Fundamentos Mecánica de Fluidos I

Fluido estable e inestable, flujo laminar y turbulento, fluidos compresibles e incompresibles, viscoelasticidad y viscoplasticidad

Jhon Gesell Villanueva Portella[1] & Juan Manuel Zuñiga Mamani[1]

[1]Universidad Peruana Cayetano Heredia.
Facultad de Ciencias y Filosofia.
Escuela Profesional de Ingenieria Biomédica.

17 de abril de 2020

Contenido

Contenido

Flujo estable e inestable

Un flujo esta caracterizado por el campo de vectores de las propiedades del fluido (velocidad, presión, etc.). Si el campo de propiedades es independiente del tiempo el fluido es estable y es inestable si el campo de propiedades varía con el tiempo.

$$\frac{d}{dt} = 0$$

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 19

Contenido

Flujo Laminar y Turbulento

El flujo laminar y turbulento son aspectos fluídicos de un flujo viscoso. En un flujo laminar las líneas de corriente son paralelas y en el caso de una tubería circular estas son cilíndros concéntricos alrededor de la línea de flujo central. La transición de laminar a turbulento ocurre generalmente debido a los cambios de velocidad o geometría.

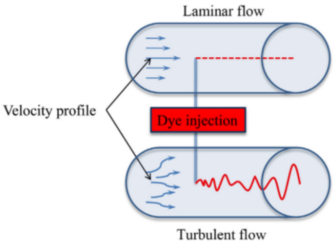


Figura: Tinte sobre una corriente de flujo Newtoneano para demostrar el fluido laminar y turbulento.

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 20

Perfil de velocidad

Es un diagrama de vectores de velocidad de una corriente de fluido como una función de la distancia perpendicular a la dirección del flujo.

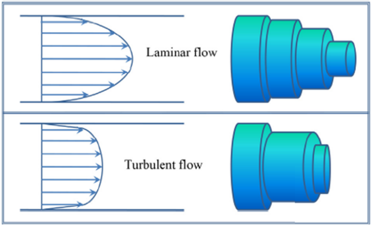


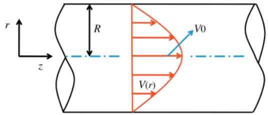
Figura: Esquema de perfil de velocidad para un flujo laminar y turbulento.

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 20

Flujo laminar

Para un flujo viscoso a través de un canal circular, el perfil de velocidad axial esta dado por:

$$V_r = V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 21

Flujo turbulento

- El flujo varía constantemente y este tiene un comportamiento caótico.
- El esfuerzo cortante entre capas aumenta.
- El número de Reynolds ayuda a evaluar si el fluido es laminar o turbulento.

$$V_r \approx V_0\left(1-\frac{r}{R}\right)^m, \quad \frac{1}{9} \leq m \leq \frac{1}{5}$$

Figura: Where Vr is axial velocity as a function of radius. Vo is maximun velocity at the certerline, r is radial distance from the centerline and R is radius of the channel.

Table 1.3 Accurate Flow Regimes (Laminar to Turbulent Flow) Based on Reynolds Number

Reynolds Number Range	Flow Regime Conditions
$Re < 2100$	Laminar
$2100 < Re < 4200$	Transition
$4200 < Re$	Turbulent

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 21

Flujo turbulento - Ejercicio

2. Determine the wall shearing stress for a fluid, having a viscosity of 3.5 cP, flowing with an average velocity of 9 cm/s in a 3-mm-diameter tube. What is the corresponding Reynolds number? (The fluid density $\rho = 1.06$ g/cm^3.)

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 31

Flujo turbulento - Ejercicio

3. In a 5-mm-diameter vessel, what is the value of the flow rate that causes a wall shear stress of 0.84 N/m^2? Would the corresponding flow be laminar or turbulent?

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 31

Flujo turbulento - Ejercicio

7. The following data apply to the steady flow of blood through a long horizontal tube:

tube diameter = 3 mm
blood viscosity = 0.0035 Ns/m^2
blood density = 1060 kg/m^3
mean velocity = 4 cm/s

(a) Is the flow laminar or turbulent?
(b) Calculate, if possible, the shearing stress at the tube wall.
(c) Calculate, if possible, the maximum velocity in the tube.

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 32

Flujo turbulento - Ejercicio

8. The following data apply to the steady flow of blood through a long horizontal tube:

tube diameter = 3 mm
blood viscosity = 0.0045 Ns/m^2
blood density = 1060 kg/m^3
mean velocity = 3 cm/s

(a) Is the flow laminar or turbulent?
(b) Calculate, if possible, the shearing stress at the tube wall.
(c) Calculate, if possible, the maximum velocity in the tube.

9. The following data apply to the steady flow of blood through a long horizontal tube:

tube diameter = 1 mm
blood viscosity = 0.0030 Ns/m^2
blood density = 1060 kg/m^3
mean velocity = 8 cm/s

(a) Is the flow laminar or turbulent?
(b) Calculate, if possible, the shearing stress at the tube wall.
(c) Calculate, if possible, the maximum velocity in the tube.

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 32

Condiciones de borde y no deslizamiento

Las ecuaciones tienen un rol importante en las aplicaciones físicas. Las ecuaciones que gobiernan las características físicas, como presión y velocidad, están definidas por ecuaciones diferenciales parciales. Para calcular estas ecuaciones es necesario conocer datos iniciales, como el camp'o de velocidades en el campo de los fluidos. Estos datos son conocidos como condiciones de contorno o borde.

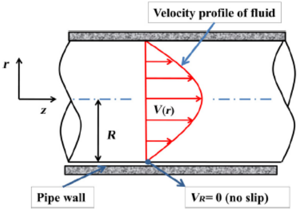


Figura: Esquema de condición de contorno de no deslizamiento. La velocidad tangencial en el punto entre la interface líquido-sólido de la pared de la tubería es igual a cero ($V(R) = 0m/s$).

Biofluid Mechanics Aplications por Ali Ostadfar, pag. 32

Contenido

Fluidos compresibles e incompresibles

Si es que las consideraciones físicas (termodinámicas y geométricas) no cambian la densidad del fluido, este fluido es incompresible. Para el caso de un fluido compresible:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Figura: Ecuación de continuidad.

Si el fluido es incompresible, tenemos:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\nabla \cdot V = 0$$

Figura: Por lo cual el gradiente de velocidad es cero, lo cual significa que el fluido no presenta un cambio de volúmen (condición de incompresibilidad).

Fluidos compresibles e incompresibles - ejercicio

2.2 Consider a velocity vector $v = (xt^2 - y)\vec{i} + (xt - y^2)\vec{j}$. (i) Determine whether this flow is steady (*hint*: no changes with time). (ii) Determine whether this is an incompressible flow (*hint*: check if $\nabla \bullet v = 0$).

Biomedical engineering por David Rubestein

Contenido

Viscoelasticidad y viscoplasticidad

La viscoelasticidad es una propiedad mecánica del material el cual ante una fuerza demuestra un comportamiento viscoso y elástico. Ante la aplicación de una fuerza este material tiene dos partes, una que se recupera inmediatamente (elástica) y la otra que se recupera con el tiempo (viscosa).

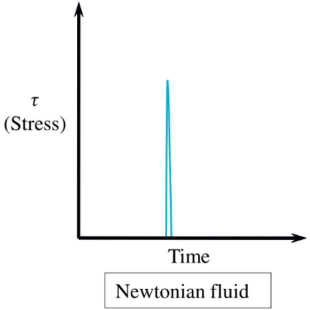
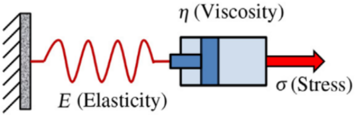


Figura: Esquema de estrés de relajación entre un fluido Newtoneano (izquierda) y un fluido viscoelástico (derecha).

Modelo de Maxwell para un fluido viscoelástico 01/02

Ejemplo de materiales biológicos que tienen un comportamiento viscoelástico: Piel, hueso, vasos sanguíneos.



Modelo de Maxwell para un fluido viscoelástico 02/02

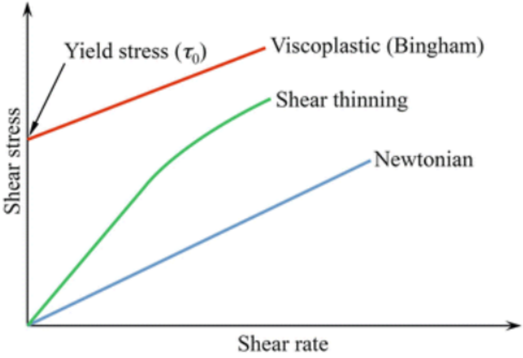
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Figura: Where ϵ is strain or deformation fraction. E is elasticity module of material. σ is stree on material elements, η is viscosity and t is time.

Viscoplástico

Un material viscoplástico necesita vencer un determinado esfuerzo propio de cada material para que pueda fluir, caso contrario el material se deformará.



Modelos para materiales viscoplástico

- Bingham
- Herschel-Bulkley
- Casson

$$\tau^{1/2} = b^{1/2} + a|\gamma^{1/2}| \qquad (1.31)$$

where τ is shear stress, γ is shear rate, a and b are constants (b is yield stress at low shear rate).

El módelo de Casson es aplicable a fluidos biológicos tales como la sangre.

Contenido

Turbulencia

La más difundida forma reflujo de fluido en la naturaleza es una forma irregular y caótica. Si un flujo irregular caótico también es difuso y disipativo, entonces se dice que el movimiento de fluido forma un campo de flujo turbulento. La evaluación y computación de los campos de flujo turbulento por medio de los métodos deterministas, los cuales en principio se aplican para resolver los más pequeños detalles de un campo, es un trabajo extgremadamente agotador y aburrida y al mismo tiempo demasiado detallado para objetivos de ingeniero. Así para anlizar los campos de flujo turbulento hay que usar métodos estadísticos apropiados.

Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 377

Flujos turbulentos - 01/03

Un flujo viscoso puede ser clasificado como flujo laminar o flujo turbulento. En un flujoi laminar el fluido fluye sin mezclado significativo de sus partículas próximas entre sí. Si se inyectara un colorante, el flujo no se mezclaría con el fluido cercano excepto por actividad molecular; conservará su identidad durante un lapto se tiempo relativamente largo. Los esfuerzos cortantes viscosos siempre influyen en un flujo laminar.
En un flujo turbulento los movimientos del fluido varían irregularmente de tal suerte que las cantidades tales como velocidad y presión muestran una variación aleatoria con el tiempo y las coordenadas espaciales. Las cantidades físicas con frecuencia se describen mediante promedios estadísticos (Chorin, 1994). Un colorante inyectado en un fluijo turbulento se mezclará de inmediato por la acción del movomiento aleatorio de sus partículas; rápidamente perderá su identidad en este proceso de difusión.

Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 377

Flujos turbulentos - 02/03

Un flujo laminar y un flujo turbulento pueden ser observados mediante la realización de un experimento simple con una llave de agua. Si abrimos la llave un poco entonces el agua fluye lentamente como una corriente silenciosa. Este es un flujo laminar. Y si continuamos abriendo más la llave se puede observar cómo el flujo se vuelve turbulento. Note que un flujo turbulento se desarrolla con un gasto relativamente pequeño.
En aplicaciones prácticas a menudo se estudian el desarrollo de flujos turbulentos en un tubo (Cengel y Cimbala, 2006). Aun cuando en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas, se han observado flujos laminares con números de Reynolds hasta de 400000 en flujos turbulentos desarrollados en tubos, se supone que los flujos turbulentos ocurren en tubos en condiciones de operación estándar siempre que el número de Reynolds exceda de 4000; entre 2000 y 4000 se supone que el flujo oscila de una manera aleatoria entre laminar y turbulento.

Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 378

Flujos turbulentos - 03/03

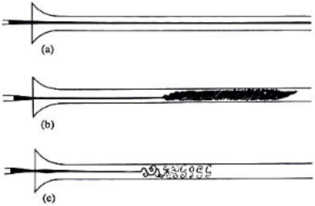


Figura: Bosquejos de (a) flujo laminar en un tubo indicado por una vena de tinta; (b) transición a un flujo turbulento; (c) transición a un flujo turbulento como se ve cuando está iluminada por un resplandor (Reynolds, 1883).

Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 378

Flujos turbulentos - 03/03

Considere, por ejemplo, agua a 20 °C fluyente en un tubo de 5mm de diámetro; se requiere sólo una velocidad media de 0.8 m/s para que el flujo sea turbulento. Ésta es la situación siempre que se bebe agua de un bebedero. Con tubos de mayor diámetro la velocidad media es suficientemente grande así que en la mayoría de las situaciones de ingeniería se producen un flujo turbulento. El perfil de velocidad en un flujo en tubería totalmente desarrollado es parabólico en el flujo lamniar, pero es mucho más plano en el flujo turbulento. Además, los gradientes de velocidad en la pared son mayores para flujo turbulento que para flujo laminar, aun cuando la capa límite turbulenta sea más grande gruesa que la capa laminar para ael mismo valor de velocidad de flujo libre.
Ninguna definición corta pero bastante completa de la turbulencia parece ser posible (Frisch, 1995). Uno puede formular un breve resumen, más bien que una definición formal. Quizás el mejor es que la turbulencia es un estado de inestabilidad continuar. Cada vez que un flujo se cambia a consecuencia de una inestabilidad, capacidad de predecir los detalles del movimiento son reducidos. Cuando las inestabilidades sucesivas han reducido el nivel de predicción tanto que es apropiado describir un flujo estadísticamente, más bien que en cada detalle, entonces se dice que el flujo es turbulento. Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 379

Flujos turbulentos - 03/03

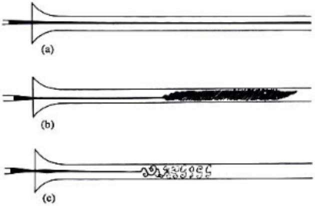


Figura: Bosquejos de (a) flujo laminar en un tubo indicado por una vena de tinta; (b) transición a un flujo turbulento; (c) transición a un flujo turbulento como se ve cuando está iluminada por un resplandor (Reynolds, 1883).

Introducción a la dinámica de fluidos por Yuri N. Skiba, pag. 378

Flujo viscoso: tuberías y canales

Fluidos reales en situaciones en las cuales las irreversibilidades son importantes. La viscosidad es la propiedad del fluido que causa los esfuerzos cortantes en fluidos en movimiento. La viscosidad tamibén es uno de los medios mediante el cual se desarrollan pérdidas. En flujos turbulentos, los movimientos aleatorios de fluidos superpuestos al promedio, crean esfuerzos cortantes en fluidos en movimiento. La viscosidad también es uno de los medios mediante el cual se desarrollan pérdidas. En flujos turbulentos, los movimientos aleatorios de fluidos superpuestos al promedio, crean esfuerzos cortantes aparentes que son más importantes que en aquellos debido a los esfuerzos cortantes viscosos. Mecánica de fluidos por Victor Streeter, pág. 259

Flujos laminares y turbulentos: FLujos internos y externos

El número de Reynolds: El flujo laminar se defime como el flujo en el cual el fluido se mueve en capas, o láminas, que se deslizan suavemente una sobre otra adyacente, únicamente con intercambio molecular de momentum. Cualquier tendencia a la inestabilidad y turbulencia son atenuadas por las fuerzas cortantes viscosas que resisten el movimineot relativo de capas fluidas adyacentes. Sin embargo, en el flujo turbulento las partículas fluidas tienen un movimiento muy errático, con un intercambio de momentum transfersal violento. La naturaleza del flujo, es decir, si es laminar o turbulento, y su posición relativa en una escala que muestra la importancia relativa de las tendencias turbulentas a laminares están indicadas por el número de Reynolds. Mecánica de fluidos por Victor Streeter, pág. 260

Flujos laminares y turbulentos: FLujos internos y externos

Se dice que dos casos de flujo son dinámicamente similares cuando:

- Éstos son geométricamente similares, es decir, que las dimensiones lineales correspondientes tienen una relación constante.
- Los correspondientes polígonos de fuerza son geométricamente similares, o que las presiones en puntos correspondientes tienen una relación constante.

Al considerar dos situaciones de flujo geométricamente similares, Reynolds dedujo que éstos serían dinámicamente simialres si las ecuaciones diferenciales generales que describían sus flujos fueran idénticas. Al cambiar las unidades de masa, longitud y tiempo en un cambio de ecuaciones y al determinar la condición que debe ser satisfecha para hacerlas idénticas a las ecuaciones originales, Reynolds encontró que el grupo adimensional

Mecánica de fluidos por Victor Streeter, pág. 260

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 01/12

Problema 01:

Entre los extremos de un tubo de 0,006 m de diámetro y 1 m de longitud, se aplica una diferencia de presión relativa de 50.000 Pa. Si el caudal que fluye es de $Q = 3,5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$, halle la viscosidad del fluido circulante (considerando régimen laminar). Compruebe la veracidad de esta hipótesis.

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 001

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 02/12

Solución:

La velocidad media de paso del fluido por el conducto será:

$$\bar{U} = \frac{Q}{S} = \frac{3,5\times 10^{-6}}{\frac{\pi\, 0,006^2}{4}} = 0,1237\,\frac{m}{s}$$

Dado que no se puede determinar el número de Reynolds, se considerará que el régimen de flujo es laminar; al final de proceso se comprobará esta hipótesis.

- Considerando que el fluido fluye según la ley de Poiseulle, y sabiendo que la distribución de velocidades en dirección radial según Poiseulle es:

$$\bar{U} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{\mu}\frac{1}{4}\left(r^2 - R^2\right) = \text{Umáx}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

donde $\text{Umáx} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{1}{4\mu}R^2$

La relación velocidad máxima-velocidad media $\bar{U} = \frac{\text{Umax}}{2}$

donde $\bar{U} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x}\frac{R^2}{8\mu}$

La diferencia de presión entre extremos del conducto ha de ser contrarrestada por los esfuerzos

[redacted]

$$Fp = \frac{\pi D^2}{4}\Delta P^*_{total} = \frac{\pi \times 0,006^2}{4}50.000 = 1,4137\ \text{N}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 001

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 03/12

El esfuerzo cortante se define como:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} U_{máx} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$\tau = -\mu \, U_{máx} \frac{2\,r}{R^2}$$

El esfuerzo cortante de la pared valdrá:

$$r = R$$

$$\tau = -\mu \, U_{máx} \frac{2}{R}$$

$$\text{como} \quad \bar{U} = \frac{U_{máx}}{2}$$

$$\tau = -\mu \, 4 \frac{\bar{U}}{R}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 002

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 04/12

El esfuerzo debido a los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el tubo será:

$$F_T = \tau S = \tau 2 \pi R L = -\mu 4 \frac{\bar{U}}{R} 2 \pi R L$$

como $-F_T = Fp$

$$1{,}4137 = 8 \pi \bar{U} \mu L = 8 \pi 0{,}1237 \mu$$

$$\mu = 0{,}4547 \frac{N \times S}{m^2}$$

Para que el flujo sea laminar se debe cumplir:

$$Re = \frac{\bar{U} D}{\nu} = \frac{0{,}1237 \times 0{,}006}{\frac{0{,}4547}{\rho}} < 2.400$$

Para cumplir la igualdad, se tiene que ρ debería valer $\rho = 1.470.331 \, Kg/m^3$; como esto es imposible, se concluye que la hipótesis es acertada. En concreto, para una densidad de $800 \, Kg/m^3$, se obtiene Re = 1,3.

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 002

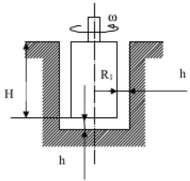
PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 05/12

Problema 02:

Halle la potencia necesaria para mantener una velocidad angular constante de 10 rad/s en el viscosímetro cilíndrico de la figura. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base.)

Datos:

$H = 10$ cm
$R_1 = 3$ cm
$h = 0,1$ cm
$\mu = 7 \cdot 10^{-3}$ N·s/m^2



Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 003

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 06/12

Solución:

En la cara lateral se tiene:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_1 - 0}{h} = \frac{R_1 \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par laterales, F_L y M_L, se obtienen:

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 003

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 07/12

$$F_L = \tau \cdot dS = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} 2\pi R_1 \cdot H = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^2$$

$$M_L = F \cdot R_1 = \mu \frac{R_1 \omega}{h} 2\pi \cdot R_1 \cdot H R_1 = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

El valor de la potencia necesaria para vencer los esfuerzos cortantes laterales será:

$$N_L = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

En la base del cilindro, se tiene:

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_i}{h} = \frac{r_i \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par en la base, F_B y M_B, serán:

$$F_B = \int_S \tau dS = \int_0^R \mu \frac{r_i \omega}{h} 2\pi r_i \, dr_i = \mu \frac{2\pi}{h} \omega \left[\frac{r_i^3}{3} \right]_0^R$$

$$F_B = \mu 2\pi \frac{\omega}{h} \frac{R^3}{3}$$

$$M_B = \int dF_B \cdot R_i = \mu \frac{\omega \, 2\pi}{h} r_i^3 \cdot dr_i = \mu \frac{\omega \, 2\pi}{h} \left[\frac{R_i^4}{4} \right]_0^R$$

$$M_B = \mu \frac{\omega \, 2\pi}{h} \frac{R^4}{4}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 004

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 08/12

La potencia debida a los esfuerzos cortantes en la base, N_B, será:

$$N_B = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \frac{R^4}{4}$$

con lo que la potencia total necesaria para hacer girar el cilindro será:

$$N_T = N_L + N_B = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \left[H R_1^3 + \frac{R_1^4}{4} \right] = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{0,001} 2\pi \left(0,1 \cdot 0,03^3 + \frac{0,03^4}{4} \right)$$

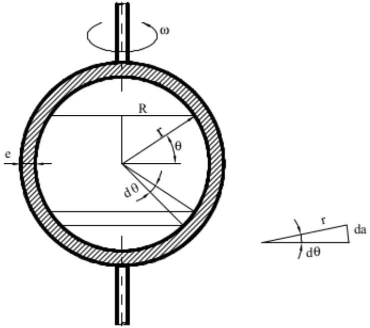
$$N_T = 0,0127 \, [W]$$

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 004

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 09/12

Problema 03:

Halle la expresión del par necesario para mover la esfera de la figura adjunta.



Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 005

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 10/12

Solución:

Las tensiones cortantes existentes se pueden definir como:

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \mu \frac{\omega R}{e} = \frac{\mu \, \omega \, r \cos\theta}{e} \;;$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 005

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 11/12

Estudiando la esfera, se observa que la fuerza que se opone al movimiento se da como:

$$dF = \tau\, dS = \frac{\mu\, \omega\, r \cos\theta}{e}\, 2\pi\, r\, da = \frac{\mu\, \omega\, r \cos\theta}{e}\, 2\pi\, r \cos\theta\;\; r\, d\theta =$$

$$= \frac{\mu\, \omega\, r^3}{e}\, 2\pi \cos^2\theta\, d\theta$$

Así mismo, el momento resistente resultante valdrá:

$$dM = dF\, R_1 = dF\, r \cos\theta$$

$$dM = \frac{\mu\, \omega\, r^3}{e}\, 2\pi \cos^2\theta\, d\theta\, r \cos\theta$$

$$M = \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \frac{\mu\, \omega\, r^4}{e}\, 2\pi \cos^3\theta\, d\theta$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 006

PROBLEMAS RESUELTOS: Propiedades de fluidos - 12/12

con lo cual, la potencia necesaria para hacer girar la esfera sería:

$$N = M\,\omega = \mu\,\omega^2\,\frac{r^4}{e}\,2\pi\int_{-90^\circ}^{90^\circ}\cos^3\theta\,d\theta$$

y quedaría:

$$N = M\,\omega = \mu\,\omega^2\,\frac{r^4}{e}\,2\pi\left[\left[\frac{1}{3}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right]_{-90}^{90} + \left[\frac{2}{3}\int_{-90^\circ}^{90^\circ}\cos\theta\,d\theta\right]\right]$$

$$N = \mu\,\omega^2\,\frac{r^4}{e}\,2\pi\left[\left[\frac{1}{3}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right]_{-90}^{90} + \left[\frac{2}{3}\mathrm{sen}\theta\right]_{-90}^{90}\right]$$

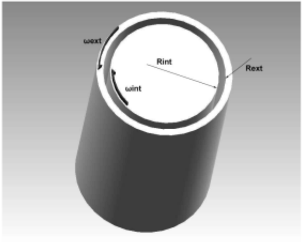
$$N = \mu\,\omega^2\,\frac{r^4}{e}\,\frac{8}{3}\pi$$

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 006

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 01/20

Problema 04:

Sean dos cilindros concéntricos de longitud unitaria, con radios R_{ext} y R_{int}, respectivamente, separados por una película de aceite de viscosidad μ. El cilindro exterior gira a una velocidad angular ω_{int} (sentido horario), mientras que el exterior gira a una velocidad angular ω_{ext} (sentido antihorario).



Halle las ecuaciones que definen:

1. La distribución de velocidades entre cilindros.
2. La distribución de presiones entre cilindros.
3. El par necesario en el cilindro exterior para que se produzca el giro.

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 127

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 02/20

Solución:

Cálculos previos

- Las condiciones de contorno que definen este problema són:

$$r = R_{ext} \Rightarrow V_\theta = \omega_{ext}\, R_{ext}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 127

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 03/20

$$r = R_{int} \Rightarrow V_\theta = \omega_{int}\, R_{int}\,(-1)$$

- La ecuación de continuidad, en coordenadas cilíndricas, establece:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

- La ecuación de Navier-Stokes, en cilíndricas, se enuncia:

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}\right) =$$
$$\rho\, g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, V_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_\theta\, V_r}{r}\right) =$$
$$\rho\, g_\theta - \frac{\partial P}{r\partial \theta} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, V_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) =$$
$$\rho\, g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 128

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 04/20

Únicamente existe variación de velocidad V_θ en dirección radial, con lo que se tiene:

- La ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta)=0 \Rightarrow \rho\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}=0$$

$$\rho = \text{constante}$$

- La ecuación de Navier-Stokes:

La presión reducida variará únicamente en la dirección radial

$$-\rho\,\frac{V_\theta^{\,2}}{r}=\rho\, g_r-\frac{\partial P}{\partial r}=-\rho\, g\frac{\partial h}{\partial r}-\frac{\partial P}{\partial r}=-\frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0=\mu\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_\theta)\right)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_\theta)\right)=0$$

Se considera que no existen fuerzas másicas en la dirección z.

$$0=\rho\ g_z-\frac{\partial P}{\partial z}\Rightarrow\frac{\partial P^*}{\partial z}=0$$

No hay gradiente de presión reducida en la dirección z.

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 128

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 05/20

1. Así, se tiene que:

De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^{*} = \int \rho \frac{V_\theta^{2}}{r} dr$$

Será necesario conocer la distribución de velocidades en la dirección θ, ya que esta dependerá de r.

De la segunda ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_\theta)\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_\theta) = C_1$$

Las constantes C1 y C2 son constantes de integración

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_\theta) = r\ C_1$$

$$r\ V_\theta = C_1\ \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_\theta = C_1\ \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 129

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 06/20

Con las condiciones de contorno:

$$r = R_{ext} \Rightarrow V_0 = \omega_{ext}\ R_{ext}$$

$$r = R_{int} \Rightarrow V_0 = \omega_{int}\ R_{int}\,(-1)$$

$$(1) \qquad \omega_{ext}\ R_{ext} = C_1\frac{R_{ext}}{2} + \frac{C_2}{R_{ext}}$$

$$(2) \qquad -\omega_{int}\ R_{int} = C_1\frac{R_{int}}{2} + \frac{C_2}{R_{int}}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - C_1\frac{R_{ext}^{\ 2}}{2} \Rightarrow -\omega_{int}\ R_{int} = C_1\frac{R_{int}}{2} + \frac{1}{R_{int}}\left[\omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - C_1\ \frac{R_{ext}^{\ 2}}{2}\right]$$

$$-\omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - \omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} = C_1\left(\frac{R_{int}^{\ 2}}{2} - \frac{R_{ext}^{\ 2}}{2}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{2\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - \frac{2\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}\ \frac{R_{ext}^{\ 2}}{2}$$

$$C_2 = \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - R_{ext}^{\ 2}\ \frac{\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}$$

Entonces:

$$V_0 = \frac{2\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}\ \frac{r}{2} + \frac{1}{r}\left(\omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2} - R_{ext}^{\ 2}\ \frac{\left(\omega_{int}\ R_{int}^{\ 2} + \omega_{ext}\ R_{ext}^{\ 2}\right)}{R_{ext}^{\ 2} - R_{int}^{\ 2}}\right)$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 129

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 07/20

2. De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^* = \int \rho \frac{V_\theta^{\,2}}{r} dr$$

Introduciendo la ecuación de V_θ en la integral, se tiene:

$$P^* = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho \, \frac{1}{r} \left(C_1^{\,2} \, \frac{r^2}{4} + \frac{C_2^{\,2}}{r^2} + C_1 \, C_2 \right) dr$$

y se halla:

$$P^* = \rho \left(C_1^{\,2} \, \frac{R_{ext}^{\,2} - R_{int}^{\,2}}{8} + \frac{C_2^{\,2}}{2} \, \frac{1}{R_{int}^{\,2} - R_{ext}^{\,2}} + C_1 \, C_2 \, \mathrm{Ln} \frac{R_{ext}}{R_{int}} \right)$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 130

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 08/20

3. Los esfuerzos cortantes en cilíndricas se pueden dar:

$$\tau_{r\theta} = r\ \mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right)\Bigg|_{r=R_{ext}}$$

puesto que

$$V_\theta = C_1\ \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\theta}{r}\right) = -\frac{C_2}{r}$$

$$\tau_{r\theta} = -\mu C_2$$

$$M_{R_{ext}} = \tau_{r\theta}\ 2\ \pi\ R_{ext}\ R_{ext}$$

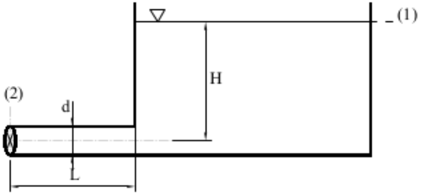
así, queda:

$$M_{R_{ext}} = -2\ \pi\ \mu\ C_2\ R_{ext}^2$$

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 130

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 09/20

Un tanque de grandes dimensiones se vacía mediante la tubería esquematizada en la figura. Se pide determinar la velocidad del agua a la salida del conducto en función del tiempo una vez que se abra la válvula, la cual está situada en el extremo del conducto más alejado del tanque. Se supondrá que el conducto descarga a la atmósfera.



Considérese que:

- la sección del tanque es muy superior a la sección del conducto.

- el flujo en el interior del conducto es uniforme.

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 141

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 10/20

Solución:

Partiendo de la ecuación de Navier Stokes en dirección X:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);$$

si el fluido es ideal $\mu = 0$;

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 141

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 09/20

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x \quad ; \qquad \text{sabiendo que} \qquad g_x=-\nabla(gz)$$

$$g_x=-g\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}-\rho g\frac{\partial z}{\partial x} \quad ;$$

multiplicando por dx:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx+u\,du\right)=-dP-\rho g dz \quad ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx=-\frac{dP}{\rho}-gdz-udu \quad ;$$

$$\int_1^2\frac{du}{dt}dx=-\left[\int_1^2\frac{dP}{\rho}+\int_1^2 gdz+\int_1^2 udu\right] \quad ;$$

$$\int_1^2\frac{du}{dt}dx=\frac{P_1-P_2}{\rho}+g(z_1-z_2)+\frac{u_1^2-u_2^2}{2} \quad ;$$

$$\frac{P_1}{\rho}+gz_1+\frac{u_1^2}{2}=\frac{P_2}{\rho}+gz_2+\frac{u_2^2}{2}+\int_1^2\frac{du}{dt}dx \quad ;$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 142

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 09/20

Como el depósito es muy grande, sólo aparecerá variación de velocidad en dirección x:

$$\int_1^2 \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_x}{dt} dx$$

$$\int_0^L \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_2}{dt} dx = L\frac{du_2}{dt}$$

Trabajando con presiones relativas $P_1 \equiv P_2 \equiv 0$ y asumiendo $v_1 \equiv 0$:

$$gz_1 = gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + L\frac{du_2}{dt}$$

$$g(z_1 - z_2) - \frac{u_2^2}{2} = L\frac{du_2}{dt} \ ;$$

$$\frac{2gH - u_2^2}{2} = L\frac{du_2}{dt} \ ;$$

$\frac{dt}{2L} = \left(2gH - u_2^2\right)^{-1} du_2$; solucionando a parte la segunda parte de la ecuación:

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 142

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 10/20

$$\int_0^{v_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} = \int_0^{v_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2}\,\frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{1-\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)^2}\,\frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\,\mathrm{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^{t} \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}}\,\mathrm{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) \quad ;$$

$$\int_0^{t} \sqrt{2gH}\,\frac{dt}{2L} = \mathrm{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) \quad ;$$

$$\mathrm{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right) = \frac{u_2}{\sqrt{2gH}} \quad ;$$

$$u_2 = \sqrt{2gH}\cdot \mathrm{tgh}\left(\sqrt{2gH}\,\frac{t}{2L}\right)$$

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 143

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 11/20

Problema 05:

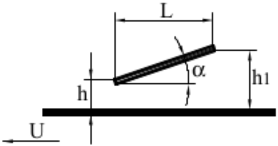
Sea un patín deslizante (patín de Michael) que se desplaza a lo largo de una placa plana. La distancia mínima entre placa y patín debe ser de h = 0,15 mm y su inclinación se ha estipulado en α = 0,2°, su longitud es de L = 0,05 m. El patín debe soportar 850 N. El fluido entre patín y placa es aceite SAE 10 cuya viscosidad a 20° es $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{Kg}{m\,s}$.

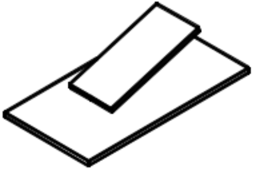
Si se desea que la velocidad de desplazamiento del patín sea de 80 m / s. Halle:

1. La profundidad que deberá tener dicho patín.

2. La fuerza de arrastre necesaria para desplazar dicho patín.

3. ¿Está dicho patín optimizado?¿Por qué?





Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 149

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 12/20

Solución:

1. Se establece la relación:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_1 - h}{L} = \frac{\Delta h}{L}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 149

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 13/20

$$\Delta h = 0{,}05\ \mathrm{tg}(0{,}2) = 0{,}00032\ \mathrm{m}$$

La relación de alturas es: $K = \dfrac{0{,}00032}{0{,}00015} = 2{,}13$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad y en forma paramétrica viene dada por la ecuación (parámetro K).

$$L = \frac{1}{h_1^{\,2}} \frac{6\mu U L^2}{(K-1)^2}\left[\ln(K) - \frac{2(K-1)}{K+1}\right]$$

$$L = \frac{1}{0{,}00015^2} \frac{6 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot U \cdot 0{,}05^2}{(2{,}13-1)^2}\left[\ln(2{,}13) - \frac{2(2{,}13-1)}{2{,}13+1}\right]$$

$$L = 18{,}65 \cdot U\left[\frac{N}{m}\right]$$

$$L = 583{,}03 \cdot 80 = 1.492{,}12\left[\frac{N}{m}\right]$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 150

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 14/20

Si el patín ha de soportar un total de 8500 N, la profundidad del mismo será:

$$\frac{850}{1.492,12} = 0,5696 \text{ m}$$

2. La fuerza de arrastre en forma paramétrica viene dada por:

$$D = \frac{2\mu U L}{(K-1)h_1}\left[2\ln(K) - \frac{3(K-1)}{K+1}\right]$$

$$D = \frac{2 \cdot 29\ 10^{-3} \cdot 80 \cdot 0,05}{(2,13-1)\cdot 0,00015}\left[2\ln(2,13) - \frac{3(2,13-1)}{2,13+1}\right]$$

$$D = 587,09\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Continúa...

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 150

PROBLEMAS RESUELTOS: Flujo con viscosidad dominante - 15/20

Teniendo en cuenta la profundidad del patín, se obtiene un fuerza de arrastre de:

$$D_{total} = 587{,}09 \cdot 0{,}1822 = 106{,}96 \text{ N}$$

3. Un patín se considera optimizado cuando la fuerza de sustentación respecto al parámetro $K = \frac{h_1}{h}$ es máxima; si se deriva $\frac{dL}{dK} = 0$, se obtendrá el valor de K óptimo, que es de $\boxed{K = 2{,}2}$

Para este problema se tiene que $\boxed{K = 2{,}13}$, con lo cual se establece que el patín de Michael no está optimizado, aunque no está lejos de estarlo.

Mecánica de fluidos - Problemas resueltos por Josep Bergada Graño, pág. 150

Contenido

Referencias

- Fundamentos y Aplicaciones de Mecánica de Fluidos.
  Yunus Cengel y John Cimbala.
  Editorial McGraw-Hill (2006)
- Mecánica de Fluidos - Problemas resueltos.
  Josep M. Bergadà Graño.
  Editorial de la Universidad Politècnica de Catalunya (2006)
- Biofluid Mechanics Applications.
  Ali Ostadfar.
  Editorial Elsevier (2016)
- Biofluid Mechanics
  David A. Rubenstein.
  Editorial Elservier (2015)

Referencias

Introducción a la Dinámica de Fluidos.
Yuri N. Skiba.
Editorial de la Universidad Nacional Autónoma de México (2008)

Applied Biofluid Mechanics.
Lee Waite and Jerry Fine.
Editorial Mc Graw Hill (2007)