Ejemplo

Se quiere establecer si la temperatura promedio del cuerpo es 98.6 °F. Para este fin se toma la temperatura de 130 personas y se encuentra una media de 98.25 con una varianza de 0.5376. Suponga que la temperatura se puede modelar mediante una distribución Normal(θ, σ^2), $\theta|\sigma^2 \sim$Normal$(98.6, 100\sigma^2)$ y $\sigma^2 \sim$Gamma-inversa$(0.001, 0.001)$. ¿Qué se puede concluir?

$$\theta|\mathbf{y} \sim t_{n+\nu_0}\left(\mu_n, \frac{\sigma_n^2}{\kappa_0 + n}\right)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{\nu_0\sigma_0^2 + (n-1)S^2 + \frac{n\kappa_0(\bar{y}-\mu_0)^2}{\kappa_n}}{\nu_n}, \text{ y } \mu_n = \frac{\mu_0\kappa_0 + n\bar{y}}{\kappa_n}$$

Sol) $n = 130$ $\quad \bar{y} = 98.25$ $\quad S^2 = 0.5376$

$\mu_0 = 98.6$ $\quad \frac{1}{K_0} = 100$ $\quad K_0 = 0.01$

$K_n = K_0 + n$

$\frac{V_0}{2} = 0.001$ $\quad V_0 = 0.002$

$V_n = V_0 + n$

$\frac{V_0\sigma_0^2}{2} = 0.001$ $\quad \sigma_0^2 = \frac{2(0.001)}{0.002} = 1$

$\mu_n = 98.25$ $\quad \sigma_n^2 = 0.5334$

$\frac{\sigma_n^2}{K_0 + n} = \frac{0.5334}{130.01} = 0.0041$

$$\theta \mid y \sim t_{130.002}(\underline{98.25}, 0.0041)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{0.002(1) + 129(0.5376) + a}{130.002}$$

$$a = \frac{130(0.01)(98.25 - 98.6)^2}{130.01}$$

$$\sigma_n^2 = 0.5334$$

Vamos a construir un intervalo de credibilidad al 95%.

Intervalo posterior $\rightarrow \theta \mid y$

$$98.25 \pm \underbrace{t_{0.975,\, 130.002}}_{1.97838} \sqrt{0.0041}$$

$$(98.123,\ 98.377)$$