

Fundamentos Mecánica de Fluidos II

Ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos

Jhon Gesell Villanueva Portella¹ & Juan Manuel Zuñiga Mamani¹

¹Universidad Peruana Cayetano Heredia.
Facultad de Ciencias y Filosofía.
Escuela Profesional de Ingeniería Biomédica.

24 de abril de 2020

Contenido

1 Conservación de la masa

2 Ecuación de Navier Stokes

3 Ecuación de Bernoulli

4 Ecuación de Hagen

5 Refuerzo

Ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos

El principal objetivo de la mecánica fluidos, especialmente la dinámica de fluidos, es describir las principales características de un fluido, como son: velocidad, presión y temperatura.

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 27

Conservación de la masa o la ecuación de continuidad

-.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rate of Mass accumulation} \\ \text{in CV} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Flow of} \\ \text{mass into CV} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Flow of} \\ \text{mass from CV} \end{array} \right)$$

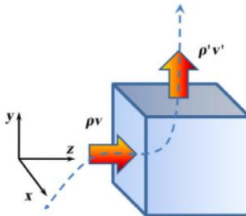


Figura: Esquema de un flujo a través de un volumen de control.

Forma diferencial de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

(pV): Flujo de masa a través de un volumen de control. Para un fluido incompresible:

$$\rho = \text{constante}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 28

Conservación de la masa

Example

Determine the velocity of blood at cross-section 4 of the aortic arch schematized in Figure 3.9. Assume that the diameter of the blood vessel is 3 cm, 1.5 cm, 0.8 cm, 1.1 cm, and 2.7 cm at cross-sections 1, 2, 3, 4, and 5, respectively. Branches 2, 3, and 4 make a 75° , a 85° , and a 70° angle with the horizontal direction, respectively. The velocity is 120, 85, 65, and 105 cm/s at 1, 2, 3, and 5, respectively. There is inflow at 1 and outflow at all of the remaining locations. Assume steady flow at this particular instant in time and that the volume of interest is nondeformable.

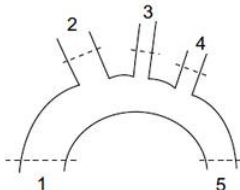


FIGURE 3.9 Schematic of the aortic arch.

Biofluid Mechanics por David Rubestein, pag 80,81

Conservación de la masa

Example

Calculate the time rate of change of air density during expiration. Assume that the lung (Figure 3.11) has a total volume of 6000 mL, the diameter of the trachea is 18 mm, the air flow velocity out of the trachea is 20 cm/s, and the density of air is 1.225 kg/m^3 . Also assume that lung volume is decreasing at a rate of 100 mL/s.

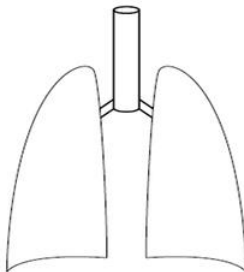


FIGURE 3.11 Schematic of the lung.

Conservación del momento

Este principio declara que el momento total en un sistema cerrado no cambia a menos que una fuerza actué sobre el.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rate of momentum accumulation} \\ \text{in CV} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{momentum flow into CV} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Rate of} \\ \text{momentum flow from CV} \end{array} \right) + \sum \text{Forces acting on CV}$$

La conservación del momento lineal para un volumen de control es:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

where ρ is density, t is time, \mathbf{V} is fluid velocity, P is normal pressure on fluid element surfaces, $\boldsymbol{\tau}$ is stress tensor and \mathbf{g} is gravity.

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 28

Conservación del momento

Example

Determine the force required to hold the brachial artery in place during peak systole (schematized in [Figure 3.13](#)). Assume at the inlet the pressure is 100 mmHg and at the outlet the pressure is 85 mmHg (these are gauge pressures). The diameter of the brachial artery is 18 mm at the inflow and 16 mm at the outflow. The blood flow velocity at the inlet is 65 cm/s. For simplicity, neglect the weight of the blood vessel and the weight of the blood within the vessel.

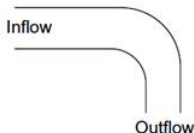


FIGURE 3.13 Brachial artery schematic for example problem.

Biofluid Mechanics por David Rubestein, pag 86

Conservación de la energía

$$\left(\begin{array}{c} \text{Rate of energy accumulation} \\ \text{in CV} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Rate of energy} \\ \text{transfer across CV} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rate of done work} \\ \text{on CV} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Rate of energy production} \\ \text{within CV} \end{array} \right)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \dot{Q}_p + \dot{W}$$

where ρ is density, C_p is heat capacity at constant pressure, T is temperature, \mathbf{V} is velocity, k is thermal conductivity, \dot{W} is rate of other work in system after subtracting the work for fluid flow and \dot{Q}_p is summation of rate of heat production and viscous dissipation.

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 29

Conservación de la energía

Example

One of the functions of the cardiovascular system is to act as a heat exchanger, to maintain body temperature (Figure 3.18). Calculate the rate of heat transfer through a capillary bed, assuming that the blood velocity into the capillary is 100 mm/s and the flow velocity out of the capillary bed is 40 mm/s. The pressure on the arterial side is 20 mmHg, and the pressure on the venous side is 12 mmHg. Assume that the arteriole diameter is 75 μm and the venule diameter is 50 μm . The temperature on the arterial side is 35°C, and the temperature on the venous side is 33°C. Assume that the power put into the system throughout the muscular system is 15 μW .

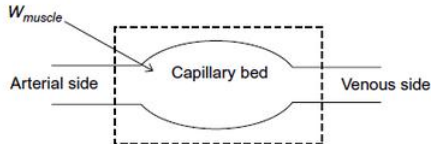


FIGURE 3.18 Schematic of a capillary heat exchanger for the example problem.

Conservación de la energía

Example

Calculate the time rate of change of mass flow rate (ρvA) of air entering the lungs. Assume that the lungs have a capacity of 6 L. The temperature of the lungs is 37°C. The air pressure inside of the lungs is 0.98 atm. At the instant that air enters the lungs, the temperature of the lungs raises by 0.0001°C/s. The height of the trachea is 20 cm. Assume that there is no work added to the system. Assume that air behaves as an ideal gas. Assume that the velocity is slow within the trachea.

Biofluid Mechanics por David Rubenstein, pag 97

Contenido

1 Conservación de la masa

2 Ecuación de Navier Stokes

3 Ecuación de Bernoulli

4 Ecuación de Hagen

5 Refuerzo

Ecuación de Navier Stokes

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \cdot \nabla V = -\nabla P + \mu \nabla^2 V + \rho g$$

where ρ is density, t is time, V is fluid velocity, P is normal pressure on fluid element surfaces, μ is viscosity and g is gravity.

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 29

Ecuación de Navier Stokes

Table 1.4 Navier–Stokes Equation for Incompressible Fluids in Rectangular and Cylindrical Coordinates	
Rectangular Coordinates:	
x direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (1.37)$
y direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \quad (1.38)$
z direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \quad (1.39)$
Cylindrical Coordinates:	
r direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \right] + \rho g_r \quad (1.40)$
θ direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right) \right] + \rho g_\theta \quad (1.41)$
z direction:	
	$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (1.42)$

Conservación de la energía

Example

Find an expression for the velocity profile and the shear stress (τ_{xy}) distribution for blood flowing in an arteriole with a diameter of $500\ \mu\text{m}$. Use the Navier–Stokes equations for Cartesian coordinates to solve this problem. The pressure driving this flow is given in Figure 3.20.

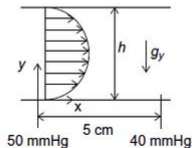


FIGURE 3.20 Pressure-driven flow in an arteriole for example problem.

Biofluid Mechanics por David Rubenstein, pag 104

Conservación de la energía

Example

Find an expression for the velocity profile and the shear stress distribution for blood flowing in an arteriole with a diameter of $500\text{ }\mu\text{m}$. Use the Navier–Stokes equations for cylindrical coordinates to solve this problem. The pressure driving this flow is given in [Figure 3.21](#).

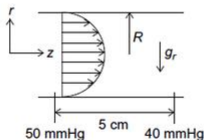


FIGURE 3.21 Pressure-driven flow in an arteriole with cylindrical coordinates for the in-text example. This is the same image as [Figure 3.20](#), but choosing a different coordinate system to illustrate the usage of Cartesian coordinates versus cylindrical coordinates.

Biofluid Mechanics por David Rubestein, pag 106

Contenido

1 Conservación de la masa

2 Ecuación de Navier Stokes

3 Ecuación de Bernoulli

4 Ecuación de Hagen

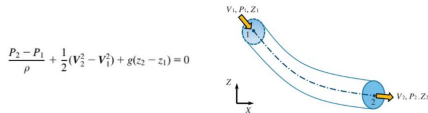
5 Refuerzo

Ecuación de Bernoulli

Esta ecuación sirve para demostrar la relación entre la velocidad, elevación y presión en un fluido no viscoso (sin fricción) y con comportamiento estable.

$$\rho \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla P + \rho \mathbf{g}$$

where ρ is density, \mathbf{V} is fluid velocity, P is pressure, z is elevation and g is gravity. Fig. 1.24 shows a simple example to clarify these variables in the Bernoulli equation for a fluid flow in a tube.



Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 31

Ecuación de Bernoulli

Ejemplo:

Calculate the static fluid pressure in the cranium at the end of systole and at the end of diastole. Assume that the cranium is 30 cm above the aortic valve and that the pressure at the end of systole and end of diastole is 120 mmHg and 80 mmHg, respectively, at the aortic valve (Figure 3.2). The density of blood is 1050 kg/m^3 .

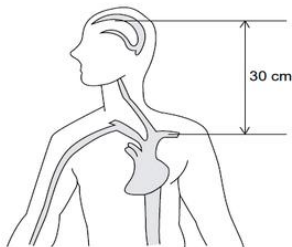


FIGURE 3.2 Difference in fluid static pressure between the aortic valve and the cranium based on height.

Biofluid Mechanics por David Rubestein, pag 68

Ecuación de Bernoulli

Example

Blood is flowing through point P (Figure 3.4), which is connected to a catheter tip manometer system. Blood enters the manometer and equilibrates the pressure of the various fluids within the system (as denoted in the figure). Calculate the pressure within the blood vessel assuming that blood density is 1050 kg/m^3 and that atmospheric pressure is 760 mmHg .

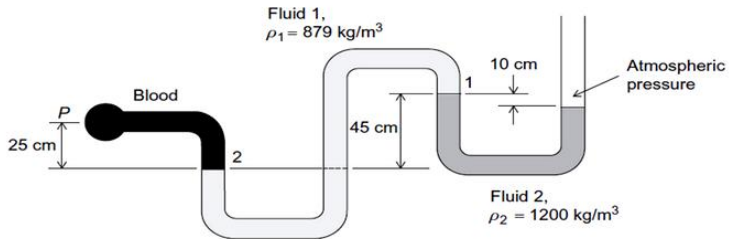


FIGURE 3.4 Schematic of a catheter tip manometer to measure intravascular blood pressure.

Ecuación de Bernoulli

Example

Determine the maximum buoyancy of a catheter that is inserted into the femoral artery of a patient and is passed through the cardiovascular system to the coronary artery (Figure 3.6). The location where the catheter is inserted into the femoral artery is 50 cm below the aortic arch. The coronary artery is 5 cm below the aortic arch. Assume that the maximum buoyancy would occur at peak systole for a normal healthy individual (120 mmHg). Also assume that the catheter is perfectly cylindrical with a diameter of 2 mm.

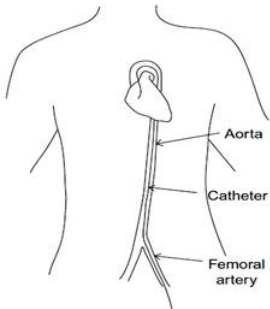


FIGURE 3.6 Catheter inserted at the femoral artery which is passed to the coronary artery. These catheters are commonly used during surgeries to remedy atherosclerotic lesions.

Ecuación de Bernoulli

Example

Blood flow from the left ventricle into the aorta can be modeled as a reducing nozzle (Figure 3.23). Model both the left ventricle and the aorta as a tube with diameter of 3.1 and 2.7 cm, respectively. The pressure in the left ventricle is 130 mmHg and the pressure in the aorta is 123 mmHg. Blood is ejected from the left ventricle at a speed of 120 cm/s. Calculate the difference in height between these two locations.

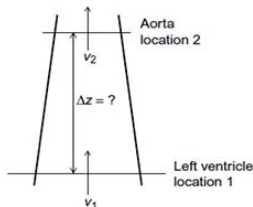


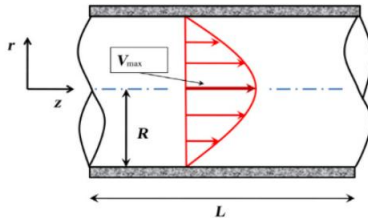
FIGURE 3.23 Schematic of the aorta downstream to the left ventricle. The aorta would experience a slight contraction within this area.

Contenido

- 1 Conservación de la masa
- 2 Ecuación de Navier Stokes
- 3 Ecuación de Bernoulli
- 4 Ecuación de Hagen
- 5 Refuerzo

Ecuación de Hagen-Poiseuille

Esta ecuación sirve para calcular la caída de presión a lo largo de un conducto.



Considerando un flujo estable de un fluido incompresible Newtoniano a lo largo de una tubería rígida.

$$V_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

$$0 \leq r \leq R$$

Ecuación de Hagen-Poiseuille

Lo cual da como resultado una velocidad máxima de :

$$V_{\max} = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

Considerando la velocidad promedio como la mitad de la velocidad máxima, tenemos:

$$\Delta P = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4}$$

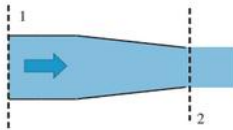
Esta ultima expresión es conocida como la **ecuación de Poiseuille**.

Biofluid Mechanics Principles por Ali Ostadfar, pag 32

Ecuación de Bernoulli

Ejercicios

4. A nozzle discharges water into the atmosphere, inlet and outlet areas are 400 mm^2 and 300 mm^2 , respectively. Determine the flow rate when the inlet pressure is 500 Pa (No energy loss)? (see Fig. 1.33)



■ FIGURE 1.33 A discharging nozzle.

5. A fluid flows in a tube with 40 mm length and 1.5 mm diameter, the required head to produce $10 \text{ mm}^3/\text{s}$ is 35 mm . Determine the viscosity of the fluid, the fluid density is 800 kg/m^3 ?
6. Determine the flow rate that causes a wall shear stress of 1 N/m^2 in a 7 mm diameter vessel? Would the flow be turbulent or laminar?
7. A syringe with inside diameter of 15 mm horizontally ejects liquid with density of 1040 kg/m^3 , through a needle with inside diameter of 1 mm at a velocity of 0.5 m/s . Determine the pressure in the syringe?

Ecuación de Bernoulli

8. Use the Navier–Stokes equations in the Cartesian coordinate system to determine the velocity profile for the blood flow in an artery with 0.001 m diameter and length of 0.04 m, inlet ($P1$) and outlet ($P2$)

pressure is 85 and 75 mmHg respectively, (Assume the $v_y = v_z = 0$, incompressible steady flow) (Fig. 1.34)

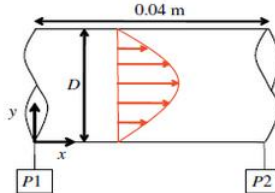


FIGURE 1.34 Blood flow in an artery for problem 8 .

Soluciones aproximadas de la ecuación de Navier Stokes

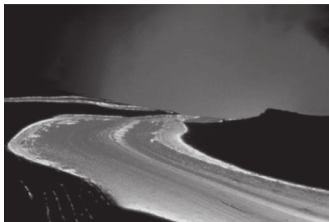


Figura: El flujo de lava de un volcán es un ejemplo de flujo trepador: la viscosidad de la roca fundida es tan grande que el número de Reynolds es pequeño aún cuando las escalas de longitud sean grandes.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 491

01. Introducción — 01/03

La mayoría de los problemas prácticos de la mecánica de fluidos no puede resolverse de manera analítica y demanda ya sea 1) mayores aproximaciones o 2) ayuda de computadora. Consideraremos a los flujos en estudio como incompresibles del tipo de fluido newtonianos.

Una solución aproximada se define como aquella donde la ecuación de Navier-Stokes se simplifica en alguna región del flujo antes de inclusive comenzar la solución. En otras palabras se comienzan a eliminar terminos dependiendo de la clase de problema, el cual puede diferir una región del flujo a otra.

Los fluidos estáticos pueden considerarse como una solución aproximada de Navier-Stokes. La aproximación es que los términos inercial y viscoso en la ecuación de Navier-Stokes son despreciablemente pequeños en comparación con los términos de presión y gravedad. Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 492

01. Introducción — 02/03

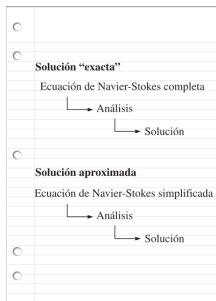


Figura: Las soluciones .^{ex}actas comienzan con la ecuación de Navier-Stokes completa, mientras que las soluciones aproximadas comienzan con una forma simplificada de la ecuación de Navier-Stokes justo desde el principio.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 492

01. Introducción — 03/03

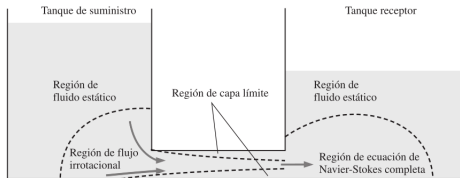


Figura: Una aproximación particular de la ecuación de Navier-Stokes es adecuada sólo en ciertas regiones del campo de flujo; otras aproximaciones pueden no ser adecuadas en otras regiones del campo de flujo.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 493

02. Ecuaciones adimensionalizadas de movimiento — 01/04

Se desea eliminar las dimensiones de las ecuaciones de movimiento, de modo que puedan compararse de manera adecuada las órdenes de magnitud de los diversos términos de las ecuaciones, para ello comenzamos con la ecuación de continuidad de flujo incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

y la forma vectorial de la ecuación de Navier-Stokes, valida para flujo incompresible de un fluido newtoniano con propiedades constantes:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 493

02. Ecuaciones adimensionalizadas de movimiento — 02/04

Mostramos algunos parámetros de escalamiento o repetitivos característicos que se usan para eliminar las dimensiones de las ecuaciones de movimiento.

Parámetro de escalamiento	Descripción	Dimensiones primarias
L	Longitud característica	$\{L\}$
V	Velocidad característica	$\{Lt^{-1}\}$
f	Frecuencia característica	$\{t^{-1}\}$
$P_0 - P_\infty$	Diferencia de presión de referencia	$\{mL^{-1}t^{-2}\}$
g	Aceleración gravitacional	$\{Lt^{-2}\}$

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 494

02. Ecuaciones adimensionalizadas de movimiento — 03/04

Luego se definen algunas variables adimensionales y un operador adimensional con base en los parámetros de escalamiento de la tabla mostrada en el slider anterior.

$$\begin{aligned} t^* &= ft & \vec{x}^* &= \frac{\vec{x}}{L} & \vec{V}^* &= \frac{\vec{V}}{V} \\ P^* &= \frac{P - P_\infty}{P_0 - P_\infty} & \vec{g}^* &= \frac{\vec{g}}{g} & \vec{\nabla}^* &= L\vec{\nabla} \end{aligned}$$

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 494

02. Ecuaciones adimensionalizadas de movimiento — 04/04

Luego de haber multiplicado los terminos de la ecuación de Navier-Stokes por sus respectivos factores se obtiene.

$$[\text{St}] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^* = -[\text{Eu}] \vec{\nabla}^* P^* + \left[\frac{1}{\text{Fr}^2} \right] \vec{g}^* + \left[\frac{1}{\text{Re}} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 495

03. Aproximación de flujo de Stokes — 01/04



Figura: El lento flujo de un líquido muy viscoso, en este caso la miel, se clasifica como flujo de Stokes.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 496

03. Aproximación de flujo de Stokes - Ejemplo — 02/04

Fuerza de arrastre sobre un objeto en flujo de Stokes:

Después que la densidad ha desaparecido de la ecuación de Navier-Stokes, la fuerza de arrastre sobre un objeto en flujo de Stokes sólo es función de su velocidad V , alguna longitud característica L del objeto y la viscosidad del fluido μ (Fig. 10-12). Use el análisis dimensional para generar una relación para F_D como función de estas variables independientes.

SOLUCIÓN Debe usar análisis dimensional para generar una relación funcional entre F_D y las variables V , L y μ .

Suposiciones **1** Se supone que $Re \ll 1$ de modo que se aplica la aproximación de flujo de Stokes. **2** Los efectos gravitacionales son irrelevantes. **3** Ningún otro parámetro mencionado en el enunciado del problema es relevante para su solución.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 498

03. Aproximación de flujo de Stokes - Ejemplo — 03/04

Análisis Se sigue el método paso a paso de repetición de variables tratado en el capítulo 7; los detalles se dejan como ejercicio. Existen cuatro parámetros en este problema ($n = 4$). Existen tres dimensiones primarias: masa, longitud y tiempo, así que se hace $j = 3$ y se usan las variables independientes V , L y μ como las variables repetitivas. Sólo se espera un Pi pues $k = n - j = 4 - 3 = 1$, y Pi debe ser igual a una constante. El resultado es:

$$F_D = \text{constante} \cdot \mu V L$$

Por lo tanto, se ha demostrado que, para flujo de Stokes alrededor de cualquier objeto tridimensional, la fuerza de arrastre es simplemente una constante multiplicada por $\mu V L$.

Discusión Este resultado es significativo porque todo lo que se deja por hacer es encontrar la constante, que sólo es una función de la forma del objeto.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 498

03. Aproximación de flujo de Stokes - Ejemplo — 04/04

Fuerza de arrastre sobre un objeto en flujo de Stokes:

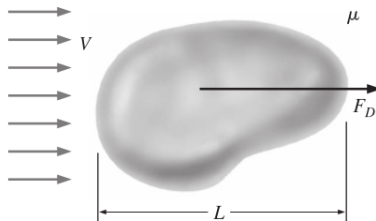


Figura: Para flujo de Stokes sobre un objeto tridimensional la fuerza de arrastre sobre el objeto no depende de la densidad, sino sólo de la velocidad V , alguna longitud característica del objeto L y la viscosidad del fluido μ .

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 499

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes 01/

$$F_D = 3\pi\mu VD$$

Figura: Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes.

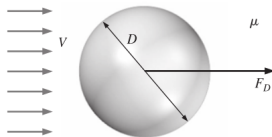


Figura: La fuerza de arrastre sobre una esfera de diámetro D en flujo de Stokes es igual a $3\pi\mu VD$.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 499

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes - Ejemplo — 02/

Un volcán hace erupción, arroja piedras, vapor y cenizas a varios pies en la atmósfera (Fig. 10-14). Después de cierto tiempo, las partículas comienzan a asentarse en el suelo. Considere una partícula de ceniza casi esférica de $50\ \mu\text{m}$ de diámetro, que cae en el aire cuya temperatura es de -50°C y cuya presión es de 55 kPa. Su densidad es de $1\,240\ \text{kg/m}^3$. Estime su velocidad terminal a esta altitud.

SOLUCIÓN Debe estimar la velocidad terminal de una partícula de ceniza que cae.

Suposiciones **1** El número de Reynolds es muy pequeño (necesitará verificar esta suposición después de obtener la solución). **2** La partícula es esférica.

Propiedades A la temperatura y presión dadas, la ley del gas ideal produce $\rho = 0.8588\ \text{kg/m}^3$. Puesto que la viscosidad es una función muy débil de la presión, se usa el valor a -50°C y presión atmosférica, $\mu = 1.474 \times 10^{-5}\ \text{kg/m} \cdot \text{s}$.

Análisis Trate el problema como aproximadamente estacionario. Cuando la partícula que cae alcanza su velocidad terminal, la fuerza descendente neta (peso)

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 499

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes - Ejemplo — 03/

equilibra la fuerza ascendente neta (fuerza de arrastre aerodinámica + flotabilidad), como se ilustra en la figura 10-15.

Fuerza descendente:
$$F_{\text{abajo}} = W = \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{partícula}} g \quad (1)$$

La fuerza de arrastre aerodinámica que actúa sobre la partícula se obtiene de la ecuación 10-12, y la fuerza de flotabilidad es el peso del aire desplazado. En consecuencia:

Fuerza ascendente:
$$F_{\text{arriba}} = F_D + F_{\text{flotabilidad}} = 3\pi\mu VD + \pi \frac{D^3}{6} \rho_{\text{aire}} g \quad (2)$$

Se igualan las ecuaciones 1 y 2 y se resuelve para la velocidad terminal V ,

$$\begin{aligned} V &= \frac{D^2}{18\mu} (\rho_{\text{partícula}} - \rho_{\text{aire}}) g \\ &= \frac{(50 \times 10^{-6} \text{ m})^2}{18(1.474 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s})} [(1\,240 - 0.8588) \text{ kg/m}^3](9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= \mathbf{0.115 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes - Ejemplo — 04

Para finalizar, se verifica que el número de Reynolds sea lo suficientemente pequeño como para que el flujo de Stokes sea una aproximación adecuada:

$$Re = \frac{\rho_{\text{aire}} V D}{\mu} = \frac{(0.8588 \text{ kg/m}^3)(0.115 \text{ m/s})(50 \times 10^{-6} \text{ m})}{1.474 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}} = 0.335$$

Por lo tanto, el número de Reynolds es menor que 1, pero en realidad no *mucho* menor que 1.

Discusión Aunque la ecuación para la fuerza de arrastre del flujo de Stokes sobre una esfera (Ec. 10-12) se dedujo para un caso con $Re \ll 1$, es evidente que la aproximación es razonable hasta $Re \approx 1$. Un cálculo más complicado, que incluye una corrección al número de Reynolds y una corrección con base en la trayectoria libre media de las moléculas de aire, produce una velocidad terminal de 0.110 m/s (Heinsohn y Cimbala, 2003); el error de la aproximación de flujo de Stokes es menor de 5 por ciento.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 499

Fuerza de arrastre sobre una esfera en flujo de Stokes - Ejemplo — 06

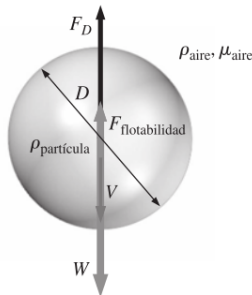


Figura: Una partícula que cae a una velocidad terminal estacionaria no tiene aceleración; en consecuencia, su peso se equilibra mediante la fuerza de arrastre aerodinámica y la de flotabilidad que actúa sobre la partícula.

Mecánica de fluidos por Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, pág. 500

Contenido

6 Referencias

Referencias



Fundamentos y Aplicaciones de Mecánica de Fluidos.

Yunus Cengel y John Cimbala.

Editorial McGraw-Hill (2006)



Mecánica de Fluidos - Problemas resueltos.

Josep M. Bergadà Graño.

Editorial de la Universidad Politècnica de Catalunya (2006)



Biofluid Mechanics Applications.

Ali Ostadfar.

Editorial Elsevier (2016)



Biofluid Mechanics

David A. Rubenstein.

Editorial Elsevier (2015)

Referencias



Introducción a la Dinámica de Fluidos.

Yuri N. Skiba.

Editorial de la Universidad Nacional Autónoma de México (2008)



Applied Biofluid Mechanics.

Lee Waite and Jerry Fine.

Editorial Mc Graw Hill (2007)