Series de tiempo univariadas - Presentación 7

Mauricio Alejandro Mazo Lopera

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Escuela de Estadística
Medellín

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se define el modelo de medias móviles de orden q como:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

donde μ es una constante, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ (con $\theta_q \neq 0$) son parámetros y w_t se asume como un ruido blanco Gaussiano (aunque no es necesario que sea Gaussiano) con media 0 y varianza σ_w^2.

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se define el modelo de medias móviles de orden q como:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

donde μ es una constante, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ (con $\theta_q \neq 0$) son parámetros y w_t se asume como un ruido blanco Gaussiano (aunque no es necesario que sea Gaussiano) con media 0 y varianza σ_w^2.

Si definimos el operador:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se define el modelo de medias móviles de orden q como:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

donde μ es una constante, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ (con $\theta_q \neq 0$) son parámetros y w_t se asume como un ruido blanco Gaussiano (aunque no es necesario que sea Gaussiano) con media 0 y varianza σ_w^2.

Si definimos el operador:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

Tenemos que:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 B w_t + \theta_2 B^2 w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t$$

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se define el modelo de medias móviles de orden q como:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

donde μ es una constante, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ (con $\theta_q \neq 0$) son parámetros y w_t se asume como un ruido blanco Gaussiano (aunque no es necesario que sea Gaussiano) con media 0 y varianza σ_w^2.

Si definimos el operador:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + w_t + \theta_1 B w_t + \theta_2 B^2 w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\ &= \mu + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) w_t \end{aligned}$$

Modelos de Medias Móviles (MA)

Se define el modelo de medias móviles de orden q como:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

donde μ es una constante, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ (con $\theta_q \neq 0$) son parámetros y w_t se asume como un ruido blanco Gaussiano (aunque no es necesario que sea Gaussiano) con media 0 y varianza σ_w^2.

Si definimos el operador:

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + w_t + \theta_1 B w_t + \theta_2 B^2 w_t + \cdots + \theta_q B^q w_t \\ &= \mu + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) w_t \\ &= \mu + \theta(B) w_t \end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t = \mu + (1 + \theta_1 B) w_t$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t = \mu + (1 + \theta_1 B) w_t$$

La esperanza de X_t es igual a:

$$E(X_t) = \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1})$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t = \mu + (1 + \theta_1 B) w_t$$

La esperanza de X_t es igual a:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) \\ &= \mu + 0 + \theta_1 * 0 = \mu \end{aligned}$$

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t = \mu + (1 + \theta_1 B) w_t$$

La esperanza de X_t es igual a:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) \\ &= \mu + 0 + \theta_1 * 0 = \mu \end{aligned}$$

La función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Veamos el caso en que $q = 1$, es decir el modelo $MA(1)$:

$$X_t = \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} = \mu + w_t + \theta_1 B w_t = \mu + (1 + \theta_1 B) w_t$$

La esperanza de X_t es igual a:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) \\ &= \mu + 0 + \theta_1 * 0 = \mu \end{aligned}$$

La función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\gamma(0) = Cov(X_t, X_t)$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\gamma(0) = Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1})$$

- Para $h = 0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1})
\end{aligned}
$$

- Para $h = 0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2
\end{aligned}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2
\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2
\end{aligned}
$$

- Para $h = 1$:

$$
\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t-1})
$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2
\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\gamma(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2})$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\ &= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2})\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2
\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\
&= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2}) = \theta_1 \sigma_w^2
\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\
&= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2
\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\
&= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\
&\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2}) = \theta_1 \sigma_w^2
\end{aligned}$$

- Para $h \geq 2$:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\ &= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2}) = \theta_1 \sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h \geq 2$:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-h} + \theta_1 w_{t-h-1})$$

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\ &= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\ &\quad +\theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &= \sigma_w^2 + \theta_1^2\sigma_w^2 = (1+\theta_1^2)\sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &\quad +\theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2}) = \theta_1\sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h \geq 2$:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-h} + \theta_1 w_{t-h-1}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-h}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-h-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-h}) \\ &\quad +\theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-h-1})\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

- Para $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= Cov(X_t, X_t) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}) \\ &= Cov(w_t, w_t) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_t) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 = (1 + \theta_1^2)\sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-1} + \theta_1 w_{t-2}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-1}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-2}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-2}) = \theta_1 \sigma_w^2\end{aligned}$$

- Para $h \geq 2$:

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) = Cov(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1}, \mu + w_{t-h} + \theta_1 w_{t-h-1}) \\ &= Cov(w_t, w_{t-h}) + \theta_1 Cov(w_t, w_{t-h-1}) + \theta_1 Cov(w_{t-1}, w_{t-h}) \\ &\quad + \theta_1^2 Cov(w_{t-1}, w_{t-h-1}) = 0\end{aligned}$$

Así,

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma_w^2, & h = 0 \\ \theta_1\sigma_w^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Así,

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma_w^2, & h = 0 \\ \theta_1\sigma_w^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases}$$

De aquí, la ACF del modelo MA(1) está dada por:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Así,

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma_w^2, & h = 0 \\ \theta_1\sigma_w^2, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases}$$

De aquí, la ACF del modelo MA(1) está dada por:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \begin{cases} \frac{\theta_1}{(1+\theta_1^2)}, & h = 1 \\ 0, & h > 1 \end{cases}$$

La PACF del modelo se obtiene como:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

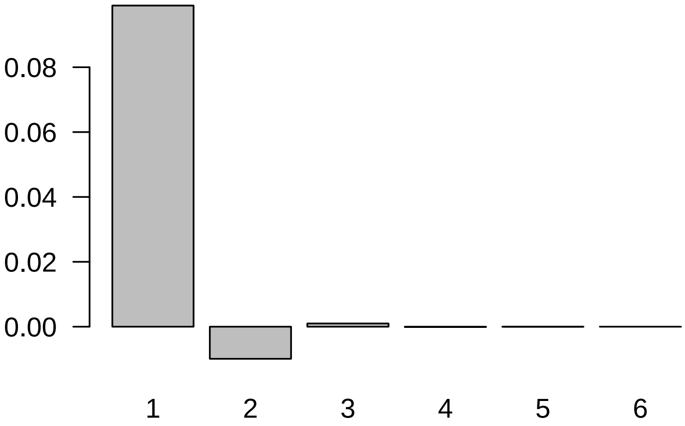
Modelo de Medias Móviles MA(1): PACF - ϕ_{kk}

La siguiente función permite graficar la PACF para distintos valores de θ_1

```
pacf_ma1 <- function(theta1, lags=6){
acf_ma1 <- vector()
acf_ma1[1]<- theta1/(1+(theta1^2))
acf_ma1[2:lags] <- rep(0,(lags-1))
pacf_ma1 <- vector()
pacf_ma1[1] <- acf_ma1[1]
for (i in 2:lags){
  deno <- toeplitz(c(1,acf_ma1[1:(i-1)]))
  aux_1 <- deno
  aux_1[,i] <- acf_ma1[1:i]
  nume <- aux_1
  pacf_ma1[i] <- det(nume)/det(deno)}
barplot(pacf_ma1, las=1,  names.arg = 1:length(pacf_ma1))}
```

- Para $\theta_1 = 0.1$:

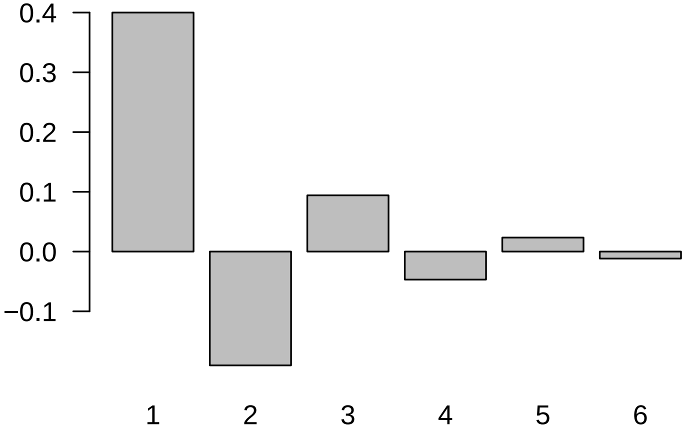
```
pacf_ma1(0.1)
```



Modelo de Medias Móviles MA(1): PACF - ϕ_{kk}

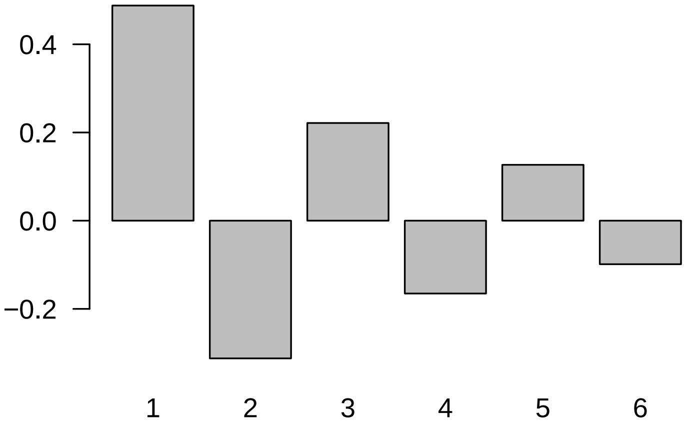
- Para $\theta_1 = 0.5$:

```
pacf_ma1(0.5)
```



- Para $\theta_1 = 0.8$:

```
pacf_ma1(0.8)
```



Modelo de Medias Móviles MA(1):

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario.

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario. Sin embargo, ¿sería posible escribir el proceso o modelo MA(1) con una representación autoregresiva (AR)?

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario. Sin embargo, ¿sería posible escribir el proceso o modelo MA(1) con una representación autoregresiva (AR)?

Como vimos antes, el proceso MA(1) puede ser escrito como:

$$X_t = \mu + (1 + \theta_1 B)w_t$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario. Sin embargo, ¿sería posible escribir el proceso o modelo MA(1) con una representación autoregresiva (AR)?

Como vimos antes, el proceso MA(1) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + (1 + \theta_1 B) w_t \\ X_t - \mu &= (1 + \theta_1 B) w_t \end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario. Sin embargo, ¿sería posible escribir el proceso o modelo MA(1) con una representación autoregresiva (AR)?

Como vimos antes, el proceso MA(1) puede ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
X_t &= \mu + (1 + \theta_1 B) w_t \\
X_t - \mu &= (1 + \theta_1 B) w_t \\
\frac{1}{(1 - (-\theta_1) B)} (X_t - \mu) &= w_t
\end{aligned}
$$

Como vimos, la media y la varianza de un proceso MA(1) son constantes y además, la función de autocovarianza solo depende de la distancia entre los periodos de tiempo. Esto implica que el proceso MA(1) es estacionario. Sin embargo, ¿sería posible escribir el proceso o modelo MA(1) con una representación autoregresiva (AR)?

Como vimos antes, el proceso MA(1) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + (1+\theta_1 B)w_t \\ X_t - \mu &= (1+\theta_1 B)w_t \\ \frac{1}{(1-(-\theta_1)B)}(X_t-\mu) &= w_t \end{aligned}$$

Si se cumple que $|B| \leq 1$ y $|\theta_1| < 1$, entonces lo anterior implica que:

Modelo de Medias Móviles MA(1):

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i (X_t - \mu) \quad = \quad w_t$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i (X_t - \mu) &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i X_t - \sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i \mu &= w_t
\end{aligned}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i (X_t - \mu) &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i X_t - \sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i \mu &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i X_{t-i} - \sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i \mu &= w_t
\end{aligned}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(1):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i (X_t - \mu) &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i X_t - \sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i B^i \mu &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i X_{t-i} - \sum_{i=0}^{\infty}(-\theta_1)^i \mu &= w_t \\
\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \theta_1^i X_{t-i} - \frac{\mu}{1+\theta_1} &= w_t
\end{aligned}
$$

Esta propiedad se conoce como invertibilidad del proceso MA(1). En general, podemos decir lo siguiente:

En general, decimos que un proceso MA(q) es invertible si se puede escribir en la representación autoregresiva (AR).

Modelo de Medias Móviles MA(q):

En general, decimos que un proceso MA(q) es invertible si se puede escribir en la representación autoregresiva (AR). Esto implica que para el proceso MA(q):

$$X_t - \mu = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

En general, decimos que un proceso MA(q) es invertible si se puede escribir en la representación autoregresiva (AR). Esto implica que para el proceso MA(q):

$$X_t - \mu = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q} = \theta(B) w_t$$

la invertibilidad se cumple si

$$\frac{1}{\theta(B)}(X_t - \mu) = w_t$$

En general, decimos que un proceso MA(q) es invertible si se puede escribir en la representación autoregresiva (AR). Esto implica que para el proceso MA(q):

$$X_t - \mu = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q} = \theta(B) w_t$$

la invertibilidad se cumple si

$$\frac{1}{\theta(B)}(X_t - \mu) = w_t$$

Análogamente a la condición necesaria para que un proceso AR(p) sea estacionario, en el caso del modelo MA(q) es posible probar que es **invertible** si las raíces del polinómio $\theta(B)$ están por fuera del círculo unitario. Note que el modelo MA(q) es ya **estacionario**.

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$E(X_t) = E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q})$$

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\ &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\
&= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\
&= \mu
\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$
\begin{aligned}
E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\
&= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

La varianza está dada por:

$$
\gamma(0) = Var(X_t) = Var(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q})
$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\ &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

La varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(0) = Var(X_t) &= Var(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\ &= Var(w_t) + \theta_1^2 Var(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q^2 Var(w_{t-q}) \end{aligned}$$

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\ &= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

La varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(0) = Var(X_t) &= Var(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\ &= Var(w_t) + \theta_1^2 Var(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q^2 Var(w_{t-q}) \\ &= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 + \cdots + \theta_q^2 \sigma_w^2 \end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La media del modelo MA(q) está dada por:

$$
\begin{aligned}
E(X_t) &= E(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\
&= \mu + E(w_t) + \theta_1 E(w_{t-1}) + \theta_2 E(w_{t-2}) + \cdots + \theta_q E(w_{t-q}) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

La varianza está dada por:

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) = Var(X_t) &= Var(\mu + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \cdots + \theta_q w_{t-q}) \\
&= Var(w_t) + \theta_1^2 Var(w_{t-1}) + \cdots + \theta_q^2 Var(w_{t-q}) \\
&= \sigma_w^2 + \theta_1^2 \sigma_w^2 + \cdots + \theta_q^2 \sigma_w^2 \\
&= \sigma_w^2 (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)
\end{aligned}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La función de autocovarianza está dada por (**QUEDA COMO TAREA**):

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$$

La función de autocovarianza está dada por (**QUEDA COMO TAREA**):

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= \begin{cases} \sigma_w^2(\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q), & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}
\end{aligned}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La función de autocovarianza está dada por (**QUEDA COMO TAREA**):

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= \begin{cases} \sigma_w^2(\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q), & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}
\end{aligned}
$$

De aquí,

$$
\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}
$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La función de autocovarianza está dada por (**QUEDA COMO TAREA**):

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\ &= \begin{cases} \sigma_w^2(\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q), & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \begin{cases} \frac{\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}\end{aligned}$$

Modelo de Medias Móviles MA(q):

La función de autocovarianza está dada por (**QUEDA COMO TAREA**):

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= Cov(X_t, X_{t-h}) \\ &= \begin{cases} \sigma_w^2(\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q), & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \begin{cases} \frac{\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & h = 1, 2, \ldots, q; \\ 0, & h > q \end{cases}\end{aligned}$$

Note que para para $h > q$ la ACF es igual a cero, **lo cual es de gran ayuda para identificar el orden de un modelo MA**.

Modelo de Medias Móviles MA(q): PACF - ϕ_{kk}

La PACF del modelo se obtiene como:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Note que esta PACF depende de las ACF y al igual que en el caso MA(1), es posible programar una función que la genere y afortunadamente, ya está programada en el R.

Modelo MA(q):

Veamos algunos gráficos de las ACF y PACF teróricas de modelos MA(q):

- MA(1): Con $\theta_1 = 0.6$.

Modelo MA(q):

Veamos algunos gráficos de las ACF y PACF teróricas de modelos MA(q):

- MA(1): Con $\theta_1 = 0.6$. La raíz de $\theta(B) = 1 + 0.6B = 0$ es $B = -1.67$ y como $|-1.67| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso MA(1), $X_t = \mu + w_t + 0.6w_{t-1}$, es invertible.

```
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ma=c(0.6) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

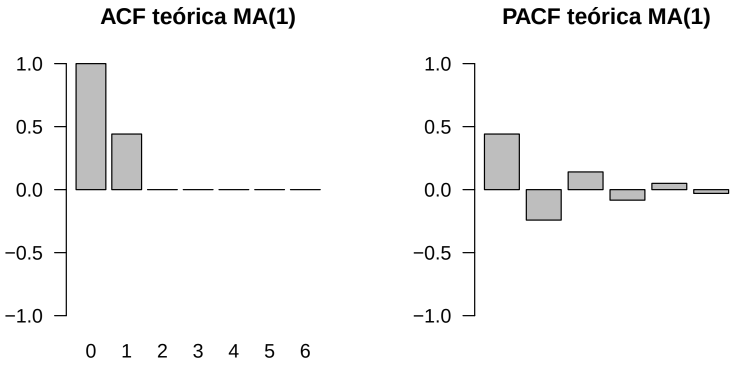
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.4412 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
```

```
pacf1<-ARMAacf(ma=c(0.6), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1]  0.4412 -0.2417  0.1406 -0.0834  0.0499 -0.0299
```

Modelo MA(q):

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica MA(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica MA(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Modelo MA(q):

- MA(1): Con $\theta_1 = -0.6$. La raíz de $\theta(B) = 1 - 0.6B = 1 - 0.6B = 0$ es $B = 1.67$ y como $|1.67| > 1$ entonces está por fuera del círculo unitario, lo cual implica que este proceso MA(1), $X_t = \mu + w_t - 0.6w_{t-1}$, es invertible.

```r
options(scipen = 100)
acf1<-ARMAacf(ma=c(-0.6) , lag.max = 6)
round(acf1,4)
```

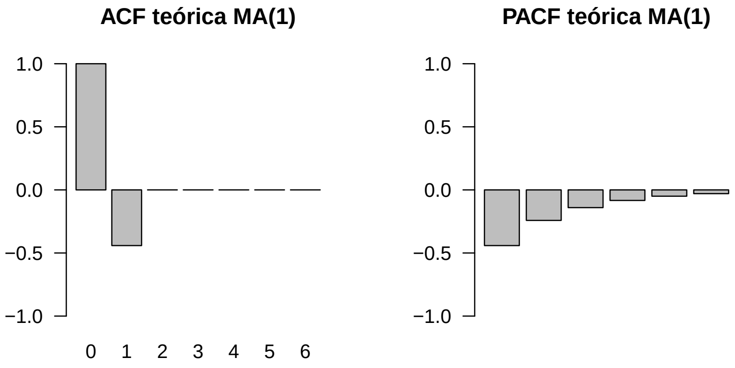
```
##       0       1       2       3       4       5       6
##  1.0000 -0.4412  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
```

```r
pacf1<-ARMAacf(ma=c(-0.6), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf1,4)
```

```
## [1] -0.4412 -0.2417 -0.1406 -0.0834 -0.0499 -0.0299
```

Modelo MA(q):

```r
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf1, main="ACF teórica MA(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf1, main="PACF teórica MA(1)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Modelo MA(q):

- MA(2): Con $\theta_1 = 0.4$ y $\theta_2 = 0.2$. Las raíces de $\theta(B) = 1 + 0.4B + 0.2B^2 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,0.4,0.2))
```

```
## [1] -1+2i -1-2i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,0.4,0.2)))
```

```
## [1] 2.236068 2.236068
```

Modelo MA(q):

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf2<-ARMAacf(ma=c(0.4,0.2) , lag.max = 6)
round(acf2,4)
```

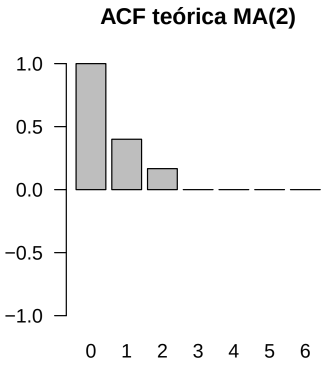
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.4000 0.1667 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
```

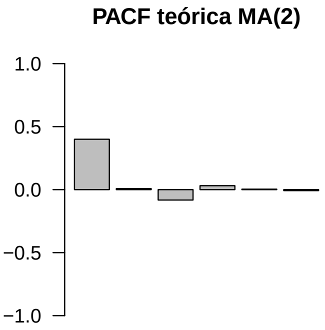
```
pacf2<-ARMAacf(ma=c(0.4,0.2), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf2,4)
```

```
## [1]  0.4000  0.0079 -0.0825  0.0314  0.0039 -0.0079
```

Modelo MA(q):

```
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf2, main="ACF teórica MA(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf2, main="PACF teórica MA(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
```





Modelo MA(q):

- MA(2): Con $\theta_1 = 0.4$ y $\theta_2 = -0.2$. Las raíces de $\theta(B) = 1 + 0.4B - 0.2B^2 = 0$ se encuentran en R con la función:

```r
polyroot(c(1,0.4,-0.2))
```

```
## [1] -1.44949-0i  3.44949+0i
```

Y la norma de estas raíces es:

```r
abs(polyroot(c(1,0.4,-0.2)))
```

```
## [1] 1.44949 3.44949
```

Modelo MA(q):

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf2<-ARMAacf(ma=c(0.4,-0.2) , lag.max = 6)
round(acf2,4)
```

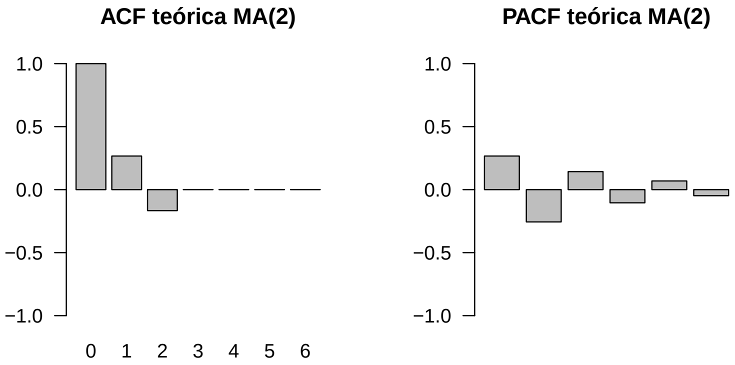
```
##       0       1       2       3       4       5       6
##  1.0000  0.2667 -0.1667  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
```

```
pacf2<-ARMAacf(ma=c(0.4,-0.2), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf2,4)
```

```
## [1]  0.2667 -0.2560  0.1429 -0.1044  0.0691 -0.0481
```

Modelo MA(q):

```r
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf2, main="ACF teórica MA(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf2, main="PACF teórica MA(2)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Modelo MA(q):

- MA(3): Con $\theta_1 = 0.4$, $\theta_2 = 0.2$ y $\theta_3 = 0.3$. Las raíces de $\theta(B) = 1 + 0.4B + 0.2B^2 + 0.3B^3 = 0$ se encuentran en R con la función:

```
polyroot(c(1,0.4,0.2,0.3))
```

```
## [1]  0.369400+1.49507i -1.405467+0.00000i  0.369400-1.49507i
```

Y la norma de estas raíces es:

```
abs(polyroot(c(1,0.4,0.2,0.3)))
```

```
## [1] 1.540030 1.405467 1.540030
```

Modelo MA(q):

Las ACF y PACF teóricas se obtiene en R con:

```
options(scipen = 100)
acf3<-ARMAacf(ma=c(0.4,0.2,0.3) , lag.max = 6)
round(acf3,4)
```

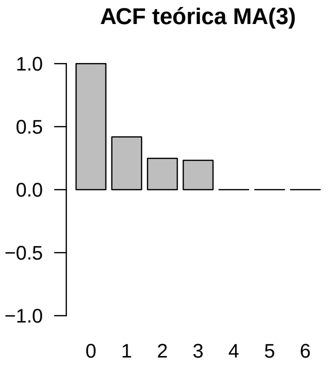
```
##      0      1      2      3      4      5      6
## 1.0000 0.4186 0.2481 0.2326 0.0000 0.0000 0.0000
```

```
pacf3<-ARMAacf(ma=c(0.4,0.2,0.3), pacf=TRUE, lag.max = 6)
round(pacf3,4)
```

```
## [1]  0.4186  0.0883  0.1233 -0.1837  0.0232 -0.0079
```

Modelo MA(q):

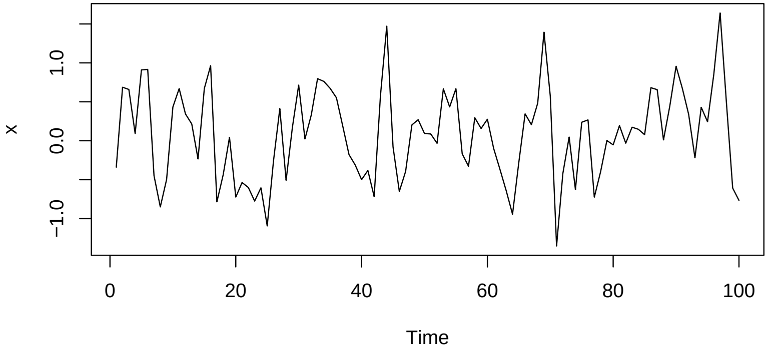
```r
par(mfrow=c(1,2))
barplot(acf3, main="ACF teórica MA(3)", las=1, ylim=c(-1,1))
barplot(pacf3, main="PACF teórica MA(3)", las=1, ylim=c(-1,1))
```



Simulemos una realización o serie de tiempo de tamaño $n = 100$ del proceso MA(1) $X_t = w_t + 0.8w_{t-1}$ con $\sigma_w^2 = 0.5^2$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model = list(ma = 0.8), n = 100, sd=0.5)
```

```
plot(x)
```



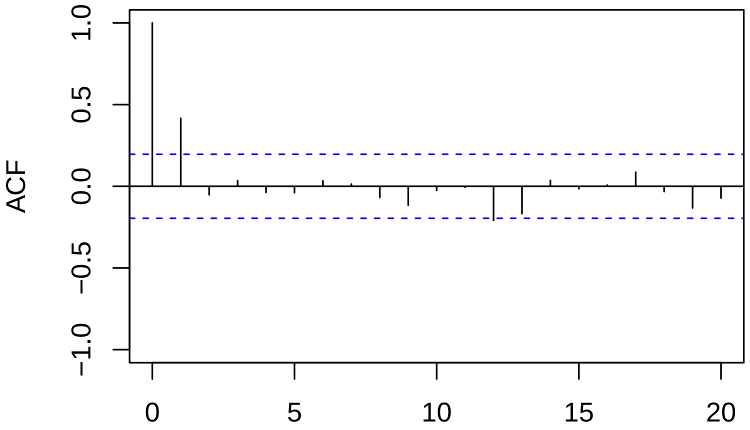
Simulación de modelos MA(q):

Las 6 primeras ACF estimadas son:

```
acf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      0      1      2      3      4      5      6
##  1.000  0.417 -0.052  0.036 -0.038 -0.039  0.034
```

```r
acf(x, ylim=c(-1,1))
```



Simulación de modelos MA(q):

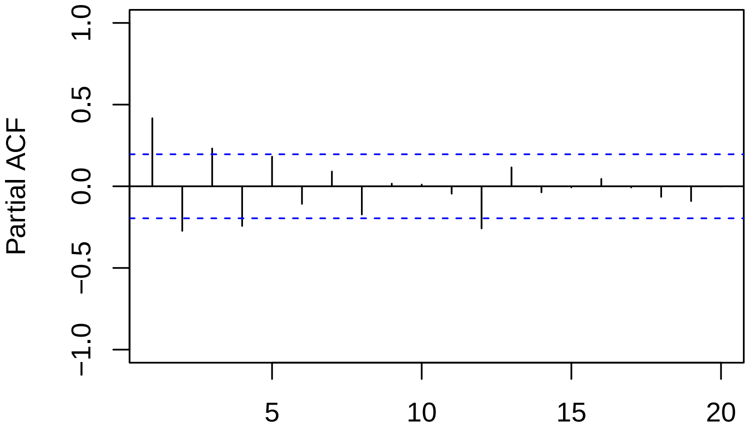
Las 6 primeras PACF estimadas son:

```
pacf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Partial autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6
##  0.417 -0.273  0.232 -0.243  0.181 -0.108
```

Simulación de modelos MA(q):

```
pacf(x, ylim=c(-1,1))
```

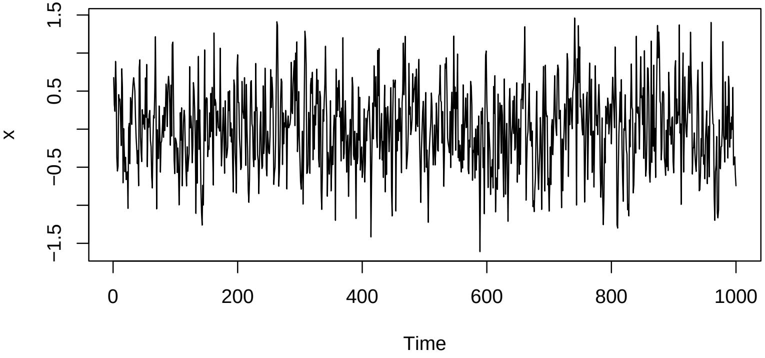


Simulación de modelos MA(q):

Simulemos una realización o serie de tiempo de tamaño $n = 1000$ del proceso MA(2) $X_t = w_t + 0.4w_{t-1} + 0.2w_{t-2}$ con $\sigma_w^2 = 0.5^2$

```
set.seed(123)
x <- arima.sim(model=list(ma=c(0.4,0.2)),n=1000,sd=0.5)
```

```
plot(x)
```



Simulación de modelos MA(q):

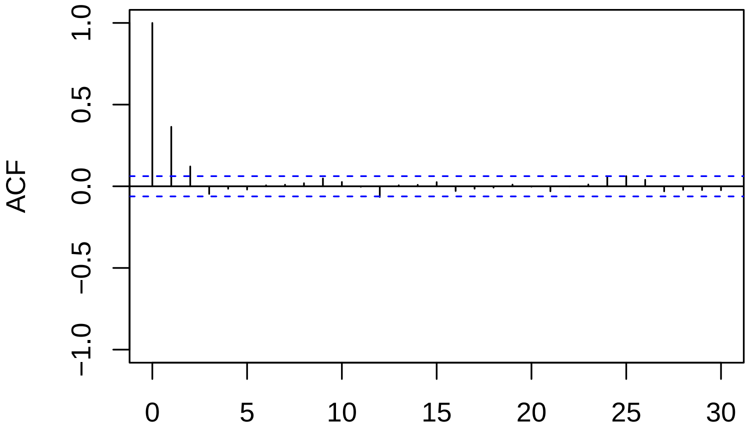
Las 6 primeras ACF estimadas son:

```
acf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      0      1      2      3      4      5      6
##  1.000  0.364  0.121 -0.047 -0.015 -0.020  0.006
```

Simulación de modelos AR(p):

```r
acf(x, ylim=c(-1,1))
```



Simulación de modelos MA(q):

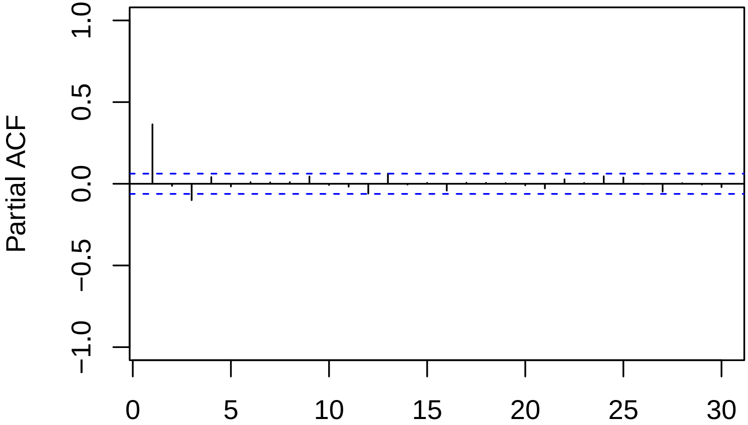
Las 6 primeras PACF estimadas son:

```
pacf(x, lag.max = 6, plot=FALSE)
```

```
##
## Partial autocorrelations of series 'x', by lag
##
##      1      2      3      4      5      6
##  0.364 -0.013 -0.100  0.041 -0.017  0.010
```

Simulación de modelos MA(q):

```
pacf(x, ylim=c(-1,1))
```



Conclusiones

- El proceso MA(q) es estacionario y si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario entonces el proceso MA(q) es invertible.

Conclusiones

- El proceso MA(q) es estacionario y si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario entonces el proceso MA(q) es invertible.
- El proceso AR(p) es siempre invertible (esto por definición de invertibilidad).
- La función PACF teórica del proceso MA(q), denotada por ϕ_{kk}, tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.

- El proceso MA(q) es estacionario y si las raíces unitarias (las cuales pueden ser números complejos) de

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots \theta_q B^q = 0$$

  están fuera del círculo unitario entonces el proceso MA(q) es invertible.
- El proceso AR(p) es siempre invertible (esto por definición de invertibilidad).
- La función PACF teórica del proceso MA(q), denotada por ϕ_{kk}, tiene un decaimiento exponencial o senoidal que va a cero.
- La función ACF teórica del proceso MA(q) es distinta de cero para $h \leq q$ y cero para $h > q$.

Conclusiones

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF terópricas del proceso MA(q) y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo MA(q) con orden q igual a la última ACF significativa.

Conclusiones

- Cuando se tiene una serie de tiempo estacionaria, podemos graficar las funciones ACF y PACF muestrales con el fin de compararlas con las ACF y PACF teróricas del proceso MA(q) y poder identificar si son similares o no. De ser "parecidas", podemos decir que a la serie de tiempo se le puede ajustar un modelo MA(q) con orden q igual a la última ACF significativa.
- Como regla, si tenemos sospechas de que debemos ajustar un modelo MA(q) debemos intentar seleccionar el valor de q más pequeño, intentando llegar al modelo "más simple" posible.