Marco Teórico: Volatilidad Estocástica y Divergencia de Kullback–Leibler

1 Antecedentes

El análisis de la volatilidad financiera ha sido un tema central en econometría, especialmente para modelar la varianza de los retornos en series de tiempo. A lo largo del tiempo, se han desarrollado dos grandes enfoques metodológicos: los modelos deterministas y los modelos estocásticos.

El enfoque determinista incluye a los modelos ARCH **engle1982** y GARCH **bollerslev1986**, entre otros. Estos modelos estiman la varianza condicional como una función de observaciones pasadas de la propia serie y de valores rezagados de la varianza. Su popularidad se debe a su simplicidad y eficacia empírica, aunque presentan limitaciones para capturar ciertos comportamientos complejos de la volatilidad, como colas pesadas, cambios abruptos o dinámicas no lineales.

En contraste, el enfoque estocástico modela la volatilidad como un proceso latente no observable que evoluciona de forma autónoma. Los modelos de *volatilidad estocástica (SV)*, propuestos inicialmente por Taylor (1982), son representativos de esta línea. Aunque ofrecen una descripción más realista y flexible de la volatilidad, su estimación resulta más desafiante, ya que la función de verosimilitud no tiene una forma cerrada. Esto obliga a emplear técnicas avanzadas como los métodos de simulación MCMC.

Evolución del enfoque SV en contextos macroeconómicos y financieros

El estudio de **Chan (2022)** representa un avance clave al analizar de manera sistemática distintas formulaciones SV en modelos Bayesian VAR de gran escala. Este estudio propone una metodología eficiente basada en muestreo de importancia adaptativo y Monte Carlo condicional, que permite comparar variantes como el modelo de volatilidad común (CSV), el modelo Cholesky (SV) y el modelo de factores (FSV).

Por su parte, **Shapovalova y Eichler (2023)** amplían los modelos SV al análisis de spillovers en series financieras mediante una estructura autoregresiva en las volatilidades latentes e inferencia bayesiana vía Particle MCMC, lo que permite identificar relaciones causales y cuantificar la incertidumbre. Otro aporte es el de **De Pinho et al. (2015)**, examina modelos de volatilidad estocástica en entornos no gaussianos utilizando distribuciones con colas pesadas, en el marco de modelos de espacio de estados no gaussianos (NGSSM), y comparan su desempeño mediante criterios de información como el AICc, BIC y el logaritmo de la verosimilitud.

Estos antecedentes reflejan un consenso en la literatura moderna: los modelos SV ofrecen una descripción más realista y flexible de la volatilidad, especialmente cuando se integran con herramientas informacionales como la divergencia KL.

2 Revisión de la literatura

Fortalezas y debilidades de los enfoques de modelado de volatilidad

Diversos modelos han sido desarrollados para capturar mejor la dinámica de la volatilidad financiera. Entre ellos destacan variantes que incorporan efectos estructurales adicionales, como:

- El modelo MASVM (Moving Average Stochastic Volatility in Mean), que incluye un componente de media móvil y un efecto en media, permitiendo modelar el impacto directo de la volatilidad sobre los retornos.
- El modelo MASVL (Moving Average Stochastic Volatility with Leverage), que incorpora correlación negativa entre shocks de retornos y volatilidad (efecto leverage), permitiendo capturar asimetrías características de los mercados financieros.

Ambos modelos han sido formulados bajo un enfoque bayesiano y evaluados mediante criterios como el ajuste *in-sample*, desempeño *out-of-sample*, y sesgos inducidos por la omisión de componentes clave.

En cuanto a métodos de comparación, la literatura resalta el uso de:

- Divergencia de Kullback–Leibler (KL), para comparar densidades predictivas.
- DIC corregido, que penaliza el sobreajuste en modelos bayesianos.
- Métricas como RMSFE (Root Mean Square Forecast Error) y Log Predictive Score, que permiten evaluar desempeño predictivo puntual y densidad total.

Asimismo, se ha demostrado que omitir efectos como leverage o in-mean puede generar sesgos importantes en la estimación, lo cual refuerza la validez de teorías como el *feedback de la volatilidad* (French et al., 1987).

Discusión

La literatura reciente ha ampliado el alcance de los modelos SV hacia el ámbito multivariado, con el objetivo de estudiar la interconectividad financiera mediante efectos de *spillover*. En este sentido, el trabajo de Shapovalova y Eichler (2023) es particularmente relevante, al proponer un modelo MSV con estructura VAR sobre la volatilidad latente. Esta formulación permite medir la intensidad y direccionalidad de los flujos de riesgo entre activos a través de funciones de impulso-respuesta y descomposición de errores de pronóstico.

La estimación de estos modelos multivariados se realiza con métodos como el Particle Markov Chain Monte Carlo (PMCMC), que permite inferencia conjunta sin recurrir a soluciones analíticas, mejorando así la exactitud y robustez de los resultados.

Por otro lado, el modelo FTARG (Flexible Tail Autoregressive Gamma), basado en procesos gamma inversos, introduce una mayor flexibilidad para capturar eventos extremos. Sus algoritmos de Gibbs, que utilizan distribuciones auxiliares Poisson y Gamma, han demostrado ser más eficientes que el PMCMC en ciertos contextos, especialmente con datos de alta volatilidad o con colas pesadas.

Estas propuestas enfatizan el desarrollo de estructuras dinámicas más complejas y de procedimientos de inferencia más eficientes. Sin embargo, el enfoque de este trabajo difiere en su propósito analítico.

Un aspecto clave en la literatura reciente sobre modelos de volatilidad es la evaluación comparativa entre especificaciones, ya sea en términos de capacidad predictiva o en la representación de la incertidumbre. En este contexto, el uso de métricas informacionales, como la divergencia de Kullback–Leibler (KL), ha comenzado a explorarse como herramienta para comparar distribuciones predictivas, aunque su incorporación explícita sigue siendo relativamente escasa en la literatura aplicada. Un ejemplo representativo es el trabajo de Dimitrakopoulos y Kolossiatis (2023), quienes emplean la KL, junto con el Log Predictive Score (LPS) y el Root Mean Squared Forecast Error (RMSFE), para evaluar la precisión probabilística de los pronósticos generados por modelos de volatilidad estocástica con efectos in-mean y leverage. Por otro lado, enfoques como el de Shapovalova y Eichler (2023), aunque no recurren a la KL, adoptan estrategias que apuntan a diferencias entre distribuciones condicionales, lo que puede considerarse un acercamiento conceptual al análisis informacional. No obstante, la evaluación explícita de divergencias entre distribuciones predictivas aún representa un enfoque poco desarrollado en estudios empíricos de volatilidad.

A diferencia de los estudios mencionados —centrados en modelación estructural, predicción o conectividad financiera—, el presente estudio adopta una perspectiva aplicada orientada a la comparación formal de distribuciones de volatilidad condicional entre tipos de cambio. Para ello, se emplean modelos de volatilidad estocástica (SV) como herramienta generadora de distribuciones posteriores, y se introduce de manera explícita la divergencia de Kullback-Leibler (KL) como métrica informacional rigurosa. Esta estrategia metodológica permite cuantificar diferencias en la representación de la incertidumbre entre monedas y evaluar cómo dichas diferencias varían bajo distintos contextos macroeconómicos. El objetivo central del estudio es caracterizar las asimetrías y heterogeneidades en la dinámica estocástica de la volatilidad cambiaria, proporcionando así una base probabilística sólida para comparar estructuras de riesgo entre activos financieros.

En síntesis, el valor añadido de este trabajo es metodológico y aplicado: provee una herramienta comparativa sólida entre modelos SV, integrando técnicas bayesianas con principios de la teoría de la información, y ofreciendo una lectura más estructurada y cuantitativa de la incertidumbre en mercados de divisas.

3 Base teórica

3.1 Modelos de Volatilidad Estocástica (SV)

Los modelos de Volatilidad Estocástica (SV) suponen que los retornos financieros y_t siguen una distribución normal con varianza condicional e^{h_t} que varía en el tiempo. A diferencia de los modelos GARCH, en los SV la volatilidad no se determina de forma determinista a partir de valores pasados, sino que sigue un proceso estocástico latente, lo que permite una representación más realista de fenómenos como la persistencia, los cambios abruptos y las colas pesadas.

El modelo básico puede expresarse como:

$$y_t \sim \mathcal{N}(0, e^{h_t}),$$
$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\eta^2),$$

donde h_t representa el logaritmo de la varianza condicional. Este proceso es autoregresivo de primer orden (AR(1)), con μ como nivel promedio de volatilidad, ϕ como parámetro de persistencia, y σ_η^2 como la varianza del choque estocástico.

Representación jerárquica del modelo SV

Para facilitar su estimación, el modelo SV se estructura jerárquicamente. En su parametrización centrada se representa como:

$$y_t \mid h_t \sim \mathcal{N}(0, \exp(h_t)), \tag{1}$$
$$h_t \mid h_{t-1}, \mu, \phi, \sigma_\eta \sim \mathcal{N}\left(\mu + \phi(h_{t-1} - \mu), \sigma_\eta^2\right). \tag{2}$$

Esto implica que cada observación y_t tiene su propia varianza contemporánea, permitiendo una modelación más flexible que en los enfoques GARCH, donde la volatilidad es función determinista del pasado.

Estimación Bayesiana y Muestreo MCMC

Dado que h_t es una variable latente, la estimación del modelo requiere métodos que puedan inferir tanto los parámetros como las volatilidades no observadas. En este contexto, los algoritmos de **Markov Chain Monte Carlo (MCMC)** permiten muestrear desde la distribución posterior conjunta de:

$$p(h_{1:n}, \mu, \phi, \sigma_\eta \mid y_{1:n}),$$

donde $h_{1:n}$ representa la secuencia de log-volatilidades y $y_{1:n}$ los datos observados.

Técnicas modernas como **AWOL (All Without a Loop)** y **ASIS (Ancillarity-Sufficiency Interweaving Strategy)** han sido clave para mejorar la eficiencia del muestreo y reducir la autocorrelación en las cadenas MCMC. Estas estrategias están implementadas en paquetes como `stochvol` para R, facilitando la aplicación práctica del modelo incluso con grandes volúmenes de datos.

3.2 Divergencia de Kullback–Leibler

La divergencia de Kullback–Leibler (KL) es una medida de disimilitud entre dos distribuciones de probabilidad. Dada una distribución verdadera P y una aproximación Q, su divergencia se define como:

$$D_{KL}(P \| Q) = \sum_i P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)},$$

o, en el caso continuo:

$$D_{KL}(P\|Q) = \int P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

En modelos SV, la divergencia KL se utiliza tanto para:

- Comparar distintas especificaciones de volatilidad (e.g., común, Cholesky, de factores).
- Aproximar distribuciones latentes, como la de la log-volatilidad conjunta.
- Evaluar la eficiencia informativa de distintos modelos bajo contextos empíricos.

3.3 Entropía e incertidumbre estructural

La **entropía** cuantifica la incertidumbre intrínseca de una distribución. Se define como:

$$H(P) = -\sum_i P(i) \log P(i),$$

y está relacionada directamente con la divergencia KL mediante:

$$D_{KL}(P\|Q) = H(P, Q) - H(P),$$

donde $H(P, Q)$ es la entropía cruzada.

El uso combinado de KL y entropía permite:

- Medir el grado de imprevisibilidad de la volatilidad en contextos financieros.
- Evaluar **cambios estructurales**, **contagio financiero** y **análisis de dependencia** entre activos.
- Diseñar métricas de divergencia entre distribuciones de riesgo condicional.

4 Definición de términos básicos

Término	**Definición**
Volatilidad	Variabilidad de los retornos financieros.
Volatilidad estocástica (SV)	Varianza que sigue un proceso aleatorio latente.
GARCH	Modelo determinista de varianza condicional.
Divergencia KL	Medida de diferencia entre distribuciones.
Entropía	Incertidumbre asociada a una distribución.
MCMC	Algoritmo para estimar distribuciones posteriores.
AWOL/ASIS	Técnicas para optimizar el muestreo MCMC.
`stochvol`	Paquete de R para estimación SV bayesiana.