sumas de cuadrados en el 2^{k-p} a partir de los contrastes de totales en la fracción usada, tal como se hace con los factoriales completos 2^k. Se obtiene un contraste por cada grupo de efectos alias y se pondera por una constante apropiada para estimar el efecto correspondiente como una diferencia de medias. Así, el efecto de un grupo de efectos alias X se estima como:

$$\textbf{Efecto } \boldsymbol{X} = \frac{\textbf{Contraste } \boldsymbol{X}}{n2^{k-p-1}} \tag{1}$$

en tanto que la suma de cuadrados correspondiente, con 1 grado de libertad se calcula como:

$$SS_{\boldsymbol{X}} = \frac{(\textbf{Contraste } \boldsymbol{X})^2}{n2^{k-p}} \tag{2}$$

siendo n el número de réplicas de los tratamientos corridos en la fracción.

Nota 4.1

Recuerde que a partir de los efectos estimados podemos calcular las estimaciones de los coeficientes de la regresión dividiendo cada efecto estimado por 2, mientras que el promedio de todos los datos es la estimación del intercepto.

Dean, A., Voss, D., and Draguljić, D. (2017). *Design and Analysis of Experiments*, 2nd Edition. Springer.

Gutiérrez Pulido, H. y de la Vara Salazar, R. (2012). *Análisis y Diseño de Experimentos*, 3ª Edición. McGraw-Hill.

Kuehl, R. O. (2001). *Diseño de Experimentos. Principios Estadísticos de Diseño y Análisis de Investigación*, 2ª Edición. Thomson Learning.

Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., and Li, W. (2005). *Applied Linear Statistical Models*, 5th Edition. McGraw-Hill Irwin.

Montgomery, D. C. (2020). *Design and Analysis of Experiments*, 10th Edition. John Wiley & Sons, Inc.