Modelo Factorial de Efectos Aleatorios

Se tienen dos casos para modelos de diseños factoriales:

- Todos los factores considerados son de Efectos Aleatorios: (Modelo de Efectos Aleatorios).
- Unos factores son de Efectos FIJOS y otros son de Efectos ALEATORIOS: (Modelo de Efectos Mixtos).

Diseños Factoriales

Modelo Factorial de Efectos Aleatorios

- Este modelo se utiliza cuando los niveles de los factores son seleccionados Aleatoriamente de una población de niveles de cada uno de los factores considerados en el diseño.

- En este tipo de modelos NO tiene ningún sentido realizar pruebas de hipótesis sobre igualdad de medias o significancia de los efectos de los factores involucrados.

- El interés se centra en determinar de si la varianza del respectivo factor es **significativa o no**, y en la **estimación** de las respectivas componentes de varianza del modelo.

- En los modelos de efectos aleatorios tiene sentido hablar de la varianza con la que el factor aleatorio contribuye a la variación total, es decir, estimar la varianza y probar si su contribución a la variabilidad total es significativa.

Diseño Factorial de dos Factores de Efectos Aleatorios

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos factores donde los $\mathbf{a}$-niveles de $\mathbf{A}$ y los $\mathbf{b}$-niveles de $\mathbf{B}$ fueron seleccionados aleatoriamente.

Entonces para este caso el modelo estadístico asociado a este diseño es:

$$\boxed{\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \tau_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + (\tau\beta)_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}},}$$

$$\boxed{\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \mathbf{A_i} + \mathbf{B_j} + (\mathbf{AB})_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}},}$$

con $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{a}$, $\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{b}$, y $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{n}$, donde:

- $\mathbf{Y_{ijk}}$: Observación de la variable respuesta obtenida de nivel $\mathbf{i}$-ésimo de $\mathbf{A}$, nivel $\mathbf{j}$-ésimo de $\mathbf{B}$ y en la $\mathbf{k}$-ésima réplica.
- μ : media global
- $\tau_{\mathbf{i}}$ efecto del $\mathbf{i}$-ésimo nivel de $\mathbf{A}$.
- $\beta_{\mathbf{j}}$: efecto del $\mathbf{j}$-ésimo nivel de $\mathbf{B}$.
- $(\tau\beta)_{\mathbf{ij}}$: efecto de interacción entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Supuestos

1. $\tau_i \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2_\tau)$
2. $\beta_j \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2_\beta)$
3. $(\tau\beta)_{ij} \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2_{\tau\beta})$.
4. $\varepsilon_{ij} \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
5. Todas estas vs.as son independientes entre si.

Luego, la varianza de cualesquiera observación Y_{ijk} está dada por:

$$\boxed{\boxed{Var[Y_{ijk}] = \sigma^2_\tau + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\tau\beta} + \sigma^2,}}$$

donde

- σ^2_τ, σ^2_β y $\sigma^2_{\tau\beta}$ son las contribuciones de cada efecto a la variación total y se llaman **componentes de varianza** y
- σ^2-es el componente de varianza debido al **error aleatorio**.

Diseños Factoriales

Objetivo o Interés

El objetivo o interés del diseño se centra en probar las siguientes hipótesis:
Significancia de la varianza del factor A:

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma_\tau^2 = 0 \\ H_a & : \sigma_\tau^2 > 0 \end{cases}$$

Significancia de la varianza del factor B

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma_\beta^2 = 0 \\ H_a & : \sigma_\beta^2 > 0 \end{cases}$$

Significancia de la varianza de la interacción del factor A con el Factor B

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0 \\ H_a & : \sigma_{\tau\beta}^2 > 0 \end{cases}$$

NOTA: Las expresiones para calcular las sumas de cuadrados no cambian, sólo varía la forma del estadístico de prueba, el cual se halla a partir de los cuadrados medios esperados hallados usando los supuestos del modelo.

Diseños Factoriales

Cuadrados Medios Esperados

- $E[MS_A] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + bn\sigma^2_\tau$
- $E[MS_B] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta} + an\sigma^2_\beta$
- $E[MS_{AB}] = \sigma^2 + n\sigma^2_{\tau\beta}$
- $E[MS_E] = \sigma^2$

Estimadores de las componentes de Varianza

- $\hat{\sigma}^2 = MS_E$
- $\hat{\sigma}^2_\tau = \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn}$
- $\hat{\sigma}^2_\beta = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$
- $\hat{\sigma}^2_{\tau\beta} = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$

Diseños Factoriales

Estadísticos de Prueba y Distribuciones para cada Prueba de Hipótesis

Hipótesis	Estadística de Prueba	Distribución
$\mathbf{H_0 : \sigma^2_{\tau\beta} = 0 \ v.s \ H_a : \sigma^2_{\tau\beta} > 0}$	$\mathbf{F = \frac{MS_{AB}}{MS_E}}$	$\mathbf{F_{(a-1)(b-1)\ ,\ ab(n-1)}}$
$\mathbf{H_0 : \sigma^2_{\tau} = 0 \ v.s \ H_a : \sigma^2_{\tau} > 0}$	$\mathbf{F = \frac{MS_A}{MS_{AB}}}$	$\mathbf{F_{(a-1)\ ,\ (a-1)(b-1)}}$
$\mathbf{H_0 : \sigma^2_{\beta} = 0 \ v.s \ H_a : \sigma^2_{\beta} > 0}$	$\mathbf{F = \frac{MS_B}{MS_{AB}}}$	$\mathbf{F_{(b-1)\ ,\ (a-1)(b-1)}}$

En los modelos de efectos aleatorios los cuadrados medios de los efectos principales se comparan con el cuadrado medio de la interacción y no con el cuadrado medio del error, como se hace en el modelo de efectos fijos.

En caso de rechazar alguna de las hipótesis sobre las varianzas, se concluye que el efecto correspondiente contribuye de manera significativa a la variación de la respuesta.

En la práctica lo deseable NO es determinar el mejor tratamiento sino tomar medidas para que la contribución del componente de varianza se reduzca.

Diseños Factoriales

Cuadrados Medios Esperados para un diseño Factorial con tres Factores Aleatorios

Fuente de variación	Grados de libertad	Cuadrado medio esperado
A	$a-1$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab} + rb\sigma^2_{ac} + rbc\sigma^2_{a}$
B	$b-1$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab} + ra\sigma^2_{bc} + rac\sigma^2_{b}$
C	$c-1$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac} + ra\sigma^2_{bc} + rab\sigma^2_{c}$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab}$
AC	$(a-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac}$
BC	$(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + ra\sigma^2_{bc}$
ABC	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc}$
Error	$abc(r-1)$	σ^2

Caso de Estudio 7: Producción de un proceso Industrial

Dos factores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se estudian para determinar su efecto sobre la producción de un proceso industrial. Tres niveles de cada uno de los factores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son estudiados. Analice los datos suponiendo que los niveles de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son muestras aleatorias de una gran población de los niveles de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente.

A/ B	1				2				3				total
1	20	25	26	20 (91)	66	60	50	55 (231)	28	30	28	42 (128)	450
2	20	38	30	29 (117)	74	50	50	59 (233)	45	30	42	55 (172)	522
3	38	18	30	56 (142)	56	52	45	50 (203)	24	34	28	40 (126)	471
Total	350				667				426				1443

Diseños Factoriales

Un ejemplo más. Diseño de dos Factores - Efectos Aleatorios

- ✓ $SST = \sum_{ijk} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{N} = (20^2 + 25^2 + \ldots + 24^2 + 34^2 + \ldots) - \frac{1443^2}{36} = 7514.75$
- ✓ $SSA = \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn} - \frac{Y_{...}^2}{N} = \frac{450^2+522^2+471^2}{4\times 3} - \frac{1443^2}{136} = 228.5$
- ✓ $SSB = \frac{\sum_j Y_{.j.}^2}{an} - \frac{Y_{...}^2}{N} = 4565.167$
- ✓ $SSAB = \frac{\sum_{ij} Y_{ij.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{N} - SSA - SSB = 575.333$
- ✓ $SSE = SST - SSA - SSB - SSAB = 2145.75$

TABLA ANOVA

Fuente Variación	SS	gl	MS	F_o (Aleatorios)	F_o (A: Aleatorio, B:Fijo)
A	228,5	2	114,25	0,794	1,4376
B	4565,167	2	2285,5835	15,87	15,87
AB	575,333	4	143,8335	1,81	1,81
Eror	2145,75	27	79,4722		
Total	7514,75	35			

Conclusión: Para un valor de la $F_{2,4,0.05} = 6,944272$ la variabilidad del factor B es significativo únicamente. $F_{4,27,0.05} = 2,72$ la variabilidad de la interaccón AB No es signifivativo.
Estimación de las componentes de varianza:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= 79,4722 \\
\hat{\sigma}_\tau^2 &= \frac{114,25 - 143,8335}{3\times 4} = -2,4653 \\
\hat{\sigma}_\beta^2 &= \frac{2285,5835 - 143,8335}{3\times 4} = 178,23 \\
\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 &= \frac{143,8335 - 79,4722}{4} = 16,09
\end{aligned}$$

Diseños Factoriales

Estimaciones de las Componentes de Varianza

- $\hat{\sigma}^2 = MS_E = 79,4722$
- $\hat{\sigma}^2_{\tau} = \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn} = \frac{114,25 - 143,8335}{3\times 4} = -2,4653 \approx 0$
- $\hat{\sigma}^2_{\beta} = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an} = \frac{2285,5835 - 143,8335}{3\times 4} = 178,23$
- $\hat{\sigma}^2_{\tau\beta} = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n} = \frac{143,8335 - 79,4722}{4} = 16,09$

La estimación de la variación total para una sola observación es:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2_Y = \widehat{Var[Y_{ijk}]} &= \hat{\sigma}^2_{\tau} + \hat{\sigma}^2_{\beta} + \hat{\sigma}^2_{\tau\beta} + \hat{\sigma}^2 \\ &= 0 + 178,23 + 16,09 + 79,4722 \\ &= 273,7922\end{aligned}$$

Diseños Factoriales

Interpretación de los componentes de varianza

- El componente de varianza del factor A, $-2,4653 \approx 0$, es la variabilidad asociada con el factor A y contribuye en un $0\,\%$ $(0 \times 100/273,7922)$ a la variación total.

- El componente de varianza del factor B, $178,23$, es la variabilidad asociada con el factor B y contribuye en un $65,1\,\%$ $(178,23 \times 100/273,7922)$ a la variación total.

- El componente de varianza de la interacción de los factores A y B, $16,09$, es la variabilidad asociada con la interacción de los factores considerados y contribuye en un $5,9\,\%$ $(16.09 \times 100/273.7922)$ a la variación total.

- El componente de varianza del error, $79,4722$, representa la variación en la preparación de las muestras o unidades experimentales y contribuye en un $29,03\,\%$ $(79,4722 \times 100/273,7922)$ a la variación total.

Nota: El investigador, basado en su experiencia, debe ser capaz de decidir si alguna de las fuentes de variabilidad anteriores excede un nivel aceptable y corregir, si es necesario, cualquier ineficiencia en los factores o en los tratamientos o condiciones de operación del sistema.

Modelo Factorial de Efectos Mixtos

Los modelos de efectos Mixtos (o Modelos de efectos aleatorios y fijos) son modelos en los cuales se tienen factores aleatorios y factores fijos.

Por ejemplo, si el factor $\mathbf{A}$ es aleatorio y el factor $\mathbf{B}$ es fijo, entonces el modelo de **Efectos Mixtos** es:

$$\boxed{\boxed{\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \tau_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + (\tau\beta)_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}},}}$$

$$\boxed{\boxed{\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \mathbf{A_i} + \mathbf{B_j} + (\mathbf{AB})_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}},}}$$

con $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{a}$, $\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{b}$, y $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}$ donde:
$\mathbf{Y_{ijk}}$: Observación de la variable respuesta obtenida de nivel $\mathbf{i}$ -ésimo de $\mathbf{A}$, nivel $\mathbf{j}$ -ésimo de $\mathbf{B}$ y en la $\mathbf{k}$ -ésima réplica.

Diseños Factoriales

Supuestos

- $\tau_i \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma_\tau^2)$.
- $(\tau\beta)_{ij} \underset{i.i.d}{\sim} N\left(0, \frac{b-1}{b}\sigma_{\tau\beta}^2\right)$, para $i = 1, 2, \ldots, a$.
- $\varepsilon_{ij} \underset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- Todas estas vs.as son independientes entre si.

Luego, la varianza de cualesquiera observación Y_{ijk} está dada por:

$$Var[Y_{ijk}] = \sigma_\tau^2 + \frac{b-1}{b}\sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

Donde σ_τ^2 y $\sigma_{\tau\beta}^2$ son las contribuciones de cada componente de varianza y σ^2-es el componente de varianza debido al error aleatorio.

Cuadrados Medios Esperados

Modelo 1: Un Factor de Efectos Fijos y Dos factores con Efectos Aleatorios, y

Modelo 2: Dos factores con Efectos Fijos y un Factor de Efectos Aleatorios.

Fuente de variación	*Cuadrado medio esperado* — *A fijo, B y C aleatorios*	*Cuadrado medio esperado* — *A y B fijos, C aleatorio*
A	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab} + rb\sigma^2_{ac} + rbc\theta^2_a$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac} + rbc\theta^2_a$
B	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab} + ra\sigma^2_{bc} + rac\sigma^2_b$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + ra\sigma^2_{bc} + rac\theta^2_b$
C	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac} + ra\sigma^2_{bc} + rab\sigma^2_c$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac} + ra\sigma^2_{bc} + rab\sigma^2_c$
AB	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\sigma^2_{ab}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rc\theta^2_{ab}$
AC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + rb\sigma^2_{ac}$
BC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + ra\sigma^2_{bc}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc} + ra\sigma^2_{bc}$
ABC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc}$	$\sigma^2 + r\sigma^2_{abc}$
Error	σ^2	σ^2

Modelo 1: Un Factor de Efectos Fijos y Dos factores con Efectos Aleatorios

Prueba de la interacción Triple:

$$H_0:\ \sigma^2_{abc} = 0 \text{ vs. } H_a:\ \sigma^2_{abc} > 0$$

Estadístico de Prueba $F = \frac{MS_{ABC}}{MSE} \sim F_{(a-1)(b-1)(c-1),\, abc(r-1)}$

Pruebas para las interacciones dobles:

$H_0:\ \sigma^2_{ab} = 0$ vs. $H_a:\ \sigma^2_{ab} > 0$

EP: $F = \frac{MS_{AB}}{MS_{ABC}} \sim F_{(a-1)(b-1),\, (a-1)(b-1)(c-1)}$

$H_0:\ \sigma^2_{ac} = 0$ vs. $H_a:\ \sigma^2_{ac} > 0$

EP: $F = \frac{MS_{AC}}{MS_{ABC}} \sim F_{(a-1)(c-1),\, (a-1)(b-1)(c-1)}$

$H_0:\ \sigma^2_{bc} = 0$ vs. $H_a:\ \sigma^2_{bc} > 0$

EP: $F = \frac{MS_{BC}}{MS_{ABC}} \sim F_{(a-1)(b-1),\, (a-1)(b-1)(c-1)}$

Tarea 4.

NOTA: Observe que a ningún efecto Principal se le puede hacer una PH de manera directa. Ya que bajo H_0 los cuadrados medios esperados no coinciden con ningún Cuadrado Medio Esperado dado antes.

Se puede hacer la PH aproximada a partir del procedimiento de Satterthwaite (**Tarea 4:** Leer como se usa dicho procedimiento y aplicarlo para hallar el Estadístico de Prueba para la significancia de cada uno de los factores A, B y C:

1. Plantee las respectivas Hipótesis, el Estadístico de Prueba y su distribución aproximada para la determinación de la significancia de cada uno de los Factores, Modelo 1 diapositiva **330**.
2. Hacer algo similar para el modelo 2: Presentar la respectiva formulación de la prueba de hipótesis para la Interacción Triple, las interacciones Dobles y la significancia de los factores A, B, C.