Si $X \sim$ Binomial (n, θ) y $\theta \sim Beta(\alpha, \beta)$, entonces
$\theta|x \sim Beta(x + \underset{\alpha}{\cancel{1}}, n - x + \underset{\beta}{\cancel{1}})$

Ejemplo

Se considera la estimación de la probabilidad de que nazca una niña dada la condición de placenta previa. En un estudio inicial llevado a cabo en Alemania, se encontró que de un total de 980 nacimientos con la condición de placenta previa, 437 eran niñas. ¿Cuánta evidencia proporcionan estos datos sobre la hipótesis de que la proporción de nacimientos hembras en la población de placenta previa es menor que la proporción 0.485 de niñas en la población general?.

Y: # de niños que nacen con la condición de placenta previa.

$Y \sim$ Binomial $(980, \theta)$

Verosimilitud: $p(y|\theta) = \binom{n}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x}$

A priori: $\theta \sim$ Beta $(1,1) \rightarrow U(0,1)$

Posterior:

$$\theta | y \sim \text{Beta}(437+1, 544)$$

$(0.4150, 0.477)$

Si $Y \sim$ *Poisson*(θ) *y* $\theta \sim$ *Gamma*(α, β) *entonces*
$\theta | \mathbf{y} \sim$ *Gamma*$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \alpha, n + \beta\right)$

Ejemplo

Suponga que $X_i | \theta \sim$ *Poisson*(θ) *y* $\theta \sim$ *Gamma*(α, β). *Se tiene que el número de accidentes aéreos fatales durante los años 1976 y 1985 son: 24, 25, 31, 31, 22, 21, 26, 20, 16, 22. Si* $\tilde{X}$ *es el número de accidentes fatales en 1986 y* $\alpha = 101$ *y* $\beta = 5$ *encuentre:*

a) *La distribución posterior de* θ.

b) *El valor esperado y la varianza de* $\tilde{X}$.

a) $\theta | \mathbf{X} \sim \text{Gamma}\left(\underbrace{\underbrace{\Sigma x_i + 101}_{238+101}}_{339}, \underbrace{10+5}_{15}\right)$

$$\theta|\mathbf{y} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \alpha, \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \beta\right)$$

Ejemplo

Tres personas mueren de asma cada año de una población de 200000 habitantes. Estudios sobre mortalidad de asma alrededor del mundo muestran que las razones de mortalidad mayores de 1.5 por 100000 habitantes son raras en países occidentales, con razones de mortalidad por asma alrededor de 0.6 por 100000 habitantes. Encuentre la distribución posterior de θ: razón de mortalidad por asma en la población por cada 100000 habitantes por año y concluya.

Y: # de personas que mueren por asma en una población de 200000 habitantes

$$Y \sim \text{Poisson}(2\theta) \rightarrow \text{Verosimilitud}$$

Ahora vamos a definir a priori

Haciendo uso de ε podríamos encontrar α y β de tal manera que $\frac{\alpha}{\beta} = 0.6$ que la probabilidad de valores mayores a $1.5 \rightarrow 0$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad P(\theta < 1.5) = 0{,}975$$

$\therefore \quad \theta | y \sim \text{Gamma}(\underbrace{3+3}_{6}, \underbrace{2+5}_{7})$

$$E(\theta|y) = \frac{6}{7} = 0.86$$

$$P(\theta > 1) = 0.3$$

Se presentó un encogimiento sustancial hacia la distribución a priori.

$$\theta|\mathbf{y} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i + \alpha, \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \beta\right)$$

(**Distribución posterior con datos adicionales.**) *Suponga que se tiene información de 10 años y se encuentra que la razón de mortalidad sigue siendo 1.5 por 100000 habitantes en la población de estudio. Se tiene además que el número de habitantes es constante: 200000. Encuentra la nuevamente la distribución posterior de θ y concluya.*

$$\theta | y \sim \text{Gamma}(\underbrace{30+3}_{33}, \underbrace{20+5}_{25})$$

$$E(\theta|y) = \frac{33}{25} = 1.32$$

$$P(\theta > 1) = 0.93$$