Repetición vs. Réplica

Ejemplo de réplicas y repeticiones

Una empresa de manufactura tiene una línea de producción con diferentes valores de configuración que pueden ser modificados por los operadores.
Se diseñan dos experimentos, uno con repeticiones y otro con réplicas, para evaluar el efecto de las configuraciones sobre la calidad.

1. El primer experimento utiliza repeticiones.
   - Los operadores establecen los factores en niveles predeterminados, completan una corrida de producción y miden la calidad de **cinco** productos.
   - Luego establecen los equipos en nuevos valores, completan otra corrida de producción y miden la calidad de cinco productos. Hacen lo mismo hasta que la producción se ejecuta una vez con cada combinación de valores de los factores y se toman cinco mediciones de calidad en cada corrida.

Repetición vs Réplica Cont.

2. El segundo experimento utiliza réplicas.
   - Los operadores establecen los factores en niveles predeterminados, completan una corrida de producción y toman una medición de calidad.
   - Luego establecen la configuración de los equipos, completan otra corrida de producción y toman una medición de calidad.
   - En orden aleatorio, los operadores utilizan cada combinación de valores de factores cinco veces y toman una medición en cada corrida.

En cada experimento se toman **cinco** mediciones con cada combinación de valores de configuración de los factores. En el **primer** experimento, las **cinco** mediciones se toman durante la misma corrida. En el segundo experimento, las **cinco** mediciones se toman en **corridas diferentes**. La variabilidad entre las mediciones tomadas con la misma configuración de factores **tiende** a ser mayor en las réplicas que en las repeticiones, las máquinas se restablecen antes de cada corrida, lo cual agrega más variabilidad al proceso.

Experimentos con un solo factor

Resumen

Modelo de un Factor:

$$\boxed{\mathbf{Y_{ij}} = \mu + \tau_{\mathbf{i}} + \varepsilon_{\mathbf{ij}}, \ \varepsilon_{\mathbf{ij}} \sim \mathbf{NID}(\mathbf{0}, \sigma^{\mathbf{2}})}$$

Prueba para significancia del Factor:

1. Planteamiento de la Hipótesis:

$$H_0: \ \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0, \ \text{vs.} \ H_1: \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

2. Nivel de Significancia de la Prueba: α: Probabilidad de cometer un error Tipo I: **FIJO** por el Investigador.
3. Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{Trat}}{MS_E} \sim_{\text{Bajo } H_0} F_{a-1,N-a}$$

4. R. R. Rechazamos H_0 si

$$F_{cal} > F_{a-1,N-a,\alpha} \text{ equivalentemente } VP < \alpha$$

$VP = P\left[F_{a-1,N-a} > F_{cal}\right]$

Experimentos con un solo factor

Caso de Estudio 1

Modelo de un Factor:

$$\boxed{\mathbf{Y_{ij}} = \mu + \tau_\mathbf{i} + \varepsilon_\mathbf{ij}, \;\; \varepsilon_\mathbf{ij} \sim \mathbf{NID}(\mathbf{0}, \, \sigma^2)}$$

$\mathbf{Y_{ij}}$: Peso del revestimiento de estaño en la $\mathbf{j}$-ésima réplica (lámina circular) del $\mathbf{i}$-ésimo laboratorio, $\tau_\mathbf{i}$: efecto en la medida del $\mathbf{i}$-ésimo laboratorio, $\mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, $\mathbf{a} = \mathbf{4}$, $\mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{4} \times \mathbf{12} = \mathbf{48}$.

Prueba para significancia del Factor:

1. Planteamiento de la Hipótesis:

$$H_0: \; \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_4 = 0, \; \text{vs.} \; H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i = 1,2,3,4.$$

2. Nivel de Significancia de la Prueba: $\alpha = 0.05$.
3. Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{Trat}}{MS_E} \sim_{\text{Bajo } H_0} F_{4-1,48-4} = F_{3,44}$$

4. R. R. Rechazamos H_0 si

$$F_{cal} > F_{3,44,0.05} = \mathbf{qf(0.95, 3, 44)} = 2,8164 \;\; \text{equivalentemente} \;\; VP < \alpha = 0.05.$$

$$VP = P\left[F_{3,44} > F_{cal}\right]$$

Experimentos con un solo factor

Caso de Estudio 1: Continuación

Cálculos:
A partir de la Tabla ANOVA, obtenida con el software R, se tiene:

	Df	SS	MS	F_o	Pr(>F): Valor P
Laboratorio	3	0.01301	0.004335	2.81	**0.0504**
Residuales	44	0.06789	0.001543		
Total	47	0.08090			

$$\boxed{F_{cal} = \frac{MS_{Trat}}{MSE} = \frac{0.004335}{0.001543} = 2.81^{a};\ VP = P\left[F_{3,44} > 2.81\right] = 1 - \mathbf{pf(2.81, 3, 44)} = \mathbf{0.0504}.}$$

$\therefore$ Como $VP \approx 0.05$, se tiene un efecto de borde o frontera, donde no es posible concluir si se rechaza o no la hipótesis Nula, de hecho como el VP es ligeramente mayor que el valor de $\alpha = 0.05$, los datos del diseño, rechazan ´´Débilmente” la hipótesis Nula, lo cual, permite concluir la posible existencia de algún otro FACTOR o fuente de variación externa que no fue tenida en cuenta en el Diseño Experimental planteado.
Luego, si se busca detectar diferencias significativas entre los laboratorios es necesario identificar este factor o bloque y realizar el experimento con el nuevo factor o bloque.

[a] Use las expresiones de la diapositiva **47** para verificar estos valores

Validación de los Supuestos del Modelo

Verificación de Supuestos

La descomposición de la **variabilidad** de las observaciones, *variable respuesta*, por medio del ANOVA,requiere que se cumplan los **supuestos** del modelo para probar formalmente que el nivel medio de los tratamientos es igual.

Supuestos del modelo

Todas las observaciones son descritas adecuadamente con el modelo:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij},$$

donde ε_{ij}- **v. a.** independientes e idénticamente distribuidos Normales con media cero y varianza constante σ^2 pero desconocida.

Supuestos del modelo - Cont.

El anterior es un supuesto fundamental para la prueba de igualdad de medias.

Para la verificación de estos supuestos se utiliza el análisis de los **residuales**.

El **residual** de la observación j-ésima del tratamiento i-ésimo se define como:

$$\boxed{\boxed{\mathbf{e_{ij}} = \mathbf{Y_{ij}} - \hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{ij}},}}$$

como $\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{ij}}$ es la estimación asociado a Y_{ij}, dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{ij}} &:= \hat{\mathbf{E}}\left[\mathbf{Y_{ij}}\right] = \hat{\mu} + \hat{\tau}_{\mathbf{i}} \\ &= \overline{\mathbf{Y}}_{\cdot\cdot} + (\overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}\cdot} - \overline{\mathbf{Y}}_{\cdot\cdot}) \\ &= \overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}\cdot}, \end{aligned}$$

Validación de los Supuestos del Modelo

Supuestos - Cont.

$\therefore$ La estimación de cualquier observación del $\mathbf{i}$-ésimo tratamiento es igual al promedio de los valores observados en el respectivo tratamiento.

Las suposiciones para el modelo de **DECA** de efectos fijos son:

- $\varepsilon_{\mathbf{ij}}$ se distribuyen Normal.
- $\varepsilon_{\mathbf{ij}}$ son variables aleatorias independientes.
- $\mathbf{E}[\varepsilon_{\mathbf{ij}}] = \mathbf{0}$ y $\mathbf{Var}[\varepsilon_{\mathbf{ij}}] = \sigma^{\mathbf{2}}$-constante,

es decir:

$$\boxed{\varepsilon_{\mathbf{ij}} \ \mathbf{i.i.d} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^{\mathbf{2}}).}$$

Para verificar estos supuestos se usan gráficos de diagnóstico de los residuales y se realizan algunas pruebas analíticas que existen en la literatura.

Validación de los Supuestos del Modelo

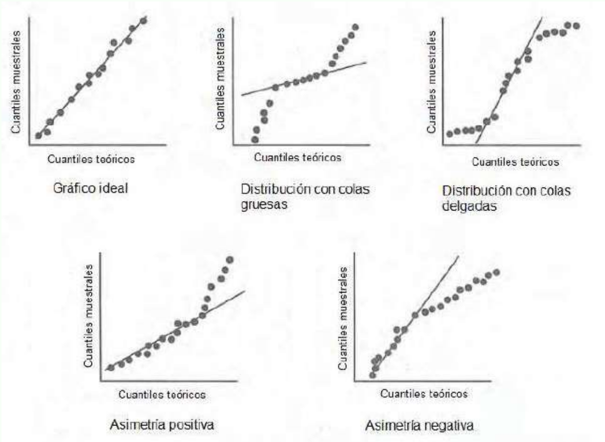
Diagnósticos para Normalidad

Los gráficos de diagnóstico sugeridos para verificar la normalidad o la no-normalidad de los errores son:

Box-Plot	**Histogramas**
Gráfico de probabilidad normal (NPP)	**Gráfico de cuantiles, (QQ Plot).**

Gráfico ideal: Existen varias formas de acuerdo al gráfico.
Gráficos no ideales: No siguen el patrón ideal.

QQ-plot



Validación de los Supuestos del Modelo

Pruebas Analíticas de Normalidad y Medidas Remediales

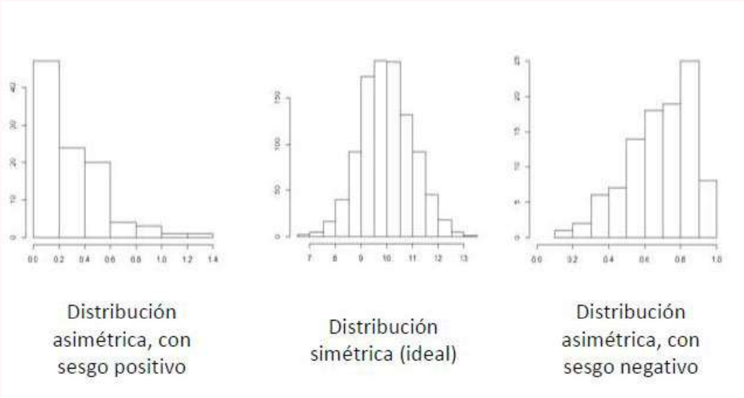
Existen varias pruebas analíticas de normalidad como lo son:

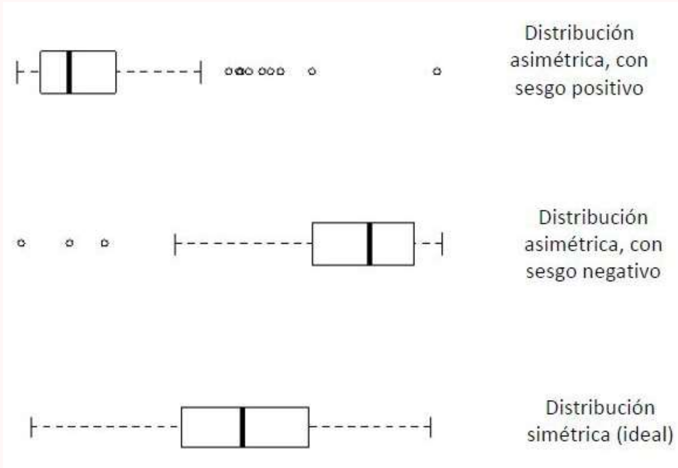
1. Kolmogorov Smirnov (KS),
2. Shapiro Wilks (SW),
3. Anderson Darling (AD),
4. Cramer Von-Mises,
5. chi-cuadrado,
6. Lilliefors,
7. Jarque Bera, etc.

Medidas Remediales:
Transformar la variable respuesta (transformaciones de potencia), Usar otro método de estimación, por ejemplo regresión robusta.

Validación de los Supuestos del Modelo

Formas del Gráfico Histograma





Validación de los Supuestos del Modelo

Diagnósticos para la Independencia

Se sugiere hacer el:

- Gráfico de residuales v.s secuencia en el tiempo (ie. v.s el orden del tiempo en el que se recopilaron los datos)

¿Cómo es el gráfico ideal? Gráfico con ningún tipo de tendencias.

Gráficos no ideales: Un gráfico con tendencia a tener rachas con residuales positivos y negativos indican una correlación positiva de los residuales, con lo cual no se cumple el supuesto de independencia de los errores.

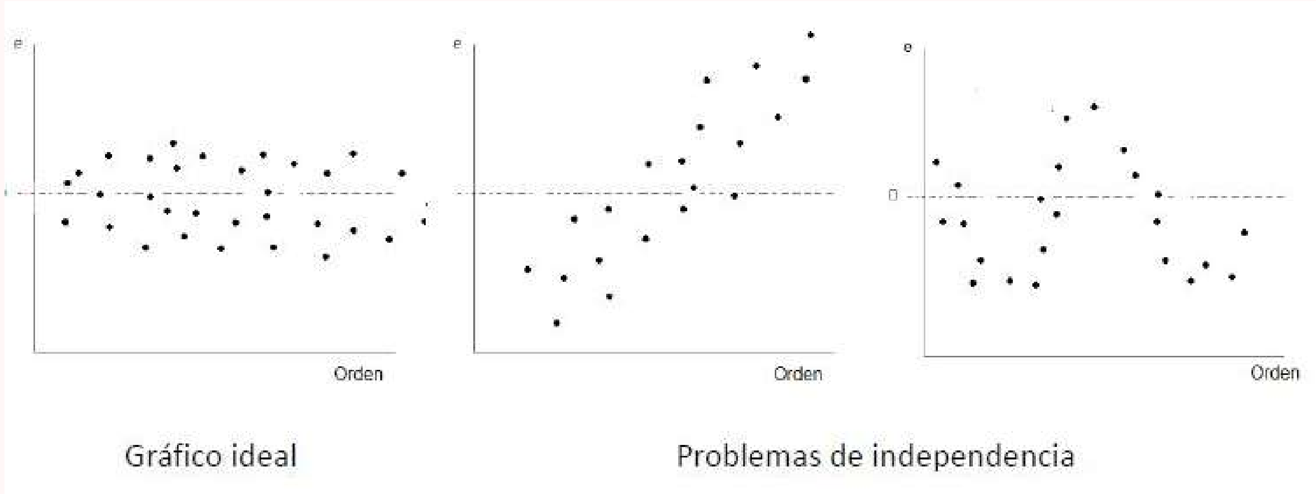
Validación de los Supuestos del Modelo

Pruebas Analíticas: Durbin Watson

Es importante prevenir este problema de la **NO** independencia de los errores desde la etapa de recolección de datos, realizando un procedimiento adecuado de aleatorización de las unidades experimentales (o de los tratamientos sobre las unidades).

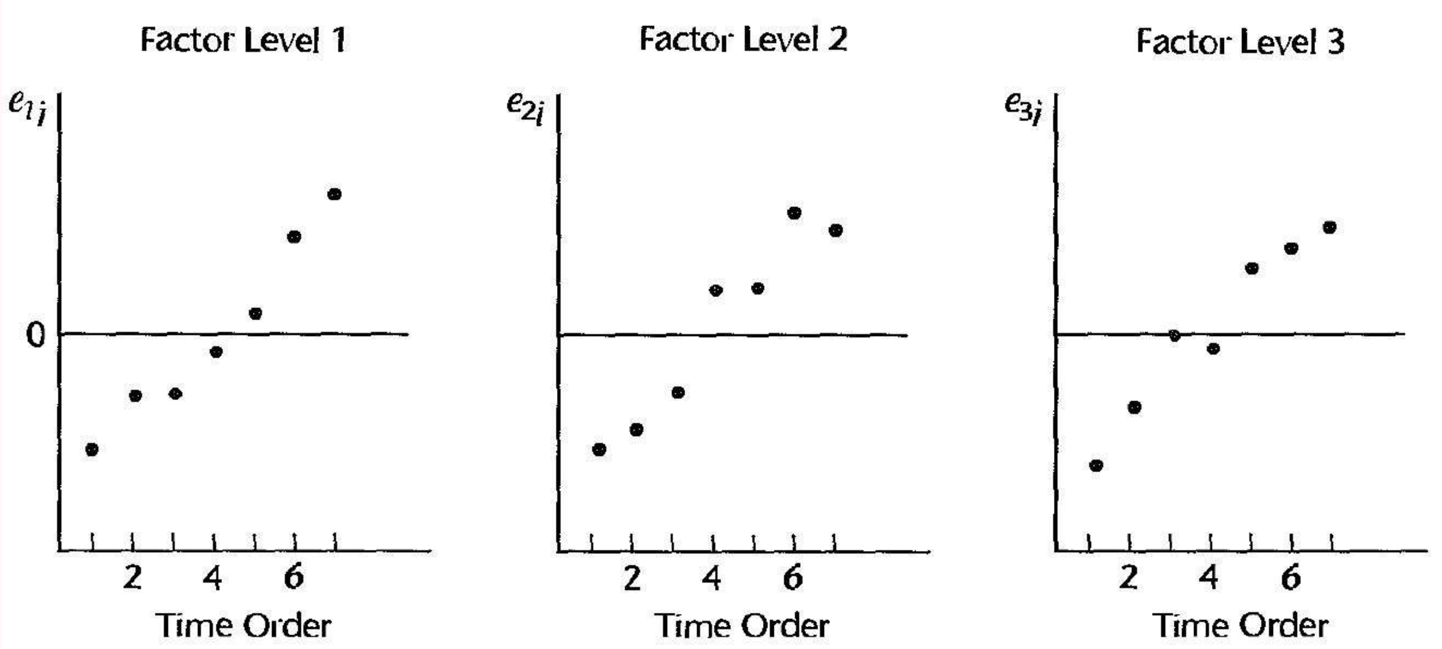
Medidas Remediales: Usar modelos que consideren autocorrelación entre los residuales (modelos de series de tiempo).

Formas del Gráfico de Residuales v.s el Orden de recolección de los datos



Validación de los Supuestos del Modelo

Un ejemplo de Gráfico No-Ideal de Residuales v.s el Orden de recolección de los datos



Validación de los Supuestos del Modelo

Prueba de Durbin Watson para independencia de errores

Esta prueba permite diagnosticar la presencia de correlación (autocorrelación) entre residuales consecutivos (ordenados en el tiempo), que es una posible manifestación de la falta de independencia. La autocorrelación se presenta en problemas en los cuales cada medición tiene alguna contaminación de la medición inmediata anterior, lo cual contradice el supuesto de independencia.

Prueba de Durbin Watson para independencia de errores–Cont.

Sea $\rho = Corr(e_t\ ,\ e_{t-1})$ con $t = 2, 3, \cdots, n$, el parámetro que representa la correlación entre residuales consecutivos. Las hipótesis a probar son:

$$H_0\ : \rho = 0$$
$$H_1\ : \rho \neq 0$$

Para un nivel de significancia dado, Si valor-p de la prueba es mayor que dicho nivel entonces se puede concluir que los residuales tienen correlación cero.

Inconveniente de la prueba: Sólo detecta la estructura de correlación de residuales consecutivos.

Diagnósticos para la Homogeneidad de Varianza

El diagnóstico gráfico sugerido para verificar la homogeneidad de varianza de los errores es:

- Gráfico de residuales v.s valores ajustados ($\hat{y}_{ij}$)

¿Cómo es el gráfico ideal? Si el modelo considerado es correcto y las suposiciones se satisfacen, los residuales no deben presentar ningún patrón.

Gráficos no ideales: Un defecto en este gráfico es un indicio de una varianza no-constante en los errores.

Validación de los Supuestos del Modelo

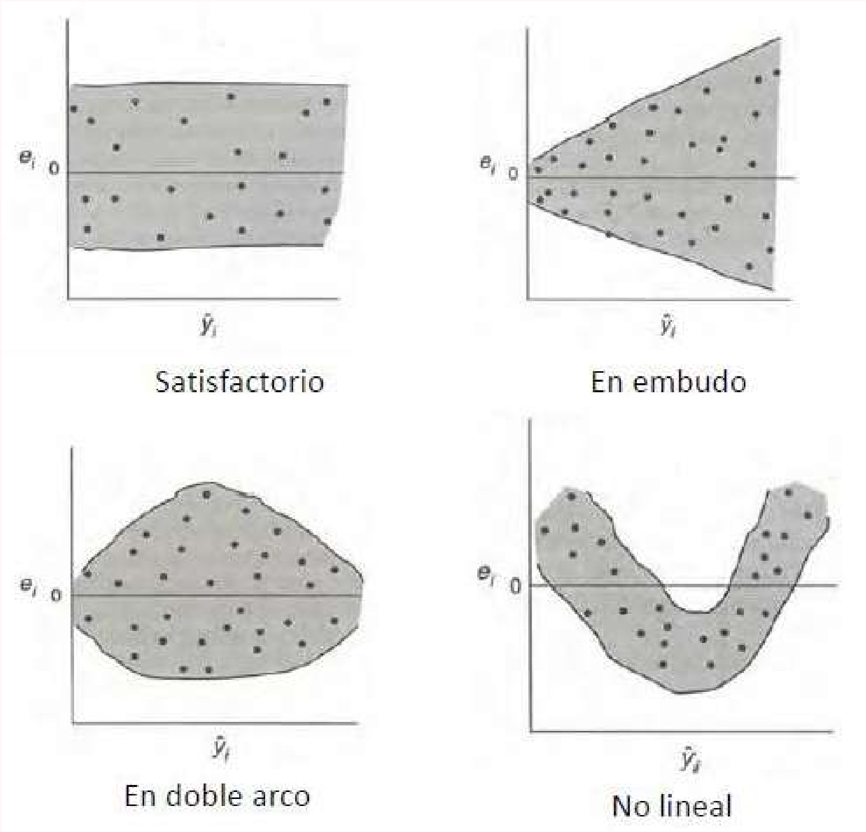
Diagnósticos para la Homogeneidad de Varianza–Cont.

Pruebas Analíticas: Bartlett, Levene, Breusch-Pagan, Hartley, Cochran, etc.

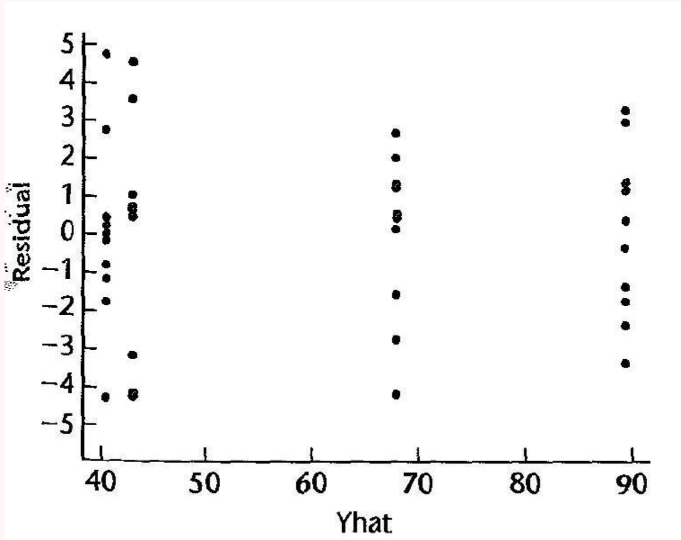
Medidas Remediales: Usar transformaciones adecuadas de la respuesta y volver a realizar el anova con los datos transformados, pero en este caso las conclusiones del anova se aplican a las poblaciones transformadas. Usar el método de estimación de mínimos cuadrados ponderados.

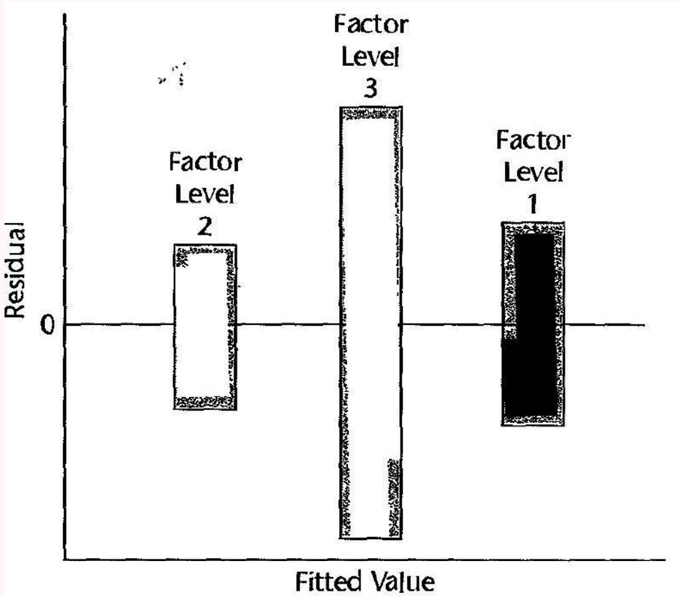
Validación de los Supuestos del Modelo

Formas del Gráfico de Residuales v.s Valores Ajustados



Un Ejemplo de Gráfico Ideal y un Gráfico NO idel de Residuales v.s Valores Ajustados





Prueba de Bartlett para Homegeneidad de Varianza: Prueba de Bartlet

Las hipótesis a probar son:

$$\begin{aligned} \mathbf{H_0} &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_a^2 = \sigma^2 \\ \mathbf{H_1} &: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \text{ para al menos un par } \mathbf{i,j} \end{aligned}$$

La prueba consiste en calcular una estadística cuya distribución muestral es aproximadamente chi-cuadrado con $(a-1)$-grados de libertad, cuando las a-muestras aleatorias provienen de poblaciones normales independientes.

La estadística de prueba es: $\boxed{\chi_0^2 = 2.3026\frac{q}{c}}$

Validación de los Supuestos del Modelo

Continuación

donde: $\boxed{\boxed{q = (N-a)\text{Log}_{10}S_p^2 - \sum_{i=1}^{a}(n_i-1)\text{Log}_{10}S_i^2}}$ y $\boxed{\boxed{c = 1 + \frac{1}{3(a-1)}\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{N-a}\right]}}$ con,

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)S_i^2}{N-a}$$

y S_i^2-es la varianza muestral del i-ésimo tratamiento.

Validación de los Supuestos del Modelo

Continuación

El valor de q-es grande cuando hay una gran diferencia entre las varianzas muestrales S_i^2 y es igual a cero si todas las S_i^2 son iguales.

De lo anterior, se rechaza la hipótesis H_0-para valores grandes de χ_0^2, i. e. se rechaza H_0 si

$$\chi_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} > \chi_{\alpha;\mathbf{a-1}}^{\mathbf{2}} = \chi_{\text{tabla}}^{\mathbf{2}},$$

donde, $\chi_{\alpha;\mathbf{a-1}}^{\mathbf{2}}$-percentil α-superior de la distribución chi-cuadrado con $(\mathbf{a-1})$-grados de libertad.

Esta prueba es sensible al supuesto de normalidad, ie. no debe aplicarse si hay duda sobre el supuesto de normalidad.

Observación acerca de las otras pruebas: La prueba de Levene es robusta a desviaciones de la normalidad. La prueba de Breusch-Pagan es sensible a muestras pequeñas.