Fracción $\frac{1}{2^p}$ del diseño 2^k

1. La fracción $\frac{1}{2^p}$ del diseño $\mathbf{2^k}$, y denotada por: $\mathbf{2^{k-p}}$, (o también llamado diseño factorial fraccionado $\mathbf{2^{k-p}}$). Para ello:
   a. Se parte del diseño básico $\mathbf{2^{k-p}}$ -completo.
   b. Lueggo se agregan $\mathbf{p}$ -columnas adicionales asociándolas con interacciones elegidas apropiadamente que incluyan los primeros $\mathbf{k-p}$-factores.

   Por lo tanto una fracción $\frac{1}{2^p}$ del diseño $\mathbf{2^k}$ tiene $\mathbf{p}$ -generadores independientes.
2. La relación de definición (o definidora) de este diseño se compone de los $\mathbf{p}$ -generadores elegidos inicialmente y sus $\mathbf{2^p-p-1}$-interacciones generalizadas.
3. La estructura de los alias, se encuentra multiplicando la columna de cada efecto por la relación de definición.
   Cada efecto tiene $\mathbf{2^p-1}$-alias.
4. Es importante seleccionar los p-generadores de un diseño factorial fraccionado 2^{k-p} de tal modo que se obtengan las mejores relaciones de los alias posibles. Un criterio es seleccionar los generadores para que el diseño 2^{k-p}-resultante sea de resolución lo más alta posible.

Ejemplo:

Considere el diseño 2^{6-2}_{IV}, donde se usaron como generadores a:

$$\mathbf{E} = \mathbf{ABC} \text{ y } \mathbf{F} = \mathbf{BCD},$$

obteniendo un diseño de resolución $\mathbf{IV}$, con relación definidora:

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABCE} = \mathbf{BCDF} = \mathbf{ADEF}.$$

Si se hubiera seleccionado como generadores a:

$$\mathbf{E} = \mathbf{ABC} \text{ y } \mathbf{F} = \mathbf{ABCD},$$

entonces la relación definidora completa hubiera sido:

$$\mathbf{I} = \mathbf{ABCE} = \mathbf{ABCDF} = \mathbf{DEF},$$

con lo cual el diseño sería de resolución $\mathbf{III}$.

En este caso se estaría sacrificando innecesariamente información acerca de las interacciones.

Pero, no sólo basta elegir modelos de máxima resolución, sino también que tengan mínima aberración. Las tablas de diseños que existen cumplen estas dos condiciones.

Diseño Fraccionado Saturado

Un diseño Factorial Fraccionado se dice que **está Saturado** cuando el número de factores es igual al número de corridas menos uno, es decir, $\mathbf{k = N - 1}$. Son diseños útiles en la experimentación industrial.

Ejemplos de diseños saturados

1. Un diseño factorial fraccionado saturado para analizar o estudiar tres factores en cuatro corridas, es el diseño $\mathbf{2^{3-1}_{III}}$, el cual se analizó anteriormente, es decir, la fracción un medio del diseño $\mathbf{2^3}$.
2. Un diseño para estudiar hasta **siete** factores en ocho corridas, es el diseño 2^{7-4}_{III}, el cual es una fracción $\frac{1}{16}$ del diseño 2^7, con los siguientes generadores para las últimas cuatro columnas

$$\mathbf{D = AB}\ ,\ \ \mathbf{E = AC}\ ,\ \ \mathbf{F = BC}\ ,\ \ \text{y}\ \ \mathbf{G = ABC},$$

estos generadores también se pueden escribir como:

$$\mathbf{I = ABD}\ ,\ \ \mathbf{I = ACE}\ ,\ \ \mathbf{I = BCF}\ ,\ \ \text{e}\ \ \mathbf{I = ABCG},$$

Ejemplos de diseños saturados continuación

La relación **definidora** de este diseño se compone de $\mathbf{2^p - 1 = 2^4 - 1 = 15}$ -palabras, formadas por, las p = 4-generadores, más las $\mathbf{2^p - p - 1 = 2^4 - 4 - 1 = 16 - 4 - 1 = 11}$- interacciones generalizadas obtenidas de multiplicar los generadores dos a dos, tres a tres y los cuatro entre sí, de la siguiente forma:

$$\mathbf{I = ABD}\ ,\ \ \mathbf{I = ACE}\ ,\ \ \mathbf{I = BCF}\ ,\ \ \text{e}\ \ \mathbf{I = ABCG},$$

De donde:

$$\mathbf{I = ABD = ACE = BCF = ABCG = BCDE = ACDF}$$

$$\mathbf{= CDG = ABEF = BEG = AFG = DEF = ADEG}$$

$$\mathbf{= CEFG = BDFG = ABCDEFG}$$

Ejemplos de Diseños Saturados - Continuación

O usando números:

$$\mathbf{I = 124}\ ,\ \ \mathbf{I = 135}\ ,\ \ \mathbf{I = 236}\ ,\ \ \text{e}\ \ \mathbf{I = 1237},$$

de donde:

$$\mathbf{I = 124 = 135 = 236 = 1237 = 2345 = 1346}$$

$$= 347 = 1256 = 257 = 167 = 456 = 1457$$

$$= 3567 = 2467 = 1234567$$

Este diseño se muestra en la siguiente tabla:

The 2_{III}^{7-4} Design with the Generators $I = ABD$, $I = ACE$, $I = BCF$, and $I = ABCG$

	Basic Design							
Run	A	B	C	$D = AB$	$E = AC$	$F = BC$	$G = ABC$	
1	−	−	−	+	+	+	−	*def*
2	+	−	−	−	−	+	+	*afg*
3	−	+	−	−	+	−	+	*beg*
4	+	+	−	+	−	−	−	*abd*
5	−	−	+	+	−	−	+	*cdg*
6	+	−	+	−	+	−	−	*ace*
7	−	+	+	−	−	+	−	*bcf*
8	+	+	+	+	+	+	+	*abcdefg*

Para encontrar los $\mathbf{2^p - 1 = 2^4 - 1 = 15}$ - alias de cada efecto, se multiplica el efecto por cada palabra de la relación de definición, por ejemplo, los alias de B son:

$$\begin{aligned} B &= AD = ABCE = CF = ACG = CDE = ABCDF \\ &= BCDG = AEF = EG = ABFG = BDEF \\ &= ABDEG = BCEFG = DFG = ACDEFG \end{aligned}$$

Como se dijo anteriormente, este diseño es una fracción $\frac{1}{16}$ del diseño 2^7, y como los signos elegidos para los generadores son positivos, se trata de la fracción principal.
Es de Resolución III, porque la palabra más pequeña en la relación de definición tiene longitud 3.
El modelo tiene siete grados de libertad, los cuales se usan para estimar los siete efectos principales.
Cada uno de los siete efectos principales tiene 15 alias; sin embargo, si se supone que las interacciones de tres o más factores son insignificantes, se consigue una simplificación considerable en la estructura de los alias.

Estableciendo este supuesto, se tiene que cada una de las combinaciones lineales asociadas con los siete efectos principales del diseño es en realidad una estimación del efecto principal y las tres interacciones de dos factores, como sigue:

$$
\begin{aligned}
l_A &\longrightarrow A+BD+CE+FG\\
l_B &\longrightarrow B+AD+CF+EG\\
l_C &\longrightarrow C+AE+BF+DG\\
l_D &\longrightarrow D+AB+CG+EF\\
l_E &\longrightarrow E+AC+BG+DF\\
l_F &\longrightarrow F+BC+AG+DE\\
l_G &\longrightarrow G+CD+BE+AF
\end{aligned}
$$

Este diseño no produce estimaciones libres para ningún efecto principal ni para ninguna interacción doble. Para desconfundir los siete efectos principales se utiliza el proceso de experimentación secuencial mediante el desdoblamiento del diseño.

Ensamble Secuencial de Fracciones Para Separar Efectos

Como se mencionó anteriormente algunos diseño fraccionados NO produce estimaciones libres para ningún efecto principal ni para ninguna interacción doble, lo cual puede llevar a ambiguedades en la interpretación de los efectos debido al fenómeno de confusión que se presenta.

Para desconfundir los efectos principales o efectos de interaciones dobles, se utiliza el proceso de experimentación secuencial mediante la técnica del desdoblamiento del diseño.

Experimentación Secuencial:

Considere el diseño 2_{III}^{7-4} con:

```
I = 124 = 135 = 236 = 1237
= 2345 = 1346 = 347 = 1256 = 257 = 167
= 456 = 1457 = 3567 = 2467 = 1234567
```

El correspondiente patrón de confusión (con alias sólo hasta de orden 3) es:

```
1 = 24 35 67 237 346 256 457
2 = 14 36 57 137 345 156 467
3 = 15 26 47 127 245 146 567
4 = 12 37 56 235 136 157 267
5 = 13 27 46 234 126 147 367
6 = 23 17 45 134 125 357 247
7 = 34 25 16 123 145 356 246
```

Este diseño no produce estimaciones libres para ningún efecto principal ni para ninguna interacción doble. Para desconfundir los siete efectos principales, se corre un nuevo experimento cambiando los signos de **todas** las columnas.

Desdoblamiento del Diseño

En la primera fracción se tiene:

$$\mathbf{I = 124 = 135 = 236 = 1237 = 2345 = 1346 = 347 = 1256}$$

$$\mathbf{= 257 = 167 = 456 = 1457 = 3567 = 2467 = 1234567}$$

Las relaciones definidoras de la fracción obtenida cambiando los signos de esta fracción son:

$$\mathbf{I = -124 = -135 = -236 = 1237 = 2345 = 1346 = -347 = 1256}$$

$$\mathbf{= -257 = -167 = -456 = 1457 = 3567 = 2467 = -1234567}$$

Note que sólo las palabras de longitud par imponen una restricción válida para todo el diseño combinado.
Así que la relación de definición del diseño completo es:

$$\mathbf{I = \ 1237 = \ 2345 = \ 1346 = \ 1256 = \ 1457 = \ 3567 = \ 2467}$$

y los generadores pueden ser tomados como:

$$I = 2345 = 1346 = 1237$$

En la siguiente tabla se muestra el diseño experimental combinado de 16 corridas.

5=234, 6=134, 7=123

Fracción	Expto.	1	2	3	4	5	6	7
I	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
	2	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	3	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	4	1	1	-1	1	-1	-1	-1
	5	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	6	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	7	-1	1	1	-1	-1	1	-1
	8	1	1	1	1	1	1	1
II	9	1	1	1	-1	-1	-1	1
	10	-1	1	1	1	1	-1	-1
	11	1	-1	1	1	-1	1	-1
	12	-1	-1	1	-1	1	1	1
	13	1	1	-1	-1	1	1	-1
	14	-1	1	-1	1	-1	1	1
	15	1	-1	-1	1	1	-1	1
	16	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

El diseño resultante es un 2^{7-3}_{IV} cuyos efectos principales pueden ser estimados libres de confusiones debidas a interacciones dobles.
La relación definidora del diseño combinado y su patrón de confusión son:

$$\mathbf{I = 1237 = 2345 = 1346 = 1256 = 1457 = 3567 = 2467}$$

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 237\ \ 256\ \ 346\ \ 457 \\
2 & = & 137\ \ 156\ \ 345\ \ 467 \\
3 & = & 127\ \ 146\ \ 245\ \ 567 \\
4 & = & 136\ \ 157\ \ 235\ \ 267 \\
5 & = & 126\ \ 147\ \ 234\ \ 367 \\
6 & = & 125\ \ 134\ \ 247\ \ 357 \\
7 & = & 123\ \ 145\ \ 246\ \ 356 \\
12 & = & 37\ \ 56 \\
13 & = & 27\ \ 46 \\
14 & = & 36\ \ 57 \\
15 & = & 26\ \ 47 \\
16 & = & 25\ \ 34 \\
17 & = & 23\ \ 45
\end{array}$$

En general, al desdoblar una fracción de resolución III, cambiando los signos de todas las columnas, la resolución aumenta en el diseño combinado; es decir, todos los efectos principales quedan libres de interacciones dobles.

Es posible controlar aumentos de resolución en factores específicos cambiando los signos de sólo la columna de interés.

Desdoblando solo una Columna Cambiando los signos de la primera columna en el diseño original tenemos:

Frac.	Exp.	1	2	3	4	5	6	7
I	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
	2	1	-1	-1	-1	-1	1	1
	3	-1	1	-1	-1	1	-1	1
	4	1	1	-1	1	-1	-1	-1
	5	-1	-1	1	1	-1	-1	1
	6	1	-1	1	-1	1	-1	-1
	7	-1	1	1	-1	-1	1	-1
	8	1	1	1	1	1	1	1
II	9	1	-1	-1	1	1	1	-1
	10	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
	11	1	1	-1	-1	1	-1	1
	12	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
	13	1	-1	1	1	-1	-1	1
	14	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
	15	1	1	1	-1	-1	1	-1
	16	-1	1	1	1	1	1	1

Patrón de confusión

1	=				
2	=	36	57	345	467
3	=	26	47	245	567
4	=	37	56	235	267
5	=	27	46	234	367
6	=	23	45	357	247
7	=	25	34	246	356
12	=	136	157		
13	=	126	147		
14	=	137	156		
15	=	127	146		
16	=	123	145		
17	=	125	134		

Los generadores del diseño son:

$$\mathbf{I} = \mathbf{2345} = \mathbf{236} = \mathbf{347}.$$

La resolución del diseño sigue siendo III; sin embargo, el efecto principal de 1 está ahora fuertemente libre. Las interacciones de 1 con los demás factores pueden ahora ser estimadas libremente.

El patrón de confusión se obtiene de la relación definidora completa:

$$\mathbf{I} = \mathbf{2345} = \mathbf{236} = \mathbf{347} = \mathbf{257} = \mathbf{456} = \mathbf{3567} = \mathbf{2467}.$$

Gráfico de Daniel

Algunas anotaciones para determinar que efectos son significativos o activos, para diseños con una sola réplica:

1. Gráfico de efectos en papel normal (Daniel's plot).
   Al usar los efectos como sumas de variables aleatorias (diferencia de medías), Daniel (1959) se dio cuenta que los efectos no significativos debían seguir una distribución normal con media igual a cero y varianza constante.
   Lo anterior implica que si los efectos se grafican en **papel probabilístico Normal**, los que no son significativos tenderán a formar una línea recta en esta gráfica ubicada a la altura del cero, lo que permite confirmar que tales efectos son efectivamente insignificantes.
   Por su parte, los efectos activos aparecerán alejados de la línea de normalidad, lo que indica que no se deben sólo al azar, sino a la existencia de efectos reales que influyen en la respuesta.

Half Normal

2. Cuando se tienen efectos positivos y negativos puede ser mejor utilizar el papel probabilístico **medio normal** (*half normal*), para tener una mejor perspectiva de cuáles efectos se alinean y cuáles no.
Como su nombre lo indica, el papel medio normal utiliza sólo la parte positiva de la distribución normal estándar aprovechando su simetría y el hecho de que dos efectos de signo contrario y de la misma magnitud son igualmente importantes.

   Como se ha visto anteriormente, el papel probabilístico normal también sirve para verificar el cumplimiento del supuesto de normalidad de los errores. La gráfica de efectos en papel normal tiene un objetivo muy diferente a esta gráfica de residuos.