

Ecuación de Bouc-Wen

$$\dot{z} = \frac{k}{f_y} \dot{u} \left[1 - |z|^n \left(\beta \times \operatorname{sgn}(\dot{u} z) + \gamma \right) \right]$$

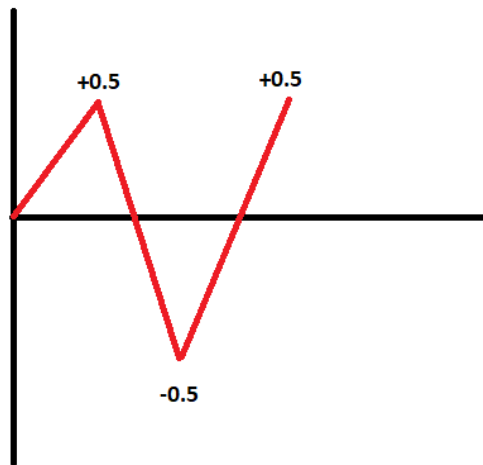
Datos:

$$f_y = 25 \quad \beta = 0.90$$

$$k = 8.5 \quad \gamma = 0.10$$

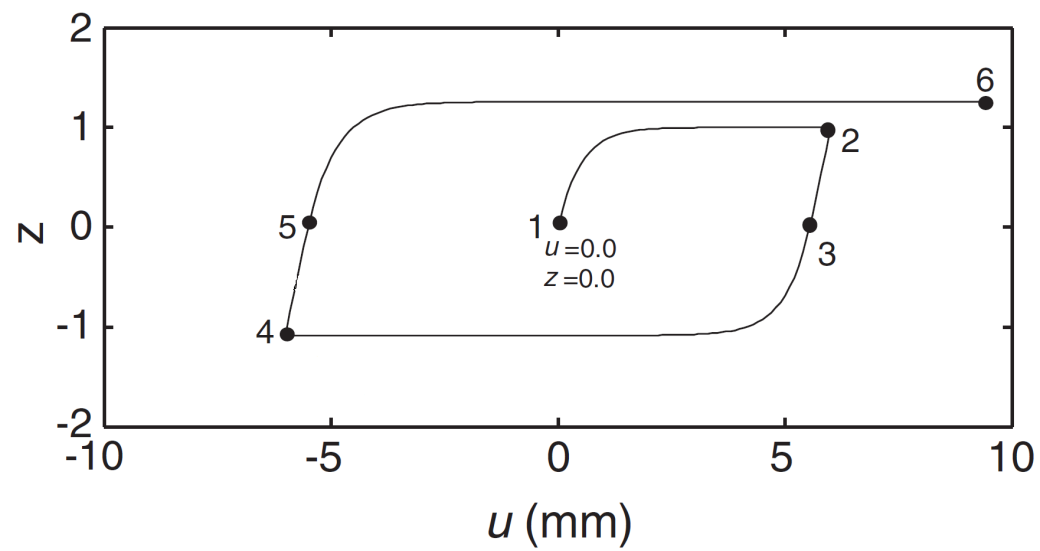
$$p = 0.017 \quad n = 1$$

Desplazamientos (u):



Reemplazando los datos tenemos:

$$\dot{z} = 0.34 \dot{u} \left[1 - |z|^n \left(0.90 \times \operatorname{sgn}(\dot{u} z) + 0.10 \right) \right]$$



CASO 01 (de 1@2): $z > 0$ y $\dot{u} > 0$

Condiciones iniciales $z(0) = 0$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - z(0.90 \times 1 + 0.10)]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - z]$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$z(u) = 1 - e^{\frac{-17u}{50}}$$

El punto 2 es +0.5, por lo tanto, evaluamos con ese valor:

$$z(0.5) = 1 - e^{\frac{-17(0.5)}{50}} = 0.1563$$

Esta solución reemplazar en la siguiente formula:

$$F(u) = pku + (1 - p)f_y \times z$$

CASO 02 (de 2@3): $z > 0$ y $\dot{u} < 0$

Condiciones iniciales $z(0.5) = 0.1563$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - |z|^n (0.90 \times \text{sgn}(-1 \times +1) + 0.10)]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - |z| (0.90 \times \text{sgn}(-1) + 0.10)]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - z(0.90 \times (-1) + 0.10)]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 + 0.80z]$$

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones iniciales:

$$z(u) = 1.2275 \times e^{\frac{34u}{125}} - \frac{5}{4}$$

Calculamos el valor de u cuando $z = 0$

$$1.2275 \times e^{\frac{34u}{125}} - \frac{5}{4} = 0 \quad u = 0.0668$$

Por lo tanto, el tramo de 2@3 va de [0.5@0.0668](#)

CASO 03 (de 3@4): $z < 0$ y $\dot{u} < 0$ donde u va hasta -0.5

Condiciones iniciales $z(0.0668) = 0$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} \left[1 - |z| \left(0.90 \times \text{sgn}(-1 \times -1) + 0.10 \right) \right]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} \left[1 - (-z)(0.90 + 0.10) \right]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 + z]$$

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones iniciales:

$$z(u) = 0.9776 \times e^{\frac{17u}{50}} - 1$$

Calculamos el valor de z cuando $u = -0.5$

$$z(-0.5) = 0.9776 \times e^{\frac{17(-0.5)}{50}} - 1 = -0.1752$$

CASO 04 (de 4@5): $z < 0$ y $\dot{u} > 0$, va hasta $z = 0$

Condiciones iniciales $z(-0.5) = -0.1752$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} \left[1 - |z| \left(0.90 \times \text{sgn}(-1 \times +1) + 0.10 \right) \right]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} \left[1 - (-z)(-0.90 + 0.10) \right]$$

$$\dot{z} = 0.34\dot{u} [1 - 0.80z]$$

Resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones iniciales:

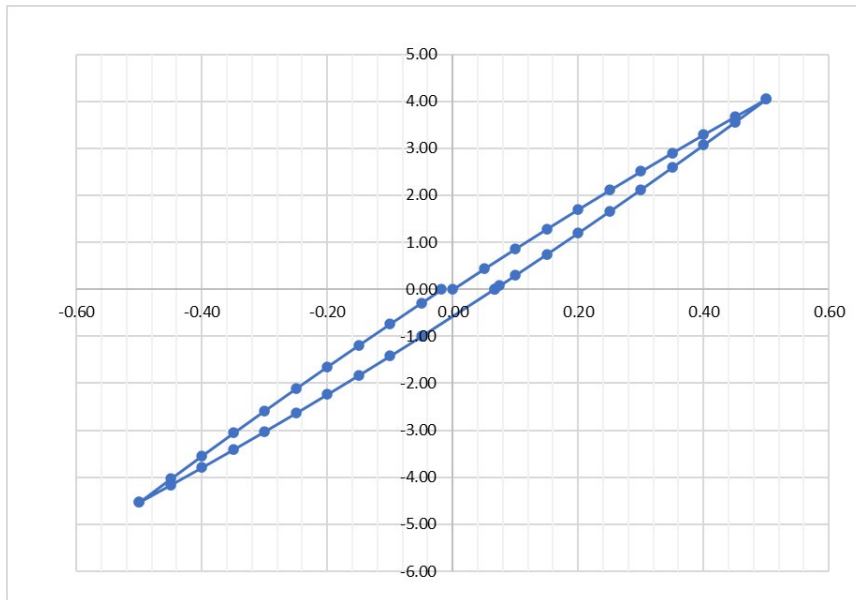
$$z(u) = \frac{5}{4} - 1.2440 \times e^{\frac{-34u}{125}}$$

como en el punto 5, $z(u) = 0$ debemos calcular el valor de u en ese punto:

$$\frac{5}{4} - 1.2440 \times e^{\frac{-34u}{125}} = 0 \quad u = -0.01768$$

Estos 4 casos completan un ciclo, estos ciclos se repiten n veces.

u	z	F	
0.00	0.0000	0.0000	C A S O 1
0.05	0.0169	0.4358	
0.10	0.0334	0.8644	
0.15	0.0497	1.2858	
0.20	0.0657	1.7003	
0.25	0.0815	2.1080	
0.30	0.0970	2.5088	
0.35	0.1122	2.9031	
0.40	0.1272	3.2908	
0.45	0.1419	3.6721	
0.50	0.1563	4.0471	C A S O 2
0.50	0.1563	4.047	
0.45	0.1373	3.557	
0.40	0.1186	3.073	
0.35	0.1001	2.596	
0.30	0.0819	2.125	
0.25	0.0639	1.660	
0.20	0.0461	1.202	
0.15	0.0286	0.749	
0.10	0.0113	0.303	
0.075	0.0028	0.082	
0.0668	0.0000	0.010	
0.0668	0.0001	0.011	C A S O 3
-0.05	-0.0389	-0.996	
-0.10	-0.0551	-1.415	
-0.15	-0.0710	-1.827	
-0.20	-0.0867	-2.232	
-0.25	-0.1021	-2.631	
-0.30	-0.1172	-3.023	
-0.35	-0.1321	-3.409	
-0.40	-0.1467	-3.788	
-0.45	-0.1611	-4.161	
-0.50	-0.1752	-4.528	C A S O 4
-0.50	-0.1752	-4.527	
-0.45	-0.1560	-4.031	
-0.40	-0.1370	-3.541	
-0.35	-0.1182	-3.057	
-0.30	-0.0998	-2.580	
-0.25	-0.0815	-2.109	
-0.20	-0.0635	-1.645	
-0.15	-0.0458	-1.186	
-0.10	-0.0283	-0.734	
-0.05	-0.0110	-0.288	
-0.01768	0.0000	-0.002	



CONCLUSIÓN:

El programa debe recibir como entrada los desplazamientos u :

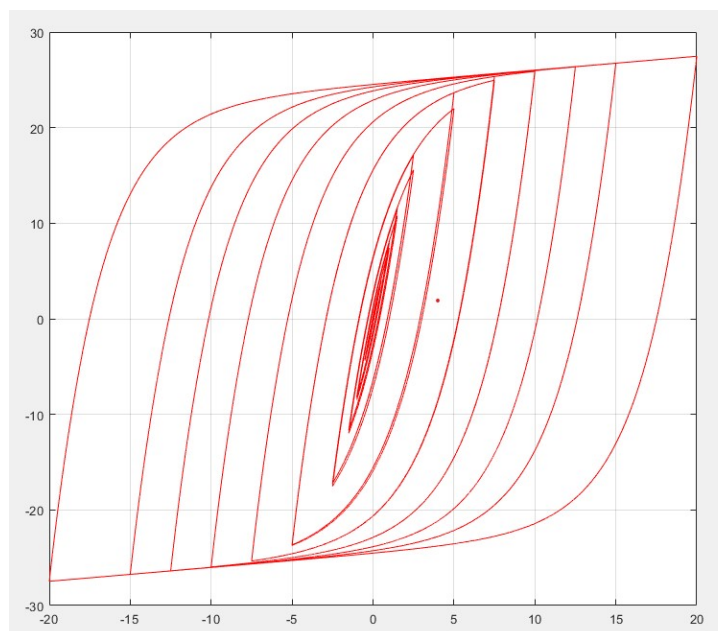
[+0.5 -0.5 +0.5 n]

Y como salida debe arrojar los valores de la tabla.

Como ejemplo si ingresamos los siguientes desplazamientos:

[0.5 -0.5 0.5 -0.5 0.5 -0.5 1 -1 1 -1 1 -1 1.5 -1.5 1.5 -1.5 1.5 -1.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 2.5 -2.5 5 -5 5 -5
5 -5 7.5 -7.5 7.5 -7.5 7.5 -7.5 10 -10 10 -10 10 -10 12.5 -12.5 12.5 -12.5 12.5 -12.5 15 -15 15 -15
15 -15 20 -20 20 -20 20 -20]

Tendríamos unos valores de salida para graficar lo siguiente:



Solución analítica de la Ecuación Diferencial

$$\dot{z} = \frac{k}{f_y} \dot{u} \left[1 - |z|^n \left(\beta \times \operatorname{sgn}(\dot{u} z) + \gamma \right) \right]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{k}{f_y} \left[1 - |z|^n \left(\beta \times \operatorname{sgn}(\dot{u} z) + \gamma \right) \right] \text{ simplificamos } dt$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{k}{f_y} \left[1 - |z|^n \left(\beta \times \operatorname{sgn}(\dot{u} z) + \gamma \right) \right]$$

Ahora reemplazamos valores

$$\frac{dz}{du} = \frac{34}{100} [1 - z(0.9 + 1)]$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{17}{50} - \frac{17}{50} z \quad \text{es una ecuación LINEAL NO HOMOGÉNEA}$$

$$\frac{dz}{du} + \frac{17}{50} z = \frac{17}{50} \quad (1)$$

Tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$P(x) = \frac{17}{50}$$

Con eso calculamos el factor integrante:

$$e^{\int P(x) dx}$$

$$e^{\int P(u) du} = e^{\int \frac{17}{50} du} \quad \text{integrando} \quad e^{\frac{17}{50} u}$$

Multiplicamos con el factor integrante la ecuación (1)

$$\frac{dz}{du} \left(e^{\frac{17}{50} u} \right) + \frac{17}{50} z \left(e^{\frac{17}{50} u} \right) = \frac{17}{50} \left(e^{\frac{17}{50} u} \right)$$

El cual siempre va tener esta forma:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x) dx} y \right] = e^{\int P(x) dx} f(x)$$

$$\frac{d}{du} \left(e^{\frac{17}{50} u} z \right) = \left(e^{\frac{17}{50} u} \right) \frac{17}{50}$$

Integrando ambas partes:

$$\int \frac{d}{du} \left(e^{\frac{17}{50}u} z \right) = \int \left(e^{\frac{17}{50}u} \right) \frac{17}{50}$$

$$ze^{\frac{17}{50}u} = \frac{17}{50} \times \frac{50}{17} \left(e^{\frac{17}{50}u} \right) + c$$

$$z = 1 + ce^{-\frac{17}{50}u}$$

Condiciones iniciales $z(0) = 0$

$$c = -1$$

$$z(u) = 1 - e^{-\frac{17}{50}u} \quad \text{rpta}$$