Comparaciones por Contrastes (Método de Scheffé)

Otro tipo de comparaciones diferentes al de comparaciones múltiples de pares de medias, es mediante el uso de contrastes.

Contraste: Un contraste es una combinación lineal de las medias poblacionales, es decir:

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i,}$$

donde los coeficientes c_i-son números reales conocidos y cumplen la condición de que:

$$\sum_{i=1}^{a} c_i = 0.$$

Equivalentemente:

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = \sum_{i=1}^{a} c_i(\mu + \tau_i) = \mu \sum_{i=1}^{a} c_i + \sum_{i=1}^{a} c_i \tau_i = \sum_{i=1}^{a} c_i \tau_i$$

Comparación entre medias

Ejemplos de Contrastes

Para un experimento con un factor de $\mathbf{a = 5}$ tratamientos o niveles, algunos ejemplos de contrastes son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2\,\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \\
&= 2\,\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 0\mu_4 + 0\mu_5 && \text{(Compara trat. 1 con promedio de trat. 2 y 3)} \\
C_2 &= \mu_1 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 && \text{(Compara trat. 1 y 3 con trat. 4 y 5)} \\
&= \mu_1 + 0\mu_2 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 \\
C_3 &= \mu_4 - \mu_5 && \text{(Compara trat. 4 y 5)} \\
&= 0\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + \mu_4 - \mu_5
\end{aligned}
$$

Un caso particular son las comparaciones con un **control**, Comparaciones por Dunnet, las $\mathbf{a-1}$ comparaciones son contrastes:

$$\boxed{\mu_i - \mu_a, \quad i = 1, 2, \ldots, a-1.}$$

En general el interés está en las pruebas de hipótesis de la forma:

$$
\begin{cases} H_0 : \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i = 0 \\ H_a : \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i \neq 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} H_0 : C = 0 \\ H_a : C \neq 0 \end{cases}
$$

Para el primer contraste, la hipótesis anterior es equivalente a:

$$\begin{cases} \mathbf{H_0} : \mathbf{2}\mu_\mathbf{1} - \mu_\mathbf{2} - \mu_\mathbf{3} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H_a} : \mathbf{2}\mu_\mathbf{1} - \mu_\mathbf{2} - \mu_\mathbf{3} \neq \mathbf{0} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{H_0} : \mathbf{2}\mu_\mathbf{1} = \mu_\mathbf{2} + \mu_\mathbf{3} \\ \mathbf{H_a} : \mathbf{2}\mu_\mathbf{1} \neq \mu_\mathbf{2} + \mu_\mathbf{3} \end{cases}$$

es decir:

1. Se desea probar si la respuesta media del primer tratamiento es igual al promedio de las respuesta media de los tratamientos $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$, es decir comparar el tratamiento $\mathbf{1}$ con el promedio de los otros dos tratamientos $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$.
2. En forma similar se plantean las respectivas hipótesis para los otros dos contrastes.

A continuación se verá el procedimiento para la realización de la Prueba de Hipótesis:

Comparación entre medias

Prueba de hipótesis para Contrastes

Primero: Note que un estimador insesgado del contraste está dado por:

$$\boxed{\hat{C} = \sum_{i=1}^{a} c_i \hat{\mu}_i = \sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\cdot},}$$

es decir:

$$E[\hat{C}] = E\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\cdot}\right] = \sum_{i=1}^{a} c_i E[\overline{Y}_{i\cdot}] = \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = C$$

Y la varianza de este estimador está dada por:

$$Var(\hat{C}) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \qquad (2)$$

Comparación entre medias

Varianza del estimador del Contraste

A continuación se deduce la expresión (2):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}(\hat{\mathbf{C}}) &= \mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \overline{Y}_{i\cdot}\right] = \sum_{i=1}^{a} \mathbf{Var}(c_i \overline{Y}_{i\cdot}) \\
&= \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \mathbf{Var}(\overline{Y}_{i\cdot}) \\
&= \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \sigma^2 / n_i \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{a} c_i^2 / n_i \text{ , para diseño Desbalanceado} \\
&= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{a} c_i^2 \text{ , para diseño Balanceado}
\end{aligned}
$$

Comparación entre medias

Estadístico de Prueba

Luego un Estimador Insesgado de esta varianza es:

$$\widehat{\mathbf{Var}}(\hat{\mathbf{C}}) = \hat{\sigma}^2 \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{a}} \mathbf{c_i^2}/\mathbf{n_i} = \mathbf{MSE} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{a}} \mathbf{c_i^2}/\mathbf{n_i}$$

Si $\mathbf{H_0}$-es cierta, se tiene:

$$\frac{\hat{\mathbf{C}}}{\sqrt{Var(\hat{C})}} = \frac{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{a}} \mathbf{c_i} \overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}\cdot}}{\sqrt{\sigma^2 \sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

y al usar, $\hat{\sigma}^{\mathbf{2}} = \mathbf{MSE}$, se tiene:

$$\mathbf{T} = \frac{\hat{\mathbf{C}}}{\mathbf{EE}(\hat{\mathbf{C}})} := \frac{\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{a}} \mathbf{c_i} \overline{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}\cdot}}{\sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i}} \sim \mathbf{t_{N-a}}.$$

Con $\mathbf{EE}(\hat{\mathbf{C}})$ denota el Error Estándar estimado asociado al contraste.

1. Se rechaza $\mathbf{H_0}$ si:

$$|\mathbf{T_{cal}}| > \mathbf{t}_{\alpha/\mathbf{2},\,\mathbf{N-a}} = qt(1-\alpha/2, N-a).$$

2. También se puede concluir con el respectivo Intervalo de Confianza al nivel $(1-\alpha)100\,\%$ para el contraste C, el cual está dado por:

$$\hat{\mathbf{C}} \pm \mathbf{t}_{\alpha/\mathbf{2},\mathbf{N-a}} \sqrt{\widehat{Var(\hat{C})}} \iff \hat{\mathbf{C}} \pm \mathbf{t}_{\alpha/\mathbf{2},\mathbf{N-a}} \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} c_i^2/n_i},$$

Si dicho I.C. contiene al cero NO se rechaza la hipótesis $\mathbf{H_0}$, de lo contrario se rechaza $\mathbf{H_0}$, es decir, el respectivo contraste se considera significativamente distinto de cero.

$$\begin{cases} H_0 \ : \ C = 0 \\ H_a \ : \ C \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Suponga que en el ejemplo de **resistencia a la tensión**, se desean contrastar las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 \ : \ \mu_4 - \mu_5 = 0 \\ H_a \ : \ \mu_4 - \mu_5 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} H_0 \ : \ \mu_4 = \mu_5 \\ H_a \ : \ \mu_4 \neq \mu_5 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} H_0 \ : \ 4\mu_2 - \mu_1 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 = 0 \\ H_a \ : \ 4\mu_2 - \mu_1 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} H_0 \ : \ 4\mu_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 \\ H_a \ : \ 4\mu_2 \neq \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 \end{cases}$$

Es decir, se desea probar la hipótesis de igualdad de los efectos de los tratamientos 4 y 5 y si el efecto del tratamiento 2 es igual al promedio de los efectos de los tratamientos 1, 3, 4 y 5.

Comparación entre medias

Programa en R para contrastes

En **R** la función a utilizar sería: **glht** de la librería **multcomp**

```
library(multcomp)      # Se carga esta librería para los contrastes.
contraste <- rbind("30 vs 35"=c(0,0,0,1,-1),
                   "4(20) vs 15+25+30+35"=c(-1,4,-1,-1,-1))
columnas<-c("15","20","25","30","35")
contraste
#######################################################
                  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
30 vs 35             0    0    0    1   -1
4(20) vs 15+25+30+35   -1    4   -1   -1   -1
#######################################################
model<- aov(y~algodon)
compara<-glht(model, linfct = mcp(algodon = contraste))
summary(compara)
```

Comparación entre medias

Salida del R

```
############################################################
         Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses
Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts

Fit: aov(formula = y ~ algodon)
Linear Hypotheses:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
30 vs 35 == 0               10.800      1.829   5.906 1.78e-05 ***
4(20) vs 15+25+30+35 == 0    2.600      5.783   0.450     0.88
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Conclusión para los contrastes estudiados

- Note que a partir de: $\hat{C}_1 = 10.8$ y $EE(\hat{C}_1) = 1.829$: Error estándar del primer constraste, con un $T_{cal} = 5.906$ y un $VP = 1.78 \times 10^{-5} << \alpha = 0.05$, se rechaza la hipótesis Nula de igualdad de la resistencia promedio obtenida con $30\,\%$ y $35\,\%$ de algodón. Es decir, a un nivel de significancia del $5\,\%$ la **resistencia promedio** es diferente cuando se utilizan un $30\,\%$ y un $35\,\%$ de algodón.
- Algo diferente ocurre cuado se compara la resistencia promedio usando un $20\,\%$ de algodón con los demás porcentajes, en este caso no se rechaza H_0 a un nivel del $5\,\%$, ya que el Valor P es $0.88 >> 0.05$, pudiéndose concluir que la **resistencia promedio** usando un $20\,\%$ de algodón es la misma resistencia obtenida cuando se usa el promedio de los otros cuatro porcentajes de algodón.

Contrastes Ortogonales:Dos contrastes

$$\mathbf{C_1} = \sum_{i=1}^{a} \mathbf{c_i}\,\mu_i \quad \text{y} \quad \mathbf{C_2} = \sum_{i=1}^{a} \mathbf{d_i}\,\mu_i$$

son ortogonales si cumplen que:

$$\sum_{i=1}^{a} \mathbf{c_i d_i} = \mathbf{0}, \text{ para Diseños Balanceados ó}$$

$$\sum_{i=1}^{a} \mathbf{n_i c_i d_i} = \mathbf{0}, \text{ para Diseños Desbalanceados.}$$

NOTA: Para un factor con $\mathbf{a}$ - tratamientos, el conjunto de los $(\mathbf{a}-\mathbf{1})$ - contrastes ortogonales particiona la suma de cuadrados debida a los tratamientos ($\mathbf{SS_{Trat}}$) en $(\mathbf{a}-\mathbf{1})$ - componentes independientes ($(\mathbf{a}-\mathbf{1})$ - sumas de cuadrados asociadas a cada uno de los contrastes) de un grado de libertad cada una. Luego, las pruebas que se llevan a cabo usando contrastes ortogonales son independientes.

...

Las sumas de cuadrados de cada contraste está dada por:

$$\mathbf{SS_C} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\cdot}\right]^2}{\sum_{i=1}^{a} c_i^2 / n_i},$$

para diseños desbalanceado, y

$$\mathbf{SS_C} = \frac{n\left[\sum_{i=1}^{a} c_i \bar{y}_{i\cdot}\right]^2}{\sum_{i=1}^{a} c_i^2},$$

para diseños balanceados.

Cada una de estas sumas de cuadrados tienen asociado **UN grado de libertad** y la suma de éstas son igual a la suma cuadrática de tratamientos $\mathbf{SS_{Trat}}$.

Luego, para contrastar las hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 & : \ C = 0 \\ H_a & : \ C \neq 0 \end{cases}$$

Comparación entre medias

Estadístico de prueba:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{SS_C/1}}{\mathbf{SSE/N-a}} = \frac{\mathbf{SS_C}}{\mathbf{MSE}} \sim \mathbf{F_{1,N-a}}$$

Se rechaza $\mathbf{H_0}$ se el valor de $\mathbf{F_{cal}}$ es mayor que el $\mathbf{F}$-de la tabla ($F_{\alpha,1,N-a} = qf(1-\alpha,1,N-a)$).

Apuntes:

- Se puede usar la relación, $\mathbf{F} = \mathbf{T^2}$.
- Existen varias formas de elegir los coeficientes de los contrastes ortogonales para un conjunto dado de tratamientos.

Por Ejemplo, si se tienen $\mathbf{a} = \mathbf{3}$-tratamientos, siendo el tratamiento **1** un control y los otros dos tratamientos **2** y **3**, los niveles reales del factor de interés para el cual se realiza el experimento, entonces los contrastes ortogonales pueden ser los siguientes:

Trats.	Coeficientes	
1-Control	-2	0
2-Nivel-1	1	-1
3-Nivel-2	1	1

Es decir, los dos contrastes ortogonales son:

$$\mu_2 + \mu_3 = 2\mu_1 \iff -2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \ , \quad \text{y}$$

$$\mu_3 = \mu_2 \iff -\mu_2 + \mu_3 = 0$$

NOTA: Los coeficientes se deben elegir antes de realizar el experimento.

Contrastes Ortogonales Ejemplo Resistencia a la tensión

Suponga que se tienen los siguientes cuatro-contrastes ortogonales:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C_1} &= \mu_4 - \mu_5 \\
&= \mathbf{0}\mu_1 + \mathbf{0}\mu_2 + \mathbf{0}\mu_3 + \mu_4 - \mathbf{1}\mu_5 \\
\mathbf{C_2} &= \mu_1 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 \\
&= \mu_1 + \mathbf{0}\mu_2 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 \\
\mathbf{C_3} &= \mu_1 - \mu_3 \\
&= \mu_1 + \mathbf{0}\mu_2 - \mu_3 + \mathbf{0}\mu_4 + \mathbf{0}\mu_5 \\
\mathbf{C_4} &= \mathbf{4}\mu_2 - \mu_1 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5
\end{aligned}
$$

Claramente los contrastes anteriores son **ortogonales**.

Programa en R para los contrastes Ortogonales

Para llevar a cabo las pruebas de hipótesis de alguno o de todos los contrastes en **R** se define el contraste:

```
contraste  <-  rbind("30 vs 35"=c(0,0,0,1,-1),
                   "15+25 vs 30+35"=c(1,0,1,-1,-1),
                   "15 vs 25"=c(1,0,-1,0,0),
                   "4(20) vs 15+25+30+35"=c(-1,4,-1,-1,-1))
columnas   <-  c("15","20","25","30","35")
filas      <-  c("30 vs 35","15+25 vs 30+35","15 vs 25",
                 "4(20) vs 15+25+30+35")
dimnames(contraste) <- list(filas,columnas)
contraste
##########################################################
                     15 20 25 30 35
30 vs 35              0  0  0  1 -1
15+25 vs 30+35        1  0  1 -1 -1
15 vs 25              1  0 -1  0  0
4(20) vs 15+25+30+35 -1  4 -1 -1 -1
##########################################################
```

Comparación entre medias

Programa en R para los contrastes Ortogonales continuación

Se halla el **ANOVA** (función **aov**) y se le asigna un nombre (**model**) y luego se hace uso de la función **glht**:

```
model<- aov(y~algodon)
compara<-glht(model, linfct = mcp(algodon = contraste))
summary(compara)
         Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses
Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts
Fit: aov(formula = y ~ algodon)
Linear Hypotheses:
                          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
30 vs 35 == 0               10.800      1.829   5.906  < 1e-04 ***
15+25 vs 30+35 == 0         -5.000      2.586  -1.933  0.23383
15 vs 25 == 0               -7.800      1.829  -4.265  0.00145 **
4(20) vs 15+25+30+35 == 0    2.600      5.783   0.450  0.98445
Signif. codes:  0  *** 0.001 ** 0.01 *  0.05 .  0.1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Método de Scheffé para comparar todos los contrastes

1. Se usa cuando **NO** se conoce de antemano cuales contrastes se desean comparar o cuando se está interesado en más de $(a-1)$-comparaciones posibles.
2. En muchos experimentos las comparaciones de interés se descubren después de un análisis preliminar de los datos.
3. Este método es una solución a los casos anteriores, acá se garantiza que el **error tipo I** es a lo más α para cualesquiera de las posibles comparaciones.

Suponga que se tienen m-constrastes de interés:

$$\Gamma_u = \mathbf{c_{1u}}\mu_\mathbf{1} + \mathbf{c_{2u}}\mu_\mathbf{2} + \cdots + \mathbf{c_{au}}\mu_\mathbf{a}\ , \quad \mathbf{u} = \ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \ldots,\ \mathbf{m}$$

sus estimaciones muestrales:

$$\mathbf{C_u} = \mathbf{c_{1u}}\overline{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}\cdot} + \mathbf{c_{2u}}\overline{\mathbf{y}}_{\mathbf{2}\cdot} + \cdots + \mathbf{c_{au}}\overline{\mathbf{y}}_{\mathbf{a}\cdot}, \quad \mathbf{u} = \ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \ldots,\ \mathbf{m}$$

y el error estándar de cada uno de estos contrastes dado por:

$$\mathbf{S_{C_u}} = \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} (c_{iu}^2/n_i)},$$

donde, $\mathbf{n_i}$-número de observaciones del $\mathbf{i}$-ésimo tratamiento.

El valor crítico contra el cual se compara $\mathbf{C_u}$ para la prueba de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 & : \ \Gamma_u = 0 \\ H_a & : \ \Gamma_u \neq 0 \end{cases}$$

es:

$$\mathbf{S_{\alpha,u}} = \mathbf{S_{C_u}} \sqrt{(a-1)F_{\alpha;a-1,N-a}}.$$

Se rechaza la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$ si $|\mathbf{C_u}| > \mathbf{S_{\alpha,u}}$, es decir, el contraste Γ_u-difiere significativamente de **cero**.

Comparación entre medias

También se pueden construir I.C para los contrastes Γ_u de la forma:

$$\mathbf{C_u} \pm \mathbf{S}_{\alpha,\mathbf{u}} \iff \mathbf{C_u} \pm \mathbf{S}_{\mathbf{C_u}} \sqrt{(a-1)F_{\alpha;a-1,N-a}}$$

Se rechaza $\mathbf{H_0}$ si dicho **I.C.** no contiene al cero.

Ejemplo: Constrastes por el Método de Scheffé

Continuando con el Ejemplo de resistencia a la tensión, suponga que se tienen los siguientes tres contrastes de interés:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \mu_\mathbf{1} + \mu_\mathbf{3} - \mu_\mathbf{4} - \mu_\mathbf{5} \\
&= \mu_\mathbf{1} + \mathbf{0}\mu_\mathbf{2} + \mu_\mathbf{3} - \mu_\mathbf{4} - \mu_\mathbf{5} \\
\Gamma_2 &= \mu_\mathbf{1} - \mu_\mathbf{3} \\
&= \mu_\mathbf{1} + \mathbf{0}\mu_\mathbf{2} - \mu_\mathbf{3} + \mathbf{0}\mu_\mathbf{4} + \mathbf{0}\mu_\mathbf{5} \\
\Gamma_3 &= \mathbf{4}\mu_\mathbf{2} - \mu_\mathbf{1} - \mu_\mathbf{3} - \mu_\mathbf{4} - \mu_\mathbf{5}
\end{aligned}$$

Comparación entre medias

Programa en R

```
contraste <- rbind(c(1,0,1,-1,-1),c(1,0,-1,0,0),
                   c(-1,4,-1,-1,-1))
filas<-c("15+25 vs 30+35","15 vs 25","4(20) vs 15+25+30+35" )
columnas<-c("15","20","25","30","35")
dimnames(contraste)<-list(filas,columnas)
contraste
                     15 20 25 30 35
15+25 vs 30+35        1  0  1 -1 -1
15 vs 25              1  0 -1  0  0
4(20) vs 15+25+30+35 -1  4 -1 -1 -1
```

Comparación entre medias

Contrastes calculados

Las respectivas estimaciones de estos contrastes son:

$$\mathbf{C_1 = \bar{y}_{1.} + \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} - \bar{y}_{5.} = 9.8 + 17.6 - 21.6 - 10.8 = -5}$$

$$\mathbf{C_2 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} = 9.8 - 17.6 = -7.8}$$

$$\mathbf{C_3 = 4\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{3.} - \bar{y}_{4.} - \bar{y}_{5.} = 4(15.6) - 9.8 - 17.6 - 21.6 - 10.8 = 2.6}$$

$$\mathbf{S_{C_1}} = \sqrt{MSE\sum_{i=1}^{5}(c_{i1}^2/n_i)} = \sqrt{8.06\left(\frac{1+0+1+1+1}{5}\right)} = \mathbf{2.54}$$

$$\mathbf{S_{C_2}} = \sqrt{MSE\sum_{i=1}^{5}(c_{i2}^2/n_i)} = \sqrt{8.06\left(\frac{1+0+1+0+0}{5}\right)} = \mathbf{1.7975}$$

$$\mathbf{S_{C_3}} = \sqrt{MSE\sum_{i=1}^{5}(c_{i3}^2/n_i)} = \sqrt{8.06\left(\frac{1+16+1+1+1}{5}\right)} = \mathbf{5.6}$$

Contrastes calculados

$$S_{0.05,1} = S_{C_1}\sqrt{4F_{0.05;4,20}} = 2.54\sqrt{4(2.87)} = 8.60$$

$$S_{0.05,2} = S_{C_2}\sqrt{4F_{0.05;4,20}} = 1.7975\sqrt{4(2.87)} = 6.09$$

$$S_{0.05,3} = S_{C_3}\sqrt{4F_{0.05;4,20}} = 5.6\sqrt{4(2.87)} = 18.9$$

Conclusiones:

1. $|C_1| = 5 < 8.60 = S_{\alpha,1}$, luego **NO** rechazamos a $H_0 : \Gamma_1 = 0$,
2. $|C_2| = 7.8 > 6.09 = S_{\alpha,2}$, luego rechazamos a $H_0 : \Gamma_2 = 0$, y
3. $|C_3| = 2.6 < 18.9 = S_{\alpha,3}$, luego **NO** rechazamos a $H_0 : \Gamma_3 = 0$,

Las tres conclusiones anteriores son válidas, de manera conjunta, a un nivel de significancia del $5\,\%$.