# AS LEIS DE NEWTON

# 4.1 Introdução

Até o momento estudamos vários tipos de movimento sem no entanto nos preocuparmos com suas causas. Já sabíamos intuitivamente que para se modificar o movimento de um corpo é necessária a ação de um agente externo. De fato, na ausência completa de ação externa, o corpo permanece num estado de movimento constante. A maneira pela qual o agente externo age sobre o corpo é através da atuação de uma força. Portanto, a força nada mais é do que a quantificação da ação de um corpo sobre outro.

A força pode ser definida como uma grandeza física capaz de alterar o estado de movimento de um corpo ou a forma deste corpo. O estado de movimento de um corpo é caracterizado pelo seu *momentum\_linear*, que é definido como:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

de forma que a existência de uma força produz alterações em  $\vec{p}$ .

O comportamento de um corpo quando sujeito a forças externas é regido pelas leis de Newton, expressas como:

**Lei I** - "Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar seu estado de movimento pela ação de forças externas".

**Lei II** - "A modificação do movimento é proporcional à força atuante, ou seja,  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ".

**Lei III -** "A toda ação corresponde uma reação igual e oposta ou, as ações mútuas de dois corpos são sempre dirigidas em sentidos opostos".

A primeira lei estabelece justamente o que havíamos dito anteriormente, isto é, para modificarmos  $\vec{p}$  (grandeza que quantifica o estado de movimento do corpo) é necessário um agente externo exercendo uma força sobre o corpo. Suponha por exemplo, um cometa movendo-se em movimento retilíneo uniforme. Ele continuará neste estado até chegar nas proximidades de um planeta, que através da força gravitacional, modificará seu estado de movimento fazendo com que o *momentum*  $\vec{p}$  mude em módulo e direção. Esta idéia que acabamos de apresentar, embora bastante lógica, não o era na época de Galileu, pois se acreditava que para manter um corpo em movimento retilíneo uniforme era necessária a ação de agentes externos. O único estado natural e espontâneo para um corpo era o repouso!

A força também é necessária para alterar a forma de um corpo. Durante a deformação as partículas deste corpo são aceleradas até atingirem uma nova situação de equilíbrio. O equilíbrio de um corpo pode ser de tipos diferentes. Inicialmente, um corpo só estará em equilíbrio quando a resultante das forças agindo sobre ele for nula. O equilíbrio é dito *estável* quando uma pequena perturbação tira o sistema de equilíbrio, mas a vizinhança do corpo age de forma a restaurar o equilíbrio. O equilíbrio é dito *instável* quando uma pequena perturbação tira o sistema do equilíbrio e a vizinhança age no sentido de amplificar este efeito.

Vamos considerar que a quantidade de matéria num determinado corpo não se modifica. Neste caso, a ação de uma ou mais forças leva a uma aceleração:

$$\sum \vec{F} = m \, d\vec{v} / dt = m \, \vec{a}$$

e a constante de proporcionalidade entre força e aceleração é denominada *massa* do corpo. A unidade de massa é Kg (SI) ou g (CGS) enquanto que a da aceleração é m/s² (MKSÁ) ou cm/s² (CGS). Portanto, a unidade de força é definida como:  $[F] = 1 \text{ N} = 1 \text{ Kg.m/s}^2$  no Sistema Internacional (SI) ou  $[F] = 1 \text{ dyn} = 1 \text{ g.cm/s}^2$  no sistema CGS, sendo portanto,  $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$ .

Quando a massa de um corpo varia, como por exemplo, durante a exaustão de combustível num foguete, a forma mais geral da segunda lei de Newton fica:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

A expressão  $\vec{p}=m\vec{v}$  para o *momentum* de um corpo é válida quando este tem velocidade bem menor que a velocidade da luz, c, que é de aproximadamente 300.000 km/s. Para velocidades altas ( $v \approx c$ ),

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \vec{v} = m(v) \vec{v}$$

onde  $m_0$  é chamado de *massa de repouso* e m(v) varia de uma maneira que corpo torna-se cada vez mais pesado quanto mais se aumenta sua velocidade. Porém, se v/c << 1, a aproximação  $m \approx m_0$  é bastante boa.

Quando um corpo encontra-se próximo à superfície da Terra, esta exerce sobre ele uma força que é denominada *peso*, dada por: w = mg e que está dirigida para o centro da Terra.

A massa de um corpo, como vimos, é quantificada através da razão entre a força e a aceleração, Associado à massa, há uma propriedade importante que é denominada *inércia*. Imagine uma locomotiva e um carrinho de bebê sobre o chão sem atrito, completamente livres para se moverem. Ao exercermos uma ação sobre cada um deles (por exemplo, um empurrão), o carrinho começa a andar enquanto que o trem oferecerá forte resistência à mudança de movimento por possuir uma inércia maior. Corpos com maiores massas apresentam maior inércia e, conseqüentemente, maior resistência a mudanças no seu estado de movimento.

Todos os corpos apresentam a tendência de permanecer no seu estado original de movimento quando acionados subitamente por um agente externo. Uma ilustração deste fato é o que ocorre com os passageiros no interior de um automóvel em movimento retilíneo uniforme que é freado ou faz uma curva acentuada. No primeiro caso, a tendência do passageiro é chocar-se contra o

pára-brisa enquanto que no segundo, a tendência é sair pela tangente à curva. Este tipo de comportamento está relacionado com a inércia do passageiro.

Das três leis de Newton, a  $3^a$  é aquela que sem dúvida exige um maior esclarecimento. Ela descreve uma propriedade importante das forças: sua ocorrência em pares, isto é, toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, porém de sentido oposto. Um fato importante a ser observado é que ação e reação não se cancelam (ou se equilibram) porque agem em corpos diferentes. Um exemplo disto é o de um corpo sobre uma mesa como ilustrado na Fig. 4.1. O corpo exerce uma força  $\vec{N}'$  sobre a mesa e esta "responde" exercendo sobre o corpo uma força  $\vec{N}=-\vec{N}'$ .  $\vec{N}$  e  $\vec{N}'$  constituem um par ação-reação. A Terra exerce sobre o corpo a força peso  $\vec{w}$  para a qual existe uma reação  $\vec{w}'$  exercida do corpo sobre a Terra.  $\vec{w}$  e  $\vec{w}''$  constituem outro par ação-reação porém  $\vec{w}$  e  $\vec{N}$  não constituem par ação-reação. Devido ao fato do corpo estar em equilíbrio, pela  $2^a$  Lei de Newton,  $\vec{a}=0$  e portanto  $\sum \vec{F}=\vec{0}$ . Logo:

$$\vec{w} + \vec{N} = 0 \implies \vec{w} = -\vec{N}$$

Quando dois corpos isolados constituem um sistema, as únicas forças existentes são as que constituem o par ação-reação. Neste caso, olhando para o sistema como um todo, vemos que:

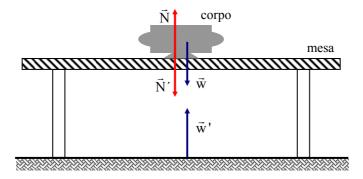


Fig. 4.1 - Forças agindo num corpo sobre uma mesa.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \implies \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

e assim concluímos que o *momentum* total se conserva na ausência de forças externas já que  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  constituem forças externas ao sistema. Esta lei de conservação do *momentum* é de grande importância no estudo de colisões entre corpos, onde as forças envolvidas são internas ao sistema.

# 4.2 Referenciais

As grandezas cinemáticas só têm sentido físico quando medidas com relação a um ponto de referência. Assim, se considerarmos por exemplo, um trem movendo-se com velocidade  $v_0$  na direção x>0 e um homem dentro do trem movendo-se com velocidade  $-v_0$  (na direção x<0), observamos que para uma pessoa parada fora do trem, a velocidade do homem será nula. Com este exemplo vemos claramente que o conceito de movimento está intrinsecamente ligado ao de referencial.

Consideremos um sistema de coordenadas O (x, y, z) fixo no espaço, no qual a posição de um corpo é especificada pelo vetor posição:

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

a partir do qual podemos encontrar a velocidade e a aceleração da maneira tradicional:

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

Consideremos a seguir um segundo sistema de coordenadas O' (x', y', z') movendo-se com velocidade  $\vec{v}_0' = v'_{ox} \hat{i} + v'_{oy} \hat{j} + v'_{oz} \hat{k}$  com relação ao referencial fixo, conforme mostra a Fig. 4.2. O vetor  $\vec{R}$  descreve a posição do ponto O' com relação ao ponto O. Se este referencial estiver uniformemente acelerado,  $\vec{R}$  (t) será dado por:

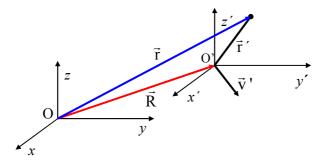


Fig. 4.2 - Referenciais em movimento relativo.

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0' t + \frac{1}{2} \vec{a}_R t^2$$

Por outro lado, olhando para a figura vemos que a adição geométrica dos vetores nos fornece:  $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$  ou  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ , onde  $\vec{r}'$  descreve a posição do corpo visto por um observador solidário ao referencial móvel. Este observador verá a velocidade do corpo dada por:

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}} = \vec{v} - \vec{v}'_0 - \vec{a}_R t$$

que é a velocidade que o corpo possui no sistema de coordenadas O menos a velocidade de O' com relação a O. A aceleração por sua vez é:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{p}$$

que é a aceleração no sistema fixo menos a aceleração relativa entro os dois referenciais. No caso particular em que o sistema móvel O' não está acelerado (  $\vec{a}_R = \vec{0}$  ) temos  $\vec{a}' = \vec{a}$ , isto é, a aceleração é a mesma nos dois referenciais. Referenciais deste. tipo, onde a lei de Newton tem a mesma forma (  $\vec{F} = m\vec{a}' = m\vec{a}$  ) são chamados de referenciais inerciais.

#### 4.3 Aplicações das leis de Newton

Como vimos, as leis de Newton são as leis básicas da Mecânica Clássica. Em principio, qualquer problema de dinâmica pode ser resolvido

através de sua aplicação. Passaremos agora a analisar uma série de exemplos que ilustram tais leis.

De modo geral, os problemas envolvendo forças podem ser classificados em duas categorias. Na primeira, conhecemos as forças que agem sobre o corpo e queremos encontrar seu efeito, expresso através de mudanças na velocidade e posição. Na segunda categoria, conhecemos o movimento do corpo e a partir disto queremos determinar o conjunto de forças agindo sobre ele. A solução de um problema pode ser encontrada através de urna sequência natural de análises. Primeiramente, o problema deve estar claramente colocado e se ele apresentar várias partes, cada uma delas deve ser analisada antes de se considerar o sistema como um todo. Sempre que houver contato entre corpos, lembre-se que ação e reação agem em corpos diferentes.

#### a) Plano inclinado sem atrito

Queremos encontrar o movimento de um corpo colocado sobre um plano com ângulo de inclinação  $\theta$  como mostrado na Fig. 4.3. As forças agindo sobre ele são: o peso  $\vec{w}$ , que é dirigido para baixo e a força de reação  $\vec{N}$ , que é normal à superfície.

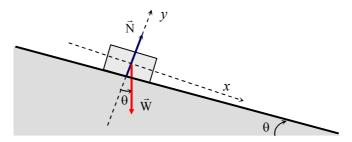


Fig. 4.3 - Plano inclinado sem atrito.

Como o corpo não pode penetrar no plano inclinado, concluímos que o movimento só deve ocorrer na direção paralela a ele. Isto implica em que a força resultante na direção perpendicular ao plano é nula e assim:

$$\sum F_{y} = 0$$
$$\sum F_{x} = Ma_{x}$$

de onde obtemos:

$$-\operatorname{Mg}\cos\theta + \operatorname{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{N} = \operatorname{Mg}\cos\theta$$
$$\operatorname{Mg}\sin\theta = \operatorname{Ma}_{x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{a}_{x} = \operatorname{g}\sin\theta$$

e como  $a_x$  é constante, o movimento paralelo ao plano é do tipo uniformemente acelerado já visto anteriormente.

#### b) Corpo suspenso por cordas

Imagine um corpo suspenso por duas cordas conforme mostra a Fig. 4.4. As cordas ficarão sujeitas às tensões  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$  dirigidas ao longo de seu comprimento e, portanto, agindo sobre o corpo. Como este está em equilíbrio, a soma total das forças agindo sobre ele é nula, de forma que:

$$\sum F_{x} = \sum F_{y} = 0 \implies$$

$$T_{1} \cos \theta_{1} - T_{2} \cos \theta_{2} = 0$$

$$T_{1} \sin \theta_{1} + T_{2} \sin \theta_{2} - Mg = 0$$

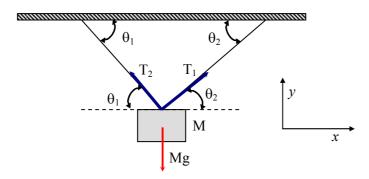


Fig. 4.4 - Corpo suspenso por cordas.

Destas duas equações tiramos  $\vec{T}_1$  e  $\vec{T}_2$ :

$$T_1 = \frac{Mg\cos\theta_1}{\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2} = \frac{Mg\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$T_{21} = \frac{Mg\cos\theta_2}{\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2} = \frac{Mg\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

No caso da corda resistir somente a uma tensão máxima  $T_{max}$ , podemos analisar se  $T_1$  ou  $T_2$  ultrapassa tal limite.

Em dinâmica, os problemas envolvendo cordas e fios são bastante freqüentes e, portanto, vamos tecer algumas considerações a este respeito. Vamos considerar uma corda de massa  $M_c$  e comprimento L que sustenta um corpo de massa M ao longo da vertical (ver Fig.4.5). Queremos calcular a tensão na corda em toda a extensão de seu comprimento.

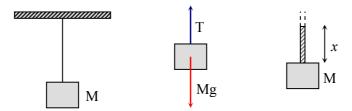


Fig. 4.5 - Corpo suspenso por uma corda com massa.

Se isolarmos o ponto de contato entre o corpo e a corda temos T = Mg. Por outro lado, se tomarmos um ponto a uma altura x sobre o corpo, a massa total abaixo dele é  $M+(M_C/L)$  x e para que a corda esteja em equilíbrio, a tensão deverá ser:

$$T(x) = Mg + \frac{M_c}{L}gx$$

Isto mostra que à medida que subimos pela corda seu nível de tensão aumenta e no ponto de contato com o teto  $T=(M+M_c)$  g, como esperado. No entanto, se a massa da corda for desprezível, a tensão é a mesma em cada ponto ao longo de seu comprimento e ela funciona apenas como transmissora de esforços.

#### c) Dois corpos ligados por uma corda

Considere dois corpos com massas  $M_1$  e  $M_2$  ligados por uma corda sem massa e podendo deslizar sobre uma mesa sem atrito. Existe ainda uma força  $\vec{F}$  agindo sobre  $M_2$ , como indicado na Fig. 4.6. Queremos encontrar a tensão na corda e a aceleração do sistema. Como a corda tem massa desprezível, ela simplesmente transmite a força. Isolando os corpos, temos:

$$T = M_1 a_1$$
$$F - T = M_2 a_2$$

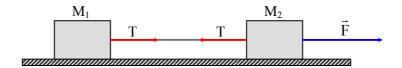


Fig. 4.6 - Corpos ligados pó uma corda.

O sistema está vinculado de forma tal que os corpos são obrigados a andar juntos e assim  $a_1 = a_2 = a$ . Logo:

$$F - M_1 a = M_2 a \implies a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

$$T = M_1 a = \frac{M_1 F}{M_1 + M_2}$$

#### d) Corpos em contato

Uma força  $\vec{F}$  é aplicada sobre um corpo de massa  $M_1$  que está em contato com outro corpo de massa  $M_2$ , como mostra a Fig. 4.7. Ambos estão colocados sobre uma mesa sem atrito e a questão que se pretende responder é sobre a força que é transmitida ao corpo 2. Como os corpos se movem juntos, a aceleração será a mesma para os dois e então podemos escrever:

$$F = (M_1 + M_2) a \implies a = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

Voltamos agora a analisar o corpo 2. Chamando T a força que 1 faz sobre 2, temos:

$$T = M_2 a = \frac{M_2 F}{M_1 + M_2}$$

e assim vemos que este resultado é similar ao do caso em que os dois corpos estão ligados pela corda.

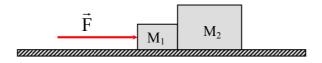


Fig. 4.7 - Corpos em contato.

#### e) n corpos conectados por cordas

Temos n corpos conectados por cordas conforme mostra a Fig. 4.8 e queremos calcular a tensão na corda que conecta um par qualquer destes corpos. Como os corpos possuem mesma massa M e se deslocam juntos quando submetidos à ação da força F, podemos escrever que a aceleração do sistema é a força dividida pela massa total, isto é, a = F/(nM). A força  $T_i$  por sua vez movimenta todos os corpos a sua esquerda, desde i até n. O número destes corpos é n - i + 1 e portanto:

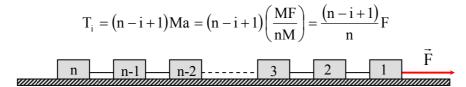


Fig. 4.8 - Corpos conectados por cordas.

## f) Sistema com polias: máquina de Atwood

Vamos considerar inicialmente uma corda ao redor de uma polia sem atrito e sem massa como indica a Fig. 4.9(a). Como a corda possui massa desprezível, ela simplesmente transmite a tensão e portanto,  $F_1 = F_2 = F$ .

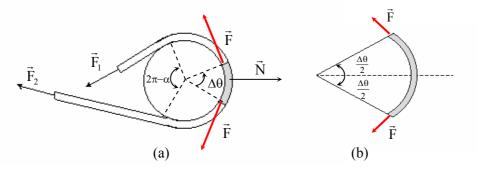


Fig. 4.9 - Corda ao redor de uma polia (a) e pequena porção da corda (b).

Desta forma, é como se a polia simplesmente mudasse a direção da força. Podemos calcular a força normal à polia da seguinte maneira. Tomemos uma pequena porção de corda definida pelo ângulo  $\Delta\theta$ , como mostra a Fig. 4.9(b). Projetando as forças F na direção radial temos:

$$dN = 2F \operatorname{sen}(\Delta\theta/2) \cong F \Delta\theta$$

enquanto que a componente tangencial se anula. Para encontrarmos a força normal total (somada em módulo) devemos integrar no ângulo:

$$N = \int_0^\alpha F d\theta = \alpha F \text{ (em módulo)}$$

A máquina de Atwood é um dos exemplos mais simples envolvendo polias, onde duas massas,  $M_1$  e  $M_2$  são interligadas através de uma corda sem massa, como mostrado na Fig. 4.10. Chamando a tensão na corda de T, temos:

$$T - M_1 g = M_2 a$$
  
- $T+M_2 g = M_2 a$ 

de onde tiramos

$$a = \frac{\left(M_2 - M_1\right)}{\left(M_2 + M_1\right)}g$$

A tensão T é dada por:

$$T = M_1 g + M_1 a = M_1 g + M_1 \frac{(M_2 - M_1)}{(M_2 + M_1)} g$$

e a força exercida sobre o suporte da polia é:

$$2T = \frac{4M_1 + M_2g}{(M_1 + M_2)}$$

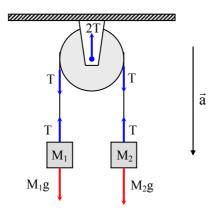


Fig. 4.10 - Máquina de Atwood.

## g) Bloco sobre a mesa puxado por corpo na vertical

A Fig. 4.11 mostra um bloco de massa  $M_1$  sobre uma mesa sem atrito, puxado por outro bloco de massa  $M_2$  sob a ação da gravidade. Isolando o bloco 1 temos:

$$T = M_1 a$$

enquanto que ao isolar o bloco 2 obtemos:

$$M_2g - T = M_2a$$

Combinando estas duas equações obtemos a aceleração do sistema como:

$$a = \frac{M_2 g}{M_1 + M_2}$$

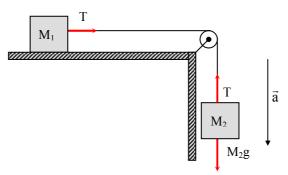


Fig. 4.11 - Bloco sobre a mesa e corpo na vertical.

# h) Peso aparente de um objeto num elevador acelerado

Vamos imaginar um objeto no interior de um elevador acelerado como indica a Fig. 4.12. Qual seria seu peso aparente se ele estivesse sendo medido por urna balança? O objeto pressiona a balança com urna força N, que é o próprio peso aparente medido por ela. Pela 3ª lei de Newton, a balança produz uma força N, só que dirigida para cima. O objeto anda junto com o elevador de forma que a 2ª lei de Newton fica:

$$N - Mg = Ma \implies N = M(g + a)$$

Se o elevador estiver acelerado para cima, o peso aparente é maior que Mg, enquanto que se a aceleração for para baixo, o peso aparente será menor que Mg.

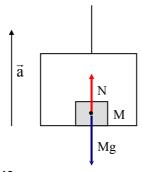


Fig. 4.12 - Objeto num elevador acelerado.

#### 4.4 Movimento circular

Como vimos anteriormente, quando um corpo encontra-se em movimento circular, existe uma aceleração radial, denominada centrípeta, que é dada por  $a_c = v^2/r$ , onde r é o raio do movimento circular e v é a velocidade tangencial. É claro que a velocidade tangencial pode variar e, portanto, existir uma aceleração tangencial. Vamos a seguir estudar vários casos deste tipo de movimento.

#### a) Pêndulo cônico

Considere um pêndulo de comprimento L, formando um ângulo  $\theta$  com a vertical e descrevendo um círculo de raio R no plano horizontal, como indica a Fig. 4.13. Qual é a velocidade tangencial da massa M? Para responder esta pergunta, vamos analisar as forças agindo sobre ela.

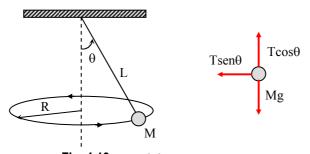


Fig. 4.13 - Pêndulo cônico.

Na direção radial temos T sen $\theta = Mv^2/R$ , enquanto que na direção vertical, T  $\cos\theta = Mg$ . Dividindo uma equação pela outra obtemos:

$$tg\theta = v^2/Rg$$

ou então:

$$v^{2} = Rg \frac{R}{\sqrt{L^{2} - R^{2}}} = \frac{R^{2}g}{\sqrt{L^{2} - R^{2}}}$$

Suponha que o fio se rompa com uma tensão  $T_0$ . Para que velocidade isto ocorrerá?

#### b) Movimento circular vertical

Considere um corpo de massa M preso a uma corda de comprimento R sem massa, posto para rodar em movimento circular no plano vertical, como mostrado na Fig. 4.14. A posição do corpo é especificada pelo ângulo  $\theta$  e tal que no ponto máximo (1)  $\theta$  = 0 e no ponto mínimo (2)  $\theta$  =  $\pi$ . Inicialmente estamos interessados em determinar a tensão na corda quando o corpo se movimenta com velocidade constante. Na direção radial temos:

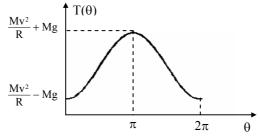
$$T + Mg \cos\theta = Mv^2/R \implies T = \frac{Mv^2}{R} - Mg \cos\theta$$

$$Mg$$

$$R$$

Fig. 4.14 - Movimento circular vertical.

Deste resultado vemos que  $T=Mv^2/R$  - Mg é a tensão mínima para  $\theta=0^\circ$  e  $T=Mv^2/R+Mg$  é a tensão máxima para  $\theta=\pi$ . A Fig. 4.15 mostra um gráfico completo de T contra  $\theta$ . A velocidade mínima capaz de manter o movimento circular ocorre quando T=0 e vale  $v_{min}=\sqrt{gR}$ . Para velocidades inferiores a esta, não é possível haver movimento circular na vertical.



**Fig. 4.15** - Tensão na corda em função do ângulo  $\theta$ .

#### c) Pêndulo simples

O movimento pendular é um dos movimentos mais estudados em Mecânica Clássica, ao lado do movimento harmónico do sistema massa-mola. Considere o pêndulo da Fig. 4.16 deslocado de um certo ângulo  $\theta$ . Usando a  $2^a$  lei de Newton nas direções radial e tangencial temos respectivamente:

$$T - Mg \cos \theta = Mv^2/L$$
$$- Mg \sin \theta = Ma_t$$

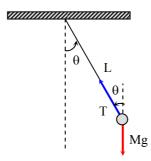


Fig. 4.16 - Pêndulo simples.

Vamos supor que a condição inicial do movimento seja  $\theta=\theta_0$  e v=0, de forma que  $T_0=Mg\,\cos\!\theta_0$ . Como  $a_t=dv/dt=\left(dv/d\theta\right)\left(d\theta/dt\right)=\left(dv/d\theta\right)v/L$  temos para a direção tangencial:

$$- Mg sen \theta = M \frac{dv}{d\theta} \frac{v}{L}$$

$$\Rightarrow gL sen \theta d\theta = -v dv$$

que pode ser integrado, resultando em:

$$gL\int_{\theta_0}^{\theta} sen \theta d\theta = -\int_0^{v} v dv = -\frac{1}{2}v^2$$

A realização desta integral é simples e leva a:

$$-gL(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{1}{2}v^2$$

Logo:

$$v^2/L = -2g(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

e assim, a tensão no fio varia com  $\theta$  de acordo com:

$$T = Mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

#### d) Corda girante

Imagine uma corda de massa M e comprimento L colocada para girar num plano horizontal (sobre uma mesa sem atrito) com velocidade angular  $\omega$ , conforme mostra a Fig. 4.17. Queremos encontrar a tensão na corda a uma distância r do ponto de fixação. Para isto vamos considerar um elemento de comprimento  $\Delta r$ , como mostrado na figura, cuja massa é  $\Delta m = (M/L) \Delta r$ . Este elemento está sujeito às tensões T(r) e  $T(r + \Delta r)$ . Pela  $2^a$  lei de Newton temos:

$$T(r) - T(r + \Delta r) = \Delta m \omega^2 r = \frac{M}{I} \omega^2 r \Delta r$$

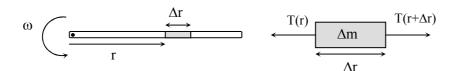


Fig. 4.17 - Corda girando sobre uma mesa sem atrito.

Podemos re-escrever esta expressão como:

$$\frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} = -\frac{M\omega^2 r}{L}$$

No limite em que  $\Delta r$  tende a zero ficamos com:

$$\lim_{\Delta r \to 0} \left\lceil \frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r} \right\rceil = \frac{dT}{dr} = -\frac{M\omega^2 r}{L}$$

A seguir, vamos integrar entre os pontos 0 e r:

$$\begin{split} &\int_{T_0}^{T(R)} dT = -\frac{M\omega^2}{L} \int_0^r r \, dr \quad \Rightarrow \\ &T(r) - T_0 = -\frac{M\omega^2 r^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad T(r) = T_0 - \frac{M\omega^2 r^2}{2L} \end{split}$$

Para encontrar o valor de  $T_0$ , notamos que T=0 para r=L (a corda acaba neste ponto). Logo,

$$0 = T_0 - \frac{M\omega^2 L}{2} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{M\omega^2 L}{2}$$

e consequentemente:

$$T(r) = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2)$$

A Fig. 4.18 mostra o gráfico de T(r).

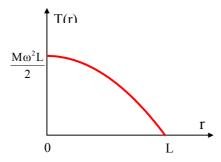


Fig. 4.18 — Tensão na corda como função da posição radial.

# 4.5 Força retardadora proporcional à velocidade

Quando um corpo move-se no interior de um fluido (gás ou liquido), age sobre ele uma força proporcional à velocidade, porém na direção oposta ao movimento. Esta forca é denominada viscosa. Assim, vamos imaginar um corpo com velocidade inicial  $v_0$ , movendo-se num meio viscoso. Pela  $2^{\underline{a}}$  lei de Newton temos:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -bv$$

Esta equação, chamada de equação diferencial, pode ser resolvida se isolarmos v e t e a seguir integrarmos:

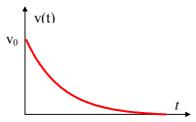
$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt \quad \Rightarrow \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_{0}^{t} dt$$

Logo:

$$\ln v - \ln v_0 = \ln \left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{bt}{m}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 \exp\left\{-\frac{bt}{m}\right\}$$

de modo que a velocidade do corpo decresce exponencialmente como mostra a Fig. 4.19.



**Fig. 4.19** - Velocidade de um corpo jogado com velocidade  $v_0$  num meio viscoso.

Vamos imaginar agora um corpo num meio viscoso caindo sob a ação da gravidade. O balanço das forças leva à seguinte equação de movimento:

$$mg - bv = m \frac{dv}{dt}$$

A velocidade vai aumentando até que a força gravitacional é equilibrada pela força viscosa. A partir deste ponto teremos dv/dt=0 e consequentemente não haverá mais mudanças de velocidade. Dizemos então que o corpo atingiu sua velocidade terminal  $v_T$  que é dada por:

$$mg = bv_T$$
  $\Rightarrow$   $v_T = \frac{mg}{h}$ 

Para resolvermos a equação de movimento vamos supor que o corpo partiu do repouso. Isolando v e t temos:

$$\frac{dv}{g - \frac{bv}{m}} = dt \implies \int_0^v \frac{dv}{g - \frac{bv}{m}} = \int_0^t dt$$

Fazendo a substituição:  $g - \frac{bv}{m} = u \implies dv = -\frac{m}{b}du$ 

$$-\frac{m}{b} \int_{g}^{g-bv/m} \frac{du}{u} = \int_{0}^{t} dt$$

$$\ell n \left( \frac{g - bv/m}{g} \right) = -\frac{b}{m} t \implies \frac{g - bv/m}{g} = \exp \left\{ -bt/m \right\}$$

A velocidade do corpo cresce como mostra a Fig. 4.20.

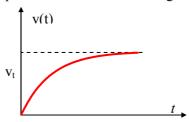


Fig. 4.20 - Velocidade de um corpo acelerado num meio viscoso.

# 4.6 Forças observadas na natureza

As forças existentes entre as partes de um sistema são oriundas de interações fundamentais tais como: forças gravitacionais, forças eletromagnéticas e forças nucleares (fortes e fracas). Estas forças, responsáveis pela existência da matéria, serão vistas em vários cursos futuros. Nós vamos aqui abordar apenas os efeitos macroscópicos destas forças.

#### a) Forcas elásticas: lei de Hooke

Denominamos de *elásticos* aqueles corpos que ao sofrerem deformações quando sujeitos a esforços, têm a propriedade de recuperarem

sua forma original quando tais esforços são removidos. Vamos imaginar a seguinte experiência: consideremos uma mola com uma das extremidades fixa na parede e com uma força F aplicada na outra, como ilustra a Fig. 4.21.

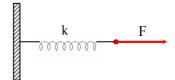


Fig. 4.21 - Mola tracionada.

Antes da aplicação da força F, a mola tem um comprimento livre  $x_0$ . Após a aplicação desta, ela distende-se para um novo comprimento x, tal que a deformação é dada por  $\Delta x = x - x_0$ . Se formos aumentando gradativamente a força F e medindo a deformação  $\Delta x$  associada, verificaremos a existência de dois tipos de comportamento. Inicialmente, a força e a deformação são diretamente proporcionais, mas conforme F aumenta isto deixa de ser verdade. Num gráfico de F contra  $\Delta x$ , mostrado na Fig. 4.22, a região de linearidade vai do ponto 0 até o ponto 1. Neste regime, denominado de *elástico*, vale a relação:

$$F = k \Lambda x$$

onde k (inclinação da reta) é chamada de constante de mola e a expressão acima, conhecida como *lei de Hooke*. Se olharmos microscopicamente para o material, neste regime os vários planos de átomos sofrem deslocamento relativo entre si, mas um determinado átomo permanece sempre ligado à sua posição original.

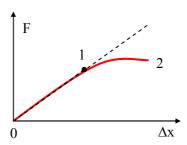


Fig. 4.22 - Deformação de uma mola real sujeita a uma força F.

O regime que vai de 1 a 2 é denominado *plástico* e a deformação causada nesta região é permanente. Microscopicamente, os planos atômicos pulam de uma posição para a seguinte, gerando deformações permanentes no material. Ao atingir o ponto 2, o material não resiste mais ao esforço e rompese.

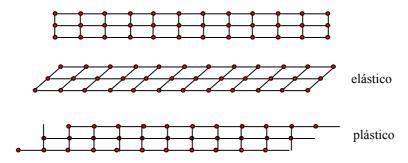


Fig. 4.23 - Descrição microscópica dos regimes elástico e plástico.

#### b) Forcas de contato e atrito

Quando duas superfícies sólidas são colocadas em contato, existe uma resistência ao deslocamento relativo destas superfícies que é denominada de atrito. O atrito tem sua origem no fato de que as superfícies não são microscopicamente perfeitas, de maneira a se estabelecerem vários pontos de contato que dificultam o movimento relativo entre as superfícies, como mostra a Fig. 4.24.

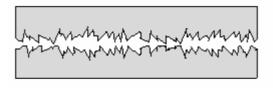


Fig. 4.24 - Superficies reais em contato.

Devido a esta natureza da força de atrito, esperamos que quanto mais forte uma superfície for pressionada contra a outra, maior deve ser a resistência ao deslizamento, ou seja, maior é o atrito. Logo, a força de atrito é

proporcional à força normal entre as duas superficies:  $F_{at} \alpha$  N. Outro fator que influencia a intensidade da força de atrito é a qualidade da superficie: se esta for bem polida, o atrito será menor. Finalmente, o tipo de material usado na confecção de corpo também é importante na determinação de  $F_{at}$ : se o material for macio, a tendência é que ele se "amolde" à outra superfície e isto dificulta o deslizamento. A qualidade da superfície e a dureza do material especificam o coeficiente de atrito  $\mu$  que definiremos a seguir.

Vamos imaginar um experimento onde uma força F variável é aplicada sobre um corpo de massa M, inicialmente em repouso sobre uma superfície áspera, como esquematizado na Fig. 4.25. Se F é relativamente pequena, o corpo continua em repouso e neste caso,  $F = F_{at}$ . Note que se F = 0,  $F_{at} = 0$ , indicando que a força de atrito só existe se houver tendência ao deslizamento. Se continuarmos a aumentar F, esta atinge um valor máximo para o qual o corpo se encontra iminência de deslizar. Neste ponto define-se o coeficiente de atrito estático como  $F_{max} = \mu_e N$ . A partir daí, o corpo entra em movimento e qualquer incremento em F contribui exclusivamente para acelerar o corpo, como mostra a Fig. 4.26. Na situação de movimento, a força de atrito é  $F_{at} = \mu_d N$ , onde  $\mu_d$  é chamado de coeficiente de atrito dinâmico. Assim, no regime estático  $F_{at} \leq \mu_e N$  e no regime dinâmico  $F_{at} = \mu_d N$ , sendo  $\mu_d$   $< \mu_e$  (verificado experimentalmente).

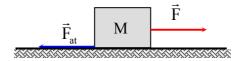


Fig. 4.25 - Corpo puxado sobre uma superfície com atrito.

Como exemplo do cálculo de força de atrito, tomemos um corpo de massa M sobre um plano inclinado, como mostra a Fig. 4.27. Da. 2ª lei de Newton temos:

$$N - Mg \cos\theta = 0$$

e

$$Mg sen\theta - F_{at} = Ma$$

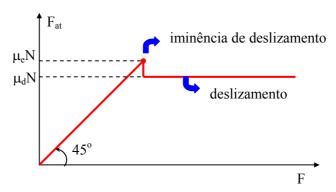


Fig. 4.26 - Variação da força de atrito com a força externa aplicada.

No caso do corpo estar na iminência de deslizamento, a = 0 e  $F_{at}$  =  $\mu_e N$ . Desta forma,  $\mu_e$  =  $tg\theta$ .

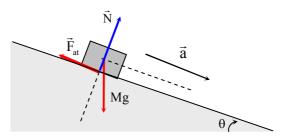


Fig. 4.27 - Corpo sobre um plano inclinado com atrito.

Como segundo exemplo, vamos analisar um rotor no parque de diversões, mostrado na Fig. 4.28. Este rotor é constituído de um cilindro de raio R, com fundo, colocado para rodar com velocidade angular  $\omega$ , tendo várias pessoas no seu interior. Assim que o cilindro atinge a rotação máxima, o fundo é retirado e as pessoas são mantidas no seu interior somente pelo atrito do contato com a parede. Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito estático, g a aceleração da gravidade local, queremos encontrar a mínima velocidade angular capaz de manter a pessoa equilibrada. Neste caso, a força normal é dada pela força centrípeta e então,

$$Mg = \mu_e N = \mu_e M\omega^2 R$$
  $\Rightarrow$   $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}}$ 

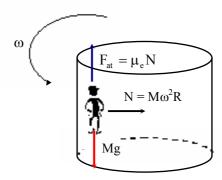


Fig. 4.28 - Rotor com atrito num parque de diversões.

Como exemplo final desta seção, vamos tratar o caso de uma polia com atrito. Como já discutimos anteriormente, uma polia ideal (sem atrito) apenas modifica a direção de uma força sem modificar seu valor. Queremos agora analisar como a presença do atrito modifica  $F_1$  comparada com  $F_2$ . Para isto, vamos tomar um elemento da polia mostrada na Fig. 4.29 e verificar as forças sobre ele.

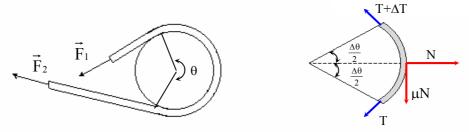


Fig. 4.29 - Corda em polia com atrito.

Na direção x:

$$N = (T + \Delta T) sen\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) + T sen\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right)$$

Como  $\Delta\theta$  é pequeno, sen  $\frac{\Delta\theta}{2} \approx \frac{\Delta\theta}{2}$  e  $\cos\frac{\Delta\theta}{2} \approx 1$  e assim,

$$N = \left(T + \Delta T\right) \left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) + T\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) = 2T\left(\frac{\Delta \theta}{2}\right) + \frac{\Delta T \Delta \theta}{2} \cong T \Delta \theta$$

Na direção y:

$$(T + \Delta T)\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = T\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + \mu N$$

$$\Rightarrow \Delta T = \mu N = \mu T \Delta \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta \theta} = \mu T$$

no limite em que  $\Delta\theta \to 0$ , temos  $\lim_{\Delta\theta\to 0} (\Delta T/\Delta\theta) = dT/d\theta = \mu T$  e portanto:

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta \quad \Rightarrow \quad \int_{F_2}^{F_1} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\theta} d\theta$$

$$\ell n \left( \frac{F_1}{F_2} \right) = \mu \theta \implies F_1 = F_2 \exp \{\mu \theta\}$$

# 4.7 Forças inerciais

Quando a observação de um movimento é feita de um referencial não inercial (acelerado), as leis de Newton deixam de ser válidas, isto é, a força sobre o corpo não obedece a relação  $\vec{F} = m d\vec{v} / dt$ . Como a lei de força neste caso fica bastante difícil de ser escrita, principalmente porque ela depende da posição momentânea do corpo, nós introduziremos uma força extra no problema, que é *equivalente* ao efeito produzido pelo fato do referencial ser não inercial. Com a adição destas forças fictícias, chamadas de *forças inerciais*, a lei de Newton passa a ser novamente válida. Note que as forças inerciais simulam o efeito de uma força real, porém elas não são exercidas por nenhum elemento do sistema. Vamos ilustrar o uso das forças inerciais através dos vários exemplos que seguem.

#### a) Vagão acelerado

Vamos considerar um vagão acelerado como mostrado na Fig. 4.30 dentro do qual encontra-se um observador. Se deixarmos um corpo cair a partir do repouso, para um observador externo, a trajetória é tal que a única força agindo sobre o corpo é  $M\vec{g}$ .

Para um observador no interior do vagão acelerado, a trajetória do corpo é tal que indica a existência de uma força  $-M\vec{a}$ , de forma que a força total vista por ele é:

$$\vec{F} = M\vec{g} - M\vec{a}$$

onde o termo entre  $-M\vec{a}$  é a força inercial.

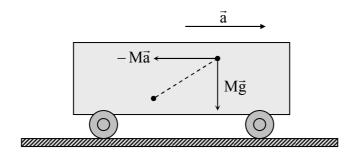


Fig. 4.30 - Corpo em queda livre visto por um observador acelerado.

Por outro lado, se o corpo estiver preso por uma corda no teto do vagão, um observador externo verá o corpo acelerado tal que:

$$\vec{T} + M\vec{g} = M\vec{a}$$
 (observador em repouso)

Para um observador no interior do vagão, o corpo não está acelerado e, portanto, para ele, a equação de forças é:

$$\vec{T} + M\vec{g} - M\vec{a} = \vec{0}$$
 (observador acelerado)

#### b) Força centrífuga

Consideremos uma plataforma girando com velocidade angular  $\omega$  e sobre ela um corpo preso ao centro por uma haste sem massa, como mostrado na Fig. 4.31. Para um observador externo à plataforma, a única força agindo

sobre o corpo é a força centrípeta  $F=M\omega^2 r$ , que mantém o corpo na sua trajetória circular. Para este observador, a  $2^{\underline{a}}$  lei de Newton vale na sua forma usual:

$$\vec{F} = -M\omega^2 \vec{r} = M\vec{a}$$

Para um observador sobre a plataforma, o corpo está em repouso ( $\vec{a}=\vec{0}$ ), porém a haste continua tensionada por um valor que pode ser medido com um dinamômetro. Para ele, deve então existir uma força contrária à da haste que mantenha o equilíbrio do corpo. Esta força também vale  $M\omega^2 r$ , porém é dirigida para fora do círculo. Ela é chamada de *força centrífuga* e só existe no referencial não inercial.

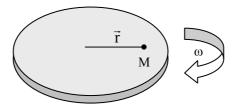


Fig. 4.31 - Corpo solidário a uma plataforma rodando com velocidade ω.

## c) Força de Coriolis

Um segundo tipo de força inicial existente em referencial girante é a *força de Coriolis*, que depende da velocidade e é perpendicular a ela quando medida no referencial girante. Consideremos dois observadores, um no centro e o outro na borda de uma plataforma girante, como na Fig. 4.32. Num determinado instante, o observador do centro (A) arremessa um corpo com velocidade  $\vec{v}$  para o observador da borda (B).

Quando o corpo chega na borda, o observador B já deslocou-se de um ângulo  $\theta$  e para ele, o corpo foi submetido a uma força que se desviou para a esquerda. O segmento de arco descrito pelo observador B, localizado a uma distância r do centro é  $s = r \theta = r\omega t$ . Por outro lado, o corpo anda uma distância r com velocidade constante v e portanto r = vt. Consequentemente, s

= v  $\omega$   $t^2$ . Para o observador B, este segmento de arco é consequência da aceleração provocada pela força de Coriolis:

$$s = \frac{1}{2}(2v\omega)t^2 = \frac{1}{2}a_ct^2$$

ou então:  $F_c = 2mv\omega$ , perpendicular à velocidade. Esta força tem direção tangencial e o sentido oposto ao da rotação do referencial.



Fig. 4.32 - Observadores numa plataforma girante.

As forças inerciais em referenciais girantes são de extrema importância devido ao fato que a Terra é um referencial deste tipo. Estas forças podem ser escritas em termos de produtos vetoriais se considerarmos o vetor  $\vec{\omega}$  como sendo perpendicular à plataforma girante.

$$\begin{split} \vec{F}_{centrifuga} &= -m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\,\right) = -m\,\vec{\omega} \left(\vec{\omega}.\vec{r}\,\right) + m\,\vec{r} \left(\vec{\omega}.\vec{\omega}\right) = m\,\omega^2\vec{r} \\ \vec{F}_{Coriolis} &= -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v} \end{split}$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade no referencial girante.

Como exemplo do efeito da força de Coriolis, vamos analisar o caso de um corpo que cai de uma altura h sobre a superficie da Terra, na linha do Equador. Na ausência de rotação, o corpo cairia exatamente na direção radial. Devido à rotação da Terra, a força de Coriolis produzirá uma pequena deflexão que queremos calcular. Vamos desprezar a força centrífuga supondo que ela já está incluída em  $\vec{g}$ . Vamos fazer um cálculo simplificado para determinar a deflexão x. Suporemos v = gt radial muito maior que a velocidade produzida pela força de Coriolis.

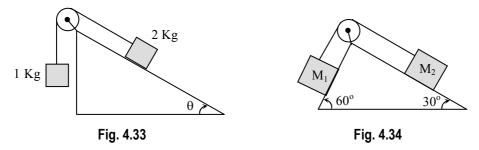
$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = 2 \omega g t \implies v_c = \frac{dx}{dt} = \omega g t^2 \implies x = \frac{1}{3} \omega g t^2$$

Como o tempo de queda é  $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$  temos  $x=\frac{\omega g}{3}{\left(\frac{2h}{g}\right)}^{\frac{3}{2}}$ . Usando

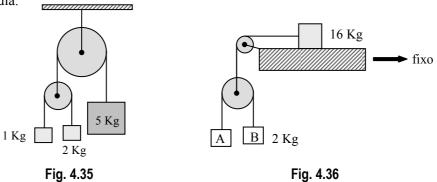
$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \times 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{e h} = 100 \text{ m obtemos} \quad x \approx 2 \text{ cm}.$$

## **Exercícios**

- 1 Encontre o ângulo  $\theta$  da Fig. 4.33 tal que o sistema permaneça em repouso. Despreze o atrito.
- 2 Encontre a razão entre as massas  $M_1$  e  $M_2$  tal que o sistema permaneça em repouso na Fig. 4.34. Despreze o atrito.



- 3 Encontre a aceleração do corpo de 2 Kg da Fig. 4.35.
- 4 Encontre a massa do corpo A tal que a aceleração do corpo B da Fig. 4.36 é nula.



5 - No sistema da Fig. 4.37 o corpo A desliza sobre uma superfície com coeficiente de atrito μ. As cordas e polias não têm massa.

- a) encontre as acelerações dos blocos A e B;
- b) encontre a tensão na corda ligada ao corpo A.

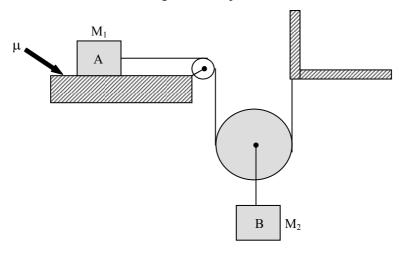
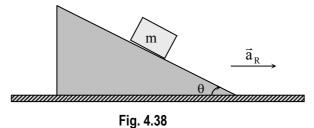


Fig. 4.37

6 - Dado o ângulo  $\theta$  de um plano inclinado sem atrito, qual deve ser a aceleração  $a_R$  tal que o bloco de massa m mostrado na Fig. 4.38 não deslize?



- 7 Se o plano inclinado do problema anterior tiver um coeficiente de atrito μ, qual são as acelerações máxima e mínima tal que o bloco não deslize?
- 8 Uma corda de comprimento L e densidade linear de massa λ passa por uma polia sem atrito. Ela é solta do repouso, estando um comprimento x pendente de um lado e L-x do outro.

- a) determine a aceleração como função de x;
- b) para que situação a aceleração é nula?
- 9 a) O sistema da Fig. 4.39 é livre de atrito. Determine o valor da força F tal que o corpo A não desça nem suba.
  - b) Se houver um atrito estático  $\mu$  entre as superfícies dos blocos, quais os valores de forças máxima e mínima tal que o corpo A não desça nem suba?

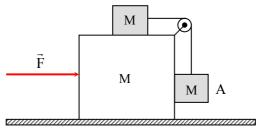
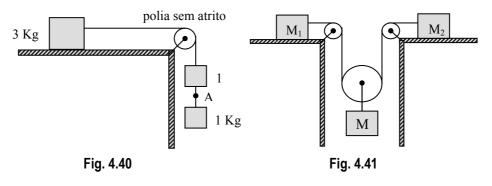


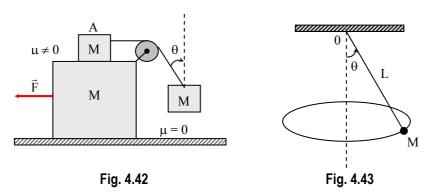
Fig. 4.39

- 10 Um corpo com velocidade inicial  $v_0$  penetra num meio que produz uma força viscosa  $\,F=-b\sqrt{v}\,.\,$  Determine a máxima distância que o corpo penetra neste meio.
- 11 No sistema mostrado na Fig. 4.40 encontre: a) a aceleração do conjunto e b) a força na corda, no ponto A.
- 12 O sistema mostrado na Fig. 4.41 usa polias sem massa. Encontre as acelerações de cada bloco e a tensão na corda.



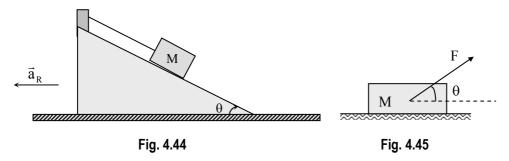
13 - No sistema mostrado na Fig. 4.42, o bloco em contato com a superfície horizontal sem atrito está sujeito a uma força F. Existe um atrito estático μ entre este bloco e o bloco A de tal maneira que não existe movimento relativo entre os três blocos que compõem o sistema. Calcule: a) o ângulo θ, b) a tensão na corda e c) μ mínimo.

- 14 N corpos ligados entre si através de cordas sem massa são puxados em uma rampa por meio de uma força F. Calcule a tensão na corda ligada ao i-ésimo corpo.
- 15 Considere o pêndulo cônico mostrado na Fig. 4.43, onde a corda que liga a massa M ao ponto O não tem massa.
  - a) encontre o ângulo  $\theta$  como função da velocidade da massa M
  - b) encontre a tensão da corda no ponto O

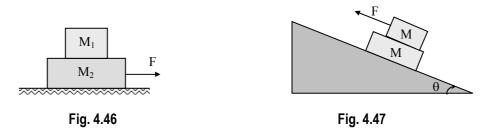


- 16 Um corpo de massa M encontra-se pendurado através de uma corda ideal sobre um bloco triangular de ângulo θ, conforme mostra a Fig. 4.44. Não existindo atrito entre os blocos, pergunta-se qual é a aceleração máxima que pode ser dada ao sistema tal que o corpo M permaneça em contato com o bloco triangular. Neste caso, qual é a tensão na corda? Se o sistema estiver se deslocando com velocidade constante, qual o valor da tensão na corda e da normal?
- 17 Um bloco de massa M repousa sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático  $\mu_e$ . Uma força F é aplicada ao bloco de maneira a formar um ângulo  $\theta$  com a horizontal, como mostra a Fig. 4.45.

Supondo que o bloco esteja sempre na iminência de deslizar, a) qual o ângulo  $\theta_0$  que permite que a força aplicada seja mínima? e b) neste caso, qual será o valor da força  $F_{min}$ ?



- 18 Um bloco de massa  $M_1$  encontra-se sobre outro bloco de massa  $M_2$ , que desliza sobre o chão, conforme mostra a Fig. 4.46. O atrito estático entre os dois blocos é  $\mu_e$  e o atrito cinético entre o bloco 2 e o chão é  $\mu_c$ . a) Determine a máxima força F que pode ser aplicada ao bloco 2 sem que o bloco 1 deslize sobre ele. b) se a força for aumentada tal que  $M_1$  começa a deslizar, e o atrito cinético entre os blocos também é  $\mu_c$ , qual será a aceleração de cada massa?
- 19 Um bloco de massa M encontra-se sobre outro bloco de mesma massa, num plano inclinado liso, de ângulo θ, conforme mostra a Fig. 4.47. O atrito estático entre os dois blocos é μ, e entre o bloco inferior e o plano é zero. a) Determine a máxima força F que pode ser aplicada ao bloco superior sem que este deslize sobre o bloco inferior. b) Neste caso, qual será a aceleração do sistema?



20 - Um corpo de massa m encontra-se sobre um bloco triangular de ângulo θ e massa M, conforme mostra a Fig. 4.48. Não existe atrito entre o bloco triangular e o chão, e o atrito estático entre os dois blocos é μ. Pergunta-se: a) qual a força horizontal máxima F que pode ser aplicada ao bloco m tal que ele não deslize sobre a cunha? b) qual é o valor da normal nesta situação?

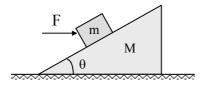


Fig. 4.48