

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 5

Objetivo: Estudiar e interpretar los resultados del análisis de varianza con dos factores, considerando:

1. **Efectos fijos**
2. **Efectos aleatorios.**

Recaltar la diferencia entre estos dos modelos de análisis de varianza. Mostrar el encubrimiento de un factor principal producida por la significancia de la interacción.

Planteamiento del Problema:

El gerente de una fábrica efectuó tres réplicas de un diseño factorial para investigar el efecto del **supervisor** y del **turno** en una línea de producción. El número de artículos producidos por **turno** de ocho horas y por **supervisor** en cada réplica aparece en la tabla siguiente.

	Turno 1 (Mañana)	Turno 2 (Tarde)	Turno 3 (Noche)
Supervisor A	570	480	470
	610	475	430
	625	540	450
Supervisor B	480	625	630
	515	600	680
	465	580	660

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 5

II. Suponga que las asignaciones de los niveles de los factores se seleccionan aleatoriamente dando origen a un modelo de efectos aleatorios.

1. Escriba las expresiones teóricas para el valor esperado del cuadrado medio de los elementos de la tabla ANOVA, correspondiente a este diseño.

RTA: **A**: Supervisor, **a**: 2 **B**: Turno, **b**=3, **n**=3.

- $E[MS_A] = \sigma^2 + 3\sigma_{\tau\beta}^2 + 3 \times 3\sigma_\tau^2$
- $E[MS_B] = \sigma^2 + 3\sigma_{\tau\beta}^2 + 2 \times 3\sigma_\beta^2$
- $E[MS_{AB}] = \sigma^2 + 3\sigma_{\tau\beta}^2$
- $E[MS_E] = \sigma^2$.

Nueva Tabla ANOVA:

	gl	SS	MS	F	VP
Supervisor	1	19012.5	19012.5	$\frac{19012.5}{40454.17} = 0.47$	0.5637
Turno	2	258.33	129.16	$\frac{129.16}{40454.17} = 0.00319$	0.9968
Interacción Super-Turno	2	80908.33	40454.17	56.23	< .0001
Residuals	12	8633.3	719.4		

Plantee, interprete y contraste las hipótesis posibles, elimine las interacciones y los factores no significativos de este diseño y construya una nueva tabla ANOVA.

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 5

Variabilidad de la **Interacción**:

$$H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{\tau\beta}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(2-1)(3-1), 2 \times 3 \times (3-1)} = F_{2, 12}$$

Note que en este caso:

$$F_{cal} = \frac{40454.17}{719.4} = 56.23, \quad VP < 0.0001$$

\therefore A un nivel de significancia del 5 % la **interacción** aporta una variabilidad **significativa** a la variabilidad de la variable respuesta.

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 5

Variabilidad del **Supervisor**:

$$H_0 : \sigma_{\tau}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{\tau}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{1, (2-1)(3-1)} = F_{1, 2}$$

En este caso:

$$F_{cal} = \frac{19012.5}{40454.17} = 0.47, \quad VP = 0.5637 = 1 - pf(0.47, 1, 2)$$

\therefore A un nivel de significancia del 5 % la variabilidad del **supervisor** **NO** es significativa, sin embargo, no se puede eliminar esta componente del modelo ya que hay presencia de la variabilidad de la interacción **significativa**.

A una conclusión similar se llega al analizar la significancia de la variabilidad asociada al **TURNO**.

Por las razones anteriores **NO** es posible reducir la tabla **ANOVA**, por el posible **encubrimiento** que puede existir al tener una variabilidad de la **interacción** significativa.

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 5

2. Estime la varianza de las **interacciones** y de los **factores significativos**:

- Varianza estimada del término de **Error**: $\hat{\sigma}^2 = MS_E = 719.4$
- Varianza estimada de la **interacción**:

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n} = \frac{40454.17 - 719.4}{3} = 13244.923.$$

Diseños Factoriales

Retomando el Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

%Carbonatación (A)	Presión de Operación (B)			
	25 <i>psi</i>		30 <i>psi</i>	
	Rapidez de Línea		Rapidez de Línea	
	200	250	200	250
10	-3	-1	-1	1
	-1	0	0	1
12	0	2	2	6
	1	1	3	5
14	5	7	7	10
	4	6	9	11

- II. Suponga que las asignaciones de los niveles de los factores se seleccionan aleatoriamente dando origen a un modelo de **efectos aleatorios**.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

1. Escriba las expresiones teóricas para el valor esperado del cuadrado medio de los elementos de la tabla ANOVA, correspondiente a este diseño. **a = 3, b = 2, c = 2, r = n = 2**

- $E[MS_A] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2 + 2 \times 2 \times 2\sigma_a^2.$
- $E[MS_B] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2 + 2 \times 3\sigma_{bc}^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_b^2.$
- $E[MS_C] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2 + 2 \times 3\sigma_{bc}^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_c^2.$
- $E[MS_{AB}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2.$
- $E[MS_{AC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2.$
- $E[MS_{BC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 3\sigma_{bc}^2.$
- $E[MS_{ABC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2.$
- $E[MS_E] = \sigma^2.$

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

TABLA ANOVA

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	2	252.75	126.38	178.412	1.19e-09
B	1	45.38	45.38	64.059	3.74e-06
C	1	22.04	22.04	31.118	0.00012
A:B	2	5.25	2.63	3.706	0.05581
A:C	2	0.58	0.29	0.412	0.67149
B:C	1	1.04	1.04	1.471	0.24859
A:B:C	2	1.08	0.54	0.765	0.48687
Residuals	12	8.50	0.71		

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Plantee, interprete y contraste las hipótesis posibles.

Significancia de la Interacción Triple:

$$H_0 : \sigma_{abc}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{abc}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{ABC}}{MS_E} \sim F_{(3-1)(2-1)(2-1), 3 \times 2 \times 2 \times (2-1)} = F_{2, 12}$$

Note que en este caso:

$$F_{cal} = \frac{0.54}{0.71} = 0.765, \quad VP = 0.48687$$

\therefore A un nivel de significancia del **5%** la variabilidad asociada a la **interacción triple NO** es significativa.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Significancia de la **Interacción DOBLE AB**:

$$H_0 : \sigma_{ab}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{ab}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{AB}}{MS_{ABC}} \sim F_{(3-1)(2-1), (3-1) \times (2-1) \times (2-1)} = F_{2, 2}$$

Note que en este caso:

$$F_{cal} = \frac{2.63}{0.54} = 4.87, \quad VP = 0.17$$

\therefore A un nivel de significancia del **5%** la variabilidad asociada a la **interacción doble** entre el porcentaje de carbonatación y la presión de operación **NO** es significativa.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Significancia de la **Interacción DOBLE AC**:

$$H_0 : \sigma_{ac}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{ac}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{AC}}{MS_{ABC}} \sim F_{(3-1)(2-1), (3-1) \times (2-1) \times (2-1)} = F_{2, 2}$$

Note que en este caso:

$$F_{cal} = \frac{0.29}{0.54} = 0.53, \quad VP = 0.6335$$

\therefore A un nivel de significancia del **5%** la variabilidad asociada a la **interacción doble** entre el porcentaje de carbonatación y la rapidez de la línea **NO** es significativa.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Significancia de la **Interacción DOBLE BC**:

$$H_0 : \sigma_{bc}^2 = 0 \text{ v.s } H_a : \sigma_{bc}^2 > 0$$

Estadístico de Prueba:

$$F = \frac{MS_{BC}}{MS_{ABC}} \sim F_{(2-1)(2-1), (3-1) \times (2-1) \times (2-1)} = F_{1, 2}$$

Note que en este caso:

$$F_{cal} = \frac{1.04}{0.54} = 1.92, \quad VP = 0.3001$$

\therefore A un nivel de significancia del **5%** la variabilidad asociada a la interacción doble entre la presión de operación y la rapidez de la línea **NO** es significativa.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Elimine las interacciones y los factores no significativos de este diseño y construya una nueva tabla ANOVA.

Luego de eliminar las cuatro componentes que dieron **NO** Significativas, se obtiene la siguiente **TABLA ANOVA** Reducida:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)

A	2	252.75	126.38	_____	_____
B	1	45.38	45.38	_____	_____
C	1	22.04	22.04	_____	_____
Residuals	glE	SSEN	SSEN/glE		

$$glEN = 12+2+1+2+2= 19$$

$$SSEN = 8.50+1.08+1.04+0.58+5.25= 16.45$$

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Para completa la Tabla **ANOVA** anterior, note inicialmente que la Tabla de los **Cuadrados Medios Esperados**, del modelo reducido,

$$Y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl}$$

con $\tau_i \sim iid N(0, \sigma_a^2)$, $\beta_j \sim iid N(0, \sigma_b^2)$, $\gamma_k \sim iid N(0, \sigma_c^2)$ y $\varepsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2)$.
Con $\tau_i, \beta_j, \gamma_k, \varepsilon_{ijkl}$ son v.a. independientes entre sí, se reduce a:

- $E[MS_A] = \sigma^2 + 2 \times 2 \times 2\sigma_a^2$
- $E[MS_B] = \sigma^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_b^2$
- $E[MS_C] = \sigma^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_c^2$
- $E[MS_E] = \sigma^2$

Note que bajo el supuesto de la hipótesis nula de la **NO** significancia de la Varianza de cada uno de los factores, es decir,

$$H_0 : \sigma_a^2 = 0 \quad H_0 : \sigma_b^2 = 0 \quad H_0 : \sigma_c^2 = 0$$

el MS_A , MS_B y MS_C son también estimadores insesgados para σ^2 .

Luego los **EP** respectivos son los cocientes entre los **cuadrados medios** asociados y el **MS_E**:

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	2	252.75	126.38	126.38/0.86=146.95	<0.0001 (*)
B	1	45.38	45.38	45.38/0.86= 52.77	<0.0001
C	1	22.04	22.04	22.04/0.86= 25.63	<0.0001
Error	19	16.45	0.86		

$$gl_{EN} = 12+2+1+2+2 = 19$$

$$SSE_{EN} = 8.50+1.08+1.04+0.58+5.25 = 16.45$$

(*) En R: $Pr(>F)$: Valor P = $1-pf(146.95, 2, 19)$

∴ A un nivel de significancia del **5%** la variabilidad asociada al porcentaje de carbonatación, la presión de operación y la rapidez de la línea son **significativas**.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

2. Estime la varianza de las interacciones y los factores significativos.
En este caso como la variabilidad de la interacción **triple** y las **dobles** NO son **significativas**, entonces sólo se estiman las varianzas asociadas a los factores principales, a partir de la **Tabla de los Cuadrados Medios Esperados** reducida:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_a^2 &= \frac{MS_A - \hat{\sigma}^2}{8} = \frac{MS_A - MS_E}{8} = \frac{126.38 - 0.86}{8} = 15.69 \\ \hat{\sigma}_b^2 &= \frac{MS_B - \hat{\sigma}^2}{12} = \frac{MS_B - MS_E}{12} = \frac{45.38 - 0.86}{12} = 3.71 \\ \hat{\sigma}_c^2 &= \frac{MS_C - \hat{\sigma}^2}{12} = \frac{MS_C - MS_E}{12} = \frac{22.04 - 0.86}{12} = 1.765\end{aligned}$$

Y la **Variabilidad estimada** de la desviación promedio de la **altura de llenado de las botellas** está dada por:

$$\hat{V}(Y_{ijkl}) = MSE + \hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_b^2 + \hat{\sigma}_c^2 = 0.86 + 15.69 + 3.71 + 1.765 = 22,025.$$

El **71.23%** de la variabilidad en desviación promedio de la altura es debida al porcentaje de carbonatación.

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Punto Adicional:

III Suponga que de los tres factores el único que es **ALEATORIO** es el factor **A**: Porcentaje de Carbonatación, los otros dos factores son **FIJOS**.

Realice las pruebas para determinar si la interacción triple y las interacciones dobles contribuyen de manera significativa a la varianza de la desviación promedio de la altura de llenado.

- $E[MS_A] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2 + 2 \times 2 \times 2\sigma_a^2$
- $E[MS_B] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2 + 2 \times 3\theta_{bc}^2 + 2 \times 3 \times 2\theta_b^2,$
 $\theta_b^2 = \sum_{j=1}^b \beta_j^2 / (b - 1)$
- $E[MS_C] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2 + 2 \times 3\theta_{bc}^2 + 2 \times 3 \times 2\theta_c^2,$
 $\theta_{bc}^2 = \sum_j \sum_k (\beta\gamma)_{jk}^2 / ((b - 1)(c - 1))$
- $E[MS_{AB}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ab}^2$
- $E[MS_{AC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 2\sigma_{ac}^2$
- $E[MS_{BC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2 + 2 \times 3\theta_{bc}^2$
- $E[MS_{ABC}] = \sigma^2 + 2\sigma_{abc}^2$
- $E[MS_E] = \sigma^2$

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Observe que:

- i. Los **Estadísticos de Prueba** para la variabilidad de la interacción triple y la variabilidad de las interacciones dobles (**AC** y **AB**) y el efecto de interacción doble de **B** y **C** coinciden con los Estadísticos **F** asociados al modelo de **Efectos Aleatorios** (La prueba F tiene como denominador el MS_E para la variabilidad de la interacción triple y para las interacciones dobles el denominador es MS_{ABC})
- ii. Se obtienen las mismas conclusiones acerca de la **NO** significancia de la variabilidad de las interacciones Triple y las interacciones dobles **AC** y **AB** y el efecto de interacción doble entre **B** y **C**.
- iii. Se procede a realizar la prueba de significancia de la variabilidad del porcentaje de carbonatación y la significancia de los efectos principales asociado a **B** y **C**, eliminando las componentes NO significativas de los cuadrados medios esperados, reduciéndose a:
 - $E[MS_A] = \sigma^2 + 2 \times 2 \times 2\sigma_a^2$
 - $E[MS_B] = \sigma^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_b^2$
 - $E[MS_C] = \sigma^2 + 2 \times 3 \times 2\sigma_c^2$
 - $E[MS_E] = \sigma^2$

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Con la siguiente Tabla **ANOVA** reducida, coincidiendo con la misma tabla reducida del modelo de **efectos aleatorios**:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)

A	2	252.75	126.38	$126.38/0.86=146.95$	<0.0001
B	1	45.38	45.38	$45.38/0.86= 52.77$	<0.0001
C	1	22.04	22.04	$22.04/0.86= 25.63$	<0.0001
Error	19	16.45	0.86		

$$gl_{EN} = 12+2+1+2+2= 19$$

$$SSE_{EN} = 8.50+1.08+1.04+0.58+5.25= 16.45$$

Diseños Factoriales

Caso de Estudio 6: Gaseosas-Continuación Taller 4

Por ejemplo para hacer la prueba:

$$H_0 : \sigma_a^2 = 0 \text{ v.s. } H_1 : \sigma_a^2 > 0$$

Note que bajo H_0 , $E[MS_A] = \sigma^2 = E[MS_E]$. Luego el **estadístico de Prueba**:

$$F_{cal} = \frac{MS_A}{MS_E} = 146.95$$

Se rechaza H_0 a un nivel de significancia del **5%**. Para los efectos fijos de **B** y **C**:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

Las respectivas F_{cal} son 52.77 y 25.63 con las cuales se rechazan las respectivas hipótesis nula, indicando que el efecto asociado a la presión de operación y a la rapidez de la línea son significativos.