Máxima Resolución

1. Box & Hunter (1961) propusieron usar como criterio de selección de diseños aquellos de **máxima resolución**; lo cual tiene sentido bajo el principio de **ordenamiento jerárquico**.

2. Los diseños de resolución $\mathbf{R}$ tienen una propiedad proyectiva: Forman un factorial completo en cualesquiera de $\mathbf{R-1}$ factores.
   Así, si en un problema dado se encuentran $\mathbf{R-1}$ efectos significativos, entonces se pueden estudiar todas sus interacciones dado que forman un factorial completo.

Mínima Aberración

Un diseño no puede juzgarse sólo por su resolución, por ejemplo, considere los siguientes dos diseños 2^{7-2}:

$$\mathbf{d_1} \; : \; \mathbf{I} = \mathbf{4567} = \mathbf{12346} = \mathbf{12357}$$

$$\mathbf{d_2} \; : \; \mathbf{I} = \mathbf{1236} = \mathbf{1457} = \mathbf{234567}$$

ambos diseños son de **resolución** $\mathbf{IV}$ pero:

1. $\mathbf{d_1}$ tiene **3** pares de interacciones dobles aliadas $\mathbf{45} = \mathbf{67}$, $\mathbf{46} = \mathbf{57}$ y $\mathbf{47} = \mathbf{56}$.

2. $\mathbf{d_2}$ tiene **6** pares de interacciones dobles confundidas entre sí.

es decir, $\mathbf{d_1}$ es mejor que $\mathbf{d_2}$, y se dice que $\mathbf{d_1}$ tiene menos aberración que $\mathbf{d_2}$.

Fries & Hunter (1980) propusieron elegir diseños basándose en un criterio de mínima aberración; es decir, minimizando el número de palabras de longitud menor.

Tablas de Diseños

El interrogante obvio es:

¿Cómo obtener buenos **generadores** para un diseño?.

No hay una técnica estándar para obtenerlos; en algunos casos se ha usado fuerza intensiva computacional, en otros, se han usado técnicas de desdoblamiento que se verán más adelante.

Sin embargo, hay catálogos extensos de diseños con buenas propiedades.
Ver, por ejemplo, las tablas del capítulo 5 del libro de Wu & Hamada[a].

[a] Wu,C.F.J. y M. Hamada. Experiments: Planning, analysis, and parameter design. Wiley & Sons, Inc. 2000.

Forma Típica de las tablas de diseños

$$2^{8-4}_{\mathbf{IV}} \quad \mathbf{5 = 123}, \quad \mathbf{6 = 124}, \quad \mathbf{7 = 134}, \quad \mathbf{8 = 234}, \quad (*)$$

de aquí, se infiere que:

1. $(*)$ es un diseño con **16** corridas $(\mathbf{2^{8-4}})$ para $\mathbf{8}$ factores.
2. Las primeras $\mathbf{4}$ columnas forman un factorial completo estándar.
3. Las columnas $\mathbf{5}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{7}$ y $\mathbf{8}$, se obtienen multiplicando las correspondientes columnas especificadas por los generadores.

Efectos Libres y Fuertemente Libres

Se dirá que un efecto principal o interacción doble está libre, si **NO** está confundido con efectos principales o interacciones dobles.

Se dice que está fuertemente libre si además, el efecto principal o interacción doble **NO** está confundido con interacciones triples.

Observaciones

El criterio de mínima aberración es bueno, pero no puede tomarse en términos **absolutos**.
Considere los siguientes diseños para **9** factores:

$$\mathbf{d_1} : \mathbf{2^{9-4}_{IV}} \quad \mathbf{6 = 123}, \ \mathbf{7 = 124}, \ \mathbf{8 = 125}, \ \mathbf{9 = 1345}$$

$$\mathbf{d_2} : \mathbf{2^{9-4}_{IV}} \quad \mathbf{6 = 123}, \ \mathbf{7 = 124}, \ \mathbf{8 = 134}, \ \mathbf{9 = 2345}$$

Ambos son de resolución $\mathbf{IV}$, se ven muy similares pero tienen propiedades diferentes; $\mathbf{d_1}$ tiene **mínima aberración** y tiene **6** palabras de longitud **4**:

$$\mathbf{I = 1236 = 1247 = 1258 = 3467 = 3568 = 4578}$$

como $\mathbf{9}$ NO se encuentra en estas relaciones, entonces las ocho interacciones dobles que involucran a $\mathbf{9}$ están libres.

Observaciones – Continuación

Por otro lado, $\mathbf{d_2}$ tiene **7** palabras de longitud **4**:

$$\mathbf{I} = \mathbf{1236} = \mathbf{1247} = \mathbf{1348} = \mathbf{3467} = \mathbf{2468} = \mathbf{2378} = \mathbf{1678}$$

en las cuales, ni 5 ni 9 aparecen, entonces hay quince interacciones dobles involucrando a $\mathbf{5}$ o $\mathbf{9}$ que están libres.

CONCLUSIÓN:

$\mathbf{d_2}$ es mejor que $\mathbf{d_1}$ aún cuando $\mathbf{d_1}$ sea el de **mínima aberración**.
Chen, Sun & Wu (1993) propusieron un criterio extra de selección de diseños basado

en el número de efectos libres (mejor diseño aquel que tiene más efectos libres).

Fracción un medio de máxima resolución del diseño 2^k

La fracción un medio de máxima resolución del diseño $\mathbf{2^k}$, denotada por: $\mathbf{2^{k-1}_{III}}$, se construye partiendo del diseño básico $\mathbf{2^{k-1}}$-completo y agregando después el $\mathbf{k}$-ésimo factor obtenido como el producto de los signos de la interacción $\mathbf{ABC}\ldots\cdots(\mathbf{k}-\mathbf{1})$ del orden más alto. El generador de este diseño es: $\mathbf{k}=\mathbf{ABC}\cdots(\mathbf{k}-\mathbf{1})$.

Ejemplo, el diseño: 2^{3-1}_{III}.

	Full 2^2 Factorial (Basic Design)		$2^{3-1}_{III}, I = ABC$			$2^{3-1}_{III}, I = -ABC$		
Run	A	B	A	B	$C = AB$	A	B	$C = -AB$
1	−	−	−	−	+	−	−	−
2	+	−	+	−	−	+	−	+
3	−	+	−	+	−	−	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	−

Para el diseño 2^{4-1}_{IV}

Es decir, para la fracción un medio de máxima resolución del diseño $\mathbf{2^4}$ se tiene como opción a:

	Basic Design			
Run	A	B	C	$D = ABC$
1	−	−	−	−
2	+	−	−	+
3	−	+	−	+
4	+	+	−	−
5	−	−	+	+
6	+	−	+	−
7	−	+	+	−
8	+	+	+	+

En este caso se tiene como generador a: $D = ABC$ y como relación definidora a: $I = ABCD$.

Fracción un cuarto del diseño 2^k

La fracción un cuarto del diseño $\mathbf{2^k}$, la cual se denota por: $\mathbf{2^{k-2}}$, (o también llamada fracción $\frac{1}{2^2}$ o diseño factorial fraccionado $\mathbf{2^{k-2}}$) se construye partiendo del diseño básico $\mathbf{2^{k-2}}$-completo y agregando después las dos columnas adicionales asociándolas con interacciones elegidas apropiadamente que incluyan los primeros $\mathbf{k-2}$-factores. Por lo tanto una fracción un cuarto del diseño $\mathbf{2^k}$ tiene dos generadores.

Debe tenerse cuidado al seleccionar los generadores de diseño para evitar que los efectos de interés sean alias de otros en el estudio. Así, es importante estudiar la estructura de alias antes de asignar los factores a las letras cuando se establece un experimento.

Ejemplo Diseño Factorial Fraccionado: 2^{5-2}

Es decir, fracción un cuarto del diseño $\mathbf{2^5}$. Supongamos que se tienen cinco factores y que sólo se tienen recursos para correr una cuarta parte del diseño factorial $\mathbf{2^5}$, es decir, se quiere correr un diseño fraccionado $\mathbf{2^{5-2}}$, que se construye con los siguientes pasos:

1. Se escribe el diseño factorial completo $\mathbf{2^3}$ para los tres primeros factores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, y dejando las columnas $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ en blanco.
2. Los niveles para los factores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ se obtienen al seleccionar de manera adecuada generadores. En este caso se proponen como los generadores $\mathbf{I} = \mathbf{ABD}$ e $\mathbf{I} = \mathbf{ACE}$.

   Así, la relación definidora del diseño queda como:

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABD} = \mathbf{ACE} = \mathbf{BCDE},$$

   con, $\mathbf{ABD} \times \mathbf{ACE} = \mathbf{A^2BCDE} = \mathbf{BCDE}.$

   Las columnas $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ se obtienen de: $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ y $\mathbf{E} = \mathbf{AC}$.

Ejemplo Cont.

Haciendo los productos indicados se completa la Tabla del diseño y se obtiene el diseño factorial fraccionado $\mathbf{2^{5-2}}$, ver la siguiente tabla, con resolución $\mathbf{III}$, puesto que en la relación definidora los efectos más pequeños tienen **tres** letras.

A	B	C	D	E
$-$	$-$	$-$		
$+$	$-$	$-$		
$-$	$+$	$-$		
$+$	$+$	$-$		
$-$	$-$	$+$		
$+$	$-$	$+$		
$-$	$+$	$+$		
$+$	$+$	$+$		

$\Rightarrow$

Diseño 2^{5-2} I=ABD=ACE				
A	B	C	D	E
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ejemplo Cont.

3. La estructura de alias (Tablas A y B) se obtiene al multiplicar cada efecto por la relación definidora dada por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABD} = \mathbf{ACE} = \mathbf{BCDE}$$

Tabla A Estructura alias completa del diseño 2^{5-2}		Tabla B Estructura alias reducida del diseño 2^{5-2}
A + BD + CE + ABCDE		A + BD + CE
B + AD + ABCE + CDE		B + AD
C+ABCD+AE+BDE		C+AE
D + AB + ACDE + BCE	$\Rightarrow$	D + AB
E +ABDE + AC + BCD		E + AC
BC +ACD +ABE + DE		BC + DE
BE + ADE + ABC + CD		BE + CD
I + ABD + ACE + BCDE		

Observaciones

1. Cada efecto principal tiene al menos una **interacción doble** como su alias, lo que implica la resolución $\mathbf{III}$ del diseño.

2. La estructura de alias completa incorpora los efectos de interacción más alto, aunque no sean de interés. La información importante está contenida en la estructura de alias reducida, que involucra sólo hasta las interacciones dobles (véase Tabla 7).

3. Cuando se alían efectos con la misma jerarquía, como es el caso de $BE + CE$, debe decidirse, con base en el conocimiento del proceso, a cuál interacción se atribuirá el efecto observado, en caso de que resulte significativo.

4. Otro criterio es fijarse cuáles efectos principales resultaron significativos, ya que éstos tienen más probabilidad de estar activos también en sus interacciones.