Cap 5. Diseños Factoriales Fraccionados

Introducción

- **a.** Cuando el número de factores de un diseño 2^k se incrementa, el número de corridas necesarias para realizar una réplica del diseño supera con rapidez los recursos de la mayoría de los experimentos.
- **b.** Por ejemplo, una réplica de un diseño 2^6 requiere 64 corridas y si se tienen **dos** réplicas serían 128 corridas.
- **c.** El diseño 2^6 permite estimar 63 efectos, de los cuales sólo 21 son potencialmente importantes, que corresponden a los **6** efectos principales más los **15** efectos de interacciones dobles.
  Los restantes **42**-efectos correspondientes a interacciones triples o superiores se pueden ignorar de antemano.

Introducción - Continuación

d. En el diseño 2^6, únicamente 6 de los $2^6 - 1 = 63$-grados de libertad corresponden a los efectos principales, y sólo $\binom{6}{2} = 15$-corresponden a las interacciones dobles.

Los 42 grados de libertad restantes se asocian a las interacciones de **3** o más factores.

e. Si el experimentador puede suponer razonablemente que ciertas interacciones de orden superior son **insignificantes**, es posible obtener información de los efectos principales y de las interacciones de orden inferior corriendo únicamente una fracción del experimento completo.

f. A esta metodología se le llama **Diseños Factoriales Fraccionados** y se encuentran entre los tipos de diseños de uso más generalizado en el diseño de productos y procesos y también en el **mejoramiento** de procesos.

Introducción - Cont.

g. Se mostrará que con una fracción a la mitad del diseño factorial completo $\mathbf{2^6}$ ($\frac{1}{2}2^6 = 2^{6-1}$), se pueden estimar "limpiamente"los $\mathbf{21}$ efectos potenciales importantes, se sacrifica la información relativa a las $\mathbf{42}$ interacciones de orden alto que no interesan.

Con un **diseño factorial fraccionado** $\mathbf{2^{6-1}}$ se puede obtener esencialmente la misma información que con el **factorial completo** $\mathbf{2^6}$, pero con la mitad del costo experimental.

h. Cuando se tienen menos de cinco factores ($\mathbf{k < 5}$); los efectos potencialmente importantes superan en número a los efectos ignorables a priori, de aquí que si se fraccionan estos diseños, se pierde por fuerza información que puede ser relevante.

Introducción - Cont.

i. Ahora, cuando $\mathbf{k \geq 5}$ el número de **efectos ignorables** apriori supera el número de **efectos no ignorables** o potencialmente importantes, lo cual indica que estos diseños se pueden fraccionar muchas veces sin perder información valiosa. Mientras más grande es el valor de $\mathbf{k}$, el diseño admite un grado de fraccionamiento mayor, ver siguiente tabla.

Efectos en los factoriales 2^k.

Diseño 2^k	Total de efectos	Efectos no ignorables	Efectos ignorables
2^2	3	3	0
2^3	7	6	1
2^4	15	10	5
2^5	31	15	16
2^6	63	21	42
2^7	127	28	99

Introducción - Cont.

Al correr sólo una fracción del **diseño factorial completo** ocurren dos($\mathbf{2}$) hechos inevitables:

(1) **Pérdida de información**, ya que habrá efectos que no podrán estimarse y se tienen menos grados de libertad disponibles para el error. Los efectos que se pierden se espera que sean, en la medida de lo posible, interacciones de alto orden, las cuales se pueden ignorar de antemano con bajo riesgo.

(2) Los efectos que sí se pueden estimar tienen al menos un **alias** (efectos que tienen el mismo contraste).
El que un efecto sea **alias** de otro significa que son en realidad el mismo efecto con nombres distintos, y al estimar a uno de ellos se estima al mismo tiempo el otro, de manera que no se pueden separar.

Cap 5. Diseños Factoriales Fraccionados

Introducción - Cont.

Cuando el experimentador elige UNA fracción en la que dos efectos potencialmente importantes son ALIAS, lo cual NO es recomendable, pero a veces no hay otra alternativa, debe contar de antemano con una estrategia de interpretación del efecto estimado.

Principios Básicos Sobre Efectos Factoriales

A continuación se listan los principios básicos de los Efectos Factoriales:

1. **Principio de Ordenamiento Jerárquico**
   - Los efectos de orden bajo son más probables de ser importantes que efectos de orden superior.
   - Efectos del mismo orden son igualmente probables de ser importantes.

Principios Básicos Sobre Efectos Factoriales-Cont.

2. **Principio de Esparcidad de Efectos**
   - El número de efectos relativamente importantes en un experimento factorial es pequeño (Principio de Pareto).
3. **Principio de Heredabilidad de Efectos**
   - Si una interacción es significativa, entonces al menos alguno de los efectos que lo conforman debe ser significativo.

Fraccionamiento de Experimentos

Considere un experimento donde se desea estudiar el efecto de $\mathbf{3}$ factores de **dos** (**2**) niveles cada uno, es decir, es un diseño $\mathbf{2^3}$:

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$y_1(1)$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$y_2(c)$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$y_3(b)$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$y_4(bc)$
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$y_5(a)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$y_6(ac)$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$y_7(ab)$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$y_8(abc)$

Tabla 1 Signos para el cálculo de los efectos en un diseño 2^3

Anteriormente se vió que las estimaciones de los coeficientes de regresión se obtienen mediante la conformación de los respectivos **contrastes**: **Por ejemplo**:

$$\text{Efecto Est. de } \mathbf{A} = \frac{\mathbf{C_A}}{\mathbf{n2^{k-1}}} = \frac{-\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2} - \mathbf{y_3} - \mathbf{y_4} + \mathbf{y_5} + \mathbf{y_6} + \mathbf{y_7} + \mathbf{y_8}}{\mathbf{4}}$$

$$\text{Efecto Est. de } \mathbf{AB} = \frac{\mathbf{C_{AB}}}{\mathbf{n2^{k-1}}} = \frac{\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} - \mathbf{y_3} - \mathbf{y_4} - \mathbf{y_5} - \mathbf{y_6} + \mathbf{y_7} + \mathbf{y_8}}{\mathbf{4}}$$

$$\text{Efecto Est. de } \mathbf{BC} = \frac{\mathbf{C_{BC}}}{\mathbf{n2^{k-1}}} = \frac{\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2} - \mathbf{y_3} + \mathbf{y_4} + \mathbf{y_5} - \mathbf{y_6} - \mathbf{y_7} + \mathbf{y_8}}{\mathbf{4}}$$

Los coeficientes se obtienen dividiendo el efecto por **DOS**, es decir, Efecto Est. de $\mathbf{A}/\mathbf{2}$ y Efecto Est. de $\mathbf{AB}/\mathbf{2}$.

Fracción del Experimento

Ahora suponga que sólo se tiene **presupuesto** para realizar la **mitad** del experimento, y los tratamientos son escogidos convenientemente como sigue:

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	y_2
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	y_3
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	y_5
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	y_8

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$y_1(1)$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$y_2(c)$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$y_3(b)$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$y_4(bc)$
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$y_5(a)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$y_6(ac)$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$y_7(ab)$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$y_8(abc)$

Es decir, se escogen los tratamientos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{abc}$.
Con estas **cuatro** (**4**) observaciones se puede estimar el efecto de $\mathbf{A}$ como sigue:

$$\text{Efecto Est. de } \mathbf{A}_{\star} = \frac{-\mathbf{y_2} - \mathbf{y_3} + \mathbf{y_5} + \mathbf{y_8}}{\mathbf{2}}$$

Pregunta: ¿Está Efecto Est. de $\mathbf{A}_{\star}$ realmente estimando el efecto de $\mathbf{A}$?

Fracción de un Experimento

De las tablas anteriores se observa que:

$$\mathbf{A}_{\star} = \mathbf{A} + \mathbf{BC}$$

Luego si se corre sólo la fracción del experimento mostrada anteriormente, se puede pensar que se está estimando el **efecto de** $\mathbf{A}$ pero en realidad se está estimando el efecto combinado: $A + BC$.

En este caso, se dice que $\mathbf{A}$ queda **confundido** con $\mathbf{BC}$, o que $\mathbf{BC}$ es un **alias** de $\mathbf{A}$ o simplemente que: $\mathbf{A}$ y $\mathbf{BC}$ son **ALIAS**.
Similarmente, puede verse también que $\mathbf{B}$ queda **confundido** con $\mathbf{AC}$ y que $\mathbf{AC}$ es un alias de $\mathbf{B}$, es decir,

$$\mathbf{B}_{\star} = \mathbf{B} + \mathbf{AC}$$

Invocando el principio de jerarquía, las interacciones de segundo orden son menos importantes que los efectos principales, luego sí $\mathbf{A} + \mathbf{BC}$ es significativo, entonces es más probable que se deba a $\mathbf{A}$ que a $\mathbf{BC}$.
Similarmente se obtiene que:

$$\mathbf{C}_{\star} = \mathbf{C} + \mathbf{AB}$$

Por supuesto, los principios dados antes son sólo guías y no verdades absolutas.

Las cuatro corridas escogidas fueron aquellas donde la columna $\mathbf{ABC}$ tenía un signo $+$ y la consecuencia es que $\mathbf{A}$ queda confundido con $\mathbf{BC}$, $\mathbf{B}$ queda confundido con $\mathbf{AC}$ y $\mathbf{C}$ con $\mathbf{AB}$.
Esto se denota $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, y se puede resumir en siguiente ecuación:

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABC},$$

donde el símbolo $\mathbf{I}$ -significa un elemento identidad, (o una columna de $+$'s) y se puede entonces definir las siguientes operaciones:

$$\mathbf{AA} = \mathbf{BB} = \mathbf{CC} = \mathbf{I}\ , \quad \mathbf{AI} = \mathbf{A}\ , \quad \mathbf{BI} = \mathbf{B}\ , \quad \mathbf{CI} = \mathbf{C}.$$

A la ecuación: $\mathbf{I} = \mathbf{ABC}$ se le llama **relación definidora** de la fracción un medio del diseño $\mathbf{2^3}$, la cual se denota por $\mathbf{2^{k-p}} = \mathbf{2^{3-1}}$ con $\mathbf{p} < \mathbf{k}$.

Propiedades de la fracción escogida

Note que la fracción tiene propiedades de ortogonalidad y balance igual que el factorial completo.

Balance: Significa que cada nivel de un factor aparece en el mismo número de corridas y **Ortogonalidad** entre dos factores significa que todas las combinaciones de niveles aparecen en el mismo número de corridas.

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	y_2
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	y_3
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	y_5
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	y_8

Si se hubiera escogido, por ejemplo las corridas **2, 3, 5** y **6**, el diseño resultante no hubiera tenido esas propiedades, lo cual tiene como consecuencia que las estimaciones no son independientes y con un patrón de confusión complicado.

Resolución de un diseño

Definición : La resolución de un diseño 2^{k-p} se define como la longitud de la "palabra" de menor tamaño en la relación definidora.

Propiedades de la fracción escogida

El diseño visto anteriormente (ie. la fracción un medio del diseño 2^3, ie. el diseño: 2^{3-1}) es un diseño de Resolución III y se denota por 2_{III}^{3-1}, que confunde efectos principales con interacciones dobles, ie. los efectos principales son alias de interacciones dobles.

Ejemplo

Si la relación definidora es

$$I = ABD = ACE = BCDE$$

entonces, la resolución es III, ya que, por ejemplo, ABD y ACE tienen longitud 3 y son las de menor tamaño.

Diseño de Resolución-III

Son diseños donde ninguno de los efectos principales es alias de ningún otro efecto principal, pero los efectos principales son alias de interacciones dobles y las interacciones dobles pueden ser alias entre si.

Ejemplo: El diseño 2^{3-1} con $I = ABC$ es un diseño de resolución III, ie. es un 2^{3-1}_{III}.

Otro ejemplo de un diseño de Resolución III

A	B	C	D	E	ABD	ACE
−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	+	−	+
−	−	−	+	−	+	−
−	−	−	+	+	+	+
−	−	+	−	−	−	+
−	−	+	−	+	−	−
−	−	+	+	−	+	+
−	−	+	+	+	+	−
−	+	−	−	−	+	−
−	+	−	−	+	+	+
−	+	−	+	−	−	−
−	+	−	+	+	−	+
−	+	+	−	−	+	+
−	+	+	−	+	+	−
−	+	+	+	−	−	+
−	+	+	+	+	−	−
+	−	−	−	−	+	+
+	−	−	−	+	+	−
+	−	−	+	−	−	+
+	−	−	+	+	−	−
+	−	+	−	−	+	−
+	−	+	−	+	+	+
+	−	+	+	−	−	−
+	−	+	+	+	−	+
+	+	−	−	−	−	+
+	+	−	−	+	−	−
+	+	−	+	−	+	+
+	+	−	+	+	+	−
+	+	+	−	−	−	−
+	+	+	−	+	−	+
+	+	+	+	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+

Una Cuarta Parte de un 2^5

Generadores

$$D = AB \quad E = AC$$

Relación definidora

$$I = ABD = ACE = BCDE$$

A	B	C	D	E	ABD	ACE
−	−	−	+	+	+	+
−	−	+	+	−	+	+
−	+	−	−	+	+	+
−	+	+	−	−	+	+
+	−	−	−	−	+	+
+	−	+	−	+	+	+
+	+	−	+	−	+	+
+	+	+	+	+	+	+

Diseño de Resolución-IV

Son diseños en los que ninguno de los efectos principales es alias de ningún otro efecto principal ni de interacciones dobles, pero las interacciones de dos factores son alias entre si.

Ejemplo: Un diseño 2^{4-1} con $I = ABCD$ es un diseño de resolución IV, ie. es un 2^{4-1}_{IV}.

Diseño de Resolución-V

Se trata de diseños en los que ninguno de los efectos principales ni de las interacciones dobles son alias de otro efecto principal o de interacciones dobles, pero las interacciones de dos factores son alias de las interacciones de tres factores.

Ejemplo: Un diseño 2^{5-1} con $I = ABCDE$ es un diseño de resolución V, ie. es un 2^{5-1}_{V}.

Conclusión

A mayor resolución se observa más claramente lo que sucede con los efectos potencialmente importantes.

Las fracciones 2^{3-1}, 2^{4-1} y 2^{5-1} tienen resolución III, IV y V , respectivamente; porque sus correspondientes generadores se componen de 3, 4 y 5 letras. En estos diseños, tanto los efectos principales como las interacciones dobles están limpiamente estimados, es decir, sus alias son interacciones triples en adelante.